التكامل على المجال - التكامل المحدد (تطبيقات)

* تفاضل تابع وخواصه: لنعلم أنه لتفاضل تابع ما يكفي حساب مشتقه هذا التابع ثم نضرب مشتقه بمتغيره (أو بمتحوله)، ولذا فجميع خواص التفاضل تتبع من خواص المشتقة مباشرة، وفيما يلي بعض هذه الخواص مع فرض أن u و v قابلتان للتفاضل (مع أن: $dy = y'dx$ ← تفاضل التابع ← مشتقه ← تفاضل المتغير المستقل)

و $y = f(x)$ تابع ما) عندئذٍ:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$

2) $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$

3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$; $v \neq 0$

مثال: 1) أوجد تفاضل التابع: $y = f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 9$

الحل: إنه تفاضل تابع معطى بالعلاقة.

ولذا $\boxed{dy = y'dx}$ or $\boxed{dy = f'(x)\,dx}$

$dy = (3x^2 + 6x + 1)\,dx$

مثال آخر: أفرض أنه $u = x^3$ ، $v = e^{2x}$ ولنوجد:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(\frac{x^3}{e^{2x}}\right) = \frac{3x^2 e^{2x}\,dx - 2x^3 e^{2x}\,dx}{e^{4x}}$$

ملاحظات لابد منها:

-) لتفاضل تطبيقات عديدة لما هو بالغ للمشتقات ولذا سوف نتوقف عندها.
-) لنذكرنا بالتفاضل الثاني أو بالتفاضل من المرتبة الثانية والذي هو تفاضل التفاضل الأول:

$\boxed{d^2y = y''\,dx^2}$ or $\boxed{d^2y = f''(x)\,dx^2}$

) إذا كان التابع قابلاً للتفاضل في نقطة، فإنه يكون مستمراً عندها. بينما العكس ليس صحيحاً بالضرورة.

Scanned by CamScanner

* التابع الأصلي والتكامل غير المحدد: لقد رأينا قبل قليل أنه تفاضل تابع $y=f(x)$ هو:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \text{أي} \quad \boxed{dy = y' \cdot dx} \quad \text{or} \quad \boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$$

والآن سوف نتعرض لمسألة أخرى مماثلة وهي عكس إيجاد التكامل غير المحدد.

تعريف التابع الأصلي لتابع (1): ليكن التابع $y=f(x)$ نقول عن التابع $F(x)$ أنه تابع أصلي لتابع $f(x)$ على فترة $I \subset \mathbb{R}$ إذا كان: $F'(x) = f(x)$ من أجل كل $x \in I$

أي:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad ; \quad \forall x \in I$$

مثال: إن $F(x) = y = x^2$ تابع أصلي للتابع: $f(x) = 2x$ لأن $F'(x) = 2x$ على $I = \mathbb{R}$.

وكذلك: إن التابع: $F(x) = x^2 + c$ تابع أصلي لـ $f(x) = 2x$ على $\mathbb{R}$

مبرهنة (1): إذا كان كل من $F(x)$ و $G(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ فإن:

$$G(x) = F(x) + c \Rightarrow G(x) - F(x) = c$$

أي الفرق بينهما يساوي ثابت.

تعريف (2): نسمي مجموعة التوابع الأصلية (العائلة) لتابع ما على فترة I بالتكامل غير المحدد لهذا التابع المفروض (المعطى).

أي أنه إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ فإن التكامل غير المحدد لـ $f(x)$ هو $F(x)+c$، ونرمز للتكامل غير المحدد لـ $f(x)$ بالرمز:

$$\int f(x) \cdot dx = \underbrace{F(x) + c}_{\text{التابع الأصلي}}$$

(التكامل، المتحول التكاملي)

Scanned by CamScanner

مثال:

1) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

ملاحظة: إن

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln x & ; \quad x > 0 \\ \ln(-x) & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

و إن

$$(\ln|x|)' = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x > 0 \\ \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

المشتقة الأولى

-) إذاً بالنتيجة: التكامل غير المحدد هو مجموعة من التوابع $y = F(x) + C$ وعملية إيجاد التابع الأصلي تسمى التكامل غير المحدد وهي عكس عملية الاشتقاق أو التفاضل.

مبرهنة (وجود): إذا كان التابع f مستمراً في فترة ما، عندئذٍ يكون هذا التابع قابلاً للتكامل (أو للمكاملة) في هذه الفترة. (إذا أعطيت إيجاد التابع الأصلي أي التكامل غير المحدد لـ f في هذه الفترة)

*) خواص التكامل غير المحدد: إذا كان f و g تابعين قابلين للمكاملة (أو للتكامل) على فترة ما، فإن:

1) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$

أو

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$$

أي مشتقة التكامل غير المحدد تساوي التابع المستكمل f وتفاضل التكامل غير المحدد يساوي التابع المستكمل.

2) $\int d(F(x)) = F(x) + C$

أي التكامل غير المحدد لتفاضل تابع ما يساوي هذا التابع مضافاً إليه ثابت C.

Scanned by CamScanner

3) $\int [a f(x) + b g(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$

حيث a, b ثوابت تنتمي للصفر.

* بعض التكاملات الشهيرة، سنذكر بعضها بدون إثبات (نتائج مباشرة من قاعدة التفاضل):

1) $\int 0\,dx = c$ ، 2) $\int dx = x + c$ ، 3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ $(n \neq -1)$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ ، 5) $\int e^x dx = e^x + c$ ، 6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ $(a \neq 1, a > 0)$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$ ، 8) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ ، 9) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$ ، 11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$

12) $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + c$

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

$I_1 = \int (4x^3 - 2\cos x + 5\sqrt{x})\,dx$ ، $I_3 = \int \left(\frac{1-x}{x} + 3^x\right) dx$

$I_2 = \int \left(2\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ ، $I_4 = \int \left(\sqrt{5x^3} + \frac{1}{\sqrt{5x^3}} + e^{-2x}\right) dx$

الحل:

$I_1 = 4\int x^3 dx - 2\int \cos x\,dx + 5\int \sqrt{x}\,dx$

$= \frac{4}{4}x^4 - 2\sin x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$= x^4 - 2\sin x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$

$I_2 = \int \left(4x + 12 + \frac{9}{x}\right) dx = 2x^2 + 12x + 9\ln|x| + c$

ملاحظة: كتبت الثابت c مرة واحدة إذا كان لدينا مجموع جبري لعدة تكاملات.

Scanned by CamScanner

$$I_3 = \int \left(\frac{1}{x} - 1 + 3^x\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int dx + \int 3^x dx = \ln|x| - x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$I_4 = \sqrt{5}\int x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{5}} \int x^{-\frac{3}{2}} dx + \int e^{-2x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

- يمكننا إضافة بعض القواعد والتي نشرحها سوية خلال (تابعة رشاد علي) ؛ إذا كان $u = u(x)$ كدالة غير ثابتة،

$$R_1) \quad \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{3x^2}{x^3 - 1} dx = \ln|x^3 - 1| + C$$

$$R_2) \quad \int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = 2\sqrt{u(x)} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int \frac{6x\, dx}{\sqrt{x^2+1}} = 3\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = 6\sqrt{x^2+1} + C$$

$$R_3) \quad \int u^n(x)\, u'(x)\, dx = \frac{u^{n+1}(x)}{n+1} + C \xrightarrow{\text{مثال}} \int (x^2+x)^9 (2x+1) dx = \frac{(x^2+x)^{10}}{10} + C$$

مثال آخر،

1) $$I = \int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C$$

2) $$I = \int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+1} = \ln|x| + \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

في هذا المثال سنعتمد على تقريق الكسر؛

توحيد المقامات $\Rightarrow \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ ؛

بالتعويض؛ $A = 1,\ B = -1$

X) يمكننا الوقوف عند أمثلة حول الكسر والتي لا نحتاج إلى تقريق الكسور مثل المثال السابق (مع فائدة الأمثلة).

$$R_4) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C, \quad R_5) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot\tan x + C$$

$$R_6) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C \quad ; \ a \neq 0$$

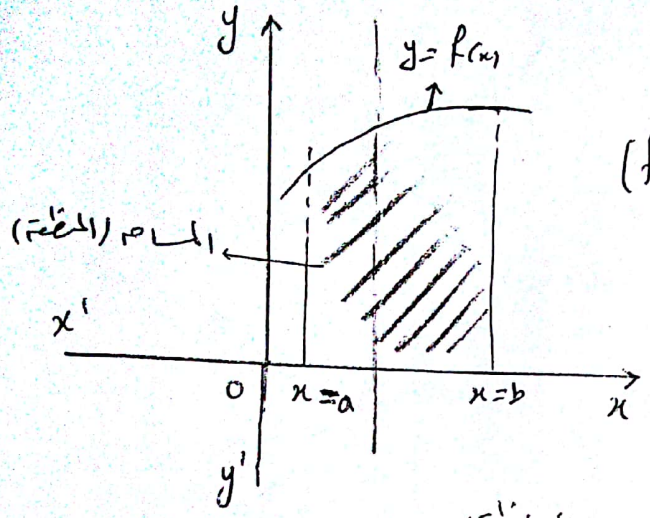
$$R_7) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

Scanned by CamScanner

1) التكامل المحدد - خواصه - تطبيقاته :

أ- التكامل المحدد : ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ معرف ومحدود على الفترة $[a,b]$ $(a<b)$

نريد حساب مساحة المنطقة المحصورة (أو المحددة) بين الأعلى بيانياً (الخط البياني) التابع المفروض $y=f(x)$ الموجب أي يوجد محور لبيانه $(f(x)\geq 0)$ وبين الأدنى بالمحور السيني $x'x$ وبين الجانبيين بالمستقيمين $x=a, x=b$ لماذا السطوح بيانياً.



لنفرض أننا حسبنا المجموع التكاملي الآتي (لعدد تجزئة المساحة السابقة) (أو المنطقة) البياني

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \quad ; \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k],\ k=1,2,\dots,n$$

حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ طول الفترة a, b على الفترة $[a,b]$.

ولنأخذ نهاية الطرف الثاني في المجموع السابق عندما $n \to \infty$ (n عدد الحالات الجزئية)، وإذا كانت النهاية موجودة ومحددة وكانت هذه النهاية مستقلة عن طريقة تجزئة الفترة $[a,b]$ وعن اختيار النقط c_k، فإن هذه النهاية تسمى تكاملاً محدداً للتابع $y=f(x)$ على $[a,b]$ ونرمز له بـ:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k \quad , \dots \quad (2)$$

حيث هذه الحالة التابع f يسمى قابلاً للتكامل (أو كولاً) على $[a,b]$ (أو على $x=a$ إلى $x=b$) وهو تكامل محدود.

ب- نتيجة: إذا كان التابع $y=f(x)$ مستمراً وموجباً في الفترة $[a,b]$، فإن التكامل المحدد للتابع f في هذه الفترة يساوي مساحة السطح المحصور (أو المنطقة المحصورة) بين منحنى التابع f والمحور السيني $x'x$ والمستقيمين $x=a$ و $x=b$ (طرفي السطح السابق).

Scanned by CamScanner

ملاحظة: (1) التكامل المحدد يسمى التكامل ذات الأربع عناصر، ونستعامل مع التوابع المستمرة في التكاملات (لكن التكاملات موجودة أيضاً لو لم تكن)

والتي تمثل المساحة المطلوبة حيث،

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(الرسم المطلوب، $x=a$ حدا التكامل، التابع التكاملي، تفاضل المتغير)

(2) التكامل المحدد هو مجموع تقريبي لتابع ما عددياً.

*) خواص التكامل المحدد: عرفنا التكامل المحدد من أجل $a<b$

1 أ) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, 2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $a>b$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; $a<c<b$

4) $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$

5) $m \le f(x) \le M$; $x \in [a,b]$ إذا كان:

نجد:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

*) قواعد حساب التكامل المحدد (أو طرائق حساب):

القاعدة الأولى (صيغة نيوتن - ليبنتز): وهي تتبع تسمية الرتبة الأساسية في التكامل وتستخدم في حساب التكاملات المحدودة

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a) \quad ; \quad F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in [a,b]$$

(التابع الأصلي لـ f)

أي نقوم أولاً بإيجاد التابع الأصلي للتابع التكاملي ثم نحسب قيمته عند طرفي التكامل b, a.

مثال: احسب التكاملات الآتية:

1) $I_1 = \int_0^1 (6x^2 + 3x)\,dx$, 2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

$\int_a^b f(x)\,dx$

Scanned by CamScanner

الحل: لنوحد جميع المتغيرات الأصلية للتكامل ثم نحسب:

1) $I_1 = \left[2x^3 + \frac{3}{2}x^2\right|_0^1 = (2+\frac{3}{2}) - 0 = \frac{7}{2}$

2) $I_2 = -\left[\cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$

3) $I_3 = \left[\arctan x\right|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

-) القاعدة الثانية (طريقة تبديل المتغير): تستخدم هذه الطريقة لتسهيل حساب التكاملات وشرحها من خلال الأمثلة التالية:

مثال: 1) $I_1 = \int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ، 2) $I_2 = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$ ، 3) $I_3 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

الحل:

1) في I_1 نفرض أن: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

ونحسب حدود التكامل الجديدة من خلال هذا الفرض:

$x = 0 \Rightarrow t = \sqrt{x} = 0$

$x = 9 \Rightarrow t = \sqrt{x} = 3$

بالتعويض:

$$I_1 = \int_0^3 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = 2\left[t - \ln|1+t|\right|_0^3 = 6 - 2\ln 4$$

2) في I_2 نفرض أن:

$\ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt$

حدود التكامل:

$x = 1 \Rightarrow t = 0$

$x = e \Rightarrow t = 1$

$$I_2 = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

سوف نجد

3) في I_3 نفرض أن:

$\therefore x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t\,dt$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

Scanned by CamScanner

بالتعويض في عبارة I_3 نجد،

$$I_3 = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

-) القاعدة الثالثة < طريقة التكامل بالتجزئة > : تستخدم هذه الطريقة عندما يكون التابع المكامل على شكل جداء تابعين (تابع صحيح وتابع ...).

إذا كان $u = u(x)$ و $v = v(x)$ تابعين قابلين للاشتقاق على $[a,b]$، فإن

تعطى العلاقة

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

تسمى دستور التكامل بالتجزئة للتكامل المحدد.

مثال:

1) $I_1 = \int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$ ، 2) $I_2 = \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$ ، 3) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x\,dx$

الحل:

1) في التكامل I_1 نفرض أن:

$u = \ln x \xrightarrow{\text{تفاضل}} du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \xrightarrow{\text{تكامل}} v = x$

نعوض في I_1 لنجد (وهذا لتفريد دستور التكامل) مرة أخرى دستور التكامل بالتجزئة،

$$I_1 = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\,\frac{dx}{x} = [x\ln x - x]_1^e = 1$$

2) في التكامل I_2 نضع:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

نعوض في I_2 ما تبقى من دستور لنجد،

Scanned by CamScanner

$$I_2 = \left[-x\,e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = \left[-e^{-1} - e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1}+1 = \frac{e-2}{2}$$

3) في هذا التكامل نفرض أن:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$$

نوظف I_3 في صيغة الاستقراء:

$$I_3 = \left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = \left(\frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}\right) + \left[\cos\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

مثال آخر: احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{-1}^{1} |x|\,dx =$$

الحل: بما أن التابع المكامل هو تابع زوجي فإن:

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx \quad \left[x^2\right]_0^1 = 1$$

ومن هنا نعمم

$$(*) \leftarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx}$$

إذا كان f تابعاً زوجياً على $[-a,a]$.

مثال آخر: احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

الحل: هنا التابع $f(x) = \sin x$ فردي ولذا فإن:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$$

ومن هنا نعمم:

$$(*) \leftarrow \boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

حيث f تابع فردي على $[-a,a]$.

Scanned by CamScanner