المبادئ الأساسية في الميكانيك

ينقسم علم الميكانيك الهندسي إلى ثلاثة أقسام:

١-علم السكون "الستاتيك"وهو العلم الذي يهتم بدراسة الأجسام التي تحافظ على حالتها الحركية "ساكنة أو متحركة بحركة مستقيمة منتظمة"

٢-علم الحركة"الكنماتيك"ويدرس حركة الأجسام وبغض النظر عن ثبات الحركة.

٣-علم التحريك"الديناميك"وهو العلم الذي يربط حركة الجسم مع معاملاتها.

وهذا العلم يدرس جميع الأجسام"الصلبة والسائلة والغازية".

المقادير السلمية :

هي المقادير التي يكفي التعبير عنها بقيمتها العددية متبوعة بواحدة قياسها:

مثل درجة الحرارة–الطول–المساحة-الحجم.

المقادير الإتجاهية :

وهي المقادير التي نحتاج للتعبير عنها بالإضافة للقيمة العددية لها إلى معرفة حاملها و نقطة تأثيرها و اتجاهها مثل : الوزن – القوة – العزم – السرعة – التسارع .

المتجهات الواحدية :

هو الشعاع المحمول على المحور الموجه وله نفس الإتجاه و طوله يساوي واحدة الطول و يرمز له $\overrightarrow{e_\Delta}$ و يمكن التعبير عن أي شعاع بدلالة المتجه الواحدي كالتالي :

$$\overrightarrow{e_\Delta} = \frac{\text{الشعاع}\ \vec{A}}{\text{طويلة الشعاع}\ |A|}$$

و يرمز للمتجهات الواحدية في جملة الإحداثيات الديكارتية :

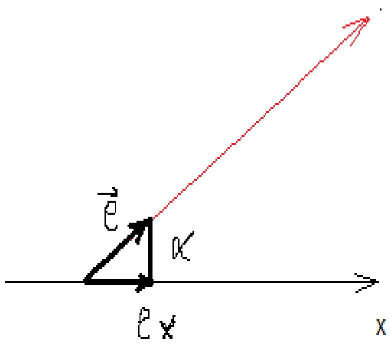
$\vec{\imath}$ الشعاع الواحدي على المحور OX .

$\vec{\jmath}$ الشعاع الواحدي على المحورOY .

$\vec{k}$ الشعاع الواحدي على المحورOZ .

وتكون الصيغة التحليلية للشعاع الواحدي :

$$\vec{e} = \cos \propto \vec{\imath} + \cos\beta\vec{\jmath} + \cos\gamma\vec{k}$$



حيث α الزاوية بين المتجه الواحدي للشعاع مع المحور X .

و β الزاوية بين المتجه الواحدي للشعاع مع المحورY .

و γ الزاوية بين المتجه الواحدي للشعاع مع المحورZ .

و مساقط الشعاع الواحدي $\vec{e}$ على المحاور الإحداثية :

$$\overrightarrow{e_x} = \cos \propto \qquad \vec{e}_{y=} \cos \beta \qquad \overrightarrow{e_z} = \cos \gamma$$

شعاع الموضع :

هوشعاع يبدأ من مبدأ الاحداثيات وينتهي في النقطة المطلوب تحديد شعاع الموقع لها.

مثال : أوجد شعاع الموضع للنقطة A(-1,4,2).

الحل :

احداثيات المبدأ:O(0,0,0)

$$\overrightarrow{OA} = (X_A - X_O)\vec{\imath} + (Y_A - Y_O)\vec{\jmath} + (Z_A - Z_O)\vec{k}$$

$$=(-1-0)\vec{\imath}+(4-0)\vec{\jmath}+(2-0)\vec{k}= -\vec{\imath}+4\vec{\jmath}+2\vec{k}$$

العمليات الأساسية على القوى

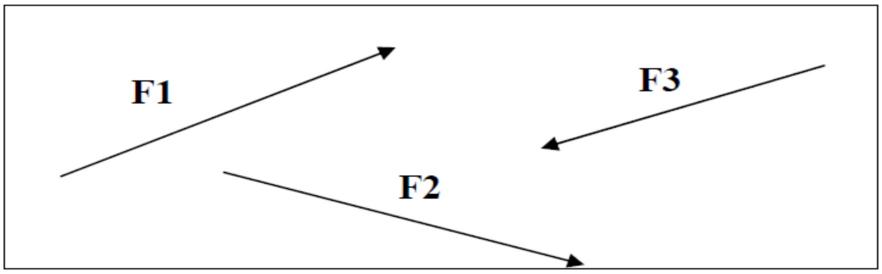
تعريف المتجه Vector

المتجه عبارة عن كمية معرفة بمقدار عددي واتجاه، مثال على المتجهات هي السرعة والازاحة والقوة ويمثل المتجه بخط مستقيم عليه سهم يدل على الاتجاه طوله مناسب لمقدار المتجه ، ويمكن تمثيل المتجه كما هو مبين في الشكل ١. الأمثلة على المتجهات هي: القوة ، السرعة ، الجاذبية ، الخ.

٢,١ أنواع المتجهات

١) المتجهات في مستوى و احد Coplanar Vectors

المتجهات التي هي في مستوى واحد



شكل ١

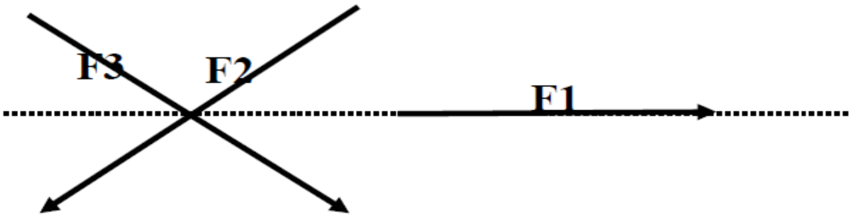
٢) متجهات على نفس الخط Colinear Vectors

وهي متجهات تعمل أو تأثر في نفس الخط كما هو مبين في الشكل رقم ٢.

شكل ٢

3) متجهات مقيدة في نفس نقطة التاثير Concurrent Vectors

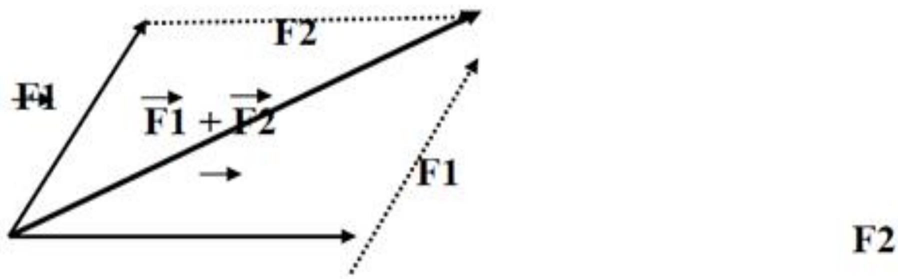
وهي متجهات لها خط التأثير يمر على نفس النقطة كما هو مبين في الشكل ٣.



شكل ٣

٣,١ جمع متجهين

يمكن جمع متجهين باستخدام قاعدة متوازي الأضلاع كما هو مبين في الشكل رقم ٤.



شكل ٤

من الناحية التحليلية فإن جمع متجهين يكون:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

أي أن جمع متجهين هو عملية تبديلية.

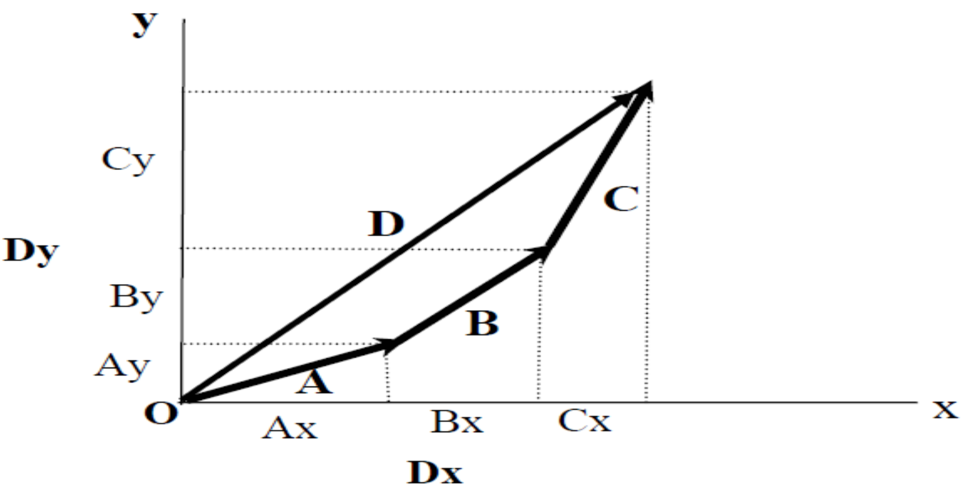
٥,١ إيجاد محصلة مجموعة من المتجهات في مستوى.

١ - الطريقة التحليلية

ليكن لدينا ثلاثة متجهات C, B,A (أنظر شكل رقم ٦) نريد حساب الجمع بالطريقة التحليلية كالتالي:

$$A = A\cos(\alpha 1) + A\sin(\alpha 1)$$
$$B = B\cos(\alpha 2) + B\sin(\alpha 2)$$
$$C = C\cos(\alpha 3) + C\sin(\alpha 3)$$

حيث أن $\alpha 1$ ، $\alpha 2$ ، $\alpha 3$ هي الزوايا بين المتجهات C, B, A والمحور الأفقي.



شكل ٦

ومن الشكل رقم ٦ فإن مسقط المحصلة D على المحور x والمحور y يساوي المجموع الجبري لمساقط المتجهات على نفس المحاور وهي كالتالي:

$$D_x = A.Cos(\alpha 1) + B.Cos(\alpha 2) + C.Cos(\alpha 3)$$
$$D_y = A.Sin(\alpha 1) + B.Sin(\alpha 2) + C.Sin(\alpha 3)$$

وبالتالي فإن المحصلة الاجمالية D تصبح :

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$
$$Tan(\alpha) = D_y / D_x$$
$$\alpha = Tan^{-1}(D_y / D_x)$$

حيث أن α هي الزاوية المحصورة بين محصلة المتجهات D والمحور الأفقي.

٦,١ تعريف القوة

ان دراسة سلوك المنشآت والتصميم الانشائي يعتمد على دراسة وتحليل القوى المؤثرة على المنشآت. ويمكن تمثيل القوة المؤثرة على المنشأ على شكل متجه vector له قيمة واتجاه معين ونقطة تأثير، وتقاس قيمة القوة بالكيلونيوتن kN أو النيوتن N. واتجاه القوة يمكن أن يكون عمودي مثل قوة الجاذبية، أو اتجاه أفقي مثل قوة الرياح أو الزلازل ، أو في اتجاه بزاوية.

وتنقسم أنواع القوى إلى نوعين: قوة استاتيكية (أو ساكنة) وقوة ديناميكية (متغيرة مع الزمن).

محصلة قوتين:

لنفترض أن لدينا قوة مقدارها F ذات اتجاه وقيمة بحيث تأثر في مستوى كما هو مبين في الشكل رقم ٧، فإننا يمكن تحليل هذه القوة إلى مركبتين: : مركبة أفقية Fx ومركبة عمودية Fy كما هو مبين في الشكل ٧، حيث أن α **هي** الزاوية بين القوة F والمحور الأفقي.

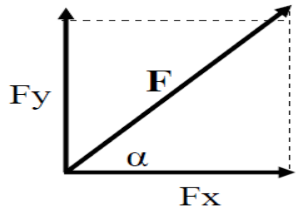
وبالتالي فإن المحصلة الاجمالية D تصبح :

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$

$$Tan(\alpha) = D_y / D_x$$

$$\alpha = Tan^{-1}(D_y / D_x)$$

حيث أن α هي الزاوية المحصورة بين محصلة المتجهات D والمحور الأفقي.



شكل ٧

إيجاد المركبة الأفقية والعمودية كالتالي:

$$F_x = FCos(\alpha)$$
$$F_y = FSin(\alpha)$$

وتصبح قيمة القوة المحصلة F كالتالي:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\alpha = Tan^{-1}(F_y / F_x)$$

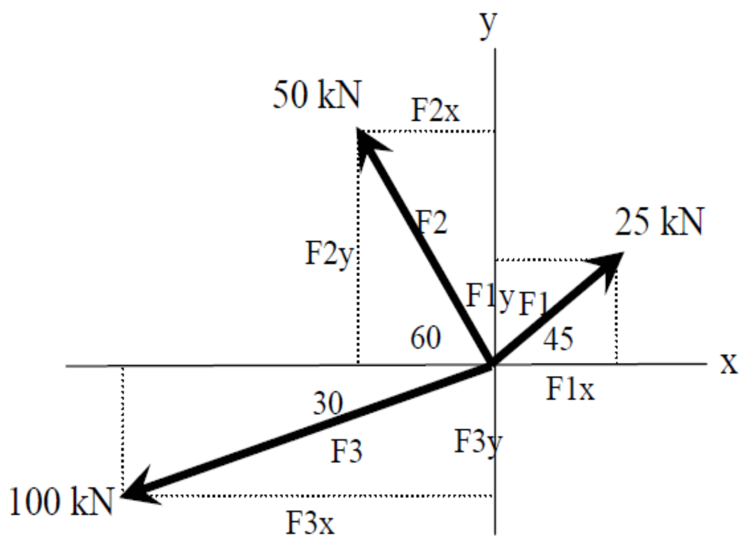
مثال ١:

أوجد محصلة القوى الثلاث المبينة في الشكل رقم ٨ بحيث :

F1 = 25 kN, F2 = 50 kN, F3 = 100 kN

الحل :

كما هو موضح في الشكل رقم ٨ نقوم بتحليل كل قوة إلى مركبتيها في اتجاه المحور x والمحور y. (مركبة أفقية ومركبة عمودية).



شكل ٨

$F1x = F1\cos 45 = 25\cos 45 = 17.68$ kN
$F1y = F1\sin 45 = 25\sin 45 = 25$ kN
$F2x = -\ 50\cos(60) = -25$ kN
$F2y = 50\sin(60) = 43.30$ kN
$F3x = 100\cos(30) = -86.60$
$F3y = 100\sin(30) = -50$ kN

يلاحظ أن قيمة القوى F2x, F3x, F3y هي بالسالب لأنها في الاتجاه المعاكس للاتجاه الموجب للمحاور.

$$Rx = F1x + F2x + F3x$$ **=17.68-25-86.6=-93.92 KN**

$$Ry = F1y + F2y + F3y$$ **=25+43.3-50=18.3 KN**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\alpha = Tan^{-1}\left(R_y / R_x\right)$$

وتصبح قيمة المحصلة R تساوي:

$$R = \sqrt[2]{(-93.920)^2 + (18.3)^2} = 95.69KN$$

$$\propto = \tan^{-1}\frac{18.3}{-93.92} = 6.6^{0}$$

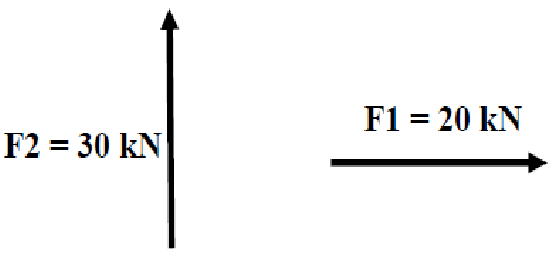
٧,١ إيجاد محصلة القوى باستعمال الطريقة البيانية Graphical Method

في الطريقة البيانية يتم رسم المتجهات على شكل أضلاع كما هو مبين في الشكل رقم ٦ باستخدام مقياس رسم مناسب ويكون الخط أو الضلع الذي يربط بين بداية المتجه الأول ونهاية المتجه الأخير هو المحصلة للمتجهات من ناحية المقدار والاتجاه.

مثال :

أوجد محصلة القوة الأفقية $F1 = 20\ kN$ و القوة العمودية $F2 = 30\ kN$ كما هو مبين بالشكل رقم ٩ باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

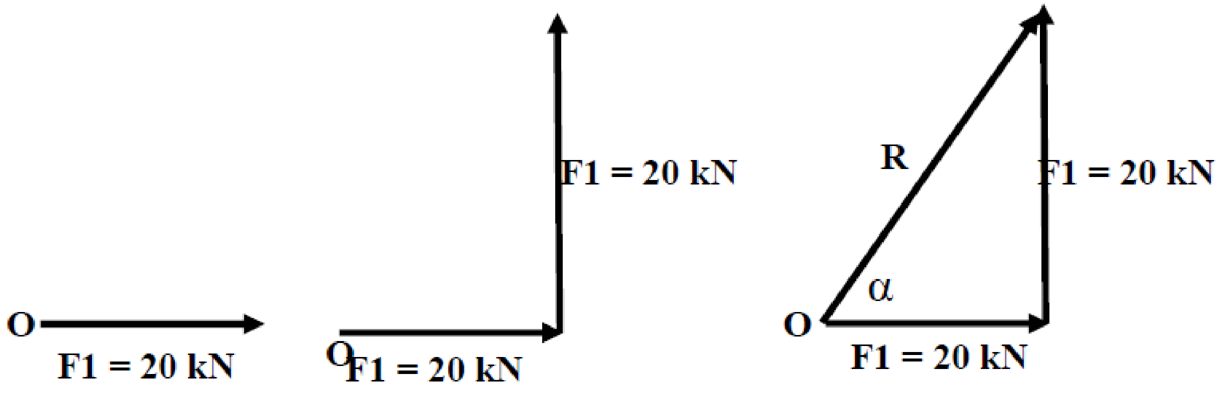


شكل ٩

لنستعمل مقياس رسم يساوي ١ سم يمثل 10 kN

من النقطة O نرسم خط أو متجه أفقي يمثل 20 kN ومن نهاية هذا المتجه نرسم متجه يساوي مقدار القوة 30 kN كما هو مبين في الشكل رقم ١٠. وتكون محصلة القوتين R هي وصل بداية المتجه الأول ونهاية المتجه الثاني لنحصل على المحصلة كما هو مبين في الشكل ١٠. مع ملاحظة استعمال نفس

مقياس الرسم المستعمل لرسم القوتين. وفي الأخير نقيس طول المتجه R الذي يعطينا قيمة محصلة القوتين، كذلك يمكن قياس الزاوية المحصورة بين المحصلة والمحور الأفقي باستعمال المنقلة.



شكل ١٠

ملاحظة هامة:

تعتبر الطريقة البيانية لإيجاد محصلة القوى بسيطة بالنسبة إذا كان عدد القوى قليل، ولكنها غير دقيقة في حالة إذا كان عدد القوى كبير بحيث يصبح من الصعب رسم عدد كبير من المتجهات والتي يمكن أن تؤدي إلى خطأ في إيجاد محصلة القوى.

٩،١ القوى المؤثرة في البعد الثالث

في الفقرات السابقة كانت القوى تؤثر في مستوى (البعد الثنائي)، ولكن في الواقع وفي أغلب الأحيان فإن القوى تكون مؤثرة في البعد الثالث (الفضاء). القوة في البعد الثالث لها ثلاث مركبات (Fx, Fy, Fz) حسب المحاور z, y, x بحيث يمكن حساب محصلة القوى كالتالي (أنظر الشكل رقم ١١):

$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z}$$

$$\vec{F_x} = \vec{F}\,\mathrm{Cos}(\alpha_x)$$
$$\vec{F_y} = \vec{F}\,\mathrm{Cos}(\alpha_y)$$
$$\vec{F_z} = \vec{F}\,\mathrm{Cos}(\alpha_z)$$

حيث أن:

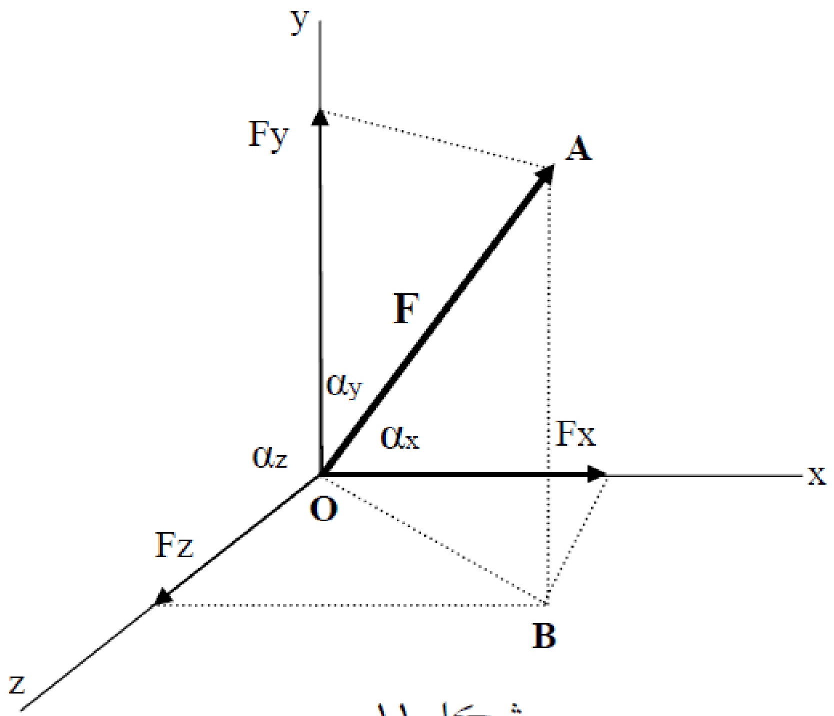
α_x هي الزاوية بين محصلة القوى والمحور x

α_y هي الزاوية بين محصلة القوى والمحور y

α_z هي الزاوية بين محصلة القوى والمحور z

وتصبح محصلة القوى تساوي:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$



شكل ١١

و تكون الصيغة التحليلية لأي شعاع :

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$

الجداء السلمي للمتجهات (الأشعة) :

يمكن ضرب متجهين A و B محصورين بزاوية α (أنظر شكل رقم ٥) والناتج عبارة عن كمية قياسية ويحسب كالتالي:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}| * |\vec{B}| \cos \propto$$

مع ملاحظة أن ناتج الضرب هو قيمة قياسية scalar وليست متجه vector.

و نكتب الصيغة التحليلية للجداء السلمي لشعاعين :

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{P} = P_x\vec{\imath} + P_y\vec{\jmath} + P_z\vec{k}$$

على الشكل التالي:

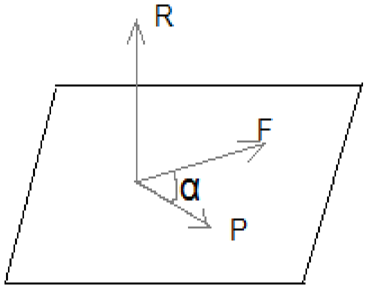
$$\overrightarrow{F * P} = F_X P_X + F_Y P_Y + F_Z P_Z$$

ملاحظة هامة : ويمكن حساب مسقط شعاع على محور موجه عن طريق الجداء السلمي للشعاع مع شعاع الواحدة للمحور الموجه لهذا الشعاع :

$$V_\Delta = \vec{V} * \overrightarrow{e_\Delta}$$

الجداء الإتجاهي:

و يرمز له ب (∧)و قيمته شعاعية Vector حتما.



$$\vec{R} = \vec{F} \wedge \vec{P}$$

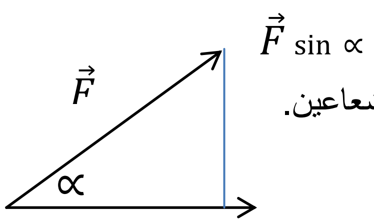
$$|\vec{R}| = |\vec{F}||\vec{P}| \sin \propto$$

عناصر شعاع الجداء الاتجاهي :

- منحاه عمودي على المستوي المشكل من الشعاعين $\vec{P}$ و $\vec{F}$.
- جهته بحيث يكون دوران الأول باتجاه الآخر موجباً (أي مع عقارب الساعة) بالنسبة لناظر يقف على رأس الشعاع $\vec{R}$.
- تحسب قيمته بحسب طويلته .

ملاحظة :

- قيمة الاتجاه الشعاعي تعطي ضعف مساحة المثلث الذي يحصره هذين الشعاعين.



مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ الارتفاع * القاعدة

مساحة المثلث $=\frac{1}{2}\,|\vec{P}| * (|\vec{F}|\sin\propto) = \frac{1}{2}(\vec{F} \wedge \vec{P}) \qquad \vec{P}$

خواص الجداء ألاتجاهي :

- الجداء الاتجاهي غير تبديلي: $\vec{P}\wedge\vec{Q}=-\vec{Q}\wedge\vec{P}$
- الجداء الاتجاهي توزيعي علي الجمع: $\vec{P}\wedge(\vec{Q}+\vec{R})=(\vec{P}\wedge\vec{Q})+(\vec{P}\wedge\vec{R})$
- الصيغة التحليلية لشعاع الجداء الاتجاهي لشعاعين:

$$\vec{Q}=Q_X\vec{\imath}+Q_y\vec{J}+Q_Z\vec{K} \qquad \vec{P}=P_X\vec{\imath}+P_Z\vec{J}+P_Z\vec{K}$$

$$\vec{P}\wedge\vec{Q}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{J} & \vec{K}\\ P_X & P_Y & P_Z\\ Q_X & Q_Y & Q_Z\end{vmatrix}=\vec{\imath}\begin{vmatrix}P_Y & P_Z\\ Q_Y & Q_Z\end{vmatrix}+\vec{J}\begin{vmatrix}P_X & P_Z\\ Q_X & Q_Z\end{vmatrix}+\vec{K}\begin{vmatrix}P_X & P_Y\\ Q_X & Q_Y\end{vmatrix}$$

حيث :

$$\vec{\imath}\wedge\vec{J}=\vec{k} \qquad \vec{J}\wedge\vec{k}=\vec{\imath} \qquad \vec{k}\wedge\vec{\imath}=\vec{J}$$

$$\vec{k}\wedge\vec{k}=0 \qquad \vec{J}\wedge\vec{J}=0 \qquad \vec{\imath}\wedge\vec{\imath}=0$$

$$\vec{J}\wedge\vec{\imath}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\wedge\vec{J}=-\vec{\imath} \qquad \vec{\imath}\wedge\vec{k}=-\vec{J}$$

- شرط توازي شعاعين إن يكون الجداء الشعاعي لهما معدوماً.

بما أن $\alpha=0$ $\Leftarrow$ $\sin\alpha=0$ $\Leftarrow$ $\vec{P}\wedge\vec{Q}=0$ $\Leftarrow$ $\vec{P}//\vec{Q}$

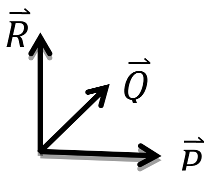
وبالاعتماد على فك الصيغة التحليلية نحصل علي شرط شعاعين:

$$\boxed{\frac{P_X}{Q_X}=\frac{P_Y}{Q_Y}=\frac{P_Z}{Q_Z}}$$

الجداء المختلط:

الجداء المختلط للأشعة $(\vec{P}\wedge\vec{Q}).\vec{R}=(\vec{P},\vec{Q},\vec{R})$

وقيمته دائما سلمية موجبة أو سالبة وتمثل حجم متوازي المستطيلات الذي تمثله هذه الأشعة.



قيمة سلمية$=\begin{vmatrix}P_X & P_Y & P_Z\\ Q_X & Q_Y & Q_Z\\ R_X & R_Y & R_Z\end{vmatrix}=(\vec{P}\wedge\vec{Q}).\vec{R}$

ملاحظة :١ - إن الجداء المختلط معدوما في الحالتين:

- اثنان من الأشعة الثلاثة متوازيان.

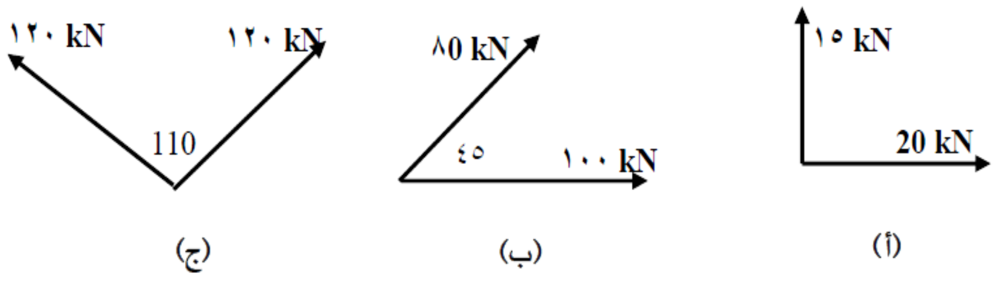
- عندما تكون الأشعة الثلاثة في مستو واحد.

٢- التبديل الدوري المواقع الأشعة في صيغتي الجداء المختلط لا يغير من قيمته:

$$(\vec{P}\wedge\vec{Q}).\vec{R}=(\vec{R}\wedge\vec{P}).\vec{Q}=(\vec{Q}\wedge\vec{R}).\vec{P}$$

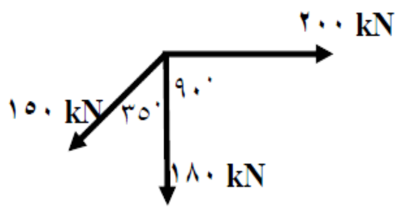
تمارين

١. أوجد محصلة القوى المبينة في الشكل ١٢ باستعمال الطريقة البيانية.



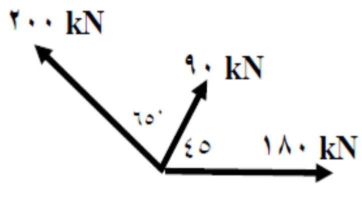
شكل ١٢

٢. أوجد محصلة القوى المبينة في الشكل ١٣ باستعمال الطريقة البيانية. أوجد الزاوية المحصورة بين المحصلة والمحور الأفقي. تحقق من النتيجة باستخدام الطريقة التحليلية.



شكل ١٣

٣. أوجد محصلة القوى المبينة في الشكل رقم ١٤ باستعمال الطريقة التحليلية. أوجد الزاوية المحصورة بين المحصلة والمحور الأفقي. تحقق من النتيجة باستخدام الطريقة البيانية.

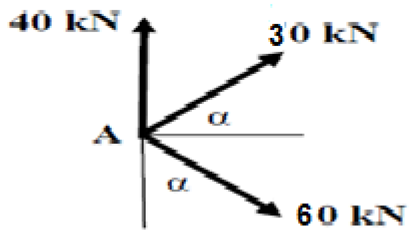


شكل ١٤

ثلاث قوى تؤثر على النقطة A كما هو مبين في الشكل ١٥.

(أ) أوجد قيمة الزاوية α بحيث يكون اتجاه محصلة القوى الثلاثة أفقية.

(ب) أوجد مقدار محصلة القوى في هذه الحالة.



العزوم و الازدواج

١,٢ العزم الناتج عن قوة

عزم قوة حول نقطة O هو العزم الذي يحاول عمل دوران حول النقطة O.

ويحسب العزم بالعلاقة التالية:

العزم = (قيمة القوة) x (المسافة العمودية بين خط تأثير القوة والنقطة المراد حساب العزم حولها)

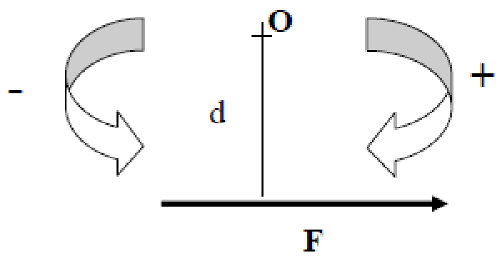
$$\text{Moment} = \text{Force} \times \text{Perpendicular Distance}$$
$$M = F \times d$$

حيث أن:

M هو عزم القوة F حول النقطة O وتقاس بـ N.m أو kN.m

d هي المسافة العمودية بين خط تأثير القوة F والنقطة O وتقاس بـ m.

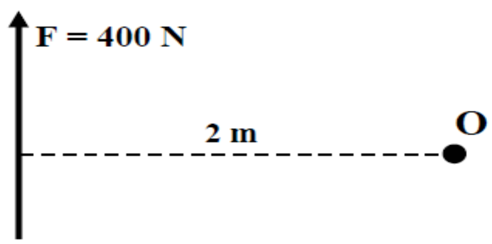
وتكون إشارة العزم موجبة إذا كان اتجاه الدوران مع عقارب الساعة، ويكون سالبا إذا كان اتجاه دوران العزم عكس دوران عقارب الساعة.



مثال ١:

أوجد قيمة العزم الناتج عن القوة F= 400 N حول النقطة O كما هو مبين في الشكل ٢.

الحل:



العزم حول النقطة O يساوي:

$$Mo = - 250 \times 10 = - 2500 \text{ N.m}$$

يلاحظ أن إشارة العزم هي سالبة وهذا لأن اتجاه الدوران هو عكس اتجاه عقارب الساعة.

العزم حول النقطة O يساوي:

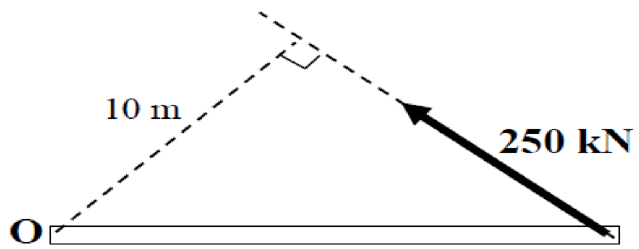
$$Mo = + 400 \times 2 = + 800 \text{ N.m}$$

N

يلاحظ أن قيمة العزم بالموجب وهذا لأن اتجاه دوران العزم هو مع اتجاه عقارب الساعة.

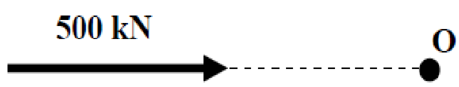
مثال ٢:

أوجد قيمة العزم حول النق N (للقوة F= 250 kN المبينة في الشكل رقم ٣.



مثال ٣:

احسب قيمة العزم حول النقطة O كما هو مبين في الشكل ٤.



الحل:

يلاحظ من الشكل أن خط تأثير القوة يمر على النقطة O وبالتالي فإن قيمة المسافة ا وي صفر،

وبالتالي لايوجد دوران حول النقطة O. ويكون لدينا:

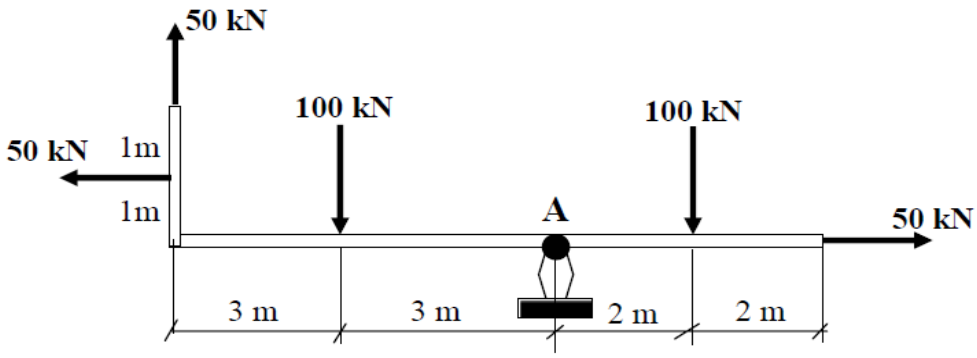
$$Mo = 500 \times 0 = 0 \text{ kN.m}$$

عزم مجموعة قوى

اذا كان لدينا جسم تحت تأثير مجموعة من القوى، فإن قيمة العزم حول نقطة معينة تساوي جمع عزوم القوى المنفردة.

مثال ٤ :

أوجد قيمة العزم حول النقطة A للقوى المؤثرة على الجسم المبين في الشكل رقم ٥.



الحل:

بما أن لدينا خمس قوى مؤثرة على الجسم فسوف يكون لدينا خمسة عزوم مؤثرة حول النقطة A، وقيمة العزم لكل قوة حول النقطة A تساوي ضرب قيمة القوة بالمسافة العمودية بين خط تأثير القوة والنقطة A. مع ملاحظة أن إشارة العزم الموجبة عندما يكون اتجاه الدوران مع عقارب الساعة.

$$M_A = -\ 50x0 + 100x2 - 100x3 + 50x6 - 50x1 =$$

$$= \quad 0 \quad +200 \ - \ 300 \quad +300 \ - \ 50 \quad = +150 \text{ kN.m}$$

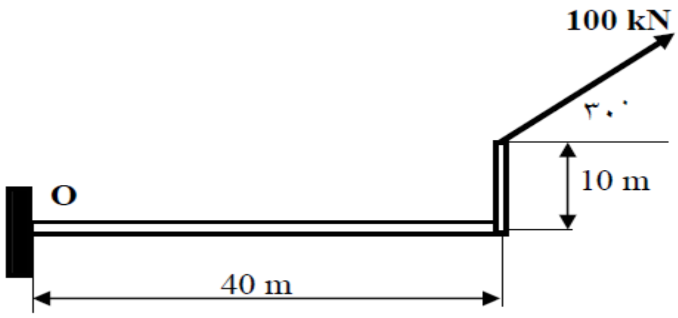
يلاحظ أن القوة التي قيمتها 50 kN والتي هي في الطرف الأيمن من الشكل يمر خط تأثيرها على النقطة A وبالتالي المسافة العمودية بين القوة والنقطة A تساوي صفر مما يعني أن قيمة العزم لهذه القوة حول النقطة A يساوي صفر.

٣,٢ نظرية "فارينيون" Varignon's Theorem

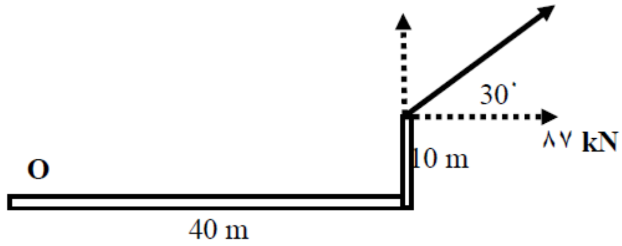
تنص نظرية "فارينيون" (تعرف كذلك باسم نظرية العزم) أن عزم قوة ما F حول نقطة O يساوي مجموع عزوم مركبات هذه القوة حول نفس النقطة O ، سوف تساعد هذه النظرية في حل المسائل الهندسية في الفصول اللاحقة.

مثال ٥:

أوجد قيمة العزم للقوة $F = 100\ kN$ حول النقطة O كما هو مبين في الشكل رقم ٦.



شكل ٦



شكل ٧

الحل:

كما هو مبين في الشكل رقم ٦ فإن القوة $F = 100\ kN$ تعمل زاوية مقدارها ٣٠ درجة مع المحور الأفقي، وقيمة العزم حول النقطة O يساوي مجموع عزوم مركبتي الأفقية والعمودية للقوة حول النقطة O.

إيجاد المركبة الأفقية والعمودية للقوة F كالتالي (أنظر شكل ٧):

المركبة الأفقية: $Fx = F\cos(30) = 100x\cos(30) = 87\ kN$

المركبة العودية: $Fy = F\sin(30) = 100x\sin(30) = 50\ kN$

عزم القوة الأفقية حول النقطة O يساوي =

$$+ 87 \times 10 = +870\ kN.m$$

يلاحظ أن إشارة العزم هي موجبة وذلك لأن الدوران مع عقارب الساعة

عزم القوة العمودية حول النقطة O يساوي:

$$-50x40 = -2000 \text{ kN.m}$$

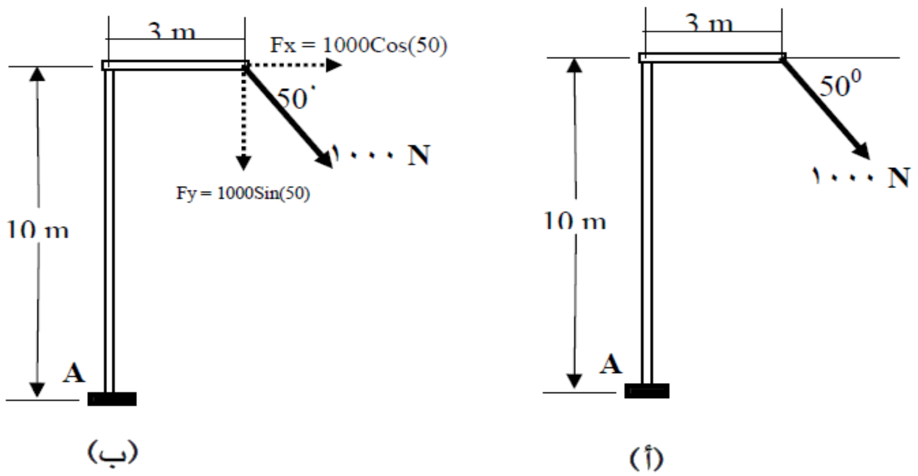
يلاحظ أن إشارة العزم هي سالبة وذلك لأن الدوران هو عكس اتجاه عقارب الساعة.

اذا يصبح عزم القوة F حول النقطة O يساوي مجموع عزوم المركبتين الأفقية والعمودية:

$$Mo = -2000 + 870 = -1130 \text{ kN.m}$$

مثال ٦:

أوجد قيمة العزم للقوة F = 1000 N حول النقطة A كماهو مبين في الشكل رقم ٨ (أ).



شكل ٨

الحل:

نقوم بتحليل القوة F إلى مركبيتين أفقية Fx وعمودية Fy كما هو مبين في الشكل ٨ (ب) ونقوم بحساب عزم كل مركبة حول النقطة A.

المركبة الأفقية = $Fx = F\cos(50) = 1000x\text{Cos}(50) = 642.78 \text{ N}$

المركبة العمودية = $Fy = F\sin(50) = 1000x\text{Sin}(50) = 766 \text{ N}$

عزم المركبة الأفقية حول النقطة A يساوي:

$$Mx = +642.78x10 = +6427.8 \text{ N.m}$$

عزم المركبة العمودية حول النقطة A يساوي:

$$My = +766x3 = +2298 \text{ N.m}$$

اذا عزم القوة F حول النقطة A يساوي مجموع عزم المركبة الأفقية والمركبة العمودية:

$$M_A = +6427.8 + 2298 = +8725.8\ N.m$$

يلاحظ أن إشارة العزم هي موجبة وذلك لأن الدوران هو مع اتجاه عقارب الساعة.

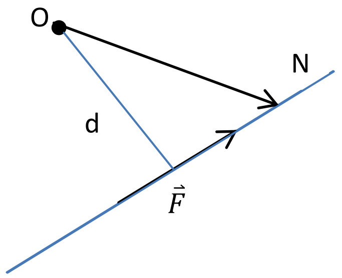
شعاع عزم القوة :

شعاع عزم القوة حول نقطة يمثل بشعاع يعطي بالجداء الاتجاهي (^) للشعاعين :

الشعاع الأول: يبدأ من النقطة التي يؤخذ عندها العزم وينتهي في إي نقطة من الخط الحامل لشعاع القوة.

الشعاع الثاني: هو شعاع القوة التي يحسب عزمها.

ويحسب عزم القوة F حول النقطة O بالعلاقة :



$$(\vec{M}_F)_O = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}$$

ويتميز هذا الشعاع:

١- منحناه : عمودي على المستوي المشكل من القوة و النقطة.

٢- جهته: بحيث تكون دوران القوة حول النقطة المراد حساب العزم حولها موجب إذا كان الناظر يقف من جهته شعاع العزم "قاعدة اليد اليمنى"

٣- قيمته: تحسب بحساب طويلة الشعاع الناتج وفق العلاقة $M=F*d$

ملاحظات :

١ -لا يتغير عزم قوة حول النقطة مهما كانت النقطة المأخوذة من خط عمل قوة .

٢ - ينعدم عزم القوة حول نقطة عندما يكون خط عمل القوة والنقطة يقعان على حامل واحد.

$$(\vec{M}_F)_O = \overrightarrow{ON} \wedge \vec{F} = 0$$

عزم القوة حول محور موجه :

إن عزم القوة حول محور موجه هو عزم هذه القوة حول أي نقطة من هذا المحور الموجه.

ويعطى بالصيغة التالية

$$(\vec{M}_F)_\Delta = (\vec{M}_F)_O . \vec{e_\Delta} = (\overrightarrow{ON} \wedge \vec{F}) . \vec{e_\Delta}$$

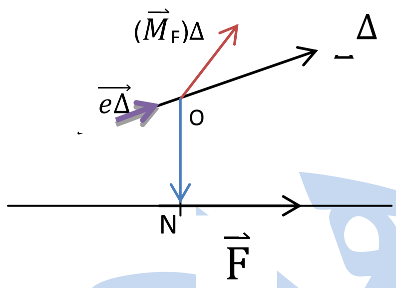
وهو قيمة سلمية.

عزم القوة حول محور موجه يعطي بالجداء المختلط لثلاثة أشعة: $(\vec{M}_F)_\Delta$

الشعاع الأول : يبدأ من نقطة من المحور الموجه وينتهي في أي نقطة من خط عمل القوة .

الشعاع الثاني:هو شعاع القوة التي يحسب عزمها.

الشعاع الثالث : هو المتجه الواحدي للمحور الموجه . $\vec{e\Delta}$



ملاحظات :

١ -*إن عزم قوة حول محور موجه معدوم في حالتين التاليتين :

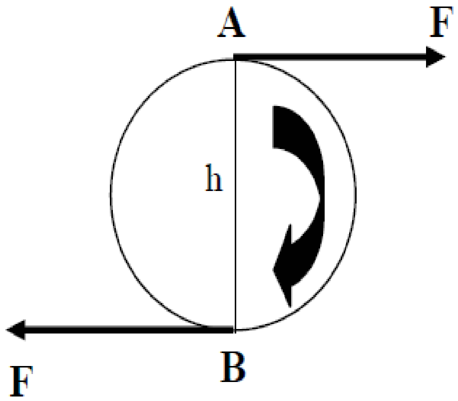
١. عندما تكون القوة قاطعة للمحور الموجه
٢. عندما تكون القوة موازية للمحور الموجه.

٢ - عزم قوة حول المحور الموجه أعظمي عندما تكون القوة عمودية على المحور الموجه وغير قاطعة له .

٣ – لا يتغير عزم قوة حول محور مهما تغيرت نقطة حساب العزم.

٤,٢ عزم الازدواج Couple

يعرف الازدواج بأنه تأثير قوتين متساويتين في المقدار ومتوازيتين ومتضادتين في الاتجاه يأثران في نقطة معينة بحيث يكون العزم في تلك النقطة ثابت، أي أن الازدواج له تأثير دوراني حول أي نقطة واقعة في مستوى القوتين المؤلفتين للأزدواج وهذا التأثير يعرف باسم الازدواج Mo كما هو مبين في الشكل رقم ٩.



شكل ٩

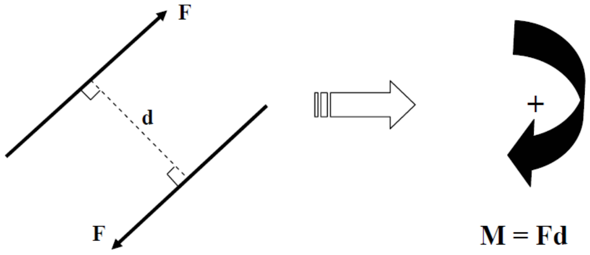
وتصبح قيمة الازدواج تساوي مجموع عزمي القوتين حول النقطة التي هي منتصف المسافة العمودية بين القوتين أي $h/2$ كما هو مبين في الشكل ٩. بحيث يصبح:

$$M1 = Fxh/2$$
$$M2 = Fxh/2$$

عزم الازدواج =

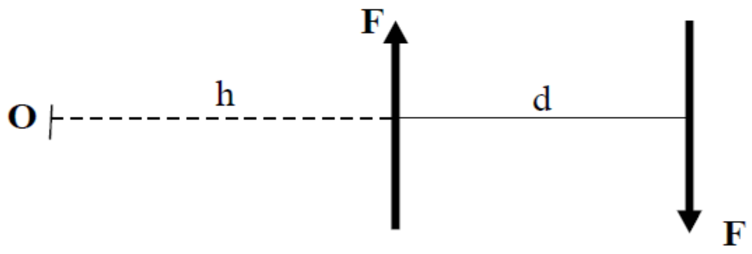
$$M1 + M2 = F(h/2 + h/2) = Fxh/2 + Fxh/2 = Fxh$$

أي أن الازدواج له تأثير دوراني حول أي نقطة واقعة في مستوى القوتين ومقدار الازدواج يساوي قيمة القوة ضرب المسافة العمودية بين القوتين. ويمكن تمثيل الازدواج الناتج عن قوتين متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه كما هو مبين في الشكل ١٠.



شكل ١٠

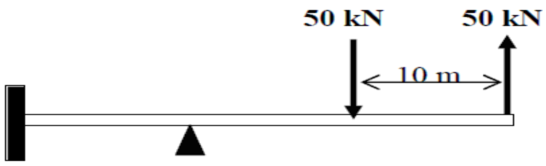
مع ملاحظة آن قيمة الازدواج حول آي نقطة هو ثابت، فمثلا ليكن لدينا قوتين متوازيتين ومتضادتين في الاتجاه ومتساويتين في المقدار F ولتكن المسافة d هى المسافة العمودية بين القوتين كما هو مبين في الشكل رقم ١١.



شكل ١١

مثال ١:

أوجد مقدار واتجاه الازدواج الناتج عن القوتين المؤثرتين على الكمرة كما هو مبين في الشكل رقم ١٢.



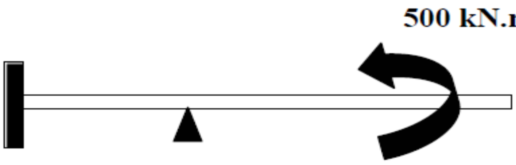
شكل ١٢

الحل:

كما هو مبين في الشكل ١٢ ،فإن القوتين متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتان في الاتجاه فإنهما يحدثان عزم ازدواج، وقيمة الازدواج تساوي قيمة أحدى القوتين ضرب المسافة العمودية بينهما كما يلي:

$$C = -\ 50 \times 10 = -500 \text{ kN.m}$$

إشارة السالب في قيمة الازدواج تشير إلى أن اتجاه دوران الازدواج هو عكس دوران عقارب الساعة وذلك لأن اتجاه دوران القوتين هو كذلك عكس اتجاه عقارب الساعة. ويمكن تبديل تأثير القوتين بعزم ازدواج مقداره 500 kN عكس اتجاه عقارب الساعة كما همو مبين في الشكل رقم ١٣.

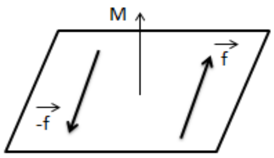


شكل ١٣

شعاع المزدوجة :

المزدوجة بشعاع عزمها الذي عناصره:

منحاه : عمودي على مستوي المزدوجة .



جهته : بحيث يكون دوران قوتي المزدوجة موجبا بالنسبة لناظر يقف من جهة شعاع العزم "حسب قاعدة اليد اليمنى ".

قيمته السلمية كما ذكرنا سابقاً $M = F . D$،وليس له نقطة تأثير .

ملاحظات:

١- يمكن تغيير مواقع قوتي المزدوجة دون أن يؤثر ذلك على عزم المزدوجة شرط المحافظة على جهة الدوران وذراع المزدوجة

٢- يمكن تغيير قوتي المزدوجة مع تغيير ذراع المزدوجة شرط أن يتحقق :

$$F1d1 = F2d2$$

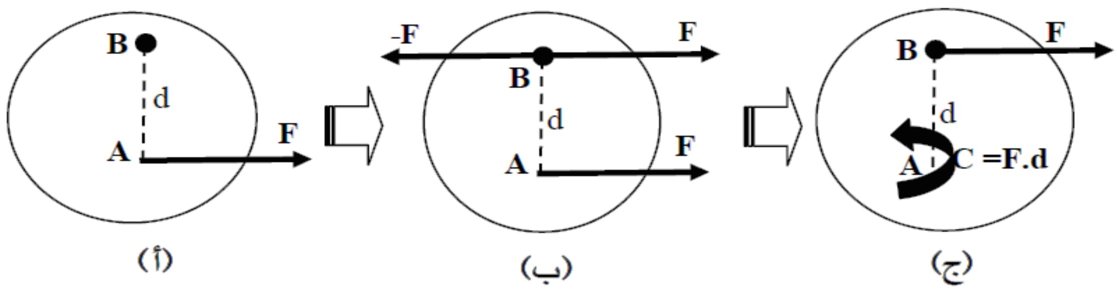
٣-لجمع المزدوجات نجمع الصيغ التحليلية لأشعة عزم هذه المزدوجة.

٥.٢ تحليل قوة إلى قوة وعزم ازدواج

في بعض الأحيان يمكن نقل قوة F تؤثر على جسم من نقطة A إلى نقطة أخرى B (أنظر شكل ١٤(أ)) مع فرض قوتين متوازيتين F و –F عند النقطة B وتكون محصلة القوى الثلاثة على الجسم هى نفس القوة الأصلية F المؤثرة عند النقطة A كما هو مبين في الشكل ١٤(ب). وبما أن القوتين F المؤثرة في النقطة A والقوة –F المؤثرة في النقطة B هما متوازيتين ومتساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه فإنهما يكونان عزم ازدواج عكس اتجاه عقارب الساعة ويمكن تبديلهما بعزم الازدواج كما هو مبين في الشكل ١٤(ج) كالتالي:

$$C = -Fxd$$

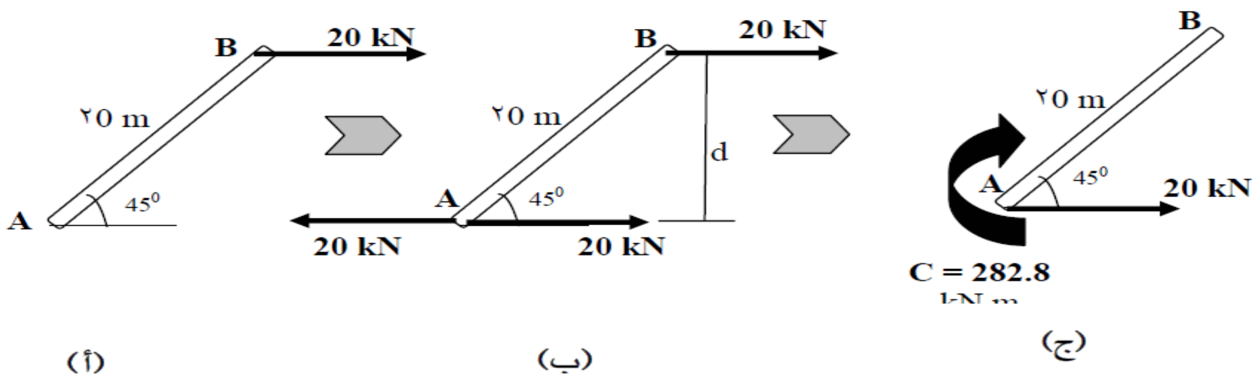
وبالتالي يمكن نقل قوة من نقطة تأثيرها إلى نقطة أخرى بحيث تكون القوة موازية لنفسها مع إضافة عزم ازدواج كما هو موضح في الشكل رقم ١٤(ج).



شكل ١٤

مثال ٢:

استبدل القوة الأفقية $F = 20$ kN المؤثرة في النقطة B بقوة مماثلة وعزم ازدواج في النقطة A كما هو مبين في الشكل رقم ١٥(أ).



شكل ١٥

الحل:

نقوم بتطبيق قوتين متوازيتين مع القوة F ومتساويتين ومتضادتين في الاتجاه في النقطة A وتساوي كل واحدة منها 20 kN كما هو مبين في الشكل ١٥(ب). وبما أن القوة في النقطة B والقوة على يسار النقطة A هما متساويتين ومتوازيتين ومتضادتان في الاتجاه فإنهما يكونان عزم ازدواج يساوي C بحيث يكون:

$$C = +20xd \quad kN.m$$

حيث أن d هي المسافة العمودية بين القوتين وتساوي:

$$d = 20xSin(45^0) = 20x0.707 = 14.14 \text{ m}$$

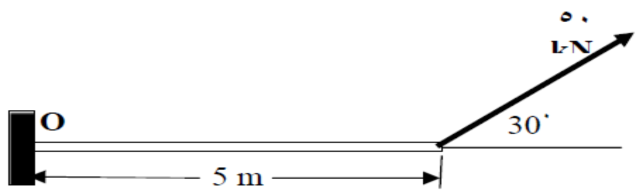
ويصبح عزم الازدواج يساوي:

$$C = +20x14.14 = +282.8 \text{ kN.m}$$

مع ملاحظة أن إشارة عزم الازدواج هي موجبة وذلك لأن الدوران هو في اتجاه دوران عقارب الساعة. وبالتالي يمكن تغيير مكان تأثير القوة F من النقطة B إلى النقطة A مع إضافة عزم ازدواج في النقطة A مقداره +282.8 kN.m كما هو مبين في الشكل رقم ١٥(ج)، وتصبح الحالة في الشكل ١٥(أ) هي مكافئة للحالة في الشكل ١٥(ج).

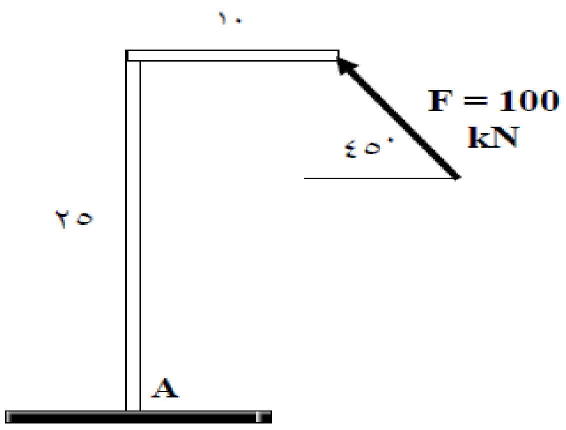
٦,٢ تمارين

١) أوجد قيمة العزم حول النقطة O الناتج عن القوة F = 50 kN كما هو مبين في الشكل رقم ١٦.



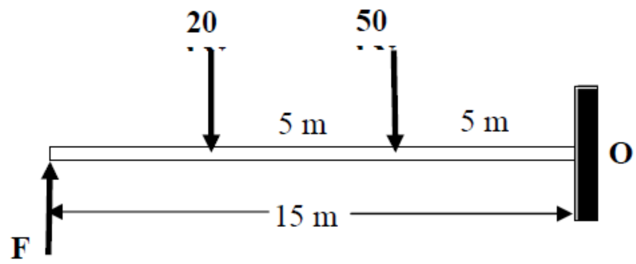
شكل ١٦

٢) أوجد قيمة العزم للقوة Fحول النقطة A كما هو مبين في الشكل رقم ١٧.



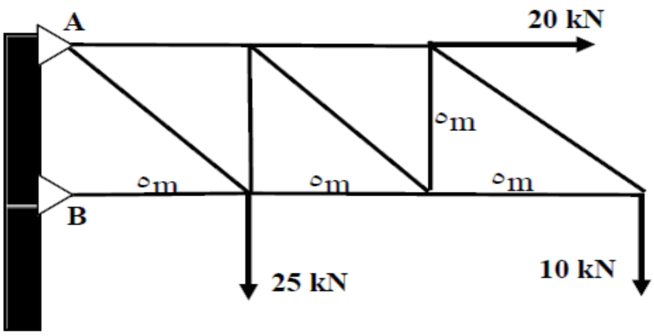
شكل ١٧

٣) أوجد قيمة القوة F بحيث تكون محصلة عزوم القوى حول النقطة O يساوي صفر كما هو مبين في الشكل رقم ١٨.



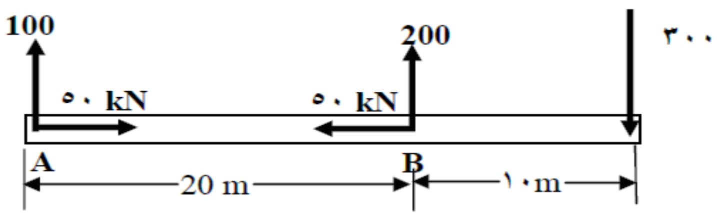
شكل ١٨

٤) أوجد قيمة العزم الناتج عن القوى الخارجية حول النقطة A كما هو مبين في الشكل ١٩.



شكل ١٩

٥) أوجد قيمة العزم حول النقطة B الناتج عن القوى الخارجية كما هو مبين في الشكل ٢٠.



شكل ٢٠

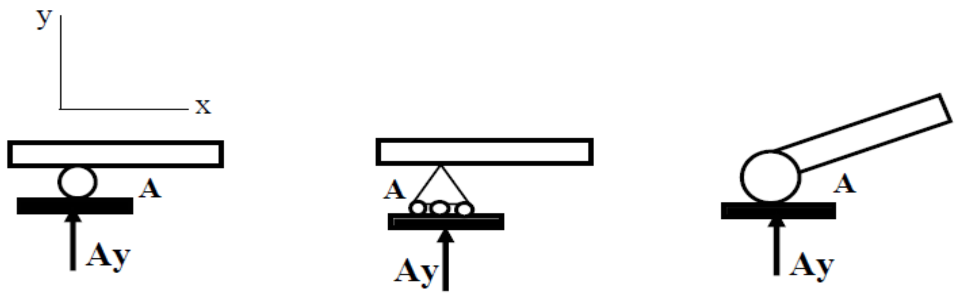
الجسم الحر و معادلات الاتزان

١,٣ مقدمة

هناك عدة أنواع من الدعامات (أو الركائز) التي تستعمل في الكمرات. والهدف الأساسي من الدعامة هو لتحمل الكمرات وتحويل الأحمال في المبنى من الكمرات إلى عناصر أخرى مثل العمود أو كمرة أوحائط أو الأساس. وعلى الطالب أن يعرف كيف يفرق بين أنواع الدعامات حتى يستطيع معرفة وحساب أنواع ردود الأفعال في الكمرات أو عناصر انشائية أخرى في المبنى.

٢,٣ الدعامة المنزلقة Roller Support

هذا النوع من الدعامة يسمح للكمرة أن تتحرك في اتجاه محور الكمرة كما هو مبين في الشكل ١. مع العلم أن الكمرة يمكن أن تتعرض لإجهاد داخلي ناتج عن التمدد الذي يمكن أن يحدث بسبب التغير في الحرارة الخارجية وبالتالي فإن الدعامة المنزلقة تسمح للكمرة أن تتمدد في نطاق محدد بحيث لا تؤدي إلى وجود تصدعات بسبب الإجهاد الناتج عن التمدد. ويلاحظ أن الدعامة المنزلقة لها رد فعل واحد عمودي على الدعامة وليس لها رد فعل أفقي $(Ax = 0)$ وكذلك هي تسمح بالدوران حول النقطة A (أي ليس لها مقاومة لعزم الدوران حول النقطة A) كما هو مبين في الشكل ١.



شكل ١

٣,٣ الدعامة المفصلية Hinge Support

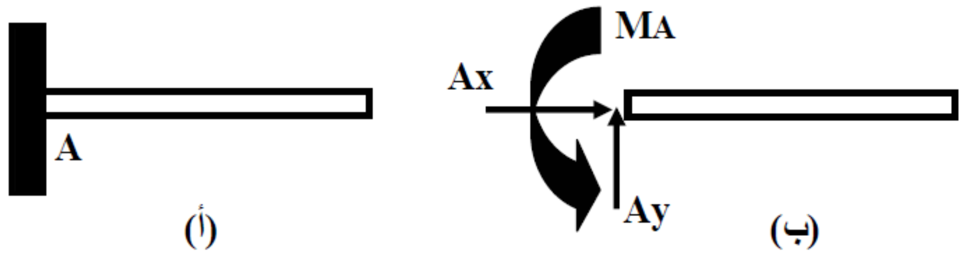
الدعامة المفصلية لا تسمح بالتحرك في الاتجاه الأفقي ولا في الاتجاه العمودي وتسمح بالدوران حول النقطة A كما هو مبين في الشكل ٢(أ). وللدعامة المفصلية رد فعل أفقي ورد فعل عمودي وليس لها مقاومة لعزم الدوران كما هو مبين في الشكل ٢(ب).

(أ) (ب)

شكل ٢

٤,٣ الدعامة الثابتة أو الكابولية Fixed or Cantiliver Support

الدعامة الثابتة لا تسمح بالحركة في الاتجاه الأفقي والعمودي ولا الدوران حول النقطة A كما هو مبين في الشكل 3(أ). أي أن للدعامة الثابتة ثلاثة ردود أفعال وهي: رد فعل أفقي ورد فعل عمودي وعزم دوران حول النقطة A كما هو مبين في الشكل ٣(ب).



شكل ٣

أما إذا كانت القوى المؤثرة على الدعامة (المفصل) فراغية يستعاض عن:

١- الدعامة المفصلية (الدعامة الكروية) بثلاث قوى وهي ردود الأفعال باتجاه المحاور الثلاثة الفراغية ،حيث تسمح الدعامة الكروية بالحركة الدورانية في جميع الاتجاهات ولا تسمح بالحركة الانسحابية.

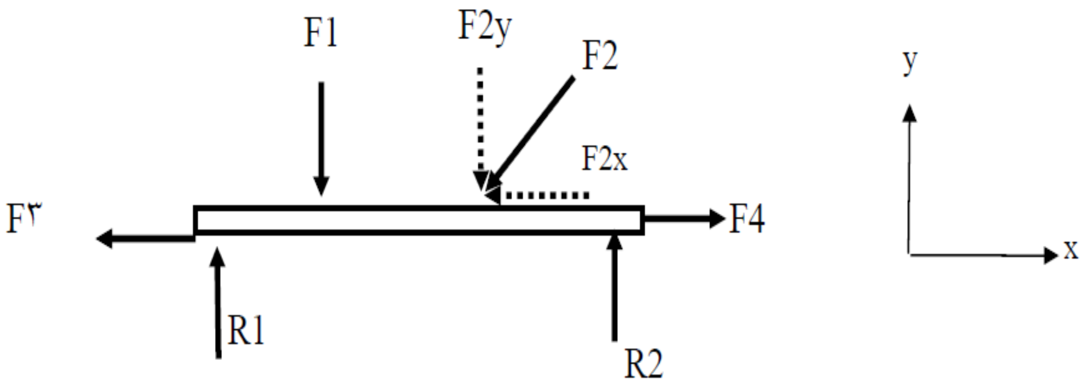
٢- الدعامة الثابتة (الوثاقة) بستة ردود أفعال: ثلاث مركبات لقوة رد الفعل، وثلاث مركبات لقيم العزم المقاومة للدوران في المستويات.

٥,٣ شروط الاتزان Equilibrium Conditions

عندما يكون أي جسم تحت تأثير قوة ما فإنه سيحاول التحرك في اتجاه تأثير القوة وبالتالي فإن الجسم يصبح في حالة عدم اتزان. كذلك فإن الجسم عندما يكون تحت تأثير مجموعة من القوى ومجموعة من العزوم فإن الجسم سوف يتحرك تحت تأثير القوى والعزوم. والحالة الوحيدة التي يكون فيها الجسم في حالة اتزان هو عندما تكون محصلة القوى الخارجية وردود الأفعال تساوي صفرا وكذلك محصلة العزوم تساوي صفرا. بعبارة أخرى يكون الجسم في حالة اتزان عندما تكون مجموع القوى والعزوم الخارجية المؤثرة على الجسم تساوي ردود أفعال والعزوم الناتجة في دعامات الجسم.

٦,٣ الحالة العامة لتوازن جسم في مستوى

لنفترض جسم ما تحت تأثير عدد معين من القوى في مستوى كما هو مبين في الشكل رقم 4،



شكل٤– جسم تحت مجموعة من القوى

بعد تحليل كل قوة إلى مركبتيها الأفقية والعمودية حسب المحور x والمحور y يمكن كتابة معادلة اتزان الجسم في اتجاه كل محور كالتالي:

١) مجموع القوى في اتجاه المحور x يساوي صفرا وتعبر بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sum F_x = 0$$

$$\mathbf{F4 - F2x - F3 = 0}$$

2) مجموع القوى في اتجاه المحور y يساوي صفرا وتعبر بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sum F_y = 0$$

$$\mathbf{R1 + R2 - F1 - F2y = 0}$$

3) عزم كل القوى (القوى الخارجية وردود أفعال الدعامات) حول أي نقطة يساوي صفرا وتعبر بالعلاقة الرياضية التالية:

$$\sum M = 0$$

وتعرف المعادلات الثلاث السابقة بمعادلات الاتزان أو قانون "نيوتن" للاتزان.

٧,٣ بعض الحالات الخاصة للتوازن:

أ) حالة القوى المؤثرة في نفس الخط Colinear Forces

حالة القوى المؤثرة في نفس الخط مبينة في الشكل رقم ٥ بحيث لايوجد دوران.

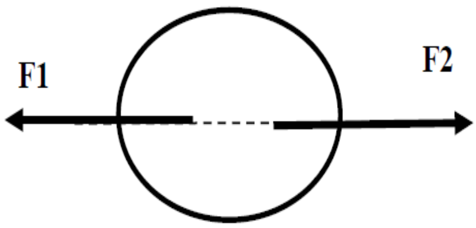
في حالة يكون اتجاه القوتين في نفس الاتجاه إلى اليمين أو اليسار فإن الجسم سوف يتحرك إلى اليمين أو اليسار ويصبح في حالة عدم اتزان. في حالة مثلا القوة F1 أكبر من القوة F2 فإن الجسم يتحرك في اتجاه القوة F1.

في حالة القوتين متساويتين في المقدار وخط عملهما واحد ولكن في اتجاهين متعاكسين فإن الجسم يصبح في حالة اتزان ويصبح لدينا:

$$\sum F_x = 0$$

$$F2 - F1 = 0$$

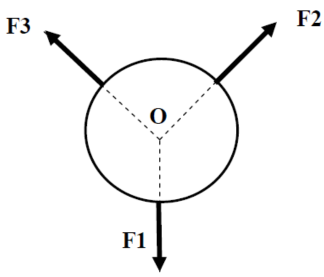
أي $F1 = F2$



شكل ٥ : قوى في نفس الخط

ب) حالة القوى المقيدة في نفس نقطة التأثير Concurrent Forces

في حالة القوى المقيدة في نفس نقطة التأثير فإن تأثير القوى يمر على نفس نقطة التأثير. كما هو مبين في الشكل رقم ٦. وفي هذه الحالة لكي يصبح الجسم في حالة اتزان لا بد من تحقق شروط الاتزان وهي: لابد من نقطة تأثير القوى الثلاثة يمر على النقطة المشتركة O ومحصلة القوى في اتجاه محور x ومحور y يساوي صفر.



شكل ٦ : قوى في نفس نقطة

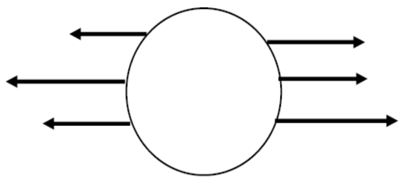
ج) حالة القوى المتوازية Parallel Forces

عندما تكون القوى متوازية يمكن أن يكون الجسم في حالة اتزان عندما تكون محصلة كل القوى تساوي صفر كما هو مبين في الشكل رقم ٧.، أي أنه يجب تحقيق المعادلة التالية:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M = 0$$

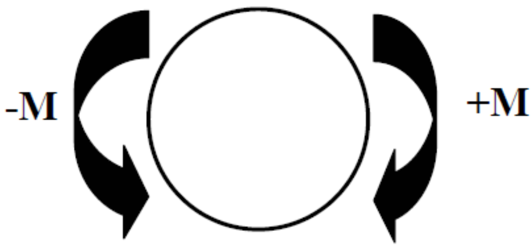
حيث أنه لاتوجد قوى عمودية وبالتالي معادلة القوى العمودية محققة $\sum F_y = 0$.



شكل ٧ : قوى متوازية

د) حالة ازدواجين متعاكسين Opposite Couples

في حالة يكون الجسم تحت تأثير ازدواجين متساويين في المقدار ومتعاكسين في الاتجاه والإشارة فإن الجسم يكون في حالة اتزان كما هو مبين في الشكل رقم ٨.



شكل ٨ : ازدواجين متعاكسين

٨,٣ الجسم الحر Free-Body Diagram

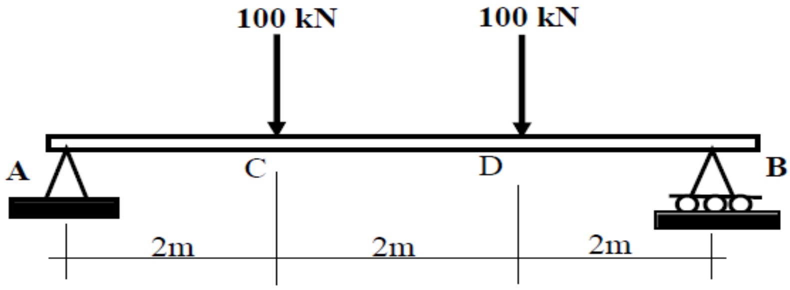
لإيجاد معادلات الاتزان لجسم ما لابد من عزل الجسم من المحيط الذي فيه واستبدال الدعامات بردود الأفعال ويمكن استبدال الجسم والدعامات والقوى الخارجية برسم بياني يسمى الرسم البياني للجسم الحر Free-Body Diagram الذي يوضح فيه الجسم الأصلي مع القوى الخارجية و العزوم وردود أفعال الدعامات (أو الركائز).

مثال ١ لرسم الجسم الحر:

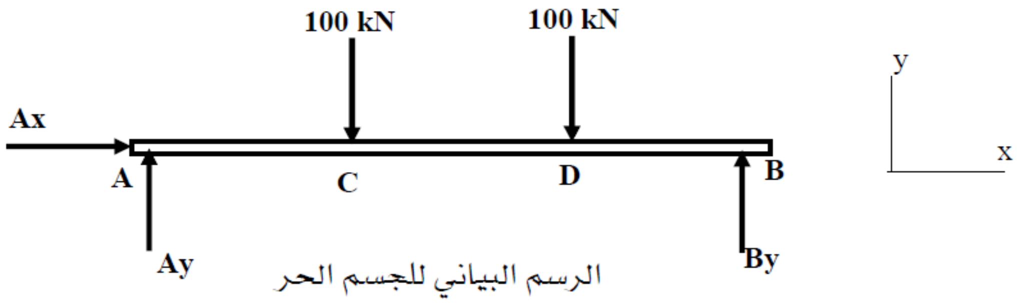
المطلوب رسم الجسم الحر للكمرة AB المبينة في الشكل رقم ٩(أ).

الحل:

لرسم الجسم الحر للكمرة AB نقوم بعزل الكمرة وتوضيح الأحمال المؤثرة على الكمرة واستبدال الدعامات بردود الأفعال. فيلاحظ أن الدعامة في النقطة A هي دعامة مفصلية hinge support لها رد فعل أفقي Ax ورد فعل عمودي Ay وليس لها عزم، الدعامة B هي دعامة منزلقة roller support ليس لها رد فعل أفقي ولها رد فعل عمودي By وليس لها مقاومة للعزم (أي العزم يساوي صفر)، وبالتالي فإن الجسم الحر للكمرة AB هو مبين في الشكل ٩(ب). ويلاحظ أنه باستخدام معادلات الاتزان يمكن معرفة قيمة ردود الأفعال في كل من الدعامة A والدعامة B باتباع الخطوات التالية:



شكل ٩ (أ) — كمرة بسيطة



شكل ٩ (ب) : الجسم الحر

تطبيق معادلات الاتزان:

أ) محصلة القوى الأفقية يساوي صفر:

$$\sum F_x = 0$$

$$Ax = 0$$

ب) محصلة العزوم حول النقطة A يساوي صفر كالتالي:

$$\sum M_A = 0$$

$$+100x2 + 100x4 - Byx6 = 0$$

$$+200 + 400 - 6By = 0$$

$$+6By = 600$$

$$By = +\ 600/6 = +\ 100\ kN$$

اذا الرد الفعل العمودي By عند الدعامة B يساوي +100 kN والإشارة الموجب تعني أن اتجاه رد الفعل هو إلى الأعلى حسب نظام المحاور x و y.

يلاحظ أن رد الفعل عند الدعامة A (أنظر شكل ٩ب) يمر على النقطة A وبالتالي فإن العزم الناتج عن رد الفعل Ay يساوي صفر.

ج) محصلة القوى العمودية يساوي صفر ، أي :

$$\sum F_y = 0$$

$$Ay + By - 100 - 100 = 0$$

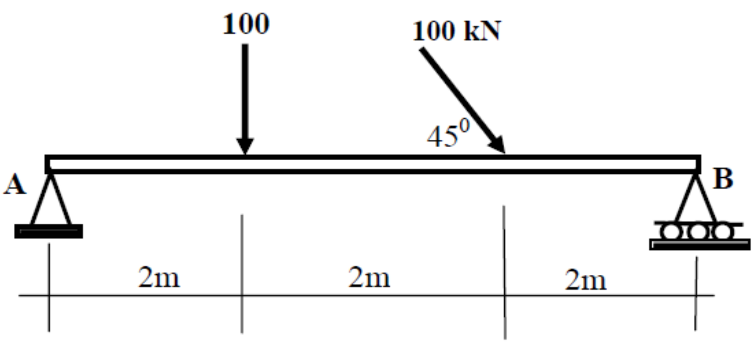
$$Ay = 200 - By$$

وبالتعويض بقيمة By = +100 kN من الخطوة (ب) نحصل على قيمة رد الفعل العمودي Ay:

$$Ay = 200 - 100 = +100\ kN$$

مثال ٢:

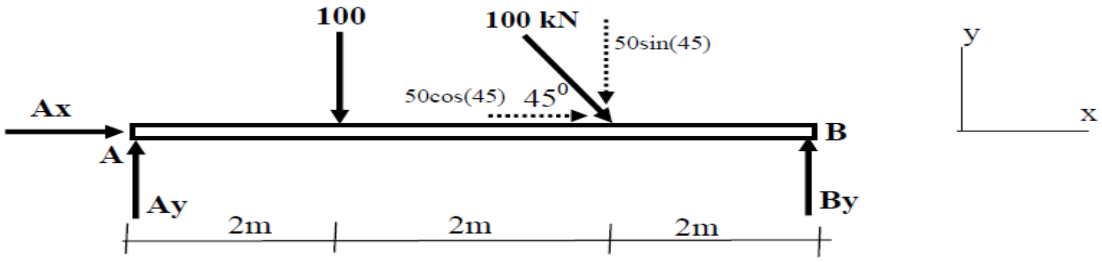
ارسم الجسم الحر للكمرة المبينة في الشكل رقم ١٠ (أ) وأوجد قيمة ردود الأفعال عند الدعامة A و الدعامة B باستعمال معادلات الاتزان.



شكل ١٠ (أ) : كمرة بسيطة تحت تأثير

الحل:

لرسم الجسم الحر للكمرة AB نقوم بعزل الكمرة وتوضيح الأحمال المؤثرة على الكمرة واستبدال الدعامات بردود الأفعال لكل نوع من الدعامة. ويلاحظ أن الدعامة A هي دعامة مفصلية hinge support لها رد فعل أفقي Ax ورد فعل عمودي Ay وليس لها عزم، الدعامة B هي دعامة منزلقة roller support ليس لها رد فعل أفقي ولها رد فعل عمودي By وليس لها مقاومة للعزم (أي العزم يساوي صفر)، وبالتالي فإن الجسم الحر للكمرة AB هو موضح في



شكل ١٠ (ب) : الجسم الحر

الشكل ١٠(ب). ويلاحظ أن القوة الخارجية المائلة بزاوية ٤٥ درجة تم تحليلها إلى مركبة أفقية ومركبة عمودية كالتالي:

المركبة الأفقية: $+70.7\ kN = +100Cos(45)$

المركبة العمودية: $+70.7\ kN = +100Sin(45)$

تطبيق معادلات الاتزان لإيجاد ردود الأفعال:

(أ) محصلة القوى في اتجاه المحو x يساوي صفر: $\sum F_x = 0$

$$Ax + 70.7 = 0 \longrightarrow \quad Ax = -70.7\ kN$$

يلاحظ أن قيمة رد الفعل الأفقي للدعامة A بالسالب، أي أن الاتجاه الحقيقي لرد الفعل عكس اتجاه الموجب للمحور x.

ب) محصلة العزوم حول النقطة A يساوي صفر: $\sum M_A = 0$ مع ملاحظة أن العزم الموجب هو مع اتجاه عقارب الساعة.

$$+100x2 + 70.7x4 - Byx6 = 0$$
$$+200 + 282.8 = 6By$$
$$By = +482.8/6 = +80.47\ kN$$

يلاحظ أن رد الفعل في الدعامة A يمر من النقطة A وبالتالي ليس له عزم.

ج) محصلةالقوى العمودية يساوي صفر، أي : $\sum F_y = 0$

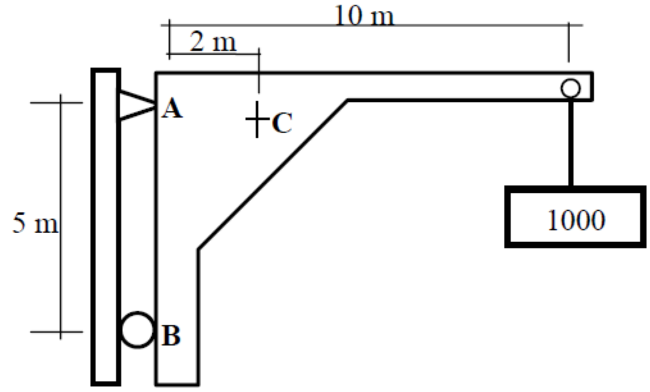
$$Ay + By - 100 - 70.7 = 0$$
$$Ay + By = +170.7$$
$$Ay = +170.7 - By = +170.7 - 80.47 = +90.23\ kN$$

اذا الرد الفعل العمودي Ay في الدعامة A هو: $Ay = +90.23\ kN$

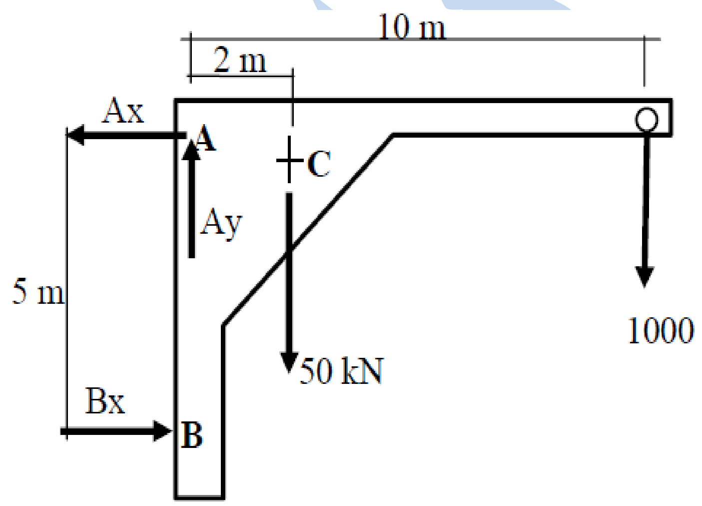
وهو موجب ويعني أن اتجاه رد الفعل إلى الأعلى.

مثال ٣:

أوجد ردود الأفعال في الرافعة المبينة في الشكل رقم ١١(أ)، مع العلم أن وزن الرافعة يساوي 50 kN وهو يؤثر في النقطة C.



شكل ١١ (أ) : رافعة



شكل ١١ (ب) : الجسم الحر

الحل:

الرسم البياني للجسم الحر للرافعة ١١(أ) موضح في الشكل رقم ١١(ب)

١) تطبيق معادلات الاتزان:

يلاحظ أن معادلة الاتزان في اتجاه المحور x : $\sum F_x = 0$ سوف تؤدي إلى وجود مجهولين بمعادلة واحدة أي:

$$Bx - Ax = 0$$

٢) معادلة اتزان العزم حول النقطة A: $\sum M_A = 0$ (الموجب مع دوران عقارب الساعة)

$$+1000x10 + 50x2 - B_x x5 = 0$$
$$+10000 + 100 - 5Bx = 0$$
$$+10100 = 5Bx$$
$$Bx = +10100/5 = +2020\ kN$$

وبتعويض بقيمة Bx في المعادلة الأولى نحصل على قيمة Ax كالتالي:

$$Bx - Ax = 0$$
$$Ax = Bx = +2020\ kN$$

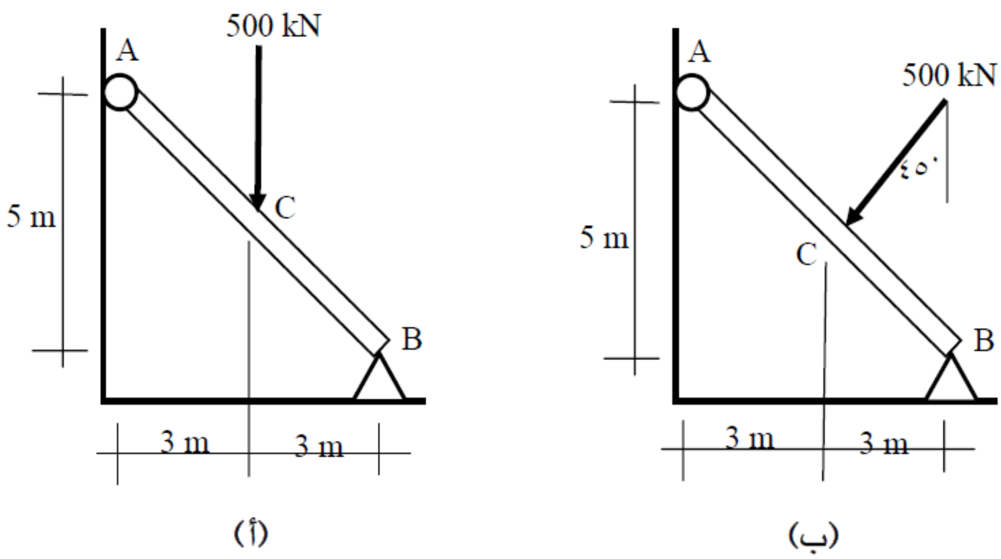
يلاحظ أن قيمة رد الفعل الأفقي Ax بالموجب وهذا يعني أن اتجاه Ax الذي اختير في الجسم الحر هو الاتجاه الصحيح، أي أن اتجاه Ax هو عكس اتجاه محور x الموجب.

ملاحظة :

إذا كان لدينا حبل أو قضيب مفصلي متمفصل من طرفيه و وزنه مهمل فأن رد الفعل على طرفي الخيط أو القضيب ينطبق على الخط الواصل بين المفصلين أي على محور القضيب .

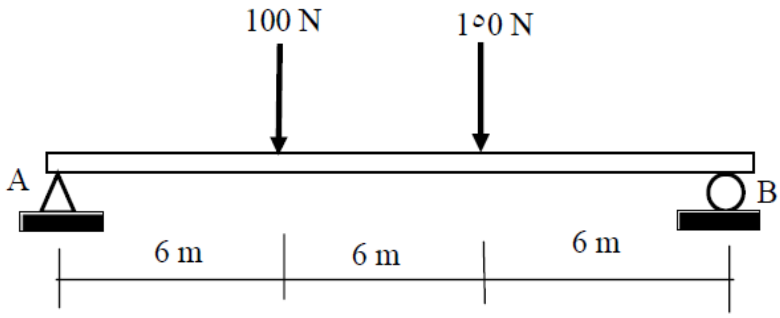
٩,٣ تمارين

١) ارسم الجسم الحر للشكل المبين في الشكل رقم ١٢(أ) و ١٢(ب) وبعد ذلك أوجد قيمة ردود الأفعال في الدعامات.

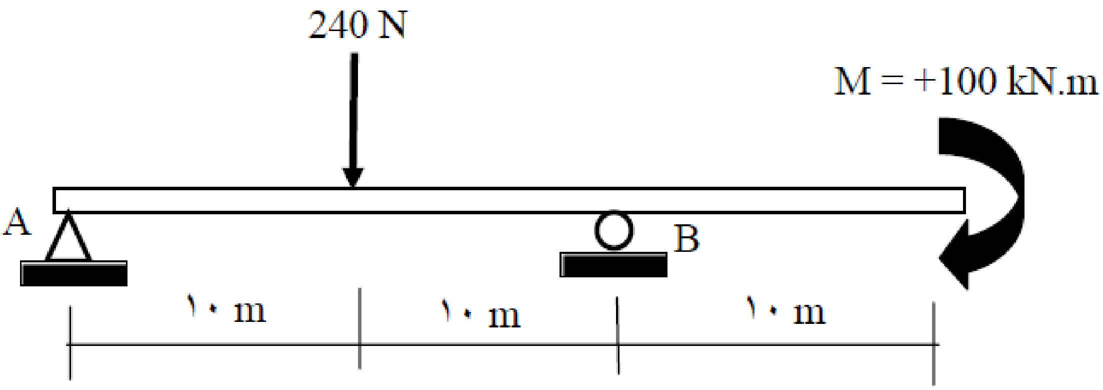


شكل ١٢

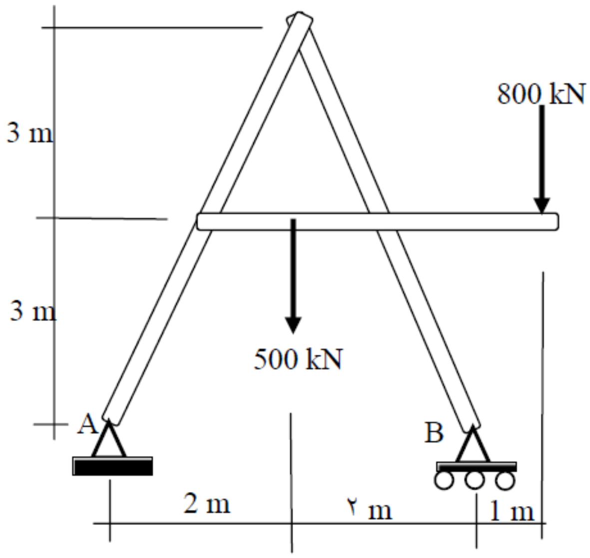
٢) ارسم الجسم الحر للكمرة المبينة بالشكل رقم ١٣(أ ،ب،ج،د) وأوجد قيمة ردود الأفعال في الدعامات باستعمال معادلات الاتزان.



شكل (أ)



(ج)

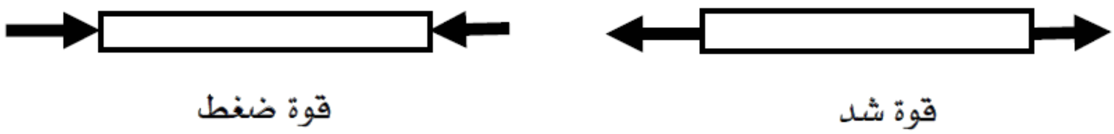


الهياكل الشبكية

١,٥ تعريف الهياكل الشبكية(الجملون)

الجملون عبارة عن هيكل مكون من مجموعة من العناصر الطولية (قضبان) المتصلة مع بعضها البعض عـن طريق التلحيم أو المسامير الملولبة أو التوصيلات المبرشمة بحيث تكون منشـآ صلب مثل الجسر والسقف الخ. نقطة التقاء العناصر الطولية تعرف باسم العقدة joint وتكون الحمولة الخارجية المؤثرة على الجملون مركزة في العقد كما هو مبين في الشكل رقم ١.

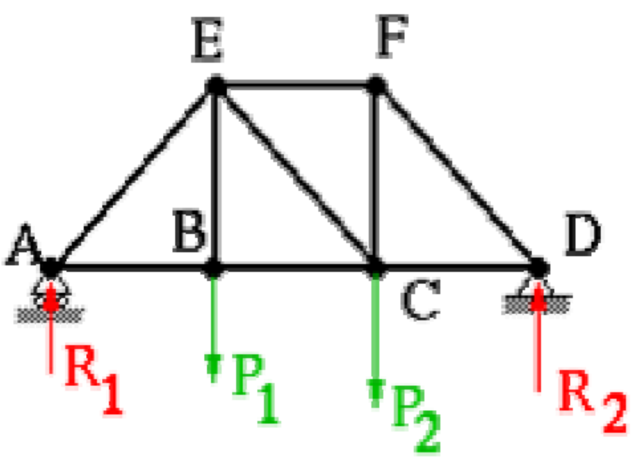
الجملون الواقع في مستوى يعرف باسم جملون في مستوى. العناصر الطولية المكونة للجملون تقاوم الحمولة عن طريق الضغط أو الشد ولا تقاوم العزم كما هو مبين في الشكل رقم ٢. إذا كانت القوة الداخلية للعنصر موجبة فإن العنصر في حالة شد واذا كانت القوة الداخلية سالبة فإن العنصر في حالة ضغط.



شكل ٢ قضبان الجملون تحت تأثير قوة الشد أو الضغط

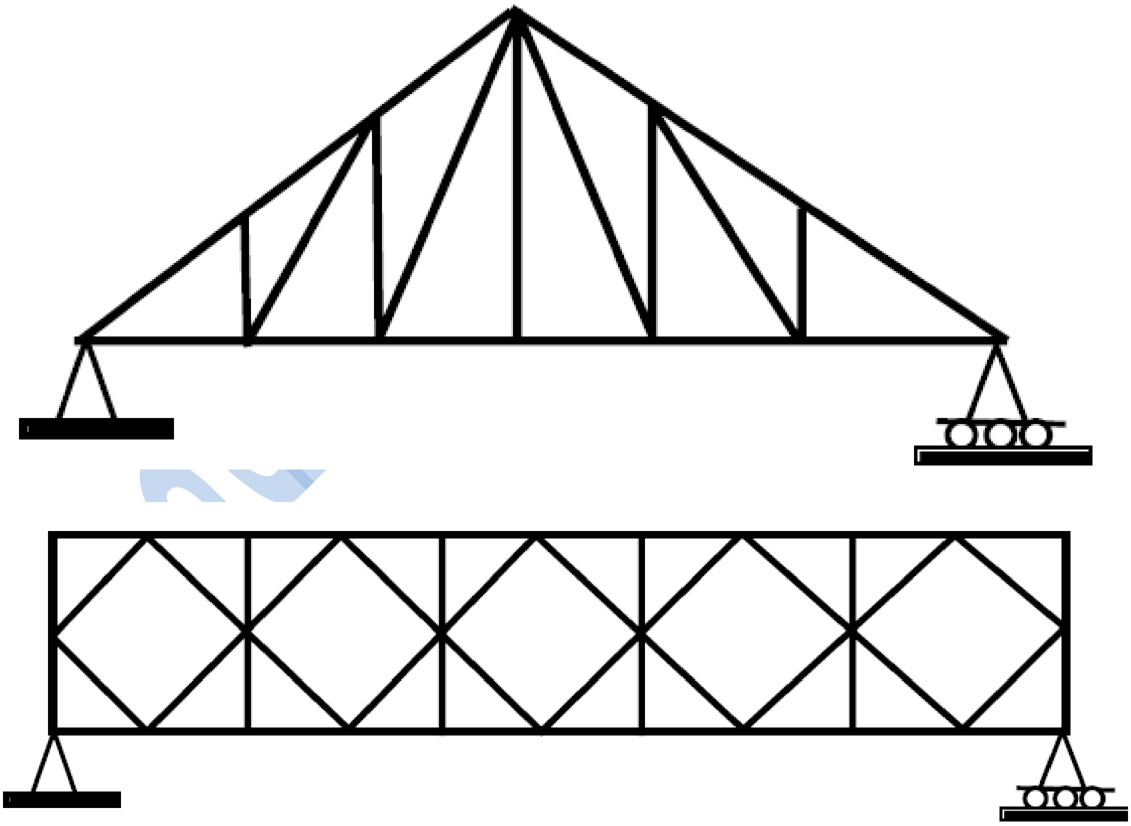
أنواع الجملونات

هناك عدة أنواع من الجمونات المستعملة في الأسقف والجسور ومنشآت أخرى ومن أهمها موضح في الشكل رقم ٣ ، ٤، ٥. في هذا الفصل سوف نقوم بدراسة وتحليل الجملونات المحددة سكونيا statically determinate trusses وذلك باستعمال معادلات الاتزان.



شكل ١ : نموذج لجملون تحت تأثير قوى مركزة في العقد

شكل ٣ مثال على جملون مستعمل في جسر



BAILEY

شكل ٥ : بعض أنواع الجملونات المستعملة في الجسور

٣,٥ التوازن العام للجملون وتحديد نوع الجملون Determinacy

كما ذكرنا سابقا فإن الجملون يتكون من عناصر (أو قضبان) المتصلة مع بعضها البعض عن طريق المفاصل joints لتكون بما يسمى هيكل الذي يرتكز على ركائز كما هو مبين في الشكل رقم ١. وكل عنصر من عناصر الجملون يمثل قوة داخلية محورية مجهولة، وبالتالي فإن عدد المجاهيل في الجملون تحسب كالتالي:

عدد مجاهيل الجملون = عدد عناصر الجملون (القوى الداخلية) + عدد ردود الأفعال في الركائز

فاذا رمزنا الى: **b** عدد عناصر (قضبان) الجملون

r عدد ردود الأفعال في الركائز

J عدد العقد (أو المفاصل) joints في الجملون

فإن العدد الاجمالي للمجاهيل في الجملون = **b + r**

وفي كل عقدة أو مفصل يكون لدينا معادلتين اتزان وهما : $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$

ويصبح عدد معادلات الاتزان الاجمالي للجملون = 2J وعدد المجاهيل = **b + r**.

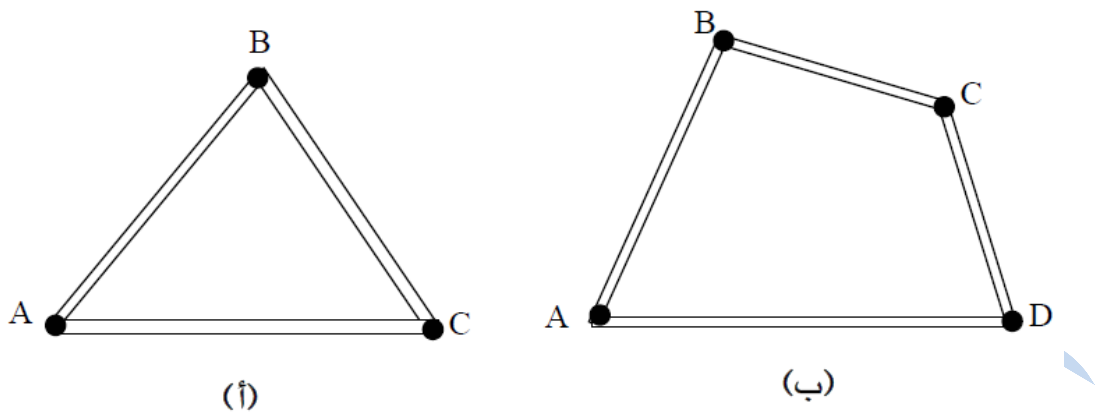
ويبين الجدول التالي القاعدة العامة لمعرفة توازن وحالة الجملون.

القاعدة أو الشرط	حالة الجملون
$b + r \langle 2J$	الجملون غير مستقر (متزن) unstable
$b + r = 2J$	الجملون محدد سكونيا statically determinate مع شرط أن يكون مستقر (متزن)
$b + r \rangle 2J$	الجملون غير محدد سكونيا statically indeterminate (أي) عدد المجاهيل أكبر من عدد معادلات الاتزان وبالتالي لا يمكن حل معادلات الاتزان)

مع ملاحظة أن الشرط : $b + r \leq 2J$ لايمكن أن يضمن أن الجملون هو في حالة اتزان (أو استقرار).

وبصفة عامة فإن ثلاثة قضبان متصلة مع بعضها البعض عن طريق المفاصل أو العقد كما هو مبين في الشكل رقم ٦(أ) يمثل هيكل مستقر وصلب rigid frame. بينما الجملون المبين في الشكل رقم ٦(ب)

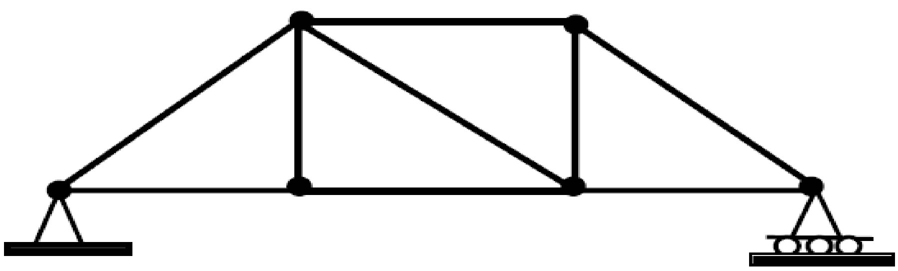
والمكون من أربعة قضبان (أو عناصر) يعتبر هيكل غير مستقر nonrigid frame وذلك لأنه إذا فرضنا أن قوة تؤثر في العقدة B للجملون في الشكل رقم ٦(ب) سوف يؤدي إلى تشوه شكل الجملون بحيث يصبح غير مستقر، ولجعل هذا الجملون مستقر يمكن إضافة عنصر (أو قضيب) بحيث يوصل العقدة (أو المفصل) A مع العقدة C أو عنصر من العقدة B مع العقدة D.



شكل ٦ : اتزان جملون

مثال ١:

حدد حالة وتوازن الجملون المبين في الشكل رقم ٧.



شكل ٧

الحل:

كما هو موضح في الشكل رقم ٧ فإن عدد العقد أو المفاصل J يساوي ٦ وعدد عناصر الجملون b يساوي ٩ وعدد ردود الأفعال r يساوي 3 وبالتالي يصبح لدينا:

$$b + r = 9 + 3 = 12$$
$$2J = 2x6 = 12$$

اذا لدينا: $b + r = 2J$

الجملون محدد سكونيا وهو مستقر (أو متزن) stable.

مثال ٢:

حدد حالة وتوازن الجملون المبين في الشكل رقم ٨.

الحل:

عدد العقد (أو المفاصل) $J = 5$

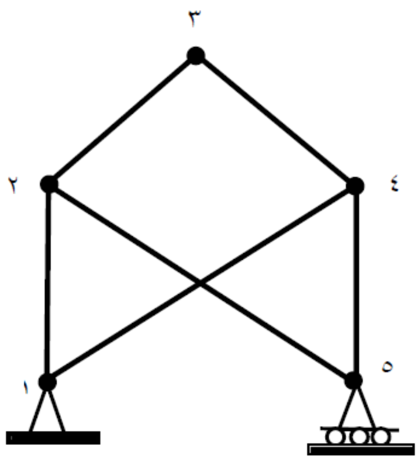
عدد عناصر الجملون $b = 6$

عدد ردود الأفعال $r = 3$

ويكون لدينا : $b + r = 6 + 3 = 9$

$2J = 2x5 = 10$

اذا : $b + r < 2J$



شكل ٨

الجملون غير مستقر (متزن) unstable.

٤,٥ - تحليل الجملونات البسيطة

هناك طريقتين لتحليل الجملونات البسيطة: طريقة العقد Joints Method و طريقة القطع Section Method وفي كل طريقة يتم تعريف أو تسمية العقد بأحرف كما هو مبين في الشكل رقم ٩ وتحليل الجملون لإيجاد القوى الداخلية في عناصر الجملون (قوة شد أو ضغط) والتي هي ناتجة عن القوى الخارجية المؤثرة في الجملون.

١) تحليل الجملون باستعمال طريقة العقد (أو المفاصل) Joints Method

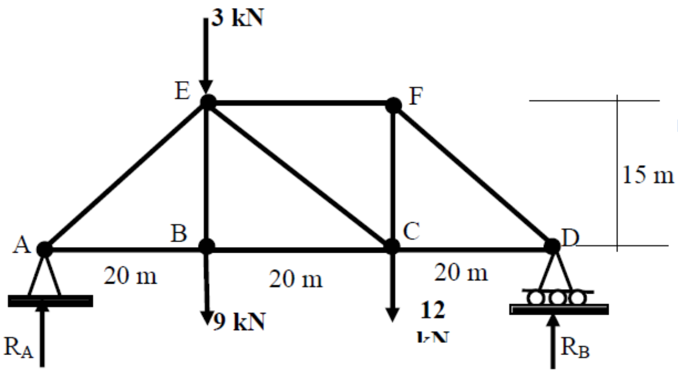
في طريقة العقد نقوم بعزل العقدة مع توضيح القوى الخارجية والداخلية المؤثرة في العقدة حيث أن عناصر الجملون تكون في حالة شد أو ضغط (قوى داخلية والتي هي على امتداد المحور الطولي للعنصر)، وبما أن الجملون يكون في حالة اتزان فإن كل عقدة في الجملون هي كذلك في حالة

اتزان بحيث يمكن تطبيق معادلات الاتزان على العقدة وإيجاد القوى الداخلية في عناصر الجملون المتصلة مع العقدة. في كل عقدة هناك معادلتين اتزان (محصلة القوى الأفقية يساوي صفر ومحصلة القوى العمودية يساوي صفر). وينصح في طريقة العقد بالبدء بالعقدة التي لها عدد من المجاهيل يساوي ٢ أو أقل (أي عدد العناصر يساوي ٢ أو أقل).

المثال التالي يبين كيفية استعمال طريقة العقد لتحليل الجملون:

مثال ١:

أوجد قيمة القوى الداخلية (أوالقوى المحورية) في كل عنصر من عناصر الجملون المبين في الشكل رقم ٩ وذلك باستخدام طريقة العقد joints method.



شكل ٩

الحل:

الخطوة الأولى هي إيجاد ردود الأفعال في ركائز الجملون.

١) حساب محصلة العزم حول النقطة **D** كالتالي : $\sum M_D = 0$ إشارة الموجب مع عقارب الساعة

$$R_A.60 - 9x40 - 3x40 - 12x20 = 0$$
$$Rax60 = 720$$
$$R_A = 720/60 = 12 \text{ kN}$$

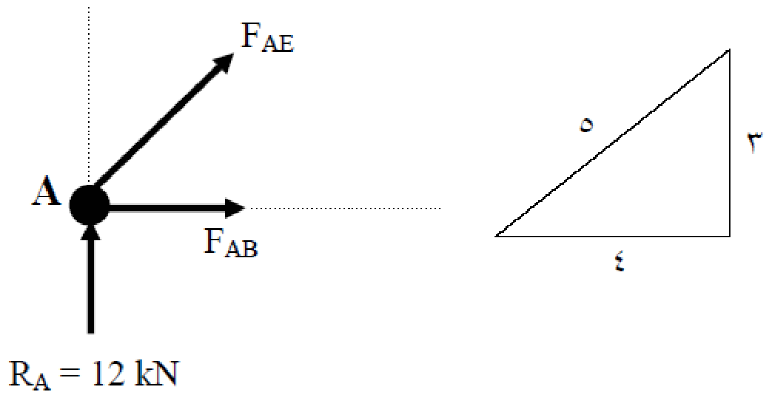
محصلة القوى العمودية: $\sum F_y = 0$

$$R_A + R_B - 9 - 3 - 12 = 0$$
$$R_A + R_B = +24$$
$$R_B = 24 - R_A = 24 - 12 = 12 \text{ kN}$$

٢) إيجاد القوى الداخلية في عناصر الجملون:

أ) العقدة **A** (متصل بها عنصرين)

كما هو مبين في الشكل المقابل فإن القوة الداخلية في العنصر **AE** مائلة بزاوية وبالتالي يمكن تحليلها إلى مركبتين.



يلاحظ أن قيمة القوة الداخلية المحورية في العنصر **AE** هي بالسالب مما يعني أن العنصر هو في حالة ضغط.

محصلة القوى الأفقية في العقدة **A** يساوي صفر :

$$\sum Fx=0$$

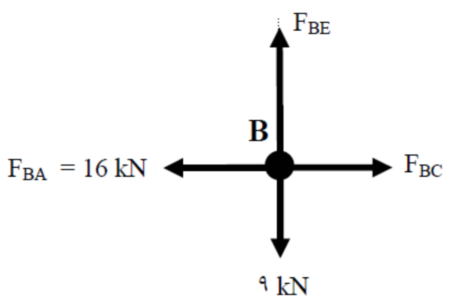
$$\mathbf{F_{AB} + F_{AEx} = 0}$$

$$\mathbf{F_{AB} + (4/5)xF_{AE} = 0}$$

$$\mathbf{F_{AB} = -(4/5)xF_{AE} = -(4/5)x(-20) = +16\ kN}$$

يلاحظ أن قيمة القوة الداخلية المحورية في العنصر **AB** هي بالموجب مما يعني أن العنصر هو في حالة شد.

ب) تحليل العقدة **B**



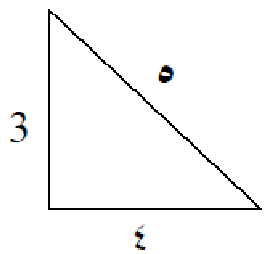
$$\sum Fx = 0$$

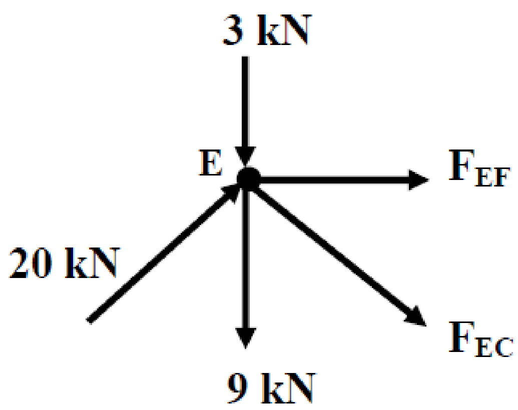
$$F_{BC} - 16 = 0$$
$$F_{BC} = +16 \text{ kN} \quad \text{Tension}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{BE} - 9 = 0$$
$$F_{BE} = +9 \text{ kN} \quad \text{Tension}$$

ت) تحليل العقدة E





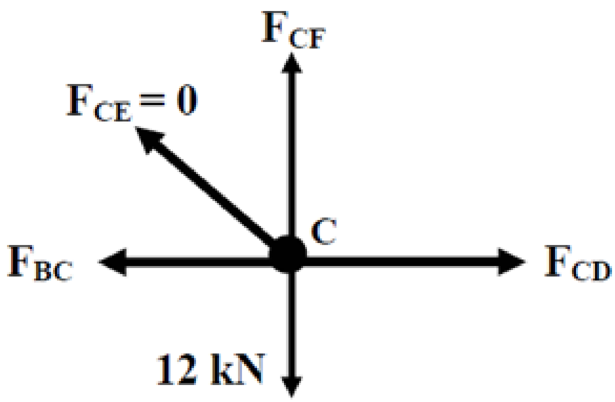
$$\sum F_y = 0$$

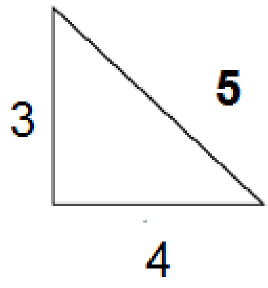
$$-9 - 3 - (3/5) \times F_{EC} + (3/5) \times 20 = 0$$
$$(3/5) \times F_{EC} = 12 - 12 = 0 \text{ kN}$$
$$F_{EC} = 0$$

$$\sum Fx = 0$$

$$F_{EF} + (4/5)\, F_{EC} + (4/5) \times 20 = 0$$
$$F_{EF} = -(4/5) \times 20 - (4/5) \times F_{EC} = -16 \text{ kN} \quad \text{Compression}$$

ث) تحليل العقدة C





$$\sum Fx=0$$

$$F_{CD} - F_{BC} = 0$$

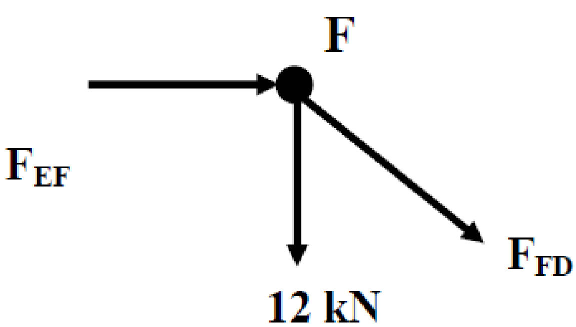
$$F_{CD} = F_{BC} = +16 \text{ kN} \quad \text{Tension}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CF} - 12 = 0$$

$$F_{CF} = +12 \quad \text{Tension}$$

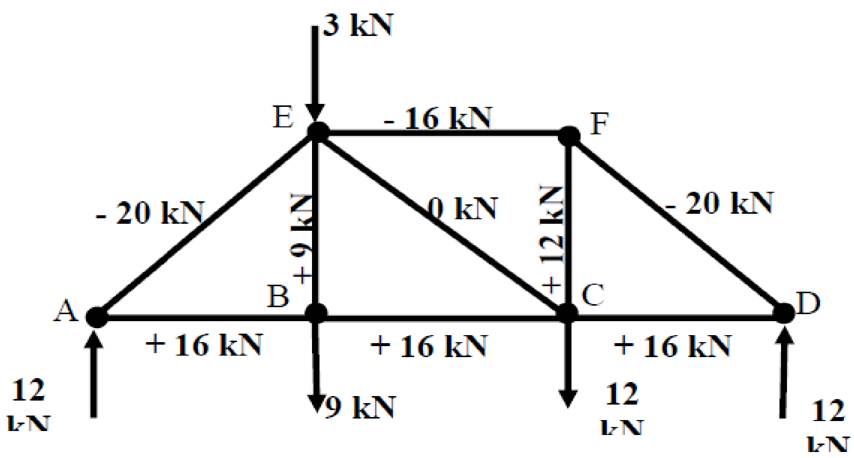
ت) تحليل العقدة F



$$\sum Fx=0$$

$$(4/5)\ xF_{FD} + F_{EF} = 0$$
$$(4/5)xF_{FD} = -F_{EF} = -\ 16\ kN$$
$$F_{FD} = -\ (5/4)x16 = -\ 20\ kN \quad \text{Compression}$$

ويبين الشكل رقم ١٠ قيمة القوى الداخلية في كل عنصر من عناصر الجملون مع ملاحظة أن الإشارة + تعني قوة شد والإشارة – تعني قوة ضغط.



الإشارة:

+ قوة شد

– قوة ضغط

شكل ١٠

٢) تحليل الجملون باستعمال طريقة القطع Section Method

يتم استعمال طريقة القطع لتحليل الجملون عندما نريد إيجاد القوى الداخلية لعدد معين من عناصر الجملون. ويمكن كذلك استعمال طريقة القطع لمراجعة أو تدقيق حل طريقة العقد لعناصر محددة. وتعتبر طريقة القطع أسرع وأقصر مقارنة مع طريقة العقد خاصة إذا كان عدد عناصر الجملون كبير.

و يتم في طريقة القطع عمل قطاع يمر على عدد محدد من عناصر الجملون ورسم الجسم الحر للقطاع وإيجاد القوى الداخلية في عناصر الجملون وذلك باستعمال معادلات الاتزان مع شرط أن لا يتعدى عدد المجاهيل في الجسم الحر على ٣ مجاهيل.

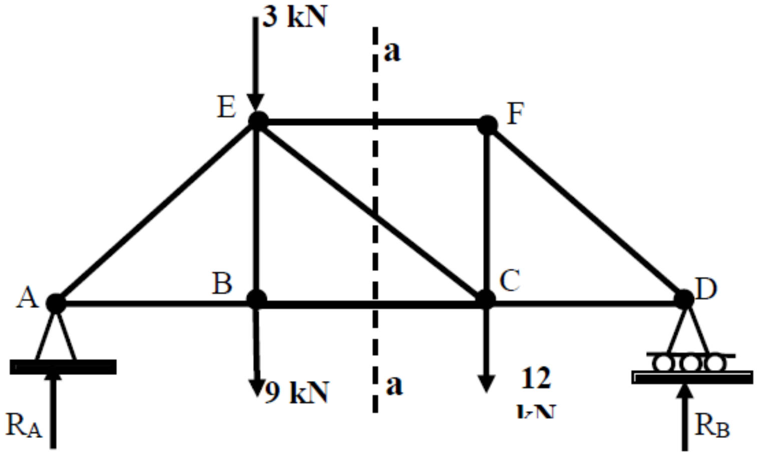
المثال التالي يبين كيفية استعمال طريقة القطع لتحليل الجملون:

مثال ٢:

أوجد قيمة القوى الداخلية (أوالقوى المحورية) في العناصر BC وEF و CE في الجملون المبين في الشكل رقم ٩ وذلك باستخدام طريقة القطع section method.

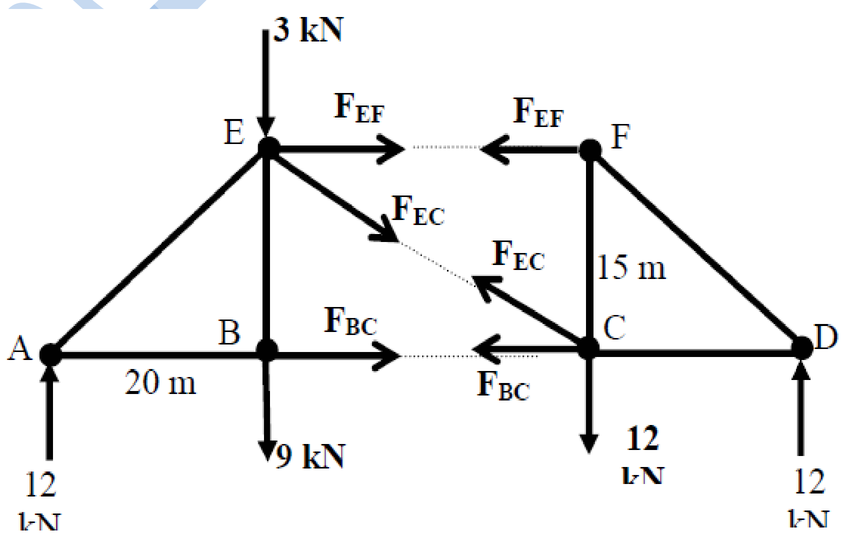
الحل:

في طريقة القطع نقوم بعمل قطاع يمر قدر الامكان على العناصر المراد إيجاد القوى الداخلية فيها. في الشكل رقم ١١ يمكن عمل قطاع a-a يمر على العناصر BC وEF و CE كما هو مبين في الشكل رقم ١١.



شكل ١١

وينتج عن القطاع a-a جسم حر على يمين القطاع وجسم حر ثاني على يسار القطاع كما هو مبين في الشكل رقم ١٢، ويبين الجسم الحر القوى الداخلية في العناصر BC وEF و CE.
ويمكن اختيار الجسم الحر على يمين أو يسار القطاع لتطبيق معادلات الاتزان وإيجاد قيمة المجاهيل (القوى الداخلية).



شكل 12

يمكن اختيار الجسم الحر على يمين القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة العزم حول العقدة C وذلك لإيجاد قيمة القوة الداخلية **F_{EF}** كالتالي:

١) محصلة العزوم حول العقدة C يساوي صفر:

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_{EF} \times 15 - 12 \times 20 = 0$$

$$F_{EF} = -240/15 = -16 \text{ kN} \quad \text{Compression}$$

٢) اختيار الجسم الحر على يسار القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة العزم حول العقدة **E لإيجاد قيمة القوة F_{BC}** كالتالي :

$$\sum M_E = 0$$

$$+12 \times 20 - F_{BC} \times 15 = 0$$

$$F_{BC} = +240/15 = +16 \text{ kN} \quad \text{Tension}$$

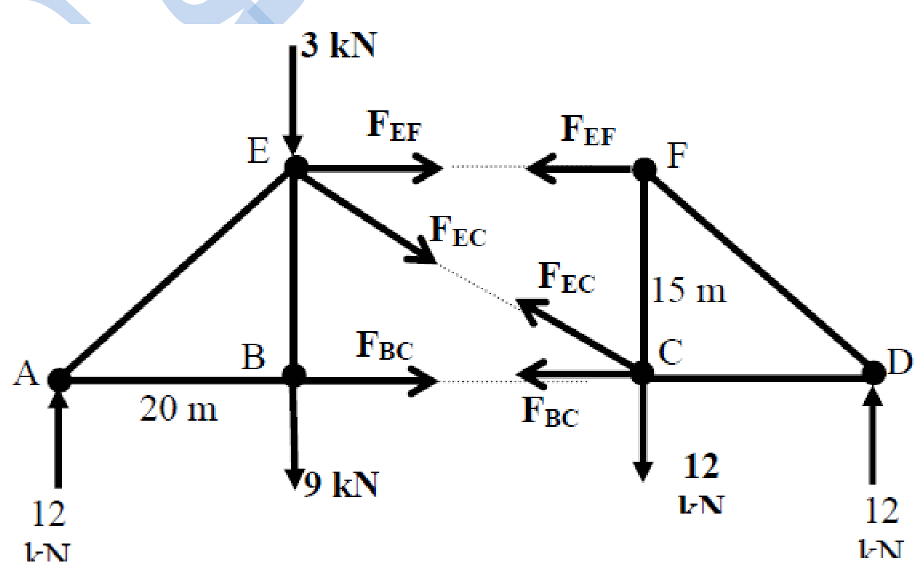
٣) اختيار الجسم الحر على يسار القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة القوى العمودية لإيجادقيمة **القوة F_{EC}** كالتالي :

$$\sum F_y = 0$$

$$12 - 9 - 3 - (3/5)\,F_{EC} = 0$$

$$12 - 12 - (3/5)\,F_{EC} = 0$$

$$F_{EC} = 0$$



شكل 12

يمكن اختيار الجسم الحر على يمين القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة العزم حول العقدة C وذلك لإيجاد قيمة القوة الداخلية F_{EF} كالتالي:

١) محصلة العزوم حول العقدة C يساوي صفر:

$$\sum M_C = 0$$

$$-F_{EF} \times 15 - 12 \times 20 = 0$$

$$F_{EF} = -240/15 = -16 \text{ kN} \quad \text{Compression}$$

٢) اختيار الجسم الحر على يسار القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة العزم حول العقدة **E لإيجاد قيمة القوة F_{BC}** كالتالي :

$$\sum M_E = 0$$

$$+12 \times 20 - F_{BC} \times 15 = 0$$

$$F_{BC} = +240/15 = +16 \text{ kN} \quad \text{Tension}$$

٣) اختيار الجسم الحر على يسار القطاع a-a وتطبيق معادلة محصلة القوى العمودية لإيجادقيمة **القوة F_{EC}** كالتالي :

$$\sum Fy = 0$$

$$12 - 9 - 3 - (3/5) F_{EC} = 0$$

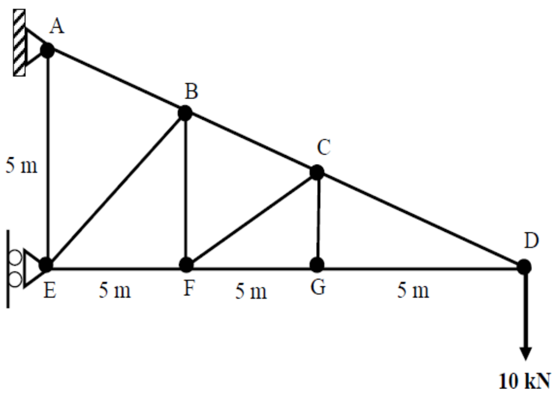
$$12 - 12 - (3/5) F_{EC} = 0$$

$$F_{EC} = 0$$

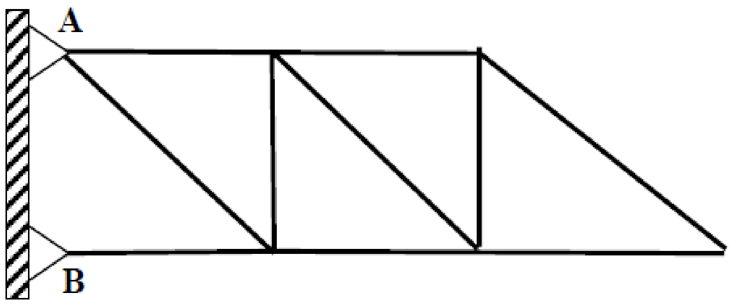
يلاحظ أن قيمة القوة في العنصر EC تساوي صفر مما يعني أن العنصر لا يتحمل أي قوة وهو ليس في حالة شد ولا ضغط.

تمارين

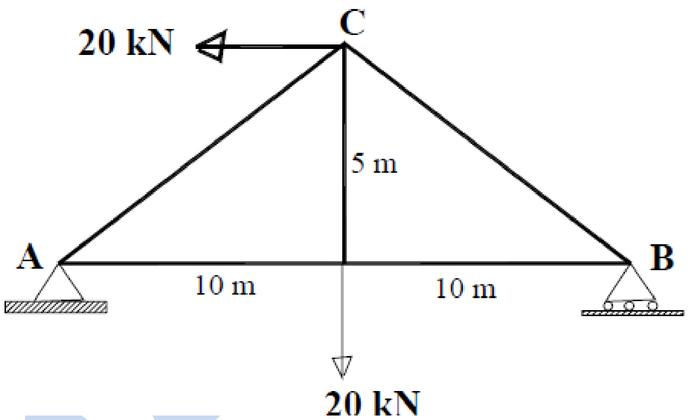
١) أوجد قيمة القوى في عناصر الجملون باستخدام طريقة قطع العقد .



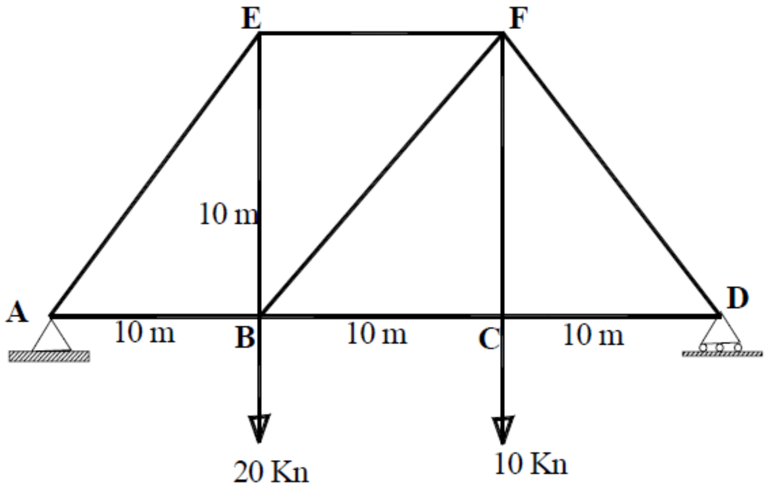
٢) حدد حالة وتوازن الجملون المبين في الشكل



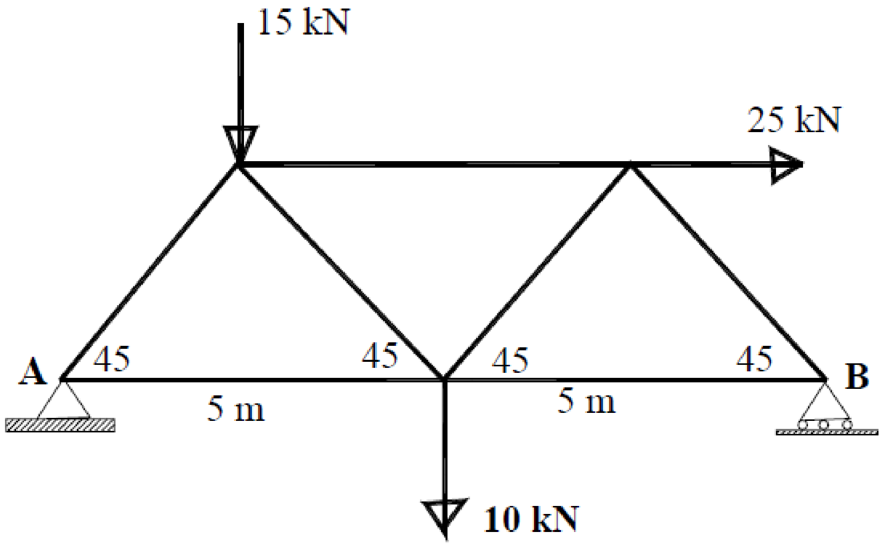
٣) حدد نوع وحالة الجملون المبين في الشكل رقم ١٥ ، أوجد قيمة القوى في عناصر الجملون باستخدام طريقة العقد joints وحدد إذا كان العنصر في حالة شد أو ضغط.



٤) حدد نوع وحالة الجملون المبين في الشكل رقم ١٦ ، أوجد قيمة القوى في عناصر الجملون باستخدام طريقة العقد joints وحدد إذا كان العنصر في حالة شد أو ضغط.



٥) حدد نوع وحالة الجملون المبين في الشكل رقم ١٧ ، أوجد قيمة القوى في عناصر الجملون باستخدام طريقة العقد joints وحدد إذا كان العنصر في حالة شد أو ضغط.



شكل ١٧
