الفصل الأول

الدارات الكهربائية الخطية في التيار المتناوب الجيبي

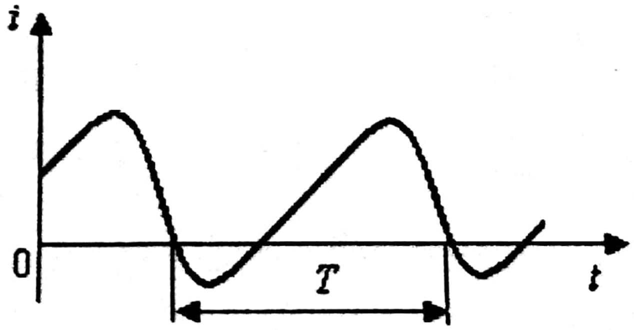
١-١ المفاهيم والعلاقات الأساسية في التيار المتناوب الجيبي :

يسمى التيار الذي يتغير (قيمة واتجاهاً) مع الزمن بالتيار المتناوب ، وينطبق هذا التعريف على الجهد المتناوب والقوة المحركة الكهربائية المتناوبة .

إن قيمة التيار المتناوب في لحظة زمنية محددة تدعى بالقيمة اللحظية لهذا التيار (التيار اللحظي) . ونرمز للقيم اللحظية للتيار والجهد والقوة المحركة الكهربائية بأحرف صغيرة $(i\ ,\ u\ ,\ e)$ ، وللتأكيد على أنها توابع زمنية يتم الرمز لها كما يلي : $i(t)\ ,\ u(t)\ ,\ e(t)$.

ويتم عادة ، اختيار الاتجاه الموجب للتيار المتناوب بشكل عشوائي ، ولكن وبعد اختيار هذا الاتجاه يتم اعتبار أنه إذا تطابق الاتجاه الفعلي للتيار اللحظي مع الاتجاه الموجب المختار عشوائياً فإن التيار يعد موجباً .

يمكن للتيار المتناوب أن يكون تياراً متناوباً دورياً أو غير دوري ، ويسمى التيار المتناوب تياراً دورياً عندما تتكرر قيمه اللحظية بعد فترات زمنية متساوية ، الشكل (١-١) .



الشكل (١-١)

يعبّر الرمز (T) عن دور التيار المتناوب ويعرف على أنه أقصر فترة زمنية والتي بعد انتهائها تتكرر القيم اللحظية للتيار الدوري ويقاس الدور بالثانية . وتسمى القيمة المساوية لمقلوب الدور بتردد التيار المتناوب $(f = \dfrac{1}{T})$. ويبين التردد عدد الذبذبات التي يقوم بها التيار المتناوب خلال ثانية واحدة ويقاس التردد بالهرتز (Hz) .

في الحياة العملية يلاقي التيار الجيبي استخداماً واسعاً باعتباره الشكل الأساسي لكل تيار دوري ، ويفضّل على غيره في تقنيات نقل الطاقة الكهربائية (تقنيات التيار العالي) وكذلك في تقنيات التيار الضعيف لتقليل المجهود الرياضي في حساب الدارات الكهربائية ، إضافة إلى أن إمكانية تطبيق طرق حل الدارات الكهربائية في المستوي العقدي والتي تمكننا من تحويل المعادلات التفاضلية الصعبة إلى معادلات جبرية عقدية بسيطة لا يمكن أن تتم إلا على التيارات الجيبية .

تأخذ الصيغة التحليلية الرياضية للتيار الجيبي الشكل الآتي :

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i) = \hat{I}\sin[\omega(t + \frac{\varphi_i}{\omega})] \qquad (1.1)$$

حيث :

$i(t)$: القيمة اللحظية للتيار الجيبي .

$\hat{I}$: ذروة (مطال) التيار، وهي أكبر قيمة مطلقة تأخذها القيمة اللحظية للتيار الجيبي خلال تغيرها مع الزمن .

ω : التردد الزاوي للتيار الجيبي ويعبر عن سرعة تغير طور التيار ويساوي إلى تردد التيار الجيبي مضروباً بالمقدار (2π) :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (1.2)$$

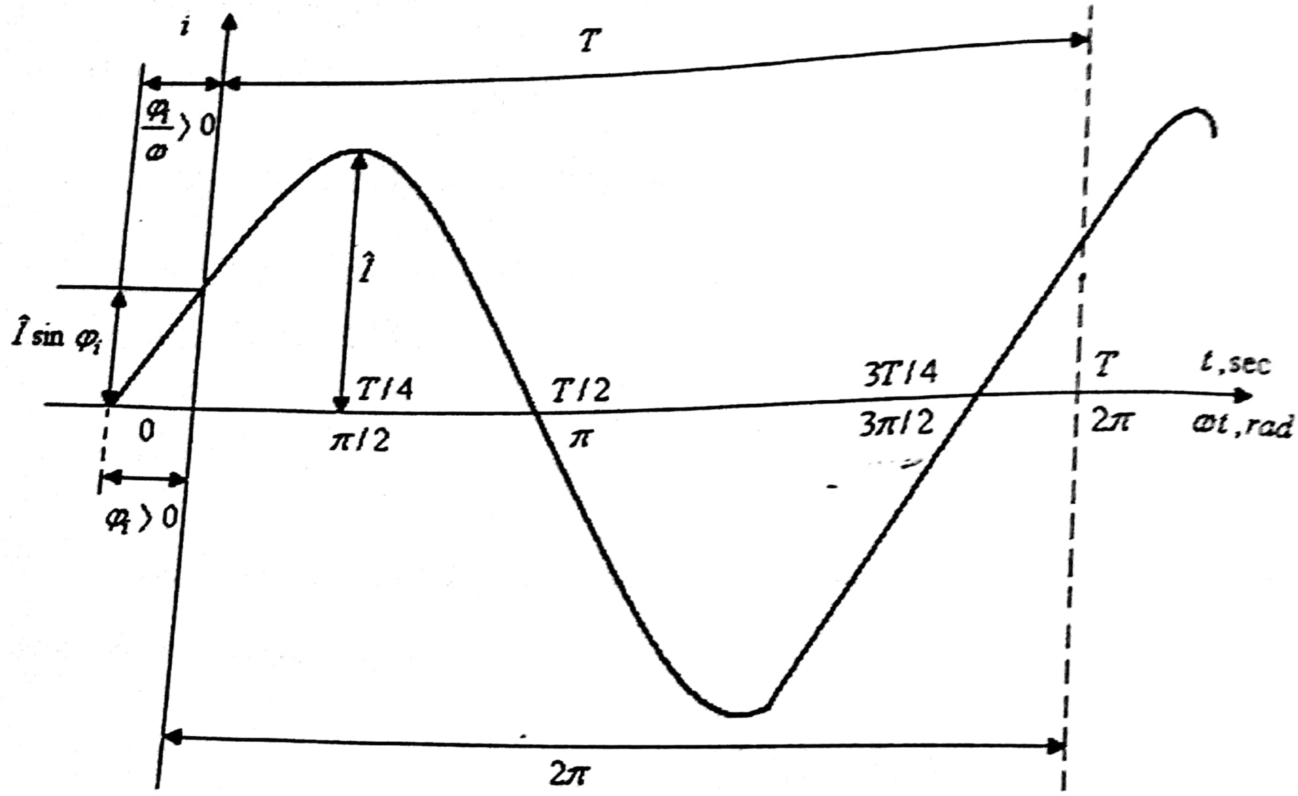
φ_i : زاوية الطور الابتدائية للتيار الجيبي ، أي في لحظة البدء $(t = 0)$.

$\omega t + \varphi_i$: زاوية الطور للتيار الجيبي .

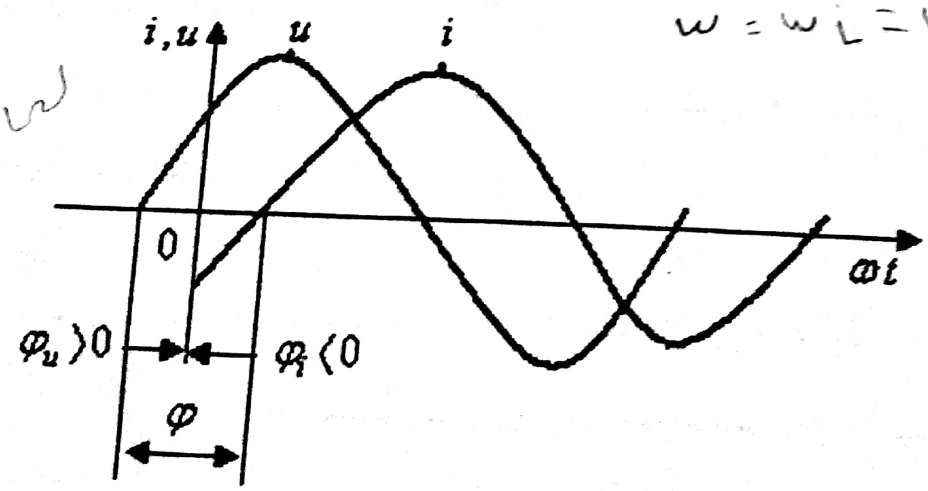
وكما نلاحظ فإن القيمة اللحظية للتيار الجيبي تحدد بثلاث قيم هي : مطاله ($\hat{I}$) ، وتردده (f) ، وزاوية طوره الابتدائية (φ_i) . ويبين الشكل (١-٢) التمثيل البياني للتيار الجيبي بدلالة الزمن (t) والزاوية (ωt) .

وفي حالة توفر عدة قيم جيبية تتغير بالتردد نفسه وبزوايا طور ابتدائية مختلفة، فيقال : إن هذه القيم الجيبية مزاحة في الطور بالنسبة لبعضها بعضاً . ويعرف انزياح الطور بأنه قيمة جبرية تساوي الفرق بين زوايا الطور الابتدائية ، فعلى سبيل المثال تعبر الزاوية (φ) عن

الانزياح في الطور بين التيار والجهد الممثلين في الشكل (١-٣) وتساوي $(\varphi=\varphi_u-\varphi_i)$.
هنا $(\varphi > 0)$ ، أي أن الجهد يتقدم في الطور على التيار. وعندما تكـون $(\varphi < 0)$ فـان
الجهد يتأخر في الطور عن التيار. أما عندما تكون قيمة (φ) مساوية للـصفر فـان الجهـد
والتيار يكونان متفقين في الطور.



الشكل (١-٢) تمثيل التيار الجيبي حسب المعادلة (1.1)



نرا الشكل w = wi = wu

لما نعرف ١

الشكل (١-٣)

ونشير هنا إلى أنه باستخدام العلاقة المثلثية $\sin\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$ يمكن الانتقال من الصيغة الرياضية الجيبية للتيار الموضحة في العلاقة (1.1) إلى الصيغة الرياضية التجيبية ليصبح كما يلي :

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_i - \pi/2) \qquad (1.3)$$

بالإضافة إلى الوسائط المذكورة أعلاه فإن التيار المتناوب يتميز أيضاً بقيمته الفعالة (I) والمتوسطة (I_{av}) .

المنتجة

آ– القيمة الفعالة للتيار المتناوب الدوري :

تسمى القيمة الفعالة للتيار المتناوب الدوري بجذر متوسط مربع القيمة له خلال الدور (T) ويعطى بالعلاقة الآتية :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt} \qquad (1.4)$$

بتربيع طرفي هذه المعادلة وضربها بالقيمة (RT) ، بحيث (R) هي قيمة ما لمقاومة أومية مثالية ، سنحصل على :

$$R\,T\,I^2 = \int_0^T R\,i^2(t)\,dt \qquad (1.5)$$

تبين هذه المساواة بأن القيمة الفعالة لتيار متناوب دوري تكافئ قيمة تيار مستمر (I) ينتج عند مروره في مقاومة أومية مثالية خلال الزمن (T) طاقة حرارية تساوي الطاقة التي يولدها التيار المتناوب الدوري $i(t)$ خلال الزمن نفسه . والشيء نفسه يمكن تطبيقه بالنسبة للقيم الفعالة لكل من الجهد والقوة المحركة الكهربائية ، أي أن :

$$\left.\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt} \\ E &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2(t)\,dt} \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

وهكذا فإنه بالنسبة للتيار المتناوب الجيبي المعطى بالعلاقة (1.1) يمكن الحصول على علاقة قيمته الفعالة (I) بمطاله ($\hat{I}$) عند ($\varphi_i = 0$) :

$$\int_0^T i^2(t)\,dt = \int_0^T \hat{I}^2 \sin^2 \omega t\,dt = \hat{I}^2 \int_0^T 1/2(1-\cos 2\omega t)dt = \hat{I}^2\, T/2$$

وبالتبديل في العلاقة (1.4) نجد أن :

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}.\frac{\hat{I}^2 T}{2}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\hat{I} \qquad (1.7)$$

وكما ذكرنا فإن العلاقة (1.7) هي صحيحة بالنسبة للقيم الفعالة للجهد والقوة المحركة الكهربائية الجيبيين :

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\hat{U} \\ E &= \frac{\hat{E}}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,\hat{E} \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

ب- القيمة المتوسطة للتيار المتناوب الدوري :

تعطى القيمة المتوسطة للتيار المتناوب الدوري (I_{av}) خلال الدور (T) بالعلاقة :

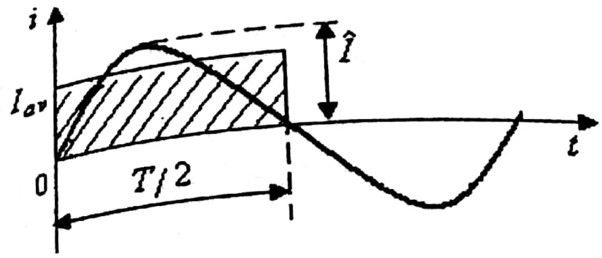
$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)\,dt \qquad (1.9)$$

إن القيمة المتوسطة للتيار المتناوب الجيبي خلال الدور (T) تساوي الصفر($I_{av} = 0$) لأن مساحة النصف الموجب للموجة الجيبية تساوي مساحة النصف السالب لها ، ولذلك يتم حساب القيمة المتوسطة للتيار الجيبي خلال زمن النصف الموجب لموجة التيار فقط ، أي من أجل نصف الدور، كما في الشكل (١-٤) :

$$I_{av} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} i(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} \hat{I}\sin\omega t\,dt$$

$$= \frac{4\hat{I}}{T\omega} = \frac{4\hat{I}}{T.2\pi f} = \frac{4\hat{I}T}{T.2\pi} = \frac{2\hat{I}}{\pi} \Rightarrow I_{av} = \frac{2}{\pi}\hat{I}$$

$$I_{av} \approx 0,637\ \hat{I} \tag{1.10}$$



الشكل (١-٤)

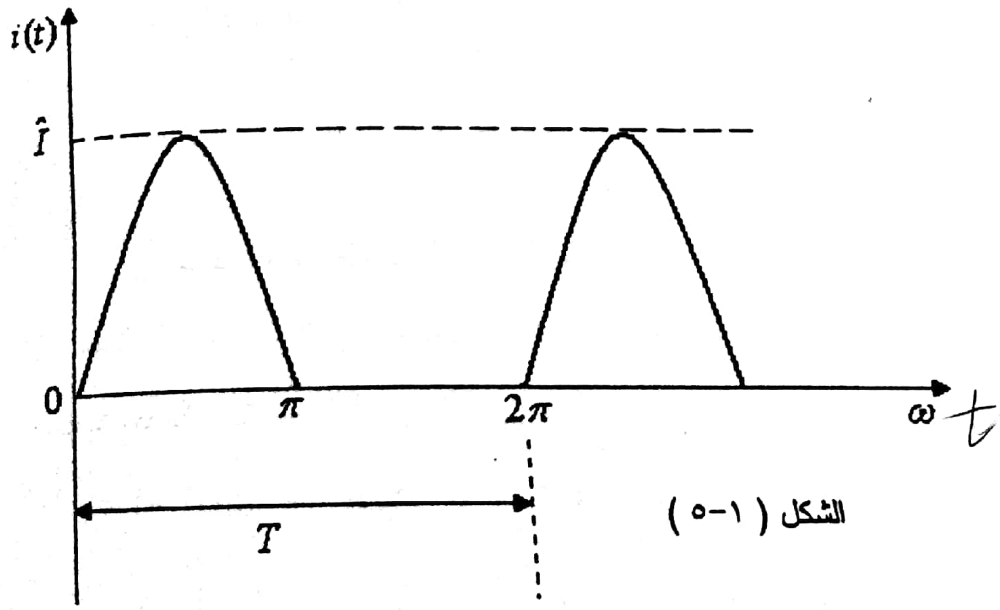
وكما نلاحظ من الشكل (١-٤) فإن القيمة المتوسطة للتيار الجيبي تحدد بقيمة عرض المستطيل الذي يكون طوله مساوياً (T/2) ، وتكون مساحة هذا المستطيل مساوية إلى المساحة المحددة بمنحني التيار $i(t)$.

والعلاقة (1.10) تصلح لإيجاد القيم المتوسطة للجهد والقوة المحركة الكهربائية :

$$\left.\begin{aligned} U_{av} &= 0,637\hat{U} \\ E_{av} &= 0,637\ \hat{E} \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

وكما هو واضح فإن زاوية الطور (φ) لا تلعب دوراً في تحديد القيم الفعالة والمتوسطة للتيار والجهد والقوة المحركة الكهربائية الجيبية .

مثال (١) : أوجد القيمة الفعالة والقيمة المتوسطة للتيار الجيبي المبين في الشكل (١-٥) .



الشكل (١-٥)

الحـــل :

عندما $0 < \omega t < \pi$ فإن $i(t) = \hat{I}\ \sin\omega t$

أما عندما $\pi < \omega t < 2\pi$ فإن $i(t) = 0$

وبالتالي ، وبما أن $T = 2\pi$:

- القيمة الفعالة حسب العلاقة (1.4) :

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2 \omega t\, d(\omega t) \quad + 0}$$

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \hat{I}^2 \sin^2 \omega t\, d(\omega t) = \frac{\hat{I}^2}{4}$$

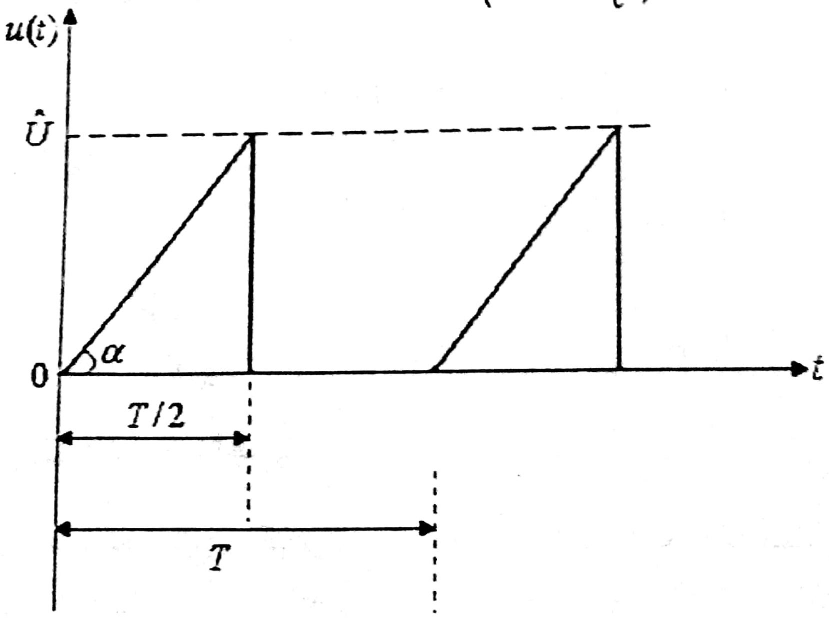
$$I = \frac{\hat{I}}{2}$$

- القيمة المتوسطة تساوي حسب العلاقة (1.9) :

$$I_{av} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{I} \sin \omega t \; d(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\int_0^{\pi} \hat{I} \sin \omega t \; d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} 0 (\omega t)] = 0,318 \; \hat{I}$$

مثال (٢) : احسب القيمة الفعالة والقيمة المتوسطة للجهد المتناوب الدوري المبين في الشكل (١-٦) إذا كانت قيمة مطاله ($\hat{U} = 100 V$) .



الشكل (١-٦)

الحــــل : نكتب أولاً الصيغة الرياضية لهذا الجهد كتابع للزمن في المجال ($0 < t < T$) :

$$x = \tan\alpha = \frac{\hat{U}}{T/2} = \frac{2\hat{U}}{T} \text{ ، } u(t) = xt$$

ومنه يكون في المجال ($0 < t < T/2$) :

$$u(t) = \frac{2\hat{U}}{T}\,.\,t$$

نعوض في العلاقتين (1.4) و (1.9) فنجد :

– القيمة الفعالة :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}$$

$$U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/2}\frac{4\hat{U}^2}{T^2}t^2\,dt + \int_{T/2}^{T}0\,dt\Big]$$

$$U^2 = \frac{4\hat{U}^2}{T^3}\cdot\frac{T^3/8}{3} = \frac{4\hat{U}^2}{T^3}\cdot\frac{T^3}{24} = \frac{\hat{U}^2}{6}$$

$$U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{6}} = \frac{100}{\sqrt{6}} = 40{,}82\ V$$

– القيمة المتوسطة :

$$U_{av} = \frac{1}{T}\Big[\int_0^{T/2}\frac{4\hat{U}}{T}t\,dt + \int_{T/2}^{T}0\,dt\Big]$$

$$U_{av} = \frac{2\hat{U}}{T^2}\cdot\frac{T^2/4}{2} = \frac{2\hat{U}}{T^2}\cdot\frac{T^2}{8}$$

$$U_{av} = \frac{\hat{U}}{4} = \frac{100}{4} = 25\ V$$

١-٢ تراكم التيارات الجيبية :

إن حاصل جمع تيارين جيبيين $i_1(t)$ و $i_2(t)$ لهما التردد نفسه ، بحيث :

$$\left.\begin{aligned} i_1(t) &= \hat{I}_1\sin(\omega t+\varphi_1) \\ i_2(t) &= \hat{I}_2\sin(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

هو تيار جيبي له التردد نفسه ، ويساوي :

$$i(t) = \hat{I}\sin(\omega t+\varphi) \qquad (1.13)$$

ولإيجاد $i(t)$ نكتفي بتحديد قيمة كل من ($\hat{I}$ و φ) لــه بدلالــة $\hat{I}_1, \hat{I}_2$ و φ_1, φ_2 وذلك بالاســتفادة مــن العلاقــات المثلثيــة $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ و $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$:

$$\left.\begin{aligned} i_1(t)+i_2(t) &= \hat{I}_1\sin(\omega t+\varphi_1) + \hat{I}_2\sin(\omega t+\varphi_2) \\ &= \hat{I}_1\sin\omega t\cos\varphi_1 + \hat{I}_1\cos\omega t\sin\varphi_1 \\ &\quad + \hat{I}_2\sin\omega t\cos\varphi_2 + \hat{I}_2\cos\omega t\sin\varphi_2 \\ &= (\hat{I}_1\cos\varphi_1 + \hat{I}_2\cos\varphi_2)\sin\omega t \\ &\quad + (\hat{I}_1\sin\varphi_1 + \hat{I}_2\sin\varphi_2)\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

وفي الوقت نفسه بتحليل $i(t)$ حسب العلاقة المثلثية :

$$i(t) = \hat{I}\cos\varphi\sin\omega t + \hat{I}\sin\varphi\cos\omega t \qquad (1.15)$$

بمقارنة طرفي العلاقتين (1.14) و (1.15) ، وباعتبارهما متساويتين نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \hat{I}_1\cos\varphi_1 + \hat{I}_2\cos\varphi_2 &= \hat{I}\cos\varphi \\ \hat{I}_1\sin\varphi_1 + \hat{I}_2\sin\varphi_2 &= \hat{I}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (1.16)$$

بتربيع طرفي المعادلتين (1.16) وجمعهما نحصل على قيمة ($\hat{I}$) والتي تساوي :

$$\hat{I} = \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1\hat{I}_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad (1.17)$$

وبقسمة المعادلة الثانية على الأولى في (1.16) نحصل على قيمة (φ) :

$$\varphi = arc\tan\frac{\hat{I}_1\sin\varphi_1 + \hat{I}_2\sin\varphi_2}{\hat{I}_1\cos\varphi_1 + \hat{I}_2\cos\varphi_2} \qquad (1.18)$$

وتبقى المعادلتان (1.17) و(1.18) صالحتان لإيجاد حاصل طرح تيارين جيبيين $i_1(t)$ و $i_2(t)$ بعد تعويض ($\hat{I}_2$) بإشارة ناقص فقط .

ويمكن تعميم هاتين المعادلتين لإيجاد حاصل تراكم عدة توابع جيبية لها التردد نفسه كما يلي :

$$\left.\begin{aligned} \hat{I} &= \sqrt{\Sigma \hat{I}_m^2 + \Sigma \hat{I}_m \hat{I}_n \cos(\varphi_m - \varphi_n)} \ : \ m \neq n \\ \varphi &= arc\tan \frac{\Sigma \hat{I}_m \sin\varphi_m}{\Sigma \hat{I}_m \cos\varphi_m} \end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

وبالطريقة نفسها يمكن معرفة تراكم الجهود والقوى المحركة الكهربائية الجيبية .

مثال (٣) :

أوجد القيمة اللحظية للجهد الكلي الناتج عن وصل مولدين كهربائيين لهما التردد نفسه على التسلسل ، علماً أن المولد الأول ينتج قوة محركة كهربائية قدرها $e_1(t) = 100 \sin \omega t$ والمولد الثاني يقدم قوة محركة كهربائية قيمتها اللحظية $e_2(t) = 75 \sin(\omega t + 45^o)$.

الحـــل : إن القوة المحركة الكهربائية الكلية الناتجة تساوي :

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) = \hat{E}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$+ \hat{E}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{E} \sin(\omega t + \varphi)$$

نحسب قيمة $(\hat{E})$ وقيمة (φ) حسب المعادلات (1.17), (1.18) على التوالي :

$$\hat{E} = \sqrt{\hat{E}_1^2 + \hat{E}_2^2 + 2\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

نعوض بالقيمة العددية :

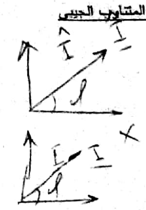
$$\hat{E} = \sqrt{100^2 + 75^2 + 2.100.75\cos 45^o} = 161{,}96\ [V]$$

$$\varphi = arc\tan \frac{\hat{E}_1 \sin\varphi_1 + \hat{E}_2 \sin\varphi_2}{\hat{E}_1 \cos\varphi_1 + \hat{E}_2 \cos\varphi_2}$$

وبالتعويض نجد :

$$\varphi = arc\tan \frac{0 + 75\sin 45^o}{100.1 + 75\cos 45^o}$$

$$\varphi = arc\tan \frac{53}{153} = 19^o$$



القيمة العظمى

القيمة الفعالة

ومنه فإن القيمة اللحظية للقوة المحركة الكلية :

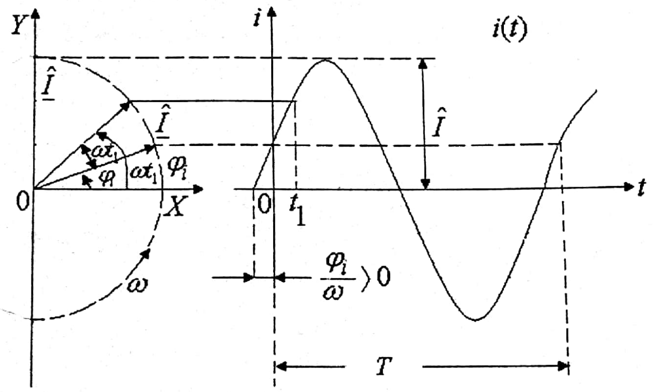
$$e(t) = 161{,}96 \sin(\omega t + 19^o)$$

$i(t)$ قيمة لحظية

١-٣ تمثيل التيار الجيبي بشعاع دائر – المخططات الشعاعية :

إن تحليل الدارات الكهربائية الخطية في المستوى الحقيقي يعد أمراً صعباً ويستغرق وقتاً طويلاً بسبب المعادلات التفاضلية ، ولتسهيل ذلك يتم تمثيل التيار الجيبي (أو أي تابع جيبي آخر) بشعاع دائر .

لنرسم في جملة الإحداثيات المتعامدة الشعاع $(\underline{\hat{I}})$ الذي يميل بزاوية (φ_i) بالنسبة للمحور الأفقي بحيث تكون طويلة هذا الشعاع مساوية لطويلة التيار الجيبي $(\hat{I})$ الذي يتغير حسب القانون $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$ ، كما في الشكل (١-٧) .



الشكل (١-٧)

$\sin\varphi_i = \frac{i(0)}{\hat{I}}$

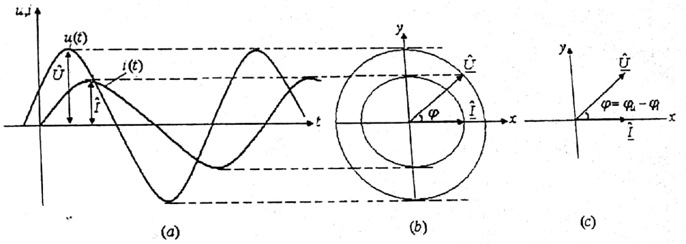
إن مسقط الشعاع $(\underline{\hat{I}})$ على المحور العمودي سيكون مساوياً $i(0) = \hat{I} \sin\varphi_i$ ، ويكافئ القيمة اللحظية للتيار عندما $(t = 0)$.

بفرض أن الشعاع ($\underline{\hat{I}}$) يبدأ بالدوران من اللحظة ($t = 0$) بسرعة زاوية ثابتة (ω) مساوية للتردد الزاوي للتيار وباتجاه معاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة فإنه بعد زمن ما وعند اللحظة (t_1) سيدور بزاوية قدرها (ωt_1) ليشكل مع المحور الأفقي زاوية قيمتها ($\omega t_1 + \varphi_i$) وعندها سيكون مسقط هذا الشعاع على المحور العمودي مساوياً $i(t_1) = \hat{I}\sin(\omega t_1 + \varphi_i)$ ويكافئ القيمة اللحظية للتيار عندما ($t = t_1$) . وبالتالي فإن مسقط شعاع التيار ($\underline{\hat{I}}$) على المحور العمودي يساوي في أية لحظة زمنية القيمة اللحظية للتيار $i(t)$ المتغير بشكل جيبي .

كما يمكن بشكل مشابه توضيح أن مسقط شعاع التيار ($\underline{\hat{I}}$) على المحور الأفقي يساوي في أية لحظة زمنية القيمة اللحظية للتيار $i(t)$ المتغير بشكل تجيبي :

$$i(t) = \hat{I}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

إذاً ، فمن الممكن تمثيل أي تابعين جيبيين لهما التردد نفسه وبمطالين مختلفين وبزاويتي طور مختلفتين بشعاعين دائرين (الجهد والتيار على مأخذي ثنائي الأقطاب مثلاً) ، كما هو موضح على الشكل (١–٨) .



الشكل (١–٨)

a– تمثيل تابعين جيبيين ، b– بشعاعين دائرين ، c– بشعاعين ساكنين

وبما أن الأشعة الدائرة تمثل توابع جيبية لها التردد نفسه ، فيمكن إهمال الدوران لنتمكن من رسم المخطط الشعاعي بأشعة ساكنة فقط ، إذ إن المهم هو أطوال الأشعة التي

تمثل مطالات التوابع الجيبية وزوايا طور الأشعة بالنسبة لبعضها البعض والتي بدورها تمثل زوايا طور التوابع الجيبية بالنسبة لبعضها ، وبالتالي نحصل على مخطط شعاعي تمثله أشعة ساكنة كما في الشكل (١–٨ c) .

وللتمييز بين التوابع الجيبية التي رمزنا لها بأحرف صغيرة [$i(t)$ $u(t)$ $e(t)$] سنرمز للأشعة الدائرة التي تمثلها بالأحرف نفسها ولكن مع وضع خط تحتها لتصبح [$\underline{i}(t)$ $\underline{u}(t)$ $\underline{e}(t)$] أما الأشعة الساكنة التي سنستخدمها في رسم المخططات الشعاعية الممثلة للدارات الكهربائية فسنرمز لها بأحرف كبيرة تحتها خط لتأخذ الشكل ($\underline{I}, \underline{U}, \underline{E}$) كقيم فعالة لهذه الوسائط ، أو ($\underline{\hat{I}}, \underline{\hat{U}}, \underline{\hat{E}}$) كقيم عظمى لها (مطالاتها) .

يسمح الرسم الدقيق للمخططات الشعاعية بموجب مقياس رسم بحل الدارات الكهربائية إذ يقدم وضوحاً كاملاً لزوايا طور ومطالات التيارات وهبوطات الجهود الإفرادية في الدارة الكهربائية بالإضافة إلى حساب قيم هذه الوسائط . ويمكن رسم المخططات الشعاعية إما لمطالات التيارات والجهود أو لقيمها الفعالة، أي أن أطوال الأشعة الساكنة تكافئ إما المطالات أو القيم الفعالة لتيارات وجهود الدارة . ويفضل رسم المخططات الشعاعية للقيم الفعالة .

مثال (٤) :

أوجد حاصل الجمع الشعاعي للشعاعين المكافئين للتابعين الجيبيين الآتيين :

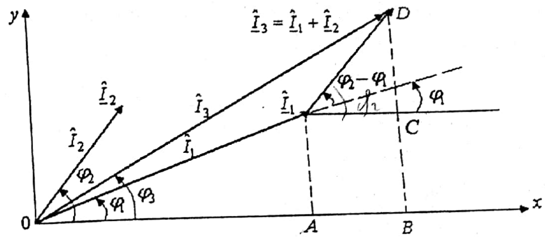
$$i_1(t) = \hat{I}_1\sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \hat{I}_2\sin(\omega t + \varphi_2)$$

بحيث : $\omega_1 = \omega_2 = \omega \;,\; \varphi_1 < \varphi_2 \;,\; \hat{I}_1 > \hat{I}_2$

الحـــل :

نرسم الشعاعين الساكنين $\underline{\hat{I}}_1$ و $\underline{\hat{I}}_2$ ، بحيث إن طولي الشعاعين وزاويتهما بالنسبة للمحور الأفقي يكافئ طويلتي التيارين الجيبيين $i_1(t)$, $i_2(t)$ ، وزاويتي طورهما ، كما في الشكل (١–٩) .

وبما أن للتيارين الجيبيين التردد نفسه فيكفي معرفة قيمة ($\hat{I}_3$ و φ_3) لتحديد شعاع المحصلة وبالتالي القيمة اللحظية له .



الشكل (١-٩)

من الشكل نلاحظ أن طول الشعاع ($\hat{I}_3$) يساوي :

$$\hat{I}_3 = \overline{0D} = \sqrt{\overline{0B}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{(\overline{0A} + \overline{AB})^2 + (\overline{BC} + \overline{CD})^2}$$

بالتبديل في هذه العلاقة بالقيم الآتية :

$$\overline{0A} = \hat{I}_1 \cos\varphi_1 \quad , \quad \overline{AB} = \hat{I}_2 \cos\varphi_2$$

$$\overline{BC} = \hat{I}_1 \sin\varphi_1 \quad , \quad \overline{CD} = \hat{I}_2 \sin\varphi_2$$

نجد أن :

$$\hat{I}_3 = \sqrt{\hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + 2\hat{I}_1 \hat{I}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

أما زاوية شعاع المحصلة (φ_3) فتساوي من الشكل :

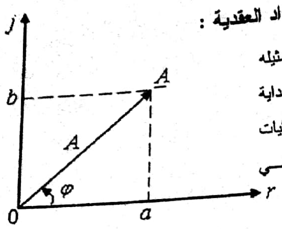
$$\tan\varphi_3 = \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{0A} + \overline{AB}} = \frac{\hat{I}_1 \sin\varphi_1 + \hat{I}_2 \sin\varphi_2}{\hat{I}_1 \cos\varphi_1 + \hat{I}_2 \cos\varphi_2}$$

ونلاحظ أن علاقتي حساب ($\hat{I}_3$ و φ_3) تتطابقـان مـع العلاقتين (1.17) و(1.18) الخاصتين بحساب حاصل جمع تابعين جيبيين لهما التردد نفسه . ومنه يمكن كتابة القيمة اللحظية للتيار الجيبي الناجمة عن جمع $i_1(t)$ و $i_2(t)$ والتي لها الشكل :

$$i_3(t) = \hat{I}_3 \sin(\omega t + \varphi_3)$$

١-٤ تمثيل التيار الجيبي بوساطة الأعداد العقدية :

من المعروف أن أي عدد عقدي يمكن تمثيله بشعاع ساكن في المستوي العقدي بحيث تكون بداية هذا الشعاع منطبقة على بداية محوري الإحـداثيات المتعامدين وتحدد نهايته تماماً بإحداثيين ، كما فـي الشكل (١-١٠) .



الشكل (١-١٠)

إن نقل الشعاع الساكن إلى المستوي العقدي يعني إيجاد صيغة رياضية عقدية له (تابع عقدي) يساعدنا في حساب التوابع الجيبية وذلك بنقل المعادلات التفاضلية من المستوي الحقيقي إلى المستوي العقدي وتحويلها إلى معادلات جبرية عقدية سهلة الحل .

وكما نلاحظ من الشكل فإن العدد العقدي $\underline{A}$ يمكن أن يكتب بثلاثة أشكال :

آ- الشكل الديكارتي : ويتم فيه التعبير عن العدد العقدي ، وبالتالي عن الشعاع الساكن بوساطة مسقطيه على محوريّ الإحداثيات العقدية (مركبتيه الحقيقية a والتخيلية b) :

$$\underline{A} = a + jb \qquad (1.20)$$

ب- الشكل القطبي : ويكون عندما يراد التعبير عن مركبتي العدد العقـدي بوسـاطة الزاوية (φ) كما يلي :

$$\underline{A} = A\cos\varphi + jA\sin\varphi = A(\cos\varphi + j\sin\varphi) \qquad (1.21)$$

حيث يتم حساب طول الـشعاع (A) ومركبتيـه الحقيقـة (a) والتخيليـة (b) مـن الشكل (١-١٠) بالطريقة الآتية :

$$\left.\begin{aligned} A = |\underline{A}| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad &, \quad \varphi = arc\tan\frac{b}{a} \\ a = A\cos\varphi = \mathrm{Re}[\underline{A}] \quad &, \quad b = A\sin\varphi = \mathrm{Im}[\underline{A}]^{*} \end{aligned}\right\} \qquad (1.22)$$

* Re و Im : هما اختصار للكلمتين الإنكليزيتين Real و Imaginary ، أو الفرنسيتين Reel و Imaginaire أو الألمانيتين Real و Imaginar .

ج- الشكل الأسي : ويتم الحصول عليه بوساطة قانون إيلر :

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi}$$

وبالتالي :

$$\underline{A} = Ae^{j\varphi} \qquad (1.23)$$

قيم فعالة

شعاع ساكن

ويفضل استخدام هذا الشكل في كثير من الحسابات نظـراً لأن القيمتـين المحـددتين للشعاع (A و φ) تحسبان كحدين منفصلين عن بعضهما . بالإضافة إلى سهولة التعامل مـع هذا الشكل في حالات الضرب والقسمة والرفع إلى قوة والجذر، بينما يكون استخدام الـشكل الديكارتي للعدد العقدي مفضلاً عند جمـع أو طـرح الأعـداد العقديـة . ويـدعى الرمـز ($j = \sqrt{-1} = e^{j\pi/2}$) بالوحدة التخيلية أو بعامل الـدوران إلـى زاويـة $\frac{\pi}{2} = 90^o$. إن الضرب بالعامـل (j) يؤدي إلى دوران الشعاع بزاوية قائمة بعكس اتجـاه دوران عقارب الساعة ، أما الضرب بالعامل ($-j = e^{-j\pi/2}$) فيؤدي إلى دوران الشعاع بزاوية قائمة ولكن باتجاه دوران عقارب الساعة .

وفيما يلي سنذكّر بأهم الرموز والقواعد المستخدمة في الحساب العقدي :

$j = \sqrt{-1} = e^{j90^o} = e^{j\pi/2} \ , \ \frac{1}{j} = -j = e^{-j90^o} = e^{-j\pi/2} \ , \ j^2 = -1$
$e^{j180^o} = -1 \ , \ \underline{A}_1 . \underline{A}_2 = A_1 A_2 \, e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
$\frac{\underline{A}_1}{\underline{A}_2} = \frac{A_1 e^{j\varphi_1}}{A_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{A_1}{A_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} \ , \ \sqrt{\underline{A}} = \sqrt{Ae^{j\varphi}} = \sqrt{A}\, e^{j\frac{\varphi}{2}}$

كما نـسمي العـدد العقـدي ($\underline{A}^* = a - jb = Ae^{-j\varphi}$) بمرافـق العـدد العقـدي ($\underline{A} = a + jb = Ae^{j\varphi}$) ، ويمثل خيال الشعاع $\underline{A}$ بالنسبة للمحـور الحقيقـي . ويـساوي حاصل جداء العدد العقدي بمرافقه العقدي قيمة حقيقية ، أي أن :

$$\underline{A}.\underline{A}^* = A^2 \qquad (1.24)$$

ويمكننا ، وحسب العلاقات (1.7) , (1.8) استخدام الشعاع الساكن بحيث يكون طولـه مكافئاً لمطال التابع الجيبي ، فمثلاً يمكن كتابة العلاقة (1.23) التي تصف شعاعاً ساكناً عقدياً للقيم الفعالة كما يلي :

$$\underline{\hat{A}} = \hat{A}e^{j\varphi} \qquad (1.25)$$

قيم عظمى

وانطلاقاً من ذلك يمكن استنتاج الصيغة الرياضية العقدية للشعاع الـدائر $\underline{a}(t)$ الـذي يمثل التابع الجيبي $a(t)$ وذلك بضرب طرفي العلاقة (1.25) بالحد ($e^{j\omega t}$) :

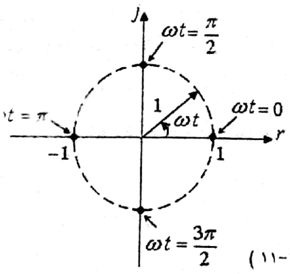
$$\underline{a}(t) = \underline{\hat{A}}e^{j\omega t} = \hat{A}e^{j\varphi}.e^{j\omega t} = \hat{A}e^{j(\omega t + \varphi)} \qquad (1.26)$$

شعاع دائر

إن قيمة $\underline{a}(t)$ تتألف من قسمين ، أحدهما ثابت ($\underline{\hat{A}} = \hat{A}e^{j\varphi}$) ويسمى المطال العقدي ويساوي عدد عقدي طويلته تساوي مطال التابع المتناوب الجيبي ودليله (φ) هو عبارة عن زاوية الطور الابتدائية للتابع . أما القسم الآخر ($e^{j\omega t}$) فهو متغير بتغير الزمن ويسمى بعامل الدوران وتساوي طويلته الواحد أما دليله فيتعلق خطياً بالزمن ، وتمثله نقطة فـي المـستوى العقدي تدور بشكل دائم على محيط دائرة نصف قطرها يساوي الواحد ومركزها مركز الإحـداثيات العقدية ، كما في الشكل (١-١١) . ويكون دوران هذه النقطة بسرعة زاوية ثابتة (ω) باتجاه يعاكس اتجاه دوران عقارب الساعة . ويبين الجدول (١-١) قيم ($e^{j\omega t}$) في نقاط مميزة .

الجدول (١-١)

ωt	0	$\pi/2$	$-\pi/2$	π
$e^{j\omega t}$	1	j	$-j$	-1



الشكل (١-١١)

وكما ذكرنا سابقاً فإنه يمكن التعبير عن الشكل الأسي للـشعاع المبـين فـي العلاقـة (1.26) بالشكل القطبي ، أي أن القيمة اللحظية العقدية $\underline{a}(t)$ تكتب كما يلي :

$$\underline{a}(t) = \hat{A}\cos(\omega t+\varphi) + j\,\hat{A}\sin(\omega t+\varphi) \qquad (1.27)$$

وهي تتألف كما نلاحظ من قسمين : القسم الحقيقي المتغير بشكل تجيبي ، والقسم التخيلي المتغير بشكل جيبي . وبما أن القيم الكهربائية اللحظية [التيار $i(t)$ ، الجهد $u(t)$] ، والقوة المحركة الكهربائية $e(t)$ يمكن أن تكون في المستوي الحقيقي إما ذات صيغة جيبية أو ذات صيغة تجيبية ، فإنها ستساوي إما القسم التخيلي من القيمة اللحظية العقدية الموافقة لها أو القسم الحقيقي منها على التوالي . فإذا أخذنا التيار مثلاً فإن قيمته اللحظية الحقيقية ستكون مساوية :

– للتيار ذي الصيغة الجيبية :

$$i(t) = \mathrm{Im}[\hat{I}\,e^{j(\omega t+\varphi_i)}] = \hat{I}\sin(\omega t+\varphi_i) \qquad (1.28)$$

– للتيار ذي الصيغة التجيبية :

$$i(t) = \mathrm{Re}[\hat{I}\,e^{j(\omega t+\varphi_i)}] = \hat{I}\cos(\omega t+\varphi_i) \qquad (1.29)$$

تسمى القيمة العقدية ($\underline{I} = I\,e^{j\varphi_i}$) ، (حيث : $I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$) بالتيار الجيبي الفعال العقدي أو بالتيار العقدي ودليله هو الزاوية (φ) نفسها للمطال العقدي ، أما طويلته فهي أصغر بمقدار ($\sqrt{2}$) من طويلة المطال العقدي .

مثال (٥) : إذا كان التيار العقدي مساوياً $\underline{I} = (6+j8)\ A$ ، والمطلوب : كتابة علاقة قيمته اللحظية الجيبية .

الحـــل : نوجد القيمة الفعالة لهذا التيار :

$$I = \sqrt{6^2+8^2} = 10\ A$$

ومنه مطال التيار :

$$\hat{I} = \sqrt{2}\ I = 14{,}1\ A$$

وزاويته تساوي :

$$\varphi_i = arc\tan\frac{8}{6} = 53{,}7^o$$

وبالتالي فإن علاقة القيمة اللحظية الجيبية للتيار تكتب كما يلي :

$$i(t) = 14{,}1\sin(\omega t+53{,}7^o)\ A$$

مثال (٦) : أوجد المطال العقدي والتيار العقدي إذا كانت قيمته اللحظية معطاة بالعلاقة :

$$i(t) = 14{,}1\sin(\omega t+30^o)\ A$$

الحـــل :

المطال العقدي يساوي : $\hat{\underline{I}} = \hat{I}\,e^{j\varphi_i} = 14{,}1\ e^{j30^o}\ A$ مطال عقدي

ولإيجاد التيار العقدي تحسب قيمته الفعالة :

$$I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} = \frac{14{,}1}{\sqrt{2}} = 10\ A$$

ومنه التيار العقدي يساوي :

$$\underline{I} = I\,e^{j\varphi_i} = 10\,e^{j30^o}\ A$$

والجدول (١–٢) يتضمن العلاقات العقدية لتابع جيبي عند تفاضله أو تكامله بالنسبة للزمن .

الجدول (١–٢) تفاضل وتكامل تابع جيبي بالنسبة للزمن

الصيغة اللحظية والعقدية للتابع الجيبي	التابع الجيبي	تفاضل التابع	تكامل التابع
الصيغة اللحظية	$a(t) = \hat{A}\sin(\omega t+\varphi)$	$\frac{d\underline{a}}{dt} = \omega\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$ $= \omega\hat{A}\sin(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$	$\int_0^t \underline{a}\,dt = -\frac{1}{\omega}\hat{A}\cos(\omega t+\varphi)$
الصيغة العقدية	$\underline{a}(t) = \hat{A}\,e^{j(\omega t+\varphi)}$	$\frac{d\underline{a}}{dt} = \omega\hat{A}\,e^{j(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})}$ $= j\omega\,\underline{a}(t)$	$\int_0^t \underline{a}\,dt = \frac{1}{\omega}\hat{A}\,e^{j(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})}$ $= \frac{1}{j\omega}\underline{a}(t)$
المطال العقدي	$\hat{\underline{A}} = \hat{A}\,e^{j\varphi}$	$j\omega\hat{\underline{A}}$	$\frac{1}{j\omega}\hat{\underline{A}}$
القيمة الفعالة العقدية	$\underline{A} = A\,e^{j\varphi}$	$j\omega\underline{A}$	$\frac{1}{j\omega}\underline{A}$

وستساعد معطيات هذا الجدول في معرفة كيفية تحويل عناصر الدارة الكهربائية ، وبالتالي العلاقات التفاضلية والتكاملية الواصفة لها من المستوي الحقيقي إلى المستوي العقدي كما سنرى لاحقاً .

١-٥ الدارة الكهربائية وعناصرها :

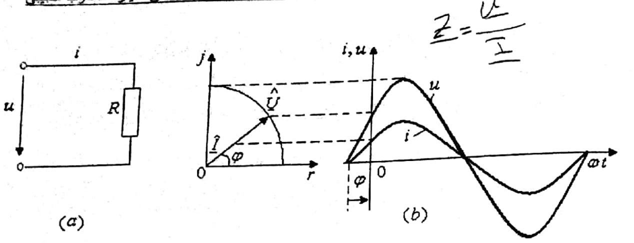
تعرف الدارة الكهربائية بأنها مجموعة من العناصر الفعالة وغير الفعالة المتصلة فيما بينها بوساطة نواقل كهربائية لتشكل دارة مغلقة تسمح للتيار الكهربائي بالمرور خلالها ، حيث يمكن وصف العمليات الكهرومغناطيسية فيها بمساعدة مفاهيم القوة المحركة الكهربائية والتيار والجهد . ويعد الفرع في الدارة الكهربائية جزءاً منها يتكون من عنصر واحد أو عدة عناصر موصولة على التسلسل ويمر خلالها التيار الكهربائي نفسه في أية لحظة زمنية ، أما العقدة في الدارة الكهربائية فهي مكان اتصال أكثر من فرعين من فروع الدارة ، ونسمي أي مسار مغلق يحيط بعدة فروع في الدارة بالحلقة المغلقة . وتلعب مفاهيم الفرع والعقدة والحلقة دوراً هاماً في حل الدارات الكهربائية .

١-٥-١ العناصر غير الفعالة (الخاملة) *Passive Elements* :

يتم في هذه العناصر، إما اختزان الطاقة الكهربائية أو تحويلها إلى شكل آخر من أشكال الطاقة المعروفة ، وتسمى هذه العناصر (بشكلها المفرد أو المجتمع) بثنائيات الأقطاب الأساسية غير الفعالة ، وأهم هذه العناصر :

آ- **المقاومة الأومية (R)** : وهي عنصر الدارة الذي يتم فيه تحويل غير عكوس للطاقة الكهربائية إلى طاقة حرارية . فلو طبق جهد متناوب جيبي قيمته اللحظية $u(t)=\hat{U}\sin(\omega t+\varphi_u)$ على مأخذي هذا العنصر كما في الشكل (١-١٢ a) فإن التيار سيكون مساوياً :

$$i(t)=\frac{u(t)}{R}=\frac{\hat{U}}{R}\sin(\omega t+\varphi_u)=\hat{I}\sin(\omega t+\varphi_i) \qquad (1.30)$$



الشكل (١-١٢)

a- دارة كهربائية بمقاومة أومية فقط

b- التمثيل البياني اللحظي والشعاعي للعلاقة بين الجهد والتيار في الدارة

واضح من العلاقة أن ($\frac{\hat{U}}{R}=\hat{I}$)، أي أن نسبة مطال الجهد إلى مطال التيار تساوي المقاومة الظاهرية للدارة والتي تمتلك المحتوى الفيزيائي للمقاومة ($\frac{\hat{U}}{\hat{I}}=Z=R$) ، كما أنه يتبين من الشكل أن ($\varphi_u=\varphi_i$) ، وبالتالي زاوية فرق الطور بين الجهد والتيار على طرفي المقاومة تساوي الصفر ($\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0$) ، أو يقال بأن الجهد والتيار في الدارة متفقان في الطور. وتكون الممانعة العقدية للدارة مساوية حاصل قسمة مطال الجهد العقدي على مطال التيار العقدي :

$$\underline{Z}=\frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}}=\frac{\hat{U}e^{j\varphi_u}}{\hat{I}e^{j\varphi_i}}=Re^{j(\varphi_u-\varphi_i)}=Re^{j0}=R \qquad (1.31)$$

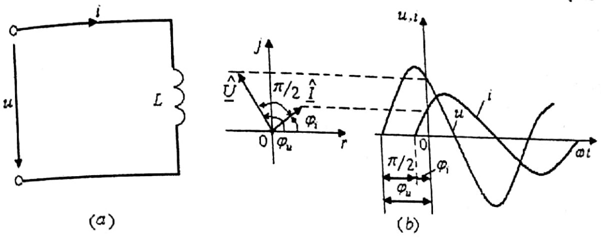
أما السماحية العقدية فتساوي :

$$\underline{Y}=\frac{\underline{\hat{I}}}{\underline{\hat{U}}}=\frac{1}{\underline{Z}}=\frac{1}{R}=G \qquad (1.32)$$

أي أن الممانعة العقدية والسماحية العقدية للدارة المؤلفة من مقاومة أومية فقط هي عبارة عن قيم حقيقية وتساويان المقاومة الأومية (الفعالة) والسماحية الفعالة (الناقلية) .

تقاس المقاومة الأومية بالأوم (Ω) بينما تقاس الناقلية بالسيمينس (S) .

ب- التحريض (L) : وهو عنصر الدارة الكهربائية الذي يتم فيــه تخــزين الطاقــة الكهربائية كطاقة حقل مغناطيسي . فإذا تم تطبيق جهد لحظي جيبي $u(t)$ على مأخذي ملــف تحريضي كما في الشكل (١-١٣ a) فإنه سـيمر خلالــه تيــار $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ ، وسيولد هذا التيار في الملف التحريضي قوة محركة كهربائية ذاتية قيمتهــا ($e_L = -L\dfrac{di}{dt}$) والتي تعادل قيمة الجهد المطبق على مأخذي الملف $u(t)$.



الشكل (١-١٣)

a- دارة كهربائية بملف فقط

b- التمثيل البياني والشعاعي للعلاقة بين الجهد والتيار في الدارة

واعتماداً على قانون كيرشوف الثاني للقيم اللحظية يمكن أن نكتب :

$$\left.\begin{aligned} & u + e_L = 0 \\ & u(t) = \boxed{-e_L = L\frac{di}{dt}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.33)$$

بالتعويض بقيمة التيار في هذه العلاقة ، وبعد إجراء التفاضل نحصل على :

$$\begin{aligned} u(t) &= L\frac{di}{dt} = \omega L\hat{I}\cos(\omega t + \varphi_i) \\ &= \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u) \qquad (1.34) \end{aligned}$$

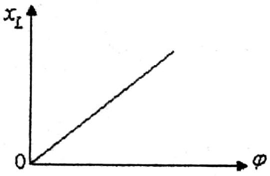
ويتبين لنا من العلاقة (1.34) والشكل (١-١٣ b) أن ($\hat{U} = \omega L\hat{I}$) ، ومنــه فــإن حاصل قسمة مطال الجهد على مطال التيار يسمى بالمقاومة الظاهريــة للــدارة (Z) والتــي

تساوي ($Z = \dfrac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L$) ، وأيضاً $\varphi_u = \varphi_i + \dfrac{\pi}{2}$ ، وهذا يعني أن الفرق في زاوية الطــور بين الجهد والتيار على طرفي الملف تساوي $90^\circ(\varphi_u - \varphi_i = \dfrac{\pi}{2})$ ، أو يقال التيار في الملف يتأخر عن الجهد المطبق عليه بربع دورة .

والممانعة العقدية للدارة هي حاصل قسمة مطال الجهد العقدي علــى مطــال التيــار العقدي ، أي :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}} = \frac{\omega L\hat{I}e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})}}{\hat{I}e^{j\varphi_i}} = \omega Le^{j\frac{\pi}{2}} = j\omega L = jx_L \qquad (1.35)$$

وتسمى ($x_L = \omega L$) بالمفاعلة التحريضية للملف (المقاومة التخيليــة التحريــضية) وتقاس بالأوم . ويفهم المعنى الفيزيائي للمفاعلة التحريضية بإعاقتها لمرور تيار القوة المحركة الكهربائية الذاتية الناتجة في الملف عند مرور التيار المتناوب فيه والموجهة بعكس الجهد على هذا الملف .



الشكل (١-١٤)

وتعد (x_L) تابع خطي للتردد (ω) كما في الــشكل (١-١٤) وعنــدما ($\omega = 0$) ، أي للتيــار المــستمر ، فــإن قيمتــه ($x_L = 0$) . وبازدياد (ω) تزداد قيمة المفاعلة التحريضية.

إن السماحية العقدية لدارة الملف تساوي :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{\hat{I}}}{\underline{\hat{U}}} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{j\omega L} = -j\frac{1}{\omega L} = -jB_L \qquad (1.36)$$

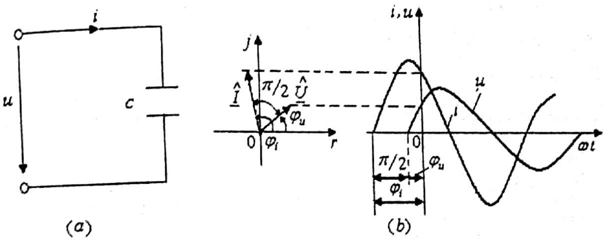
وتسمى (B_L) بالسماحية التحريضية وتقاس بالسيمينس ، ونلاحظ من العلاقتين (1.35) و (1.36) أن كل من الممانعة العقدية والسماحية العقدية للدارة المكونة من ملــف تحريــضي فقط تأخذ قيماً تخيلية (ذات صفة ردية) فقط .

ج- السعة (C) : وهي عنصر الدارة الذي يقوم بتخزين الطاقة الكهربائيـة كطاقـة حقل كهربائي . فإذا طبقنا على مأخذي مكثف سعته (C) ، كما في الشكل (١-١٥ a) جهـداً جيبياً $u(t)=\hat{U}\sin(\omega t+\varphi_u)$ فسيمر تيار في الدارة قيمته اللحظية :

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=\frac{dC\,u(t)}{dt}=C\frac{d\,u(t)}{dt}$$

$$=\omega C\hat{U}\cos(\omega t+\varphi_u)=\hat{I}\sin(\omega t+\varphi_u+\frac{\pi}{2})$$

$$=\hat{I}\sin(\omega t+\varphi_i) \qquad (1.37)$$



الشكل (١-١٥)

a- دارة كهربائية بمكثف فقط

b- التمثيل البياني والشعاعي للعلاقة بين الجهد والتيار في الدارة

إن المقاومة الظاهرية في هذه الحالة تساوي حاصل قسمة مطال الجهد علـى مطـال التيار، ومن العلاقة (1.37) نجد أن : $\omega C\hat{U}=\hat{I}$ ، ومنه فالمقاومة الظاهرية تساوي :

$$Z=\frac{\hat{U}}{\hat{I}}=\frac{1}{\omega C}$$

ونلاحظ أيضاً أن : $\varphi_i=\varphi_u+\frac{\pi}{2}$ أو $\varphi_u=\varphi_i-\frac{\pi}{2}$

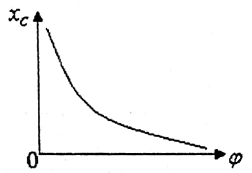
وهذا يعني أن الفرق في زاوية الطور بين الجهد والتيار يساوي (-90^o) ، أو يقـال بأن التيار في المكثف يتقدم على الجهد بمقدار ربع دورة .

وكما كان هو الحال بالنسبة للمقاومـة والملـف ، فـإن الممانعـة العقديـة للـدارة بمكثف تساوي :

$$\underline{Z}=\frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}}=\frac{\hat{U}e^{j\varphi_u}}{\omega C\hat{U}e^{j(\varphi_u+\frac{\pi}{2})}}=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}=-j\,x_C \qquad (1.38)$$

إن قيمة ($x_C=\frac{1}{\omega C}$) تسمى بالمفاعلة السعوية للمكثف (المقاومة التخيلية السـعوية) وتقاس بالأوم . ويتلخص المعنى الفيزيائي للمفاعلة السعوية في إعاقة مـرور التيـار عبـر المكثف بسبب وجود شحنة على صفيحتيه . وتتناسب هذه المفاعلة عكساً مع التردد (ω) كما هو موضح في الشكل (١-١٦) .

فعندما تكون قيمـة ($\omega=0$) ، أي للتيار المستمر، فإن (x_C) تأخذ قيمة لا نهائية وهذا يعني أنه في نظام العمـل المـستقر لا يمرر المكثف تياراً مستمراً ، ومع تزايد قيمة (ω) تتناقص المفاعلة السعوية للمكثف .



الشكل (١-١٦)

وتعطى السماحية العقدية للدارة المدروسة كما يلي :

$$\underline{Y}=\frac{\underline{\hat{I}}}{\underline{\hat{U}}}=\frac{1}{\underline{Z}}=j\omega C=j\,B_C \qquad (1.39)$$

حيث $B_C=\omega C$ السماحية السعوية ، وتقاس بالسيمنس .

ومن العلاقتين (1.38) و (1.39) يتضح أن الممانعة العقدية والسماحية العقدية لـدارة بمكثف تملكان قيماً تخيلية (ذات صفة ردية) فقط .

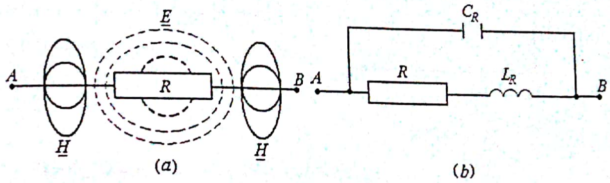
ونذكر هنا أن المقاومة الظاهرية لكل من الملف والمكثف لا تمتلك المعنى الفيزيـائي للمقاومة وإنما تمثل قيمة حسابية بحتة لها بُعد المقاومة ، ولذلك تسمى بالمقاومة الظاهرية .

وتدعى العناصر الثلاثة (المقاومة ، والملف ، والمكثف) بوصفها المذكورة أعلاه مـن حيث قيامها بنوع واحد فقط من أنواع تحويل الطاقة الكهربائية بالعناصر المثالية (النقية) .

إلا أنه من غير الممكن في الحياة العملية تصنيع هـذه العناصـر بـشكلها المثـالي ، فالمقاومة مثلاً ، تصنع إما من سلك ملفوف أو من طبقات فحمية أو معدنية ، وبالتـالي فهـي تملك سعة (C) وتحريض (L) ، بحيث إن قيمة كلٍ منهما تتعلق بالبنية التصميمية للمقاومـة العملية (الحقيقية) ، ويجب أخذ هاتين القيمتين بالاعتبار عند حساب الدارات الكهربائيـة فـي بعض الحالات المحددة . والشيء نفسه ينطبق على الملف العملي والمكثف العملـي . ويـتم بمساعدة العناصر المثالية (R,L,C) وضع الدارات المكافئة لكل من العناصر العملية الأساسية والتي توضح خواص هذه العناصر ووسائطها ، ويمكن حساب وسـائط الـدارات المكافئـة لعناصر التوصيل العملية ، إما بالطريقة التجريبية أو الحسابية .

يجب إيجاد معامل الضياع في الحالات الآتية

د- المقاومة الأومية العملية : يبين الـشكل (١-١٧) المقاومـة العمليـة ودارتهـا المكافئة التقريبية .



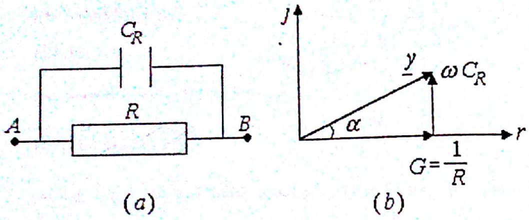
الشكل (١-١٧) $\underline{H}$- شدة الحقل المغناطيسي ، $\underline{E}$- شدة الحقل الكهربائي

a- المقاومة الأومية العملية ، b- الدارة المكافئة التقريبية للمقاومة العملية

ويمكن أن تكون دارة المقاومة العملية أكثر تعقيداً عند مراعاة وجود السعة الأرضية ، أو عند اعتبار أن عناصر التوصيل (L,C)هي عناصر غير مجمّعة .

وسنكتفي بهذا التقريب للدارة المكافئة للمقاومة العملية ، ونناقش الحـالتين الحـديتين الآتيتين للدارة المكافئة .

١- قيمة (R) كبيرة : وبالتالي يمكن إهمال قيمة المفاعلة التحريضية (ωL) مقارنة مع قيمة (R) ، وتصبح الدارة المكافئة كما في الشكل (١-١٨) .



الشكل (١-١٨)

a- الدارة المكافئة للمقاومة العملية ، b- المخطط الشعاعي لهذه الدارة

توصيل المقاومات

ونلاحظ أن ممانعة الدارة ستكون مساوية :

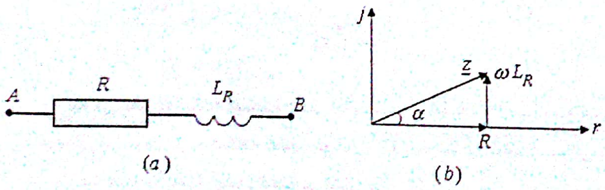
$$\underline{Z}_{AB} = R \,//\, \frac{1}{j\omega C_R} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C_R} = \frac{R}{1 + j\omega C_R R} \qquad (1.40)$$

ومن المخطط الشعاعي نرى أن :

معامل الضياع للدارة $d_R =$

$$\tan\alpha = \frac{\omega C_R}{\frac{1}{R}} = \omega C_R R = \frac{\omega . C . R^2}{R} \qquad (1.41)$$

٢- قيمة (R) صغيرة : يمكن إهمال قيمة ($\frac{1}{\omega C_R}$) مقارنة مع (R) لتكـون الـدارة المكافئة ومخططها الشعاعي في هذه الحالة كما في الشكل (١-١٩) .



الشكل (١-١٩)

a- الدارة المكافئة للمقاومة العملية ، b- المخطط الشعاعي لهذه الدارة

وهنا ممانعة الدارة هي :

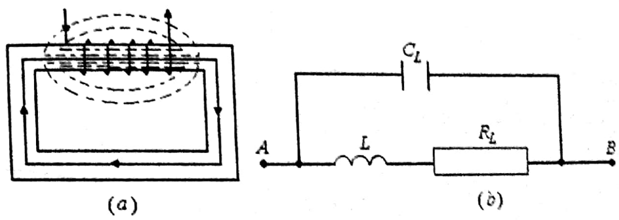
$$\underline{Z}_{AB} = R + j\omega L_R \qquad (1.42)$$

ومن المخطط الشعاعي الموافق نجد :

$$\tan\alpha = \frac{\omega L_R}{R} \qquad (1.43)$$

مما سبق نرى أن المقاومة العملية تختلف عن المقاومة المثالية ، إذ إن الفـرق بـين زاوية طور الجهد المطبق على المقاومة العملية وزاوية طور التيار المار بها لا يساوي الصفر كما هو الحال بالنسبة للمقاومة الأومية المثالية وإنما تمتلك المقاومة العملية زاوية ضياع (α) تختلف قيمتها بحسب قيم كل من (ωL_R و $\frac{1}{\omega C_R}$) بالنسبة لقيمة (R) .

هـ- الملف العملي : نبين على الشكل (١-٢٠) الملف ذا القلب الحديـدي ودارتـه المكافئة التقريبية ، إذ إن كل ملف يمتلك مقاومة (R_L) وسعة (C_L) ذاتيتـين تعبـران عـن ضياعات الاستطاعة في سلك الملف وفي القلب الحديدي وعن السعة بين لفات الملف .

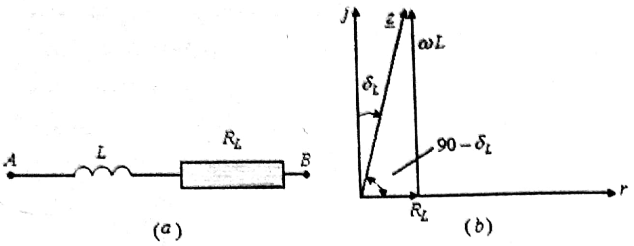


الشكل (١-٢٠)

يتم في حالة الترددات العالية إهمال التأثير السعوي للملـف مقارنـة مـع تـأثيره التحريضي مما يجعل دارته المكافئة تتطابق مع الدارة التقريبية المكافئة للملف الهـوائي مـع عدم مراعاة السعة الأرضية أيضاً والمبينة في الشكل (١-٢١) .

واضح من المخطط الشعاعي والدارة المكافئة أن ممانعة الملف العملي تأخذ الشكل الآتي :

$$\underline{Z}_{AB} = R_L + j\omega L \qquad (1.44)$$



الشكل (١-٢١)

a- الدارة المكافئة لملف هوائي ، b- المخطط الشعاعي لهذه الدارة

ونلاحظ من المخطط الشعاعي أن زاوية فرق الطور بين الجهد المطبق على مأخـذي الملف العملي والتيار المار فيه لا تساوي (90^o) كما هو الحال في الملف المثالي ، بينما تكون مساوية ($90^o-\delta_L$) ، حيث تسمى (δ_L) بزاوية ضياع الملف ، بينما يعبر ($\tan\delta_L = d_L$) عن عامل ضياع الملف والذي يساوي :

$$\tan\delta_L = d_L = \frac{R_L}{\omega L} \qquad (1.45)$$

وتحسب مقاومة ضياع الملف (المقاومة الداخلية للملف) من العلاقة (1.45) :

$$R_L = \omega L d_L \qquad (1.46)$$

ويسمى مقلوب عامل ضياع الملف بجودة الملف ونرمز لها بالرمز (Q_L) .

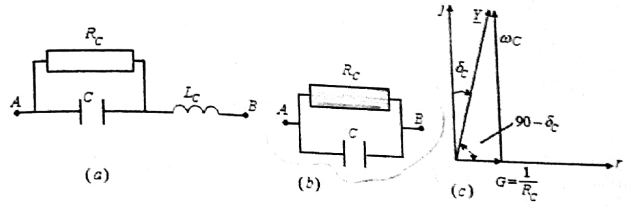
$$Q_L = \frac{1}{d_L} \qquad (1.47)$$

وتأخذ ممانعة الملف الشكل الآتي :

$$\underline{Z}_{AB} = R_L + j\omega L = \omega L(j + \frac{R_L}{\omega L}) = \omega L(j + \tan\delta_L)$$

$$\underline{Z}_{AB} = \omega L(j + d_L) \qquad (1.48)$$

و- المكثف العملي : تؤثر العديد من العوامل والاعتبارات في شكل الدارة المكافئة للمكثف العملي كأسلاك توصيل المكثف والعازل الكهربائي الموجود بين صفيحتي المكثف مما يؤدي إلى ضياعات تمثل في دارة المكثف بمقاومة (R_C) . كما أن مرور التيار في سلكي توصيل المكثف وعلى سطحي صفيحتي المكثف والناجم عن تغير قطبية هاتين الصفيحتين يؤدي إلى ظهور حقل مغناطيسي متغير يعبر عنه في الدارة المكافئة للمكثف العملي بتحريض (L_C) .



الشكل (١-٢٢)

a- دارة المكثف العملي عند الترددات العالية

b- دارة المكثف العملي عند الترددات المنخفضة

c- المخطط الشعاعي للدارة المكافئة (b)

فعندما تكون سعة المكثف كبيرة وخاصة عند الترددات العالية فإنه لا يمكن إهمال قيمة التحريض (L_C) وتكون دارته المكافئة كما في الشكل (١-٢٢ a) ، أما عندما تكون سعة المكثف صغيرة وخاصة في الترددات المنخفضة يمكن إهمال أثر التحريض (L_C) للمكثف وتستخدم عندها الدارة المكافئة المبينة في الشكل (١-٢٢ b) ، وهي أبسط دارات المكثف العملي . وكما هو واضح من المخطط الشعاعي لهذه الدارة في الشكل (١-٢٢ c) فإن الفرق بين زاويتي طور الجهد والتيار عند مأخذي المكثف العملي لا يساوي (90^o) بل يساوي ($\varphi = 90 - \delta_C$)، حيث تدعى (δ_C) بزاوية ضياع المكثف ، ومنه فإن عامل ضياع هذا المكثف يساوي :

$$\tan\delta_C = d_C = \frac{1/R_C}{\omega C} = \frac{1}{\omega C R_C} = \frac{1}{Q_C} \qquad (1.49)$$

$$\frac{..}{1+w^2C^2R^2} = \frac{..}{1+d_c^2} = \frac{..}{wC(1+d_c^2)}$$

$$* \; -j\frac{wCR^2}{1+w^2C^2R^2} = -j\frac{R/d_c}{1+1/d_c^2} = -j\frac{R\cdot d_c}{..} = -j\frac{1}{wC(1+d_c^2)}$$

حيث Q_C : جودة المكثف .

وتتعلق قيمة عامل ضياع المكثف بنوع العازل الكهربائي المستخدم في المكثف ، وبشكل المكثف ، وبالتردد . أما مقاومة ضياع المكثف فتحسب من العلاقة (1.49) :

$$R_C = \frac{1}{d_C\,\omega C} \qquad (1.50)$$

وتكون سماحية المكثف مساوية :

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R_C} + j\omega C = d_C\,\omega C + j\omega C = \omega C(d_C + j) \qquad (1.51)$$

أما الممانعة العقدية المكافئة على مأخذي المكثف العملي لهذه الحالة فهي :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{1}{\underline{Y}_{AB}} = \frac{R - jwCR^2}{1+w^2C^2R^2} = \frac{R}{1+w^2C^2R^2} - j\frac{wCR^2}{1+w^2C^2R^2}$$

$$= \frac{1}{\omega C d_C + j\omega C} = \frac{\omega C d_C}{\omega C(\omega C d_C^2 + \omega C)} - j\frac{\omega C}{\omega C(\omega C d_C^2 + \omega C)}$$

$$\underline{Z}_{AB} = R_S - j\,x_S = \frac{d_C}{\omega C(d_C^2+1)} - j\frac{1}{\omega C(d_C^2+1)} \qquad (1.52)$$

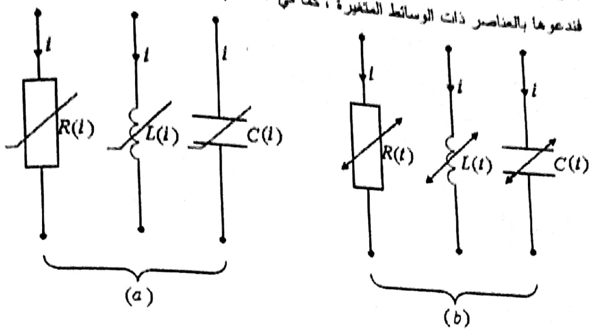
صح

ونشير أخيراً إلى أن زاوية ضياع المكثف العملي (δ_C) لا تتغير عند تحويل الدارة المكافئة التفرعية للمكثف إلى دارة تسلسلية مكافئة على مأخذيه .

كما يمكن أن تكون العناصر غير الفعالة في الدارة الكهربائية عناصر خطية أو غير خطية ذات وسائط ثابتة أو بوسائط متغيرة . إن العناصر المدروسة أعلاه (R,L,C) بنوعيها المثالية والعملية تعد عناصر خطية ذات وسائط ثابتة .

ز- العناصر الخطية وغير الخطية : تعد العناصر غير الفعالة في الدارة عناصر خطية إذا كانت وسائطها لا تتغير بتغير قيمة الجهد المطبق عليها أو بتغير شدة التيار المار فيها ، أما إذا تعلقت قيم (وسائط) العناصر غير الفعالة بقيم الجهد المطبق عليها أو التيار المار فيها فإنها تسمى بالعناصر غير الخطية (اللاخطية) ويرمز لها كما في الشكل (١-٢٣ a) . وتدعى العناصر غير الفعالة ذات الوسائط الثابتة بالعناصر الخطية التي لا تتعلق وسائطها

بالزمن ، أما إذا كانت عناصر الدارة ذات وسائط تتغير مع الزمن حسب قانون محدد ما فندعوها بالعناصر ذات الوسائط المتغيرة ، كما في الشكل (١-٢٣ b) .



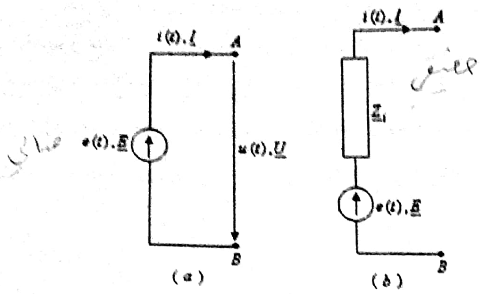
الشكل (١-٢٣)

١-٥-٢ العناصر الفعالة (النشيطة) *Active Elements* :

يتم في هذه العناصر توليد الطاقة الكهربائية من شكل آخر من أشكال الطاقة : كالطاقة الميكانيكية أو الكيميائية ... أو غيرها . وتسمى هذه العناصر منابع الطاقة الكهربائية (منابع الجهد ومنابع التيار) . وتصنف هذه المنابع كما يلي :

أولاً- المنابع المستقلة : يمكن للمنابع المستقلة أن تكون مثالية أو حقيقية .

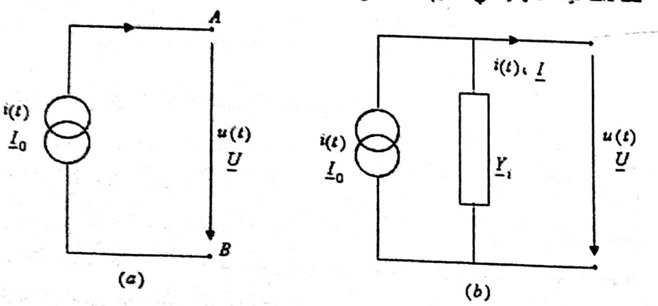
أ- منبع الجهد المستقل المثالي (المنبع المثالي للقوة المحركة الكهربائية الجيبية) :
ويتصف هذا النوع من المنابع بأن الجهد على مأخذيه $u(t)$ لا يتعلق بشدة التيار المار فيه ، كما أنه لا يحتوي على عناصر غير فعالة (R,L,C) ، أي أن ممانعته الداخلية تساوي الصفر، ولذلك ليس هناك أي هبوط في الجهد على طرفيه $[u(t) = e(t) = \hat{E}\sin(\omega t+\varphi)]$ ويمكن أن نعبر عنه بدقة بوساطة القوة المحركة الكهربائية العقدية $(E = \hat{E}/\sqrt{2}\ ,\ \underline{E} = Ee^{j\varphi})$ ، ونرمز لمنبع الجهد المستقل المثالي كما في الشكل (١-٢٤ a) ، حيث يدل السهم على الاتجاه الموجب للقوة المحركة الكهربائية .



الشكل (١-٢٤)

ب- منبع الجهد المستقل الحقيقي : يملك منبع الجهد الحقيقي ممانعة داخلية $(\underline{Z}_i)$ ، ويمكن رسم دارته المكافئة كدارة تسلسلية مؤلفة من القوة المحركة الكهربائية والممانعة الداخلية كما في الشكل (١-٢٤ b) ، ونذكر أن الممانعة الداخلية لهذا المنبع تكون صغيرة نسبياً بالمقارنة مع ممانعة الدارة الخارجية (الحمولة) .

ج- منبع التيار المستقل المثالي : لا يعتمد التيار المار في هذا المنبع على قيمة الجهد المطبق على مأخذيه (السماحية الداخلية لمنبع التيار تساوي الصفر، أي أن الممانعة الداخلية تعد ذات قيمة لانهائية في الكبر) ، ويوضح الشكل (١-٢٥ a) منبع تيار مستقل مثالي .



الشكل (١-٢٥)

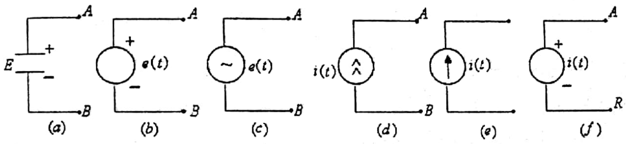
منابع جهد ② أو ① $u(t), e(t)$

منابع تيار

د- منبع التيار المستقل الحقيقي : يمثل هذا المنبع كما في الشكل (b ٢٥-١) بدارة تفرعية تحتوي منبع التيار $i(t)$ (قيمته تساوي قيمة تيار القصر للمنبع) ، وسماحية ($\underline{Y}_i$) ، وبالتالي فإن جهد اللاحمل على مأخذي هذا المنبع يكون ذا قيمة محددة نظراً لامتلاك منبع التيار الحقيقي ممانعة محددة تساوي ($\underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i}$) . ويمكن الانتقال من مخطط منبع الجهد الشكل (b ٢٤-١) إلى المخطط المكافئ لمنبع التيار الشكل (b ٢٥-١) باستخدام العلاقات :

$$\left.\begin{aligned} \underline{I} &= \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i} \\ \underline{Y}_i &= \frac{1}{\underline{Z}_i} \end{aligned}\right\} \qquad (1.53)$$

ونشير هنا إلى رموز مختلفة للمنابع المستقلة للجهد والتيار قد تصادف في مراجع علمية أخرى ، ويلزم التعريف بها في الشكل (١-٢٦) .



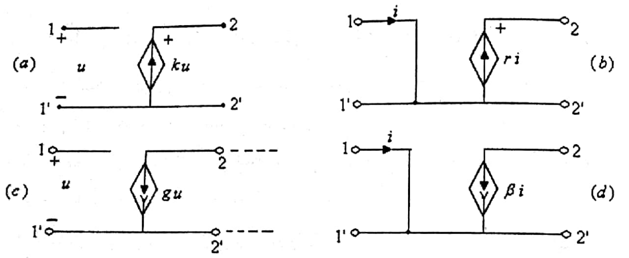
الشكل (١-٢٦)

a,b,c– منابع جهد مستقلة مثالية ، d,e,f– منابع تيار مستقلة مثالية

ثانياً- المنابع غير المستقلة (المنابع المُقادة أو التابعة) :

وهي منابع الطاقة الكهربائية (منابع الجهد والتيار) التي يكون فيها الجهد أو التيار في أحد الفروع يتعلق بالجهد أو التيار في الفرع الآخر من الدارة الكهربائية ، وتملك هذه المنابع زوجين من المآخذ كما في الشكل (١-٢٧) . مآخذ الدخل ($1 - 1'$) حيث يطبق الجهد المعطى أو التيار ومآخذ الخرج ($2 - 2'$) والتي يتم وصل الأحمال أو أي دارة أخرى إليها . ونميز أربعة أنواع من منابع الطاقة المقادة وهي :

منبع الجهد المقاد بجهد (أو يسمى بمنبع الجهد التابع لجهد ما VDVS) كما في الشكل (a ٢٧-١) ، ومنبع الجهد المقاد بتيار (CDVS) كما في الشكل (b ٢٧-١) ومنبع التيار المقاد بجهد (VDCS) ويوضحه الشكل (c ٢٧-١) ؛ بالإضافة إلى منبع التيار المقاد بتيار (CDCS) والموضح في الشكل (d ٢٧-١) . وعلى هذه الأشكال تم وضع النسب التي تصف علاقات القيم التابعة ، حيث تعبر عنها العوامل (k, r, g, β) ، وتكون هذه العوامل إما موجبة أو سالبة ، وتصف بشكل دقيق وكامل المنبع المقاد .



الشكل (١-٢٧) منابع الجهد والتيار المقادة

وكما ذكرنا سابقاً فإن الدارات الكهربائية تختلف تبعاً لصفة العناصر المكونة لها ، ومن هنا يمكن تمييز دارات فعالة وغير فعالة ، ودارات خطية وغير خطية ، ودارات ذات وسائط ثابتة وذات وسائط متغيرة ، وأخيراً دارات ذات وسائط مجمعة أو ذات وسائط موزعة .

- الدارة الكهربائية غير الفعالة : هي الدارة الكهربائية التي لا تحتوي منابع طاقة كهربائية . أما عندما تحتوي الدارة منبعاً كهربائياً فتسمى بالدارة الفعالة .

- الدارة الكهربائية الخطية : وهي الدارة التي تحتوي عناصر خطية ، وفي حالة وجود أي عنصر غير خطي فيها فتدعى عندها بالدارة غير الخطية . وعندما تحتوي الدارة على عناصر ذات وسائط متغيرة فإنها تدعى دارة ذات وسائط متغيرة ، وفي الحالة الأخرى فهي دارة ذات وسائط ثابتة .

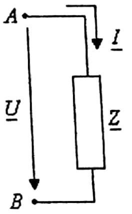
إن جميع الدارات الحقيقية تعد حتماً دارات غير خطية . إلا أن معظم هذه الدارات يتم دراستها وتحليلها كدارات خطية مع بعض التقريب المسموح به في الحياة العملية مما يسمح بتبسيط الحسابات عن طريق استخدام نظرية الدارات الكهربائية الخطية .

وفي الدارات ذات الوسائط المجمعة يتم اعتبار جميع المقاومات الأومية والملفات والمكثفات مجمعة أو مركزة في أجزاء محددة من الدارة . أما في الدارات ذات الوسائط الموزعة فتعد المقاومات والملفات والمكثفات موزعة على طول الدارة .

١-٦ الصيغ العقدية لقانون أوم وقانوني كيرشوف وقاعدتي تقسيم الجهد والتيار:

إن معرفة القوانين والقواعد المستخدمة في حل الدارات الكهربائية بشكلها العقدي يساعد في تعميم طرق حساب الدارات الكهربائية المستخدمة في التيار المستمر على دارات التيار المتناوب ، مع الانتباه إلى أن الحسابات في التيار المستمر كانت تتم بالقيم الحقيقية بينما تكون في التيار المتناوب بالقيم العقدية .

١- قانون أوم : يعبر عن قانون أوم العقدي للدارة المبينة في الشكل (١-٢٨) كما يلي :



الشكل (١-٢٨)

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \quad , \quad \hat{\underline{U}} = \underline{Z}\,\hat{\underline{I}} \qquad (1.54)$$

حيث $\underline{Z}$: الممانعة العقدية لعنصر الدارة ، بغض النظر عن كونه مقاومة أومية أو ملف أو مكثف $[\Omega]$.

$\underline{U}\,,\,\underline{I}$: التيار والجهد العقدي الفعال .

$\hat{\underline{U}}\,,\,\hat{\underline{I}}$: المطال العقدي للتيار والجهد .

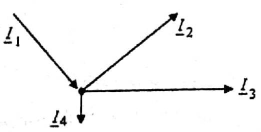
٢- قانونا كيرشوف : لكتابة المعادلات حسب قانوني كيرشوف يجب أولاً اختيار الاتجاهات الموجبة لجميع التيارات وتوضيحها على مخطط الدارة .

آ- قانون كيرشوف الأول : وينص هذا القانون على أن المجموع الجبري للتيارات في أية عقدة من عقد الدارة الكهربائية يساوي الصفر، ومن هنا جاءت تسميته بقانون العقد . وعادة يتم أخذ إشارات التيارات الداخلة إلى العقدة موجبة والتيارات الخارجة منها بإشارة

سالبة ، وعلى سبيل المثال بالنسبة للعقدة المبينة في الشكل (١-٢٩) يمكن كتابة قانون كيرشوف الأول كما يلي :

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\underline{I}_k = 0\\ &\underline{I}_1-\underline{I}_2-\underline{I}_3-\underline{I}_4=0\end{aligned}\right\}\qquad(1.55)$$

ويجب الإشارة إلى أن قانون كيرشوف الأول يعد نتيجة لقانون حفظ الشحنة الذي ينص على أن الشحنة الداخلة إلى عقدة خلال فترة زمنية تساوي الشحنة الخارجة منها خلال الفترة الزمنية نفسها ، أي أن الشحنة الكهربائية لا تختزن ولا تستهلك .

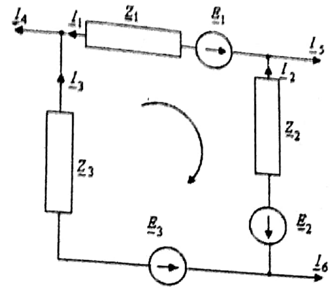


الشكل (١-٢٩)

ب- قانون كيرشوف الثاني : وينص هذا القانون على أن المجموع الجبري للقوى المحركة الكهربائية المؤثرة في أية حلقة مغلقة من دارة كهربائية يساوي المجموع الجبري لهبوطات الجهد على عناصر هذه الحلقة . وللشكل (١-٣٠) يمكن كتابة هذا القانون على النحو الآتي :

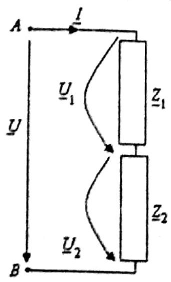
$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\underline{E}_k = \sum_{k=1}^{n}\underline{Z}_k\,\underline{I}_k\\ &\underline{E}_1+\underline{E}_2-\underline{E}_3=-\underline{Z}_1\underline{I}_1-\underline{Z}_2\underline{I}_2+\underline{Z}_3\underline{I}_3\end{aligned}\right\}\qquad(1.56)$$

ونشير إلى أنه عند كتابة المعادلات حسب قانون كيرشوف الثاني يجب اختيار الحلقات التي لا تضم منابع تيار، وتؤخذ بإشارة موجبة القوى المحركة الكهربائية وهبوطات الجهود التي يتوافق اتجاهها مع الاتجاه المختار للحلقة المغلقة وتؤخذ بإشارة سالبة عندما لا تتوافق اتجاهاتها مع اتجاه الحلقة .



الشكل (١-٣٠)

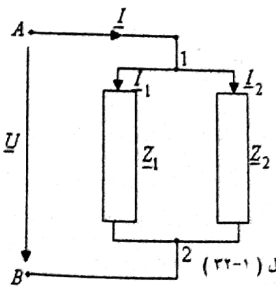
٣- قاعدة تقسيم الجهد : نعبر عن قاعدة تقسيم الجهد بصيغتها العقدية حسب ما هو موضح على الشكل (١-٣١) كما يلي :



الشكل (١-٣١)

$$\left.\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.57)$$

وتهدف هذه القاعدة إلى حساب الجهد الهابط على ممانعة عنصر ما في الدارة التسلسلية بعلاقة الجهد الكلي($\underline{U}$) الذي يتم تقسيمه بين عنصري هذه الدارة .



الشكل (١-٣٢)

٤- قاعدة تقسيم التيار : تساعد هذه القاعدة في حساب التيار المار في فرع ما من دارة تفرعية (التيار الجزئي $\hat{\underline{I}}_1$ أو $\hat{\underline{I}}_2$) بعلاقة التيار الكلي الذي يتم تقسيمه بين الفرعين اللذين يقعان بين العقدتين (1 و 2) حسب الشكل (١-٣٢) .

وتأخذ هذه القاعدة الصيغة الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.58)$$

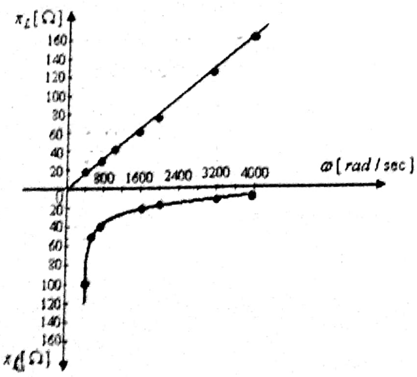
مثال (٧) : وضح بيانياً كيفية تغير قيم (X_L و X_C) كتابع للتردد (ω) وذلك عندما تتغير (ω) في المجال ($400 < \omega < 4000\ rad/sec$) وباعتبار أن قيمة ($L = 40\ mH$) و ($C = 25\mu F$) .

الحل :

نحسب قيمة كل من ($X_L = \omega L$ ، $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$) عندما يتغير التردد في المجال المذكور، ونضع النتائج في الجدول (١-٣) ، ومن ثم نرسم المنحنيات التي توضح تغير كل من (x_L و x_C) بتغير التردد ، الشكل (١-٣٣) .

الجدول (١-٣)

ω [rad/sec]	X_L [Ω]	X_C [Ω]
400	16	100
800	32	50
1000	40	40
1600	64	25
2000	80	20
3200	128	12,5
4000	160	10



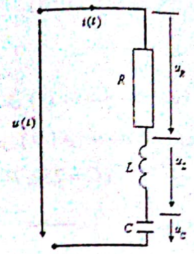
الشكل (١-٣٣)

مثال (٨) :

في الدارة التسلسلية المبينة في الشكل (١-٣٤) سيمر التيار $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ نتيجة لتطبيق جهد جيبي $u(t) = \hat{U}\sin\omega t$. والمطلوب :

أ- أوجد القيمة اللحظيــة للتيــار المار في الدارة ، والقيم اللحظية للجهــود الجزئية على العناصر الثلاثة .

ب- أوجد المقاومة الظاهرية للدارة .



الشكل (١-٣٤)

الحــل :

أ- نطبق قانون كيرشوف الثاني للقيم اللحظية فنحصل على المعادلة :

$$u(t) = u_R + u_L + u_C$$

وكما رأينا سابقاً فإن :

$$u_R = i\,R \;,\; u_L = L\frac{di}{dt} \;,\; u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

نعوض في المعادلة فنجد أن :

$$u(t) = i\,R + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt$$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية ، حلها العام هو : $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$.

نعوض قيمة $i(t)$ في المعادلة التفاضلية فيكون :

$$\hat{U}\sin\omega t = \hat{I}[R\sin(\omega t + \varphi_i) + \omega L\cos(\omega t + \varphi_i) - \frac{1}{\omega C}\cos(\omega t + \varphi_i)]$$

$$\hat{U}\sin\omega t = \hat{I}[R\sin(\omega t + \varphi_i) + (\omega L - \frac{1}{\omega C})\sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2})]$$

وباستخدام العلاقات (1.17) و (1.18) لإيجاد حاصل تراكم تابعين جيبيين (للطــرف الثاني من المعادلة التفاضلية) ومعرفة أن $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha$ نكتب :

$$\hat{U}\sin\omega t = \hat{I}\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\,\sin(\omega t + \varphi_i + arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

وبمقارنة طرفي هذه المعادلة يكون :

$$\boxed{\hat{U} = \hat{I}\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \Rightarrow \boxed{\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}} \Rightarrow Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$$

$$0 = \varphi_i + arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \;\Rightarrow\; \varphi_i = -arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

وبتعويض قيمتي المطال ($\hat{I}$) وزاوية الطور (φ_i) فــي معادلــة الحــل العــام $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ نحصل على القيمة اللحظية للتيار المار في الدارة :

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t - arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

وتكون القيم اللحظية للجهود الجزئية على عناصر الدارة :

$$u_R = iR = \frac{\hat{U}\,R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t - arc\tan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

أي الجهد والتيار متفقان في الطور في عنصر الدارة (R) مع اختلاف مطاليهما :

$$u_L = L\,\frac{di}{dt} =$$

$$= \frac{\hat{U}\,\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} + \frac{\pi}{2})$$

أي أن الجهد والتيار غير متفقين في الطور في عنصر الدارة (L) بل أن الجهد على هذا العنصر يسبق التيار المار فيه بزاوية $(\frac{\pi}{2})$ مع اختلاف مطاليهما :

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt =$$

$$\frac{\hat{U}}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} - \frac{\pi}{2})$$

أي أن الجهد الهابط على المكثف يتأخر عن التيار المار فيه بزاوية $(\frac{\pi}{2})$ مع اختلاف مطاليهما .

ب- إن المقاومة الظاهرية للدارة كما ذكرنا سابقاً هي قيمة حسابية تساوي حاصل قسمة مطال الجهد المطبق على مطال التيار :

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

مثال (٩) :

إيجاد القيمة اللحظية للتيار المار في الدارة المبينة في الشكل (١-٣٤) عن طريق حل المعادلة التفاضلية في المستوي العقدي .

الحـــل : - طريقة أولى :

المعادلة التفاضلية حسب قانون كيرشوف الثاني هي :

$$u(t) = u_R + u_L + u_C$$

نحولها إلى الشكل العقدي :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}_R + \underline{u}_L + \underline{u}_C$$
$$= \underline{i}R + L\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i}\,dt$$

وحسب معطيات الجدول (١-٢) نكتب :

$$\underline{u}(t) = \underline{i}R + j\omega L\underline{i} - j\frac{1}{\omega C}\underline{i} = [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\underline{i}$$

ومنه :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{\hat{U}e^{j\omega t}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}\; e^{j\varphi_i}}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

وبالتالي :

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

وحسب العلاقة (1.28) نعيد تحويل هذه القيمة اللحظية العقدية للتيار المار في الدارة إلى القيمة اللحظية الحقيقية :

$$i(t) = \mathrm{Im}[\underline{i}] =$$

$$\frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R})$$

بالمقارنة بين طريقتي حل المعادلة التفاضلية في المستوي الحقيقي وحلها في المستوي العقدي نلاحظ أن طريقة الحل في المستوي الحقيقي تتطلب وقتاً وجهداً كبيرين مقارنة مع الحل في المستوي العقدي .

طريقة ثانية :

$$u(t) = u_R + u_L + u_C = \hat{U}_R \sin(\omega t + \varphi_i) +$$
$$+ \hat{U}_L \sin(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) + \hat{U}_C \sin(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2})$$

ولكن كما رأينا في الفقرة (١-٥-١) فإن :

$$\hat{U}_R = R\hat{I} \;,\; \hat{U}_L = X_L \hat{I} = \omega L \hat{I} \;,\; \hat{U}_C = X_C \hat{I} = \frac{\hat{I}}{\omega C}$$

وحسب الصيغة العقدية لقانون كيرشوف الثاني المعطاة في العلاقة (1.56) نكتب :

$$\underline{\hat{U}} = \underline{\hat{U}}_R + \underline{\hat{U}}_L + \underline{\hat{U}}_C = \hat{U}_R e^{j\varphi_i} + \hat{U}_L e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})} + \hat{U}_C e^{j(\varphi_i - \frac{\pi}{2})}$$

$$\underline{\hat{U}} = R\hat{I} e^{j\varphi_i} + j\omega L \hat{I} e^{j\varphi_i} - j\frac{1}{\omega C}\hat{I} e^{j\varphi_i}$$

$$\underline{\hat{U}} = \hat{I}[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]e^{j\varphi_i}$$

ومنه مطال التيار العقدي المار في الدارة التسلسلية يساوي :

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{[R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\, e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{U} e^{j(0-\varphi_i)}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

وكصيغة شعاع ساكن يكون التيار العقدي المار في الدارة :

$$\underline{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\, e^{-j\varphi_i}$$

وللحصول على التيار اللحظي العقدي نضرب بـ ($e^{j\omega t}$) :

$$\underline{i} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\, e^{j(\omega t - \varphi_i)} =$$

$$= \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}[\cos(\omega t - \varphi_i) + j\sin(\omega t - \varphi_i)]$$

والتيار اللحظي المار في الدارة يكون :

$$i = \mathrm{Im}[\underline{i}] = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}\sin(\omega t - \varphi_i)$$

وهي القيمة اللحظية للتيار المحسوب بالطريقة السابقة نفسها بعد تبديل (φ_i) بقيمتها .

١-٧ الممانعة العقدية والسماحية العقدية للدارة الكهربائية :

إن حل المعادلات التفاضلية التي تعبر عن وسائط الدارة الكهربائية في المستوي العقدي يعد تسهيلاً كبيراً للعمل الحسابي كما رأينا في الأمثلة السابقة . وسنقوم هنا بتعريف الممانعة العقدية للدارة الكهربائية ، التي تسمح بنقل هذه الدارة مباشرة إلى المستوي العقدي دون الحاجة لكتابة المعادلة التفاضلية للتوابع الحقيقية ومن تحويلها إلى المستوي العقدي ، مما سيقدم إمكانية حل الدارات الكهربائية بوقت أقصر وسهولة أكبر.

فإذا طبقنا جهد جيبي قيمته اللحظية $u(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u)$ على مدخل دارة كهربائية خطية (ثنائي أقطاب غير فعال) ، كما في الشكل (١-٣٥ a) فسيمر تيار جيبي قيمته اللحظية تساوي $i(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ ، فإن نسبة الجهد العقدي على مدخل الدارة الكهربائية إلى التيار العقدي في هذه الدارة تسمى بالممانعة الكهربائية العقدية وتأخذ الشكل الآتي :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{\hat{I}}} = \frac{\hat{U} e^{j\varphi_u}}{\hat{I} e^{j\varphi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j\varphi} \quad (1.59)$$

وهي الشكل الأسي للممانعة العقدية التي يمثلها شعاع ساكن طوله (Z) وزاويته (φ) .

ويمكن كتابة الممانعة العقدية بالشكلين القطبي والديكارتي كما يلي :

$$\underline{Z} = Z e^{j\varphi} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = R + jX = \sqrt{R^2 + X^2}\; e^{j\varphi} \quad (1.60)$$

حيث :

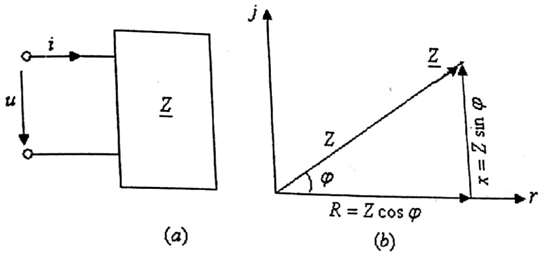
$|\underline{Z}| \triangleq Z$: القيمة المطلقة للممانعة العقدية $\underline{Z}$ (الممانعة الظاهرية) .

R : المركبة الحقيقية للممانعة $\underline{Z}$ (المقاومة الأومية) .

X : المركبة التخيلية للمانعة $\underline{Z}$ (المقاومة التخيلية وهي سعوية أو تحريضية) .

φ : زاوية فرق الطور بين الجهد والتيار.

ويوضح الشكل (١-٣٥ b) التمثيل البياني للمانعـة العقديـة أو مـا يـسمى بمثلـث الممانعة العقدية .



الشكل (١-٣٥)

ومن الممكن كتابة العلاقة (1.59) على الشكل الآتي :

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = \frac{U}{I}\cos\varphi + j\frac{U}{I}\sin\varphi = R + jX \qquad (1.61)$$

وبالمقارنة نلاحظ أن :

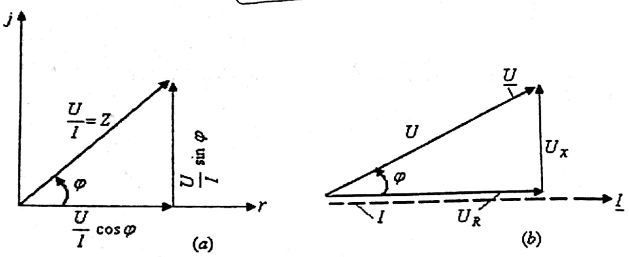
$R = \dfrac{U\cos\varphi}{I} = \dfrac{U_R}{I}$: الجزء الحقيقي من $\underline{Z}$ (المقاومة الأومية) .

$\boxed{U\cos\varphi = U_R}$: الجزء الحقيقي للجهد العقدي الفعال $\underline{U}$ (الجهد الحقيقي) .

$X = \dfrac{U\sin\varphi}{I} = \dfrac{U_X}{I}$: الجزء التخيلي من $\underline{Z}$ (المقاومة التخيلية) .

$\boxed{U\sin\varphi = U_X}$: الجزء التخيلي للجهد العقدي $\underline{U}$ (الجهد التخيلي) .

ويوضح الشكل (١-٣٦ a و b) التمثيل البياني للمانعة العقدية ($\underline{Z}$) حـسب العلاقـة (1.61) ، والتمثيل البياني للجهد العقدي الفعال الذي يساوي مجموع الجهـدين (U_X ، U_R) ، حيث يمكن التعبير عنه بالعلاقة : $\boxed{\underline{U} = U_R + jU_X}$



الشكل (١-٣٦)

يسمى مقلوب الممانعة العقدية ($\underline{Z}$) بالسماحية العقدية ويرمز لها بالرمز ($\underline{Y}$) :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{\hat{\underline{I}}}{\hat{\underline{U}}} = \frac{\hat{I}\,e^{j\varphi_i}}{\hat{U}\,e^{j\varphi_u}} = \frac{I}{U} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = Ye^{-j\varphi}$$

$$= Y\cos\varphi - jY\sin\varphi = G - jB = \sqrt{G^2 + B^2}\; e^{-j\varphi} \qquad (1.62)$$

حيث :

$|\underline{Y}| \triangleq Y$: القيمة المطلقة للسماحية العقدية $\underline{Y}$ (السماحية الظاهرية) .

G : المركبة الحقيقية للسماحية $\underline{Y}$ (السماحية الحقيقية أو الناقلية) .

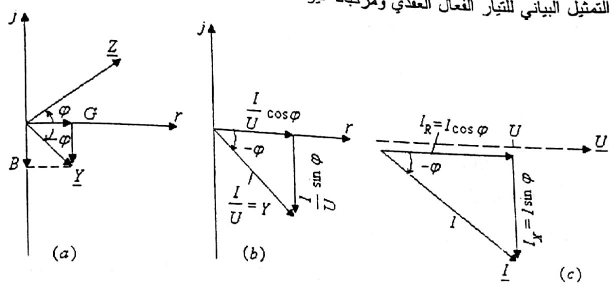
B : المركبة التخيلية للسماحية $\underline{Y}$ (السماحية التخيلية أو النفاذية) .

φ : زاوية فرق الطور بين الجهد والتيار.

ويوضح الشكل (١-٣٧ a) التمثيل البياني للسماحية العقدية ، وبما أنه أيـضاً يمكننـا التعبير عن المعادلة (1.62) كما يلي :

$$\underline{Y} = \frac{I}{U} e^{-j\varphi} = \frac{I}{U}\cos\varphi - j\frac{I}{U}\sin\varphi = G - jB \qquad (1.63)$$

فإن الشكل (١-٣٧ b) يوضح التمثيل البياني للمسايرة العقدية حسب هذه المعادلة ، أما التمثيل البياني للتيار الفعال العقدي ومركباته فيوضحه الشكل (١-٣٧ c) .



الشكل (١-٣٧)

ونلاحظ من الشكل (١-٣٧ c) أن التيار العقدي الفعال المار في السماحية العقدية للدارة يساوي :

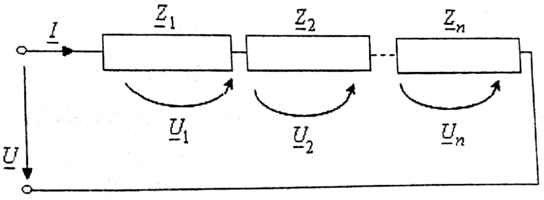
$$\underline{I} = \underline{I}_R + j\,\underline{I}_X$$

$I_X = I \sin\varphi$
$I_R = I \cos\varphi$

١-٨ الوصل التسلسلي والتفرعي للممانعات العقدية :

آ- لو كانت الدارة الكهربائية مؤلفة من (n) ممانعة عقدية موصولة على التسلسل كما في الشكل (١-٣٨) ، بحيث إن :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\,X_1 \;\;,\;\; \underline{Z}_2 = R_2 + j\,X_2 \;\;,\; \dots ,\; \underline{Z}_n = R_n + j\,X_n$$



الشكل (١-٣٨)

وتحت تأثير الجهد الجيبي ($\underline{U}$) المطبق على هذه الدارة سيمر تيار جيبي قيمته الفعالة العقدية ($\underline{I}$) . واعتماداً على قانون كيرشوف الثاني بصيغته العقدية يمكن أن نكتب لهذه الدارة :

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \dots + \underline{U}_n = \underline{Z}_1\underline{I} + \underline{Z}_2\underline{I} + \dots + \underline{Z}_n\underline{I}$$
$$= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n)\,\underline{I} = \underline{Z}_{eq}\,\underline{I}$$

إذاً الممانعة العقدية المكافئة للدارة التسلسلية تساوي :

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Z}_k = R_{eq} + j\,X_{eq} = Z_{eq}\,e^{j\varphi_{eq}} \qquad (1.64)$$

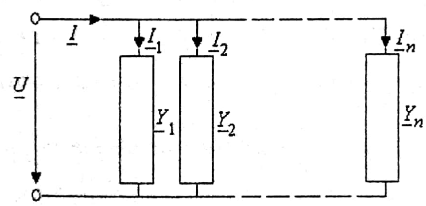
بحيث :

$$R_{eq} = \sum_{k=1}^{n} R_k \;\;,\;\; X_{eq} = \sum_{k=1}^{n} X_k \;\;,\;\; Z_{eq} = \sqrt{R_{eq}^2 + X_{eq}^2}$$
$$\varphi_{eq} = arc\tan\frac{X_{eq}}{R_{eq}}$$

ونشير هنا إلى أن (R_{eq}) تساوي المجموع الحسابي للمقاومات الحقيقية في هذه الدارة بينما (x_{eq}) تساوي المجموع الجبري للمقاومات التخيلية فيها ، وذلك لأن المقاومات التخيلية لبعض عناصر الدارة يمكن أن تكون موجبة (ممانعة ذات صفة تحريضية) ، أو سالبة (في حالة الصفة السعوية لممانعة العنصر) .

ب- بالنسبة للدارة المؤلفة من (n) سماحية عقدية موصولة على التفرع كما في الشكل (١-٣٩) ، بحيث :

$$\underline{Y}_1 = G_1 - j\,B_1 \;\;,\;\; \underline{Y}_2 = G_2 - j\,B_2 \;\;,\; \dots ,\underline{Y}_n = G_n - j\,B_n$$



الشكل (١-٣٩)

وحسب كيرشوف الثاني بصيغته العقدية نكتب :

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \ldots + \underline{I}_n = \underline{Y}_1 \underline{U} + \underline{Y}_2 \underline{U} + \ldots + \underline{Y}_n \underline{U}$$

$$\underline{I} = (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \ldots + \underline{Y}_n)\underline{U} = \underline{Y}_{eq} \underline{U}$$

وتكون السماحية العقدية المكافئة لهذه الدارة مساوية :

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} Y_k = G_{eq} - j B_{eq} = Y_{eq} e^{j\varphi_{eq}} \qquad (1.65)$$

بحيث :

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^{n} G_k \ , \ B_{eq} = \sum_{k=1}^{n} B_k \ , \ Y_{eq} = \sqrt{G_{eq}^2 + B_{eq}^2}$$

$$\varphi_{eq} = arc\tan \frac{B_{eq}}{G_{eq}}$$

أيضاً نشير إلى أن (G_{eq}) تساوي المجموع الحسابي للسماحيات الحقيقية للدارة بينما (B_{eq}) تساوي المجموع الجبري للسماحيات التخيلية .

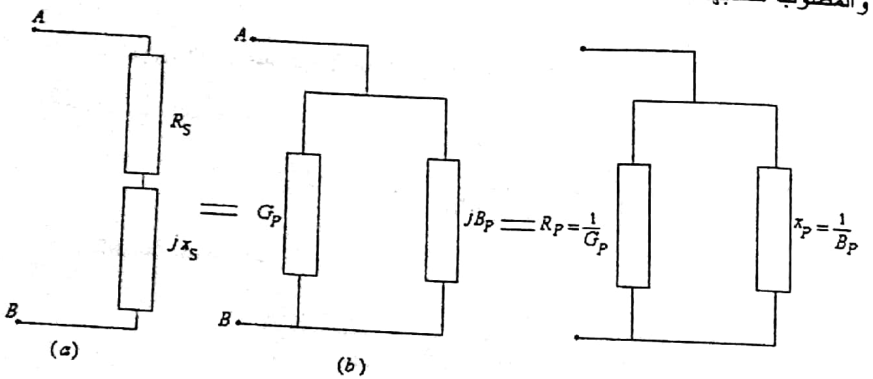
وفي الحالة الخاصة بتوصيل ممانعتين عقديتين $(\underline{Z}_1 \ , \ \underline{Z}_2)$ على التفرع فإن الممانعة العقدية الكلية المكافئة مساوية :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 . \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad (1.66)$$

وهكذا يمكننا القول إن كل علاقات وقوانين دارات التيار الجيبي في صيغتها العقدية تكافئ علاقات وقوانين دارات التيار المستمر، وما ينطبق على المقاومات الأومية في التيار المستمر ينطبق على الممانعات العقدية في التيار الجيبي العقدي . وهذه النتيجة تمكننا من نقل الدارة الكهربائية مباشرة إلى المستوي العقدي ، ويكفي لهذا الغرض وضع قيمة الممانعة العقدية لعنصر الدارة الكهربائية بجانبه ، أي وضع $(j\omega L)$ بدلاً من (L) ، و $\left(\frac{1}{j\omega C}\right)$ بدلاً من (C) مع الإشارة إلى أن (R) تبقى نفسها .

١-٩ تحويل دارة تسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على المأخذين :

يمكن تمثيل الدارة المكافئة لثنائي أقطاب عقدي بدارة تسلسلية أو بدارة تفرعية مؤلفة من جزء حقيقي وجزء تخيلي . ولتحويل الدارة التسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة على مأخذيها نقوم بمساواة معادلة الممانعة العقدية للدارة التسلسلية المعطاة في الشكل (١-٤٠ a) مع معادلة السماحية العقدية للدارة التفرعية المكافئة على المأخذين كما في الشكل (١-٤٠ b) والمطلوب حسابها .



الشكل (١-٤٠)

ولتوضيح عملية التحويل نعطي الرمز (S) لدليل العناصر في الدارة التسلسلية ، والرمز (P) لدليل العناصر في الدارة التفرعية :

$$Y_P = \frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{R_S + j X_S} = G_P - j B_P$$

نضرب بسط ومقام الطرف الأيسر من المعادلة بالقيمة العقدية لمرافق المقام :

$$\frac{R_S - j X_S}{(R_S + j X_S)(R_S - j X_S)} = \frac{R_S - j X_S}{R_S^2 + X_S^2} =$$

$$= \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} - j \frac{x_S}{R_S^2 + X_S^2} = G_P - j B_P$$

ومنه يكون :

$$\left.\begin{aligned} G_P &= \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{Z_S^2} \Rightarrow \boxed{R_S R_P = Z_S^2} \\ B_P &= \frac{X_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{X_S}{Z_S^2} \Rightarrow \boxed{X_S X_P = Z_S^2} \\ Y_P &= \sqrt{G_P^2 + B_P^2} = \frac{1}{\sqrt{R_S^2 + X_S^2}} = \frac{1}{Z_S} \end{aligned}\right\} \quad (1.67)$$

ب – أما تحويل الدارة التفرعية المعطاة إلى دارة تسلسلية مكافئة علــى المأخــذين فيعنــي الانتقال من $\underline{Y}$ إلى $\underline{Z}$:

$$\underline{Z}_S = \frac{1}{\underline{Y}_P} = \frac{1}{G_P - jB_P} = R_S + jX_S$$

وبالطريقة نفسها نكتب :

$$\frac{G_P + jB_P}{(G_P - jB_P)(G_P + jB_P)} = \frac{G_P + jB_P}{G_P^2 + B_P^2} =$$
$$= \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} + J\,\frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} = R_S + jX_S$$

ومنه يكون :

$$\left.\begin{aligned} R_S &= \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{G_P}{Y_P^2} \Rightarrow \boxed{G_P G_S = Y_P^2} \\ X_S &= \frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} = \frac{B_P}{Y_P^2} \Rightarrow \boxed{B_P B_S = Y_P^2} \\ Z_S &= \sqrt{R_S^2 + X_S^2} = \frac{1}{\sqrt{G_P^2 + B_P^2}} = \frac{1}{Y_P} \end{aligned}\right\} \quad (1.68)$$

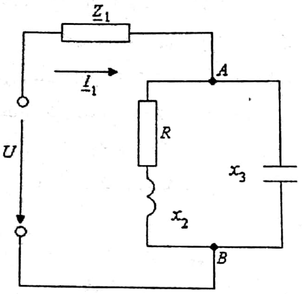
مثال (١٠) :

إذا كانت وسائط الدارة المبينة في الشكل (١-٤١) هي :

$R = 40\,\Omega$ ، $jX_2 = j\,100\,\Omega$ ، $jX_3 = -j\,20\,\Omega$

والمطلوب :

تحديد قيمة وصفة الممانعة $\underline{Z}_1$ إذا كان معلوماً أنها ممانعة ردية فقط ويمـــر عبرها تيار قيمتـــه الفعالـــة (I_1= 12 A) والقيمة الفعالة للجهد المطبق على مأخذي الدارة (U = 30 V) .



الشكل (١-٤١)

الحـــــل :

إن الممانعة بين النقطتين B , A تساوي :

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{(R + jX_2)(jX_3)}{R + j(X_2 + X_2)} = \frac{(40 + j100)(-j20)}{40 + j80} = (2 - j24)\ \Omega$$

إن الممانعة الظاهرية للدارة :

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{30}{12} = 2{,}5\ \ \Omega$$

ويمكن التعبير عنها كما يلي :

$$Z = \sqrt{2^2 + (X_1 - 24)^2} = 2{,}5$$

ومنه :

$$2^2 + (X_1 - 24)^2 = 6{,}25$$
$$(X_1 - 24)^2 = 6{,}25 - 4 = 2{,}25$$
$$X_1 - 24 = \pm 1{,}5$$

– وكما نلاحظ أنه يوجد حلان للمعادلة :

إن صفة الممانعة $\underline{Z}_1$ هي ردية تحريضية وقيمتها تساوي :

إما : $X_1' = 1{,}5 + 24 = 25{,}5\ \Omega \Rightarrow \underline{Z}_1 = jX_1' = j25{,}5\ \ \Omega$

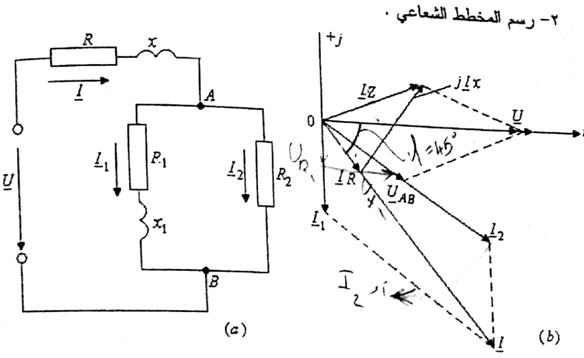
أو : $X_1'' = -1{,}5 + 24 = 22{,}5\ \Omega \Rightarrow \underline{Z}_1 = jX_1'' = j22{,}5\ \ \Omega$

مثال (١١) : للدارة المبينة في الشكل (١-٤٢ a) يطلب :

١- تحديد قيمة المقاومة (R_2) ، الموصولة على التفرع مع الممانعة $\underline{Z}_1 = R_1 + j\,X_1$ حتى يصبح التيار $\underline{I}_1$ المار في الممانعة ($\underline{Z}_1$) متأخراً بزاوية قدرها (90^o) عن الجهـــد ($\underline{U}$) المطبق على مأخذي هذه الدارة ، مع العلم أن :

$$R = 5\ \Omega \quad , \quad X = 11\ \Omega \quad , \quad R_1 = 10\ \Omega \quad , \quad X_1 = 25\ \Omega$$

٢- رسم المخطط الشعاعي .



الشكل (١-٤٢)

الحـــل :

١- نرمز لممانعات الدارة كما يلي :

$$\underline{Z} = R + j\,X \ , \ \underline{Z}_1 = R_1 + j\,X_1 \ , \ \underline{Z}_2 = R_2$$

وعندها تكون الممانعة الكلية المكافئة للدارة مساوية :

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z} + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

ويكون التيار الكلي المار في الدارة مساوياً :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{\underline{U}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}\,\underline{Z}_1 + \underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 + \underline{Z}\,\underline{Z}_2}$$

إن التيار المار في الممانعة $\underline{Z}_1$ حسب مقسم التيار العقدي هو :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\,\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z} + \underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}$$

وحتى يتأخر التيار $\underline{I}_1$ بالطور عن الجهد $\underline{U}$ بزاوية قدرها (90^o) يجـب أن يكـون المقام (المخرج) في معادلة $\underline{I}_1$ ذو قيمة تخيلية فقط بإشارة موجبة ، أي :

$$\underline{Z} + \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}\,\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = R + R_1 + j(X + X_1) + \frac{(R + j\,X)\,(R_1 + j\,X_1)}{R_2} =$$

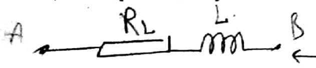
$$= (R + R_1 + \frac{R\,R_1 - X\,X_1}{R_2}) + j(X + X_1 + \frac{R\,X_1 + R_1 X}{R_2})$$

نساوي القسم الحقيقي من هذه المعادلة إلى الصفر :

$$R + R_1 + \frac{R\,R_1 - X\,X_1}{R_2} = 0$$

$$R_2 = \frac{X\,X_1 - R\,R_1}{R + R_1} = \frac{25.11 - 5.10}{5 + 10} = 15\ \Omega$$

٢- يرسم المخطط الشعاعي للدارة كما في الشكل (١-٤٢ b) .



مثال (١٢) :

ملف عملي مقاومة ضياعه ($R_L = 10\,\Omega$) ، وتحريضه ($L = 0,05\ H$) . تم توصيله إلى منبع جهد جيبي قيمته الفعالة ($U = 120\ V$) ، والتردد ($f = 50\ Hz$) . والمطلوب :

١- تحديد الممانعة الظاهرية للملف والتيار المار فيه وزاوية الطور بين الجهد والتيار.

٢- حساب المركبة الحقيقية والمركبة التخيلية للجهد على مأخذي الملف ، وكم تساوي قيمة القوة المحركة الكهربائية الذاتية المولدة في الملف .

٣- رسم المخطط الشعاعي للجهد والتيار.

الحـــل :

١- بموجب العلاقة (1.44) فإن الممانعة العقدية للملف العملي بأبسط أشكاله تساوي :

$$\underline{Z}_L = R_L + j\omega L = Z_L e^{j\varphi}$$

وحيث :

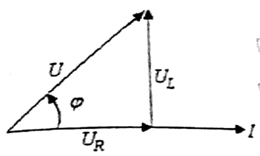
$$\omega L = 2\pi f L = 2\pi.50.0{,}05 = 15{,}7\ \Omega$$

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{10^2 + 15{,}7^2} = 18{,}6\ A\Omega$$

$$\tan\varphi = \frac{\omega L}{R_L} = \frac{15{,}7}{10} = 1{,}57$$

$$\varphi = 57{,}5^O$$

$$I = \frac{U}{Z_L} = \frac{120}{18{,}6} = 6{,}45\ A$$



الشكل (١-٤٣)

٢- المركبات الحقيقية والتخيلية للجهد :

$$U_{R_L} = U\cos\varphi = I R_L = 6{,}45.10 = 64{,}5\ V$$

$$U_L = U\sin\varphi = I X_L = 6{,}45.15{,}7 = 103\ V$$

وتكون قيمة القوة المحركة الكهربائية الذاتية مساوية :

$$E_L = -U_L = -103\ V$$

٣- المخطط الشعاعي للجهد والتيار مبين في الشكل (١-٤٣) .

مثال (١٣) :

تم قياس تحريض ملف عملي عند التردد ($f = 500\ KHz$) فتبين أنه يساوي ($L = 0{,}5\ mH$) ، وجودته تساوي (300) . ماذا تساوي قيمته مقاومة ضياع الملف (R_L) في دارته التسلسلية بأبسط أشكاليا وفي دارته التفرعية المكافئة على المأخذين ؟

الحل :

تحسب قيمة (R_L) للملف العملي في دارته التسلسلية كما يلي :

من العلاقة (1.45) نوجد عامل ضياع الملف الذي يساوي :

$$\boxed{\tan\delta = d_L = \frac{R_L}{\omega L}}$$

لكن عامل ضياع الملف يساوي حسب العلاقة (1.47) مقلوب جودته ، أي :

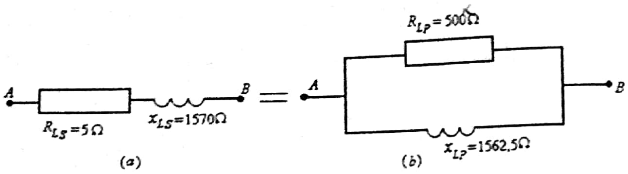
$$d_L = \frac{1}{Q} = \frac{1}{300} = 0{,}0033$$

ومنه :

$$R_L = \omega L.d_L = 2\pi.500.10^3.0{,}5.10^{-3}.0{,}0033$$

$$R_L = 5{,}2\Omega$$

وتكون الدارة التسلسلية المكافئة ، كما في الشكل (١-٤٤ a) .



الشكل (١-٤٤)

إن معرفة قيمة (R_L) للملف العملي في دارته التفرعية المكافئة يتم بتحويل الدارة التسلسلية إلى دارة تفرعية مكافئة والذي يتم حسب العلاقات (1.67) .

ولمطابقة الرموز نعطي الرمز (R_{LS}) والرمز (X_{LS}) لعناصر الدارة التسلسلية المعروفة ونحسب قيمها المكافئة في الدارة التفرعية والمبينة في الشكل (١-٤٤ b) .

إن :

$$X_{LS} = 2\pi f L = 2\pi.500.10^3.0{,}5.10^{-3}$$

$$X_{LS} = 1570\ \Omega$$

$$G_{LP} = \frac{R_{LS}}{R_{LS}^2 + X_{LS}^2} = \frac{5}{5^2 + 1570^2} = 2.10^{-6}[S] \Rightarrow R_{LP} = \frac{1}{G_{LP}} = 500\ k\Omega$$

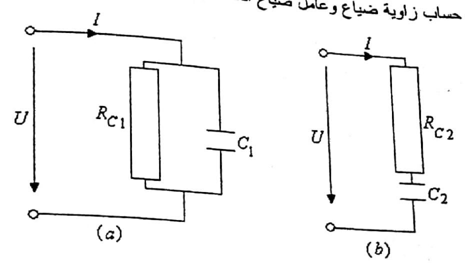
$$B_{LP} = \frac{X_{LS}}{R_{LS}^2 + X_{LS}^2} =$$

$$= \frac{1570}{5^2 + 1570^2}\ 0{,}00064[S] \Rightarrow X_{LP} = \frac{1}{B_{LP}} = 1562{,}5\ \Omega$$

مثال (١٤) : لتحديد وسائط مكثف ذو ضياعات (مكثف عملي) تم وصله إلى منبع جهد متناوب جيبي ($U = 19{,}5\ V$) , ($f = 50\ kHz$) ، وعندها أشار مقياس الأمبير الموصول في الدارة إلى القيمة ($I = 0{,}3\ A$) ، ومقياس الواط إلى الاستطاعة ($P = 0{,}153\ W$) ، والمطلوب :

أ- تحديد قيمة كل من (C_1 , R_{C1}) و (C_2 , R_{C2}) للدارتين المكافئتين للمكثف والمبينين في الشكل (١-٤٥ a , b) .

ب- حساب زاوية ضياع وعامل ضياع المكثف وجودته .



الشكل (١-٤٥)

الحـــل :

أ- نحدد زاوية فرق الطور (φ) بين الجهد والتيار في الدارة :

$$\cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{0{,}153}{19{,}5.0{,}3} = 0{,}0262 \Rightarrow \varphi = -88{,}5^o$$

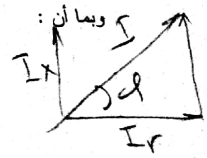
إن إشارة زاوية (φ) سالبة لأن الدارة ذات صفة سعوية .

لدارة المكثف التفرعية لدينا : $P = UI\cos\varphi = UI_a$ ، ومنه سنوجد المركبة الحقيقية للتيار :

$$I_a = \frac{P}{U} = \frac{0{,}153}{19{,}5} = 7{,}85\ mA = I\cos\varphi$$

وبما أن :

$$I_a = UG_{C1} = \frac{U}{R_{C1}} = 7{,}85.10^{-3}\ A$$



إذاً :

$$R_{C1} = \frac{U}{I_a} = \frac{19{,}5}{7{,}85.10^{-3}} = 2{,}48.10^3\ \Omega = 2{,}48\ K\Omega$$

أما المركبة التخيلية للتيار فهي :

$$I_r = I\sin\varphi = 0{,}3.0{,}9996 \approx 0{,}3\ A$$

ومنه نحسب قيمة (C_1) كما يلي :

$$I_r = U\omega C_1 = 0{,}3\ A$$

$$C_1 = \frac{0{,}3}{19{,}5.2.3{,}14.50.10^3} = 49.10^{-9}\ F = 49\ nF$$

أما لدارة المكثف التسلسلية المكافئة ، فلدينا : أو حسب قوانين التحويل

$$R_{C2} = \frac{P}{I^2} = \frac{0{,}153}{0{,}3^2} = 1{,}7\ \Omega = \frac{G_1}{G_1^2 + B_1^2}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{19{,}5}{0{,}3} = 65\ \Omega$$

$$|X_{C2}| = \sqrt{Z^2 - R_{C2}^2} = \sqrt{65^2 - 1{,}7^2} = 65\ \Omega = \frac{B_1}{G_1^2 + B_1^2}$$

ومنه نحسب قيمة (C_2) :

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega C_2} = 65\ \Omega \Rightarrow C_2 = \frac{1}{65.2.3{,}14.50.10^3} = 49\ nF$$

ب- إن زاوية ضياع المكثف في الحالتين لا تتغير وتساوي :

$$\delta_C = 90 - |\varphi| = 90^o - 88{,}5^o = 1{,}5^o$$

وبالتالي عامل ضياعه :

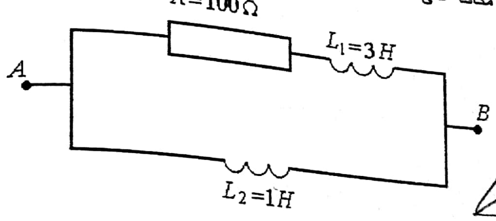
$$d_C = \tan\delta_C = \tan 1{,}5^o = 0{,}0262$$

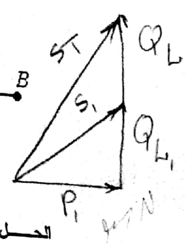
إن جودة المكثف هي مقلوب عامل ضياعه :

$$Q_C = \frac{1}{d_C} = \frac{1}{0{,}0262} = 38{,}17$$

$P_t = P_1 = I_1^2 R_1$

مثال (١٥) : المطلوب : تحويل الدارة المختلطة المبينة في الشكل (١-٤٦) إلى دارة تسلسلية مكافئة على المأخذين (AB) ، إذا كان التردد مساوياً ($f = 800\ Hz$) .





الشكل (١-٤٦)

الحـــل :

في الخطوة الأولى نحول الفرع العلوي من الدارة المؤلف من ملف ومقاومـــة علـــى التسلسل إلى دارة تفرعية :

$$X_{S1} = X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 15072\ \Omega$$

ومنه وحسب قوانين التحويل في العلاقات (1.67) يكون :

$$G_P = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} =$$

$$= \frac{100}{100^2 + 15072^2} = 44.10^{-8}[S] \Rightarrow R_P = \frac{1}{G_P} = 2{,}27\ [M\Omega]$$

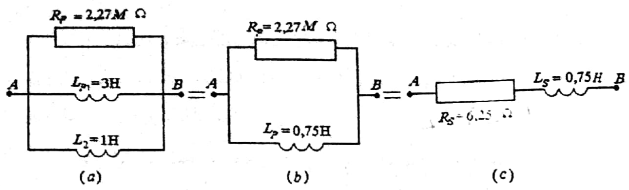
$$B_P = \frac{X_{S1}}{R_S^2 + X_{S1}^2} =$$

$$= \frac{15072}{100^2 + 15072^2} = 66{,}3.10^{-6}[S] \Rightarrow X_{P1} = 15072{,}6\ [\Omega]$$

$$X_{P1} = 2\pi f L_{P1} \Rightarrow L_{P1} = \frac{X_{P1}}{2\pi f} = 3[H]$$

أصبحت لدينا دارة تفرعية كما في الشكل (a ٤٧-١) سنحولها إلى الدارة التفرعية كمـــا في الشكل (b ٤٧-١) ، حيث لدينا التحريض التفرعي الكلي يساوي :

$$L_P = \frac{L_{P1}.L_2}{L_{P1} + L_2} = \frac{3.1}{3+1} = \frac{3}{4} = 0{,}75\ [H]$$



الشكل (١-٤٧)

الآن سنقوم بتحويل الدارة التفرعية إلى دارة تسلسلية حـــسب قـــوانين التحويـــل فـــي العلاقات (1.68) فتكون قيم (x_S , R_S) كما يلي :

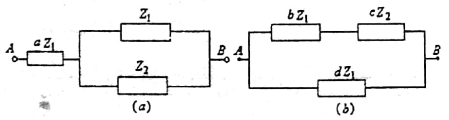
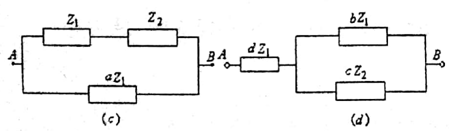
$$R_S = \frac{G_P}{G_P^2 + B_P^2} = 6{,}25\ \Omega$$

$$X_S = \frac{B_P}{G_P^2 + B_P^2} = 3750\Omega \Rightarrow L_S = \frac{3750}{2\pi 800} = 0{,}75\ H$$

والشكل (c ٤٧-١) يبين الدارة التسلسلية المكافئة المطلوبة .

١-١٠ ثنائيات الأقطاب المكافئة وثنائيات الأقطاب العكسية :

الجدول (١-٤)

رقم العلاقة	شروط التكافؤ	دارات بعض الثنائيات المكافئة
(1.69)	$\left.\begin{array}{l} b = a(1+a) \\ c = (1+a)^2 \\ d = 1+a \end{array}\right\}$	
(1.70)	$\left.\begin{array}{l} b = a^2/(1+a) \\ c = (a/(1+a))^2 \\ d = a/(1+a) \end{array}\right\}$	

آ- **ثنائيات الأقطاب المكافئة :** هي ثنائيات أقطاب ذات بنيـــة مختلفـــة عـــن ثنائيـــات الأقطاب الأصلية ولكنها تملك الصفات الترددية نفسها . ويبين الجدول (١-٤) بعـــض دارات هذه الثنائيات وشروط تكافؤها .

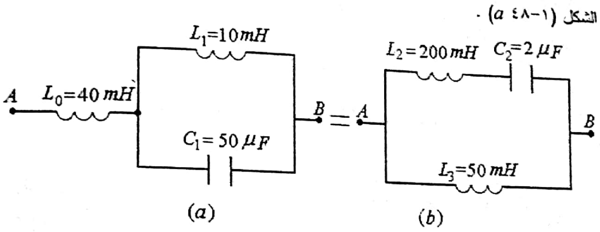
ب- **ثنائيات الأقطاب العكسية :** هي ثنائيات أقطاب ذات ممانعـــات عقديـــة ($\underline{Z}$, $\underline{Z}'$) يساوي جداؤها عدداً حقيقياً موجباً (R^2) لا يتعلق بالتردد .

$$\underline{Z} \cdot \underline{Z}' = R^2 \qquad (1.71)$$

وتسمى الممانعة العقدية $\underline{Z}' = \frac{R^2}{\underline{Z}}$ بالممانعة العقدية العكسية للممانعة $\underline{Z}$ بنسبة (R^2) .

مثال (١٦)

يطلب وضع الدارة وحساب العناصر لثنائي الأقطاب المكافئ لثنائي الأقطاب المبين في الشكل (١-٤٨ a) .



الشكل (١ - ٤٨)

الحـــل :

إن مخطط دارة ثنائي الأقطاب المعطى يطابق المخطط الموجود في الجدول (١-٤ a) حيث :

$$\underline{Z}_1 = j\omega L_1 \;\; , \;\; \underline{Z}_2 = \frac{1}{j\omega C} \;\; , \;\; a\underline{Z}_1 = j\omega L_0$$

عندئذ فإن العامل (a) الضروري لتحديد قيم عناصر مخطط الدارة المكافئـــة يحـــسب كما يلي :

$$a = \frac{a\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{j\omega L_0}{j\omega L_1} = \frac{L_0}{L_1} = \frac{40}{10} = 4$$

وحسب شروط التكافؤ في العلاقات (1.69) يمكن إيجاد العوامل (b , c , d) :

$$b = a(1+a) = 4.5 = 20$$
$$c = (1+a)^2 = 5^2 = 25$$
$$d = 1 + a = 1 + 4 = 5$$

وبذلك تكون عناصر الدارة للمخطط المكافئ مساوية :

$$b\underline{Z}_1 = bj\omega L_1 = j\omega .10.10^{-3}.20 = j\omega 200.10^{-3} \;\; \Omega$$
$$L_2 = 200 \;\; mH$$
$$c\underline{Z}_2 = c\frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{25}{50.10^{-6}} = \frac{1}{j\omega 2.10^{-6}} \;\; \Omega$$
$$C_2 = 2\mu F$$
$$d\underline{Z}_1 = dj\omega L_1 = j\omega 10.10^{-3}.5 = j\omega 50.10^{-3} \;\; \Omega$$
$$L_3 = 50 \;\; mH$$

ويوضح الشكل (١-٤٨ b) المخطط المكافئ للدارة ، حيث تم وضع قيم العناصر على هذا المخطط .

مثال (١٧) :

المطلوب : وضع مخطط ثنائي الأقطاب المعاكس لمخطط الدارة المعطاة في الـــشكل (١-٤٩ a) ، وذلك عندما ($R^2 = 100$) . ثم حدد قيم عناصره إذا كانت :

$$L_1 = 2mH \;,\; L_2 = 5mH \;,\; C_3 = 100\mu F \;,\; L_4 = 5mH \;,$$
$$R_5 = 10\Omega \;,\; C_6 = 25\mu F \;,\; R_7 = 20\Omega$$

الحـــل :

سنحسب حسب العلاقة (1.71) الممانعة العقديـــة ($\underline{Z}'_1$) المعاكـــسة للمانعـــة العقديـــة : $\underline{Z}_1 = j\omega L_1$

$$\underline{Z}'_1 = \frac{R^2}{\underline{Z}_1} = \frac{R^2}{j\omega L_1} = \frac{1}{j\omega(\frac{L_1}{R^2})} = \frac{1}{j\omega C'_1}$$

حيث إن : $C'_1 = \frac{L_1}{R^2} = \frac{2.10^{-3}}{100} = 20.10^{-6}\, F = 20 \;\; \mu F$

إن السعة (C'_1) المحددة لهذا العنصر تعد معكوس العنصر التحريضي (L_1) .

وبالطريقة نفسها نستطيع إيجاد قيم العناصر العكسية للملف التحريضي (L_2) ، وللمكثف السعوي (C_3) ، وللملف التحريضي (L_4) ، وللمقاومة الأومية (R_5) ، وللمكثف (C_6) ، وللمقاومة (R_7) ، وهي على التوالي :

– مكثف سعته : $C'_2 = \frac{L_2}{R^2} = \frac{5.10^{-3}}{100} = 5.10^{-5}\ F = 50\ \mu F$

– ملف تحريضه : $L'_3 = C_3R^2 = 100.10^{-6}.100 = 10^{-2}\ H = 10\ mH$

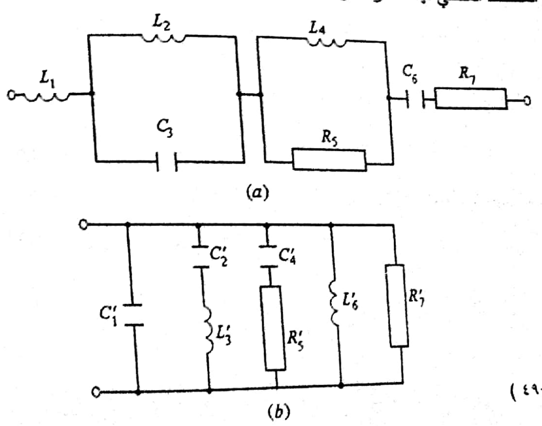
– مكثف سعته : $C'_4 = \frac{L_4}{R^2} = \frac{5.10^{-3}}{100} = 5.10^{-5}\ F = 50\ \mu F$

– مقاومة أومية : $R'_5 = \frac{R^2}{R_5} = \frac{100}{10} = 10\ \Omega$

– ملف تحريضه : $L'_6 = C_6R^2 = 25.10^{-6}.100 = 25.10^{-4}\ H = 2{,}5\ mH$

– مقاومة أومية : $R'_7 = \frac{R^2}{R_7} = \frac{100}{20} = 5\ \Omega$

إن الوصل التسلسلي للعناصر في مخطط الدارة المعطاة يكافئ الوصل التفرعي للعناصر العكسية في المخطط العكسي لهذه الدارة ، ويبين الشكل (١-٤٩ b) المخطط المطلوب .



الشكل (١-٤٩)

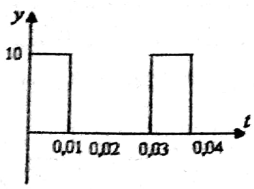
١-١١ مسائل غير محلولة

مسألة (١) :

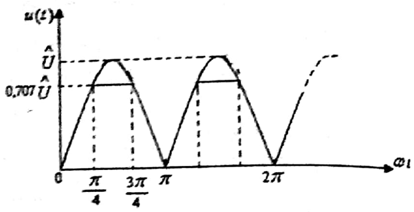
أوجد القيمة الفعالة والقيمة المتوسطة للتابع المتناوب المبين في الشكل (١-٥٠) .

مسألة (٢) :

أوجد القيمة الفعالة والقيمة المتوسطة للجهد المبين في الشكل (١-٥١) . والمقوم تقويماً كاملاً إذا قطع منه الجزء العلوي عند القيمة ($\frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$) .



الشكل (١-٥٠)



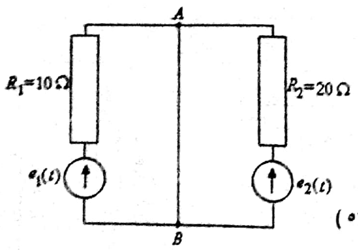
الشكل (١-٥١)

مسألة (٣) :

احسب القيمة اللحظية للتيار المار بين النقطتين $(A\ ,\ B)$ في الدارة المبينة في الشكل (١-٥٢) ، حيث :

$$e_1(t) = 60\ V \sin\omega t$$

$$e_2(t) = 40\ V \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$$



الشكل (١-٥٢)