الفصل الثاني

طرق حساب دارات التيار

المتناوب الجيبي في المستوي العقدي

٢-١ مقدمـــــة :

إن حساب الدارات الكهربائية الخطية في التيار المتناوب الجيبـــي بوســـاطة الأعـــداد العقدية يجب أن يخضع لشروط ضرورية أهمها :

- أن تكون عناصر الدارة (R,L,C) خطية ، أي لا تتغير قيمها بتغير قيمـــة الجهـــد المطبق عليها أو بتغير التيار المار فيها .

- أن تعمل الدارة في الحالة المستقرة وليس في الحالة العابرة ، أي يجـــب أن يكـــون الجهد الجيبي قد طبق على مأخذي الدارة منذ فترة زمنية بحيث تكون الدارة قد وصلت إلـــى حالة الاستقرار قبل الشروع بدراستها .

- أن تكون الجهود والتيارات في الدارة متناوبة جيبية الشكل .

ومن المفهوم أن حساب الدارة الكهربائية يعني حساب قيمة مجهول ما في هذه الـــدارة (تيار أو جهد) . وعندما تكون قيم جميع ممانعات عناصر الدارة معلومة وتكون قيمـــة القـــوة المحركة الكهربائية المغذية للدارة معروفة أيضاً فإن قانوني كيرشوف الأول والثاني بصيغتهما العقدية [العلاقات (1.55) , 1.56)] يكفيان لوضع عدد من المعادلات المستقلة يساوي عـــدد التيارات في الدارة (وهو عدد فروع الدارة B) . ونحصل على هذه المعادلات المستقلة مـــن العقد والحلقات المستقلة الموجودة في الدارة . فإذا وجد في الدارة (N) عقدة فيمكننـــا كتابـــة (N – 1) معادلة عقدة مستقلة حسب قانون كيرشوف الأول . أما معادلات الحلقـــات العقديـــة المستقلة حسب قانون كيرشوف الثاني فيتم تحديد عددها (K) بالنسبة للدارات التي لا تحـــوي منابع تيار بالعلاقة الآتية :

$$K = B - (N - 1) \qquad (2.1)$$

Scanned by CamScanner

وتكتب هذه العلاقة بالنسبة للدارات التي تحتوي منابع تيار بالشكل :

$$K = B - (N - 1) - N_C \qquad (2.2)$$

حيث N_C : عدد منابع التيار الموجودة في الدارة الكهربائية المدروسة .

وهذا يعني أنه عند وضع معادلات الحلقات المستقلة يجب اختيار الحلقات المستقلة بحيث لا تتضمن منابع تيار. وفي هذه الحالة يكون عدد التيارات المجهولة اللازم حسابها مساوياً $(B - N_C)$.

وتجدر الإشارة هنا إلى أنه يتم في البداية وضع معادلات العقد المستقلة ، ومن ثم يستكمل عدد المعادلات اللازمة للحل بمعادلات حلقات مستقلة .

ولإجراء العمل الحسابي يستخدم أيضاً قانون أوم العقدي الذي يصف العلاقة بين الجهد والتيار عند مأخذي كل من العناصر (R,L,C) في الدارة الكهربائية [العلاقة (1.54)] .

وكما ذكرنا سابقاً فإن قانوني كيرشوف الأول والثاني بصيغتيهما العقديتين وقانون أوم العقدي تشكل القوانين الأساسية في حل الدارات الكهربائية الخطية الجيبية في المستوي العقدي ولكن بالإضافة إلى هذه القوانين فقد تم اشتقاق قاعدتين تساعدان كثيراً في حساب الدارات الكهربائية وهما : قاعدة مقسم الجهد العقدية [العلاقة (1.57)] ، وقاعدة مقسم التيار العقدية [العلاقة (1.58)] ، اللتان تستخدمان بكثرة في حل الدارات الكهربائية . وتكفي هذه القوانين الخمسة الأساسية لحل أي دارة كهربائية في التيار الجيبي بوساطة المستوي العقدي .

إلا أن الدارات الكهربائية يمكن أن تكون دارات معقدة تتكون من عدد كبير من العقد والفروع ، مما يتطلب كتابة عدد كبير من معادلات العقد والحلقات المستقلة ، وهذا ما يستدعي بذل مجهود رياضي كبير يستغرق وقتاً طويلاً لحلها . ولذلك تم استخدام طرق مساعدة أخرى لحساب الدارات الكهربائية الخطية في التيار المتناوب الجيبي ، والتي تتطلب بذل مجهود رياضي أقل نسبياً . وتصنف هذه الطرق إلى :

أولاً- طرق مباشرة تعتمد في مفهومها على القوانين والقواعد الأساسية أهمها :

آ- طريقة تيارات الحلقات العقدية (طريقة تيارات ماكسويل العقدية) .

ب- طريقة التراكم العقدية (طريقة التنضدد العقدية) .

Scanned by CamScanner

ج- طريقة جهود العقد العقدية .

ثانياً- طرق غير مباشرة تعتمد على استخدام علاقات مساعدة ناتجة عن إجراء تحويلات مكافئة مختلفة على الدارة الكهربائية المدروسة ومنها :

آ- طريقة الدارات المكافئة لثنائيات الأقطاب الفعالة (منبع الجهد المكافئ ، ومنبع التيار المكافئ ، أو ما يسمى بطريقتي ثيفنين ونورتن) .

ب- طريقة الدارات المكافئة لثنائيات الأقطاب غير الفعالة (تحويل ثنائي أقطاب غير فعال موصول بشكل نجمي إلى آخر موصول بشكل مثلثي وبالعكس) .

ج- وهناك طرق مساعدة أخرى مثل : طريقة تحويل دارة ثنائي أقطاب فعال موصول بشكل نجمي إلى دارة ثنائي أقطاب فعال مكافئ موصول بشكل مثلثي وبالعكس .

وبذلك نلاحظ أنه يمكن تعميم جميع طرق حساب الدارات الكهربائية الخطية في التيار المستمر (والتي تعرّف عليها الطالب في مقررات سابقة) على دارات التيار المتناوب الجيبي وذلك بعد تحويلها إلى المستوي العقدي ، أي استخدام مفهوم الممانعة العقدية بدلاً من المقاومة الأومية ، ومفهوم السماحية العقدية بدلاً من السماحية الحقيقية . وبالتالي سيكون أسلوب العمل الحسابي في التيار المتناوب هو الأسلوب نفسه في التيار المستمر، مع وجود فارق وحيد هو أننا نقوم بحساب الدارات في التيار المستمر بالقيم الحقيقية ، بينما نقوم بإجراء الحسابات في التيار المتناوب بالقيم العقدية ، ولذلك يتم إعادة تحويل هذه القيم إلى المستوي الحقيقي حسب العلاقات [(1.28) , (1.29)] .

٢-٢ استخدام القوانين الأساسية في حل الدارات الكهربائية .

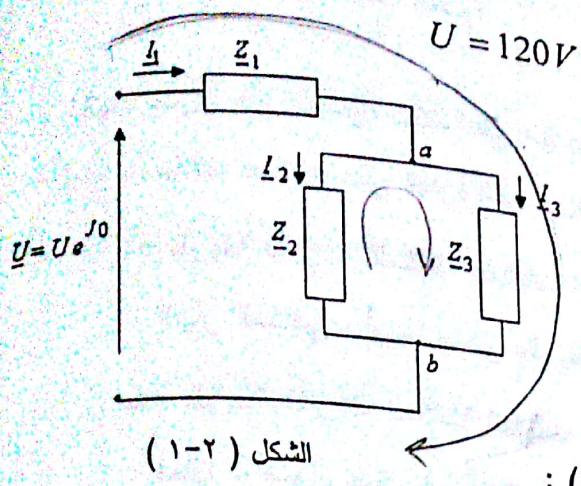
سنوضح طريقة استخدام هذه القوانين من خلال حل المثال الآتي :

مثال (١) : احسب قيم التيارات $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ المارة في فروع الدارة المبينة على الشكل (٢-١) بمساعدة :

آ- قانوني كيرشوف العقديين . ب- قاعدة تقسيم التيار العقدية .

ج- قاعدة تقسيم الجهد العقدية .

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-١)

مع العلم أن :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 10 + j6\ \Omega$$
$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 24 - j7\ \Omega$$
$$\underline{Z}_3 = R_3 + jX_3 = 15 + j20\ \Omega$$

الحـــل :

آ- بوساطة قانوني كيرشوف :

- من قانون كيرشوف الأول (قانون العقد) :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \qquad (1)$$

- من قانون كيرشوف الثاني (قانون الحلقات) :

$$-\underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_3\underline{Z}_3 = 0 \qquad (2)$$

- من قانون كيرشوف الثاني (قانون الحلقات) :

$$\underline{I}_1\underline{Z}_1 + \underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{U} \qquad (3)$$

من المعادلة (2) نحسب التيار $\underline{I}_2$ بدلالة $\underline{I}_3$:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_3 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} \qquad (4)$$

نعوض المعادلة (4) في المعادلة (1) :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_3 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} + \underline{I}_3 = \underline{I}_3\left(\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2} + 1\right) = \underline{I}_3\left(\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}\right) \qquad (5)$$

نعوض قيمة $\underline{I}_1$ من المعادلة (5) في المعادلة (3) فنجد :

$$\underline{I}_3\left(\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2}\right)\underline{Z}_1 + \underline{I}_3\underline{Z}_3 = \underline{U}$$

$$\underline{I}_3\left(\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2}\right) = \underline{U}$$

نبدل بالقيم العددية فنحصل على قيمة $\underline{I}_3$ كما يلي :

Scanned by CamScanner

$$\underline{I}_3\left[\frac{(10+j6)(15+j20)+(10+j6)(24-j7)+(24-j7)(15+j20)}{24-j7}\right]$$
$$=120\,e^{j0}$$

$$\underline{I}_3\left(\frac{812+j739}{24-j7}\right)=120\,e^{j0}$$

$$\underline{I}_3\cdot\frac{1097{,}93\,e^{j42{,}3}}{25\,e^{-j16{,}3}}=120\,e^{j0}$$

$$\underline{I}_3\,(43{,}92\,.e^{j58{,}6})=120\,e^{j0}$$

$$\underline{I}_3=\frac{120\,e^{j0}}{43{,}92\,e^{j58{,}6}}=2{,}74\,e^{-j58{,}6}\ A$$

نعوض قيمة $\underline{I}_3$ في المعادلة (5) فنحسب قيمة $\underline{I}_1$:

$$\underline{I}_1=2{,}73\,e^{-j58{,}6}\left(\frac{15+J20+24-j7)}{24-j7}\right)=2{,}74\,e^{-j58{,}6}\left(\frac{39+j13}{24-j7}\right)$$

$$\underline{I}_1=2{,}74\,e^{-j58{,}6}\,\frac{41\,e^{j18{,}4}}{25\,e^{-j16{,}3}}=4{,}5\,e^{-j23{,}9}\ A$$

ويمكننا حساب قيمة $\underline{I}_2$ بتعويض قيمة التيار $\underline{I}_3$ في المعادلة (4) :

$$\underline{I}_2=2{,}74\,e^{-j58{,}6}\cdot\frac{15+j20}{24-j7}=2{,}74\,e^{-j58{,}6}\,\frac{25\,e^{j53}}{25\,e^{-j16{,}3}}$$

$$\underline{I}_2=2{,}74\,e^{j10{,}7}\ A$$

ب- بوساطة قاعدة تقسيم التيار :

لاستخدام هذه القاعدة يلزم حساب قيمة التيار الكلي المار في الدارة ، وهو $\underline{I}_1$ في هذا المثال ، ولذلك يجب إيجاد قيمة الممانعة الكلية للدارة $\underline{Z}_{eq}$:

$$\underline{Z}_{eq}=\underline{Z}_1+\frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}=10+j6+\frac{(24-j7)(15+j20)}{39+j13}=$$

$$=24{,}4+j10{,}8=26{,}7\,e^{j23{,}87}\ \Omega$$

ومن قانون أوم العقدي نحسب قيمة التيار الكلي $\underline{I}_1$:

Scanned by CamScanner

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{120\,e^{j0}}{26{,}7\,e^{j23{,}87}} = 4{,}5\,e^{-j23{,}87}\ A$$

ومنه يمكن إيجاد قيم $\underline{I}_2$ و $\underline{I}_3$ حسب قاعدة مقسم التيار كما يلي :

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4{,}5\,e^{-j23{,}87}\ \frac{24 - j7}{39 + j13} =$$

$$= 4{,}5\,e^{-j23{,}87}\ \frac{25\,e^{-j16{,}3}}{41\,e^{j18{,}4}} = 2{,}74\,e^{-j58{,}6}\ A$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4{,}5\,e^{-j23{,}87}\ \frac{15 + j20}{39 + j13} = 2{,}74\,e^{j10{,}7}\ A$$

ج- بوساطة قاعدة تقسيم الجهد :

نحسب قيمة الجهد الجزئي $\underline{U}_{ab}$ كما يلي :

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + (\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3)} = \underline{U} \frac{\frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U} \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \underline{Z}_3}$$

وبالتعويض عددياً نجد أن قيمة $\underline{U}_{ab}$ تساوي :

$$\underline{U}_{ab} = 68{,}6\,e^{-j5{,}57}\ V$$

ومنه نحسب قيم التيارات $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ على النحو الآتي :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{68{,}6\,e^{-j5{,}57}}{\underline{Z}_2 // \underline{Z}_3} = \frac{68{,}6\,e^{-j5{,}57}}{15{,}24\,e^{j18{,}3}} = 4{,}5\,e^{-j23{,}87}\ A$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_2} = \frac{68{,}6\,e^{-j5{,}57}}{25\,e^{-j16{,}3}} = 2{,}74\,e^{j10{,}7}\ A$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_3} = \frac{68{,}6\,e^{-j5{,}57}}{25\,e^{j53}} = 2{,}74\,e^{-j58{,}6}\ A$$

Scanned by CamScanner

وإذا طلب إيجاد القيمة اللحظية للتيار الكلي المار في الدارة ($\underline{I}_1$) مثلاً ، وباعتبار أن الجهد المطبق جيبي الشكل ، نقوم بما يلي :

إن قيمة التيار $\underline{I}_1$ التي حصلنا عليها هي :

$$\underline{I}_1 = I e^{j\varphi_i} = 4{,}5\, e^{-j23{,}87}$$

وكما نلاحظ فهي تمثل بشعاع ساكن طوله يساوي القيمة الفعالة للتيار ($I = 4{,}5\ A$) ، وزاويته ($\varphi_i = -23{,}87$) . ولإيجاد القيمة اللحظية لهذا التيار نضرب طرفيه بكل من $\sqrt{2}$ و $e^{j\omega t}$ لنحول الشعاع الساكن إلى شعاع دائر ، أي :

$$\sqrt{2}\ I e^{j\varphi_i} . e^{j\omega t} = \sqrt{2} . 4{,}5 e^{-j23{,}87} . e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}_1(t) = 6{,}36\ e^{j(\omega t - 23{,}87)}$$

$$\underline{i}_1(t) = 6{,}36\cos(\omega t - 23{,}87) + j\, 6{,}36\sin(\omega t - 23{,}87)$$

وبالتالي القيمة اللحظية للتيار الكلي المار في الدارة هي :

$$i_1(t) = \mathrm{Im}[\underline{i}_1(t)] = 6{,}36\sin(\omega t - 23{,}87)\ \ A$$

٢-٣ طريقة تيارات الحلقات العقدية :

تسمح هذه الطريقة بتقليص عدد المعادلات اللازمة لحل الدارة الكهربائية إلى العدد (K) المعطى بالعلاقة العامة (2.2) ، وذلك مقارنة مع ذلك العدد من المعادلات التي نحصل عليها بتطبيق قانوني كيرشوف (الأول والثاني) على الدارة المدروسة .

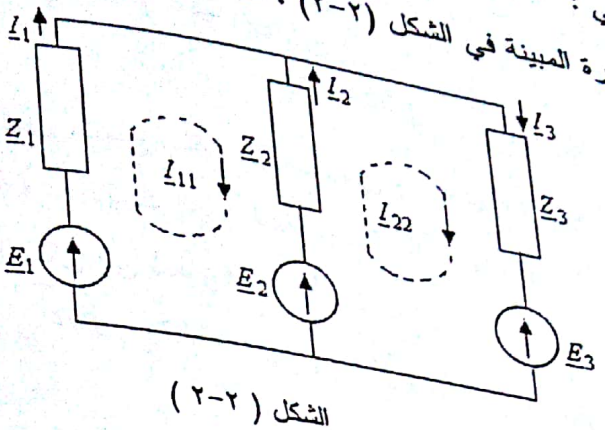
وتعتمد هذه الطريقة على قانون كيرشوف الثاني فقط ، وهي تفترض وجود تيارات وهمية دوارة في الحلقات المستقلة في الدارة الكهربائية تدعى بالتيارات الحلقية ، أو تيارات ماكسويل الدوارة . ويمكن عندها إيجاد التيار المار في أي فرع من فروع الدارة الكهربائية عن طريق تراكم تيارات الحلقات المارة في هذا الفرع .

وعند استخدام هذه الطريقة يتم اختيار تيارات الحلقات ، بحيث يمر تيار حلقي واحد على الأقل في أي فرع من فروع الدارة . ويتم أيضاً اختيار اتجاه التيارات الحلقية الدوارة

Scanned by CamScanner

بشكل اعتباطي ، ولكن يفضل إعطائها اتجاه واحد . وسوف نوضح هذه الطريقة من خلال حل المثال الآتي :

مثال (٢) : للدارة المبينة في الشكل (٢-٢) ، احسب تيارات فروع هذه الدارة ، علماً أن :



الشكل (٢-٢)

$$\underline{E}_1 = 120\ V\ ,\ \underline{E}_2 = (100 + j10)\ V\ ,\ \underline{E}_3 = (70 + j25)\ V$$

$$\underline{Z}_1 = (10 + j30)\ \Omega\ ,\ \underline{Z}_2 = (15 + j40)\ \Omega\ ,\ \underline{Z}_3 = 35\ \Omega$$

الحـــل : نلاحظ من الدارة المدروسة أننا نحتاج إلى عدد من المعادلات يساوي عدد الحلقات المستقلة فقط $(K = 3 - (2 - 1) - 0 = 2)$ ، وليس إلى عدد فروع الدارة ، وهو يكافئ توفيراً كبيراً في المجهود الرياضي الحسابي .

نكتب معادلات الحلقات للدارة بعد اختيارها وتحديد اتجاهها وتسميتها ، حيث إن :

$\underline{I}_{11}$: تيار الحلقة الأولى . $\underline{I}_{22}$: تيار الحلقة الثانية .

$$\underline{I}_{11}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) - \underline{I}_{22}\underline{Z}_2 = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \qquad (1)$$

$$-\underline{I}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{I}_{22}(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \underline{E}_2 - \underline{E}_3 \qquad (2)$$

إن حاصل جمع هاتين المعادلتين ، وبعد إجراءات الاختصارات الممكنة ، هو :

$$\underline{I}_{11}\underline{Z}_1 + \underline{I}_{22}\underline{Z}_3 = \underline{E}_1 - \underline{E}_3 \qquad (3)$$

من المعادلة (1) نحسب قيمة التيار $\underline{I}_{11}$ بدلالة $\underline{I}_{22}$:

Scanned by CamScanner

$$\underline{I}_{11}=\frac{\underline{E}_1-\underline{E}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}+\frac{\underline{I}_{22}\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}$$

نعوض عددياً فيكون :

$$\underline{I}_{11}=0,3e^{-j96,9}+0,575e^{-j0,9}\,\underline{I}_{22} \qquad (4)$$

نعوض قيمة $\underline{I}_{11}$ من المعادلة (4) في المعادلة (3) فنحسب قيمة $\underline{I}_{22}$:

$$\underline{Z}_1(0,3e^{-j96,9}+0,575e^{-j0,9}\,\underline{I}_{22})+\underline{Z}_3\underline{I}_{22}=120-70-j25$$

$$31,62e^{j71,6}(0,3e^{-j96,9}+0,575e^{-j0,9}\,\underline{I}_{22})+35\underline{I}_{22}=50-j25$$

نعالج هذه العلاقة ونستخدم الشكل الأسي أحياناً ، والشكل الـديكارتي أحيانـاً أخـرى لنوجد قيمة $\underline{I}_{22}$:

$$\underline{I}_{22}=\frac{46,4e^{-j26,9}}{44,5e^{j22,8}}=1e^{-j49,7}\,A=(0,646-j0,763)\;A$$

نعوض قيمة $\underline{I}_{22}$ في المعادلة (4) لنحسب قيمة التيار $\underline{I}_{11}$:

$$\underline{I}_{11}=0,3e^{-j96,9}+0,575e^{-j0,9}.1e^{-j49,7}$$

$$\underline{I}_{11}=0,86e^{-j57}=(0,465-j0,72)\;A$$

ومنه يمكننا حساب التيارات في فروع الدارة كما يلي :

$$\underline{I}_1=\underline{I}_{11}=0,8e^{-j57}\;A$$

$$\underline{I}_2=\underline{I}_{22}-\underline{I}_{11}=0,646-j0,763-0,465+0,72$$

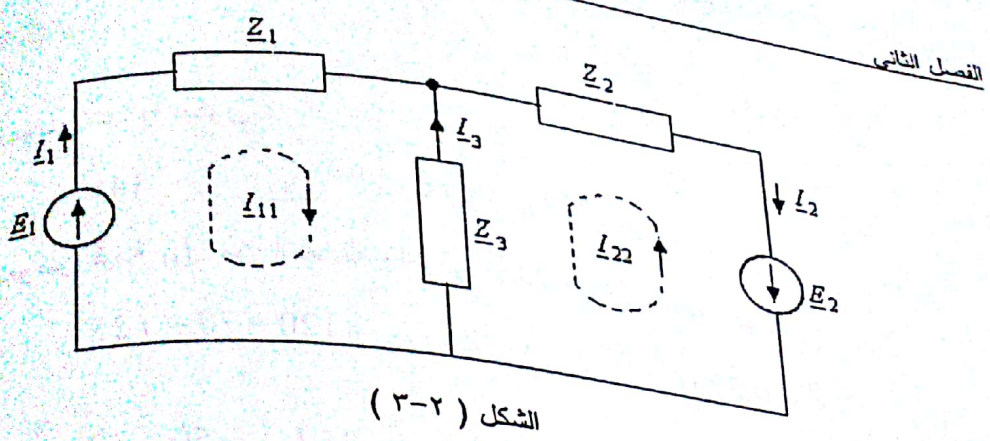
$$\underline{I}_2=0,18-j0,043\;A=0,185e^{-j13,4}\;A$$

$$\underline{I}_3=\underline{I}_{22}=1\,e^{-j49,7}\;A$$

مثال (٣) : حدد التيارات في فروع الدارة المبينة في الشكل (٢-٣) ، واحسب الجهود الهابطة على ممانعاتها ، وارسم المخطط الشعاعي لها ، إذا علمت أن :

$$\underline{E}_1=20e^{j30}\;V\;,\quad \underline{E}_2=80\;V\;,\quad \underline{Z}_1=(26+j25)\;\Omega\;,$$
$$\underline{Z}_2=(26-j5)\;\Omega\;,\quad \underline{Z}_3=-j10\;\Omega$$

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-٣)

الحـــل :

بعد اختيار الحلقات ، كما في الشكل (٢-٣) نقوم بوضع مجموعة معادلاتها بعد إجراء الترتيبات الآتية :

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 26 + j25 - j10 = 26 + j15 = 30\,e^{j30}\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 = -j10\ \Omega$$

$$\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 26 - j5 - j10 = 26 - j15 = 30\,e^{-j30}\ \Omega$$

$$\underline{E}_{11} = \underline{E}_1 = 20\,e^{j30}\ V\ ,\ \underline{E}_{22} = \underline{E}_2 = -80\ V$$

حيث :

$\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}$: الممانعات العقدية الذاتية للحلقتين الأولى والثانية وتساوي كل منهما مجموع الممانعات الداخلة في الحلقة المعنية ، وتؤخذ كل من هذه الممانعات بإشارة موجبة دائماً .

$\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{21}$: الممانعات العقدية المتبادلة بين الحلقتين الأولى والثانية ، وتؤخذ هذه الممانعات بإشارة موجبة إذا كانت تيارات الحلقات المارة بهذه الممانعات تملك الاتجاه نفسه ، كما هو الحال في هذا المثال ، أي :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = +\underline{Z}_3$$

بينما تؤخذ بإشارة سالبة إذا كانت اتجاهات تيارات الحلقات المارة فيها متعاكسة ، أي :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_3$$

Scanned by CamScanner

وبالتالي مجموعة المعادلات هي :

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\underline{I}_{11}+\underline{Z}_{12}\underline{I}_{22}=\underline{E}_{11} \\ \underline{Z}_{21}\underline{I}_{11}+\underline{Z}_{22}\underline{I}_{22}=\underline{E}_{22} \end{aligned}\right\}$$

يمكن حل هاتين المعادلتين باستخدام طريقة المصفوفات كما يلي :

$$\Delta_{\underline{Z}}=\begin{bmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30e^{j30} & -j10\\ -j10 & 30e^{-j30}\end{bmatrix}=1000 \quad \Omega^2$$

$$\Delta_1=\begin{bmatrix}\underline{E}_{11} & \underline{Z}_{12}\\ \underline{E}_{22} & \underline{Z}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20e^{j30^o} & -j10\\ -80 & 30e^{-j30^o}\end{bmatrix}=1000e^{-j53^o}\ V.\Omega$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix}\underline{Z}_{11} & \underline{E}_{11}\\ \underline{Z}_{21} & \underline{E}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30e^{j30^o} & 20e^{j30^o}\\ -j10 & -80\end{bmatrix}=2408e^{j205^o}\ V.\Omega$$

ومنه يمكننا حساب تيارات الحلقات العقدية $\underline{I}_{11}$, $\underline{I}_{22}$ كما يلي : طريقة الزوايا

$$\underline{I}_{11}=\frac{\Delta_1}{\Delta_{\underline{Z}}}=\frac{1000e^{-j53^o}}{1000}=e^{-j53^o}\ A=(0{,}6-j\,0{,}8)\ A$$

$$\underline{I}_{22}=\frac{\Delta_2}{\Delta_{\underline{Z}}}=\frac{2409e^{j205^o}}{1000}=2{,}41e^{j205^o}\ A=(-2{,}18-j\,1{,}02)\ A$$

سنحدد اتجاه تيارات الحلقات التي حصلنا عليها حسب زاوية فرق الطور بين القوى المحركة الكهربائية للحلقات وتيارات هذه الحلقات على النحو الآتي :

- لدينا الزاوية : $\varphi_1=\varphi_{E_{11}}-\varphi_{I_{11}}=30^o-(-53^o)=87^o$

وهي كما نلاحظ أقل من (90^o) ، وبالتالي اختيار اتجاه تيار الحلقة $\underline{I}_{11}$ في الحلقة الأولى يعد اختياراً صحيحاً .

- أما الزاوية $\varphi_2=\varphi_{E_{22}}-\varphi_{I_{22}}=0^o-205^o=-205^o$

Scanned by CamScanner

فهي أكبر من (90°) ، وهذا يعني أن اختيار اتجاه تيار الحلقة $\underline{I}_{22}$ في الحلقة الثانية لم يكن صحيحاً ، ويجب تغييره في الاتجاه المعاكس ، وطور التيار العقدي $\underline{I}_{22}$ نغيره بزاوية (180°) ، فنحصل عندها على :

$$\underline{I}_{22} = 2{,}41e^{j(205^o-180^o)} = 2{,}41e^{j25^o}\ A$$

ويمكننا الآن تحديد قيم تيارات الفروع في الدارة ، حيث :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11} = e^{-j53^o}\ A$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{22} = 2{,}41e^{j25^o}\ A$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{22} - \underline{I}_{11} = 2{,}41e^{j25^o} - e^{-j53^o} = 2{,}4e^{j48{,}6^o}\ A$$

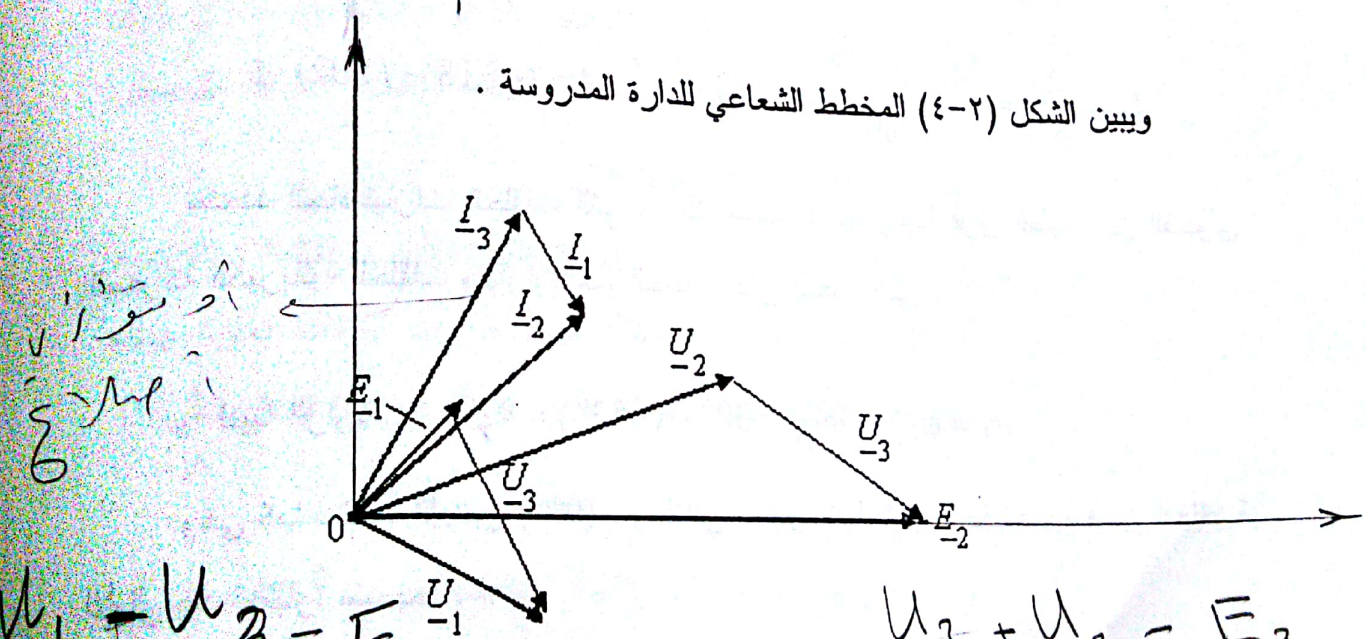
أما حساب الجهود على ممانعات الدارة فيتم كما يلي :

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1\underline{Z}_1 = e^{-j53^o}.36e^{j43{,}9^o} = 36e^{j9{,}1^o}\ V$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2\underline{Z}_2 = 2{,}41e^{j25^o}.26{,}65e^{-j10{,}9^o} = 63{,}8e^{j14{,}8^o}\ V$$

$$\underline{U}_3 = \underline{I}_3\underline{Z}_3 = 2{,}4e^{j48{,}6^o}.10e^{-j90^o} = 24e^{-j41{,}4^o}\ V$$

ويبين الشكل (٢-٤) المخطط الشعاعي للدارة المدروسة .



الشكل (٢-٤)

$\underline{U}_1 - \underline{U}_3 = \underline{E}_1$
$\underline{U}_3 = \underline{U}_1 - \underline{E}_1$
$\underline{U}_3 + \underline{U}_2 = \underline{E}_2$
$\underline{U}_3 = \underline{E}_2 - \underline{U}_2$

Scanned by CamScanner

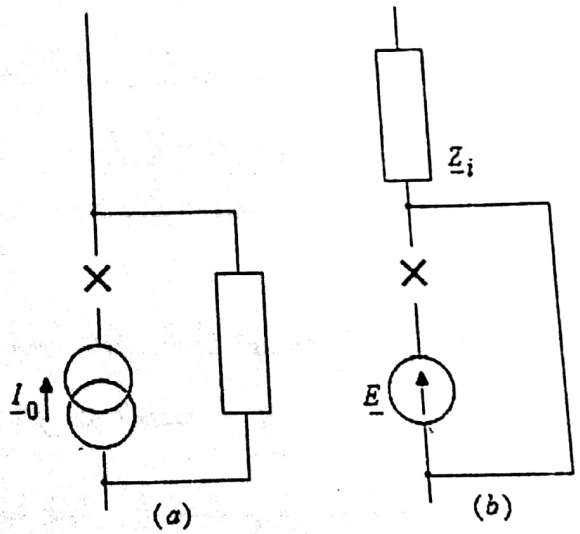
٢-٤ طريقة التراكم العقدية :

يفضل استخدام هذه الطريقة في حل الدارات الكهربائية الخطية ، التي تحتوي عدة منابع تيار، أو عدة قوى محركة كهربائية .

ويتلخص مبدأ هذه الطريقة في أن التيار في أي فرع من الدارة الكهربائية الخطية يساوي مجموع (تراكم) التيارات الجزئية المارة في هذا الفرع والناتجة عن تأثير كل من القوى المحركة الكهربائية الموجودة في الدارة على حدة ، حيث يتم حساب قيمة التيار على عدة مراحل . ففي البداية يتم فصل جميع المنابع ما عدا المنبع الأول ($\underline{E}_1$) وتحسب قيمة التيار الجزئي ($\underline{I}_{E_1}$) في ذلك الفرع من الدارة ، ثم يوصل المنبع الثاني ($\underline{E}_2$) فقط مع فصل بقية المنابع ، ويحسب التيار الجزئي ($\underline{I}_{E_2}$) في الفرع نفسه من الدارة . وهكذا تتكرر هذه العملية بالطريقة نفسها لبقية المنابع . ويتم إيجاد قيمة التيار المطلوب من خلال تراكم هذه التيارات الجزئية المحسوبة ($\underline{I} = \underline{I}_{E_1} + \underline{I}_{E_2} + \ldots + \underline{I}_{E_n}$) .

ونشير هنا إلى أنه عند فصل المنابع من الدارة ، تترك ممانعاتها الداخلية ، (إن وجدت) ، في الدارة .

ويقصد بفصل منبع التيار من الدارة فتح فرع الدارة الموجود فيه هذا المنبع (ممانعته الداخلية لانهائية في الكبر) ، أما فصل منبع الجهد فيعني قصر الفرع الموجود فيه (الممانعة الداخلية لمنبع الجهد مساوية الصفر) ، انظر الشكل (٢-٥) .

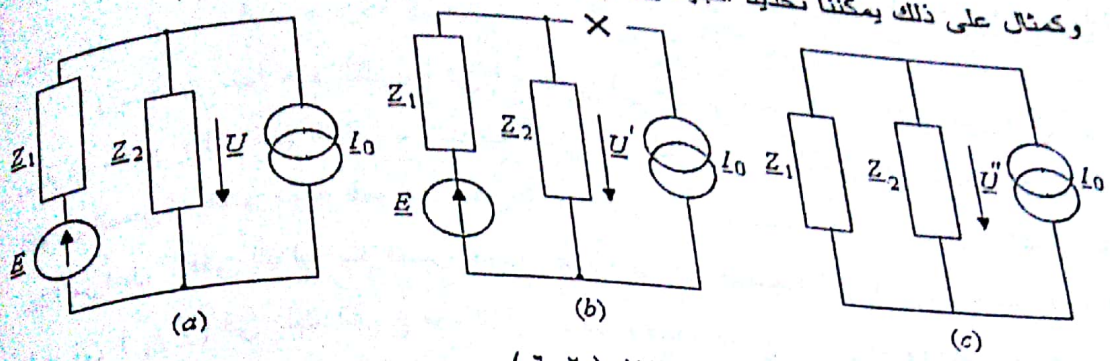


الشكل (٢-٥)

a- فصل منبع التيار ، b- فصل منبع الجهد

Scanned by CamScanner

تستخدم طريقة التراكم ليس فقط لحساب تيارات الدارة الكهربائية الخطية ، وإنما أيضاً في حساب الجهود في فروع هذه الدارة ، إذ إن الجهود تملك علاقة خطية مع التيارات . وكمثال على ذلك يمكننا تحديد الجهد $\underline{U}$ في الدارة المبينة في الشكل (٢-٦ a) .



الشكل (٢-٦)

فعند فصل منبع التيار كما في الشكل (٢-٦ b) فإن الجهد $\underline{U'}$ الهابط على الممانعة $\underline{Z_2}$ يحدد باستخدام علاقة مقسم الجهد العقدي :

$$\underline{U'} = \underline{E}\ \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad (2.3)$$

وعند فصل منبع الجهد كما في الشكل (٢-٦ c) يكون الجهد الهابط على كل من الممانعتين $\underline{Z}_1$ و $\underline{Z}_2$ متساوياً ، ومساوياً إلى $\underline{U''}$ والذي تحدد قيمته بوساطة قانون أوم العقدي:

$$\underline{U''} = \underline{Z}\,\underline{I}_0 = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}} = \frac{\underline{I}_0}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \underline{I}_0 \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad (2.4)$$

وبجمع القيمتين $\underline{U'}$ و $\underline{U''}$ يمكن الحصول على قيمة الجهد العقدي المطلوب $\underline{U}$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{E}\,\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \frac{\underline{I}_0\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2(\underline{E} + \underline{Z}_1\underline{I}_0)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \qquad (2.5)$$

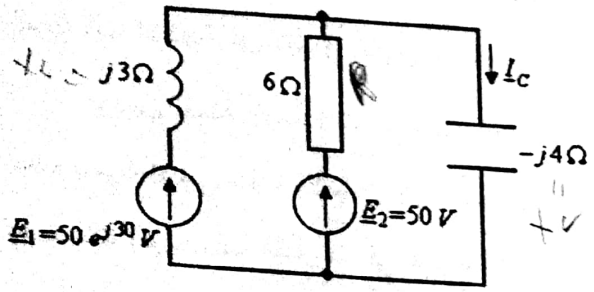
مثال (٤) : احسب قيمة التيار المار في المكثف في الدارة المبينة في الشكل (٢-٧) بتطبيق طريقة التراكم العقدية .

الحـــل : نحسب التيار $\underline{I}_C$ كحاصل تراكم التيارين الجزئيين الناتجين عن كل من القوتين المحركتين الكهربائيتين :

Scanned by CamScanner

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{C,E_1} + \underline{I}_{C,E_2}$$

ونقوم بحساب كل من التيار الجزئي $\underline{I}_{C,E_1}$ ، أي التيار الجزئي المار في المكثف والناجم عن $\underline{E}_1$ ، والتيار الجزئي المار في المكثف $\underline{I}_{C,E_2}$ والناجم عن $\underline{E}_2$ باستخدام علاقة مقسم التيار العقدي



الشكل (٢-٧)

$$\underline{I}_{C,E_1} = \frac{E_1}{jx_L + (R \,//\, jx_C)} \cdot \frac{R}{R + jx_C}$$

بالتعويض عددياً نجد أن :

$$\underline{I}_{C,E_1} = \frac{50e^{j30}}{1{,}6 + j\,0{,}6} \cdot \frac{6}{6 - j4} = 24{,}6e^{j43{,}2}\ A$$

$$\underline{I}_{C,E_2} = \frac{E_2}{R + (jx_L \,//\, jx_C)} \cdot \frac{jx_L}{jx_L + jx_C}$$

$$\underline{I}_{C,E_2} = \frac{50}{6 + j12} \cdot \frac{j3}{j3 - j4} = 11{,}2e^{j116{,}6}\ A$$

وبالتالي يكون التيار المار في المكثف هو :

$$\underline{I}_C = 24{,}6e^{j43{,}2} + 11{,}2e^{j116{,}6} = 12{,}9 + j\,26{,}9 = 29{,}8e^{j64{,}4}\ A$$

ولو طلب إيجاد القيمة اللحظية لهذا التيار نقوم بضرب طرفي علاقته بالقيمة $\sqrt{2}\,e^{j\omega t}$ ، وباعتباره تياراً جيبياً نحصل على :

$$\underline{i}_C(t) = 29{,}8.\sqrt{2}\,e^{j\omega t}.e^{j64{,}4} = 42e^{j(\omega t + 64{,}4)}\ A$$

ومنه القيمة اللحظية للتيار المار في المكثف تساوي :

$$\underline{i}_C(t) = \mathrm{Im}[\underline{i}_C(t)] = 42\sin(\omega t + 64{,}4^o)\ A$$

Scanned by CamScanner

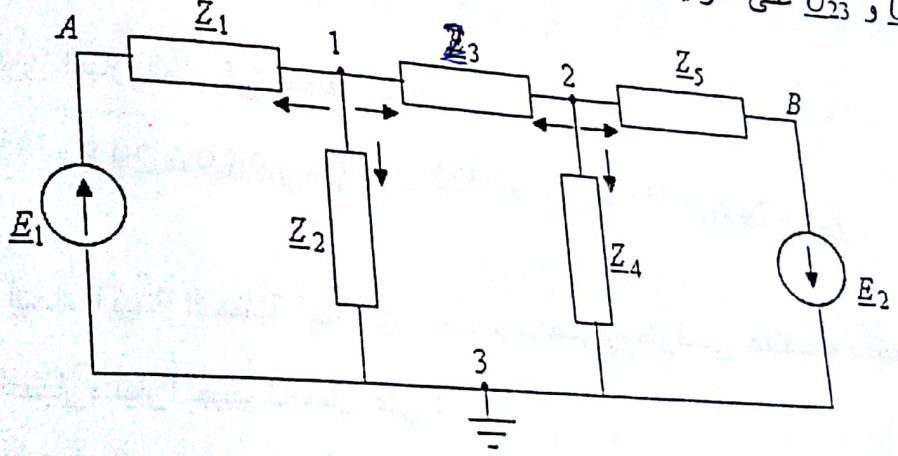
٢-٥ طريقة جهود العقد :

إن حل الدارات الكهربائية المعقدة اعتماداً على طريقة جهود العقد سيقود إلى حل جملة المعادلات الناتجة عن تطبيق قانون كيرشوف الأول فقط بصيغته العقدية .

وبحل جملة المعادلات يتم تحديد جهود العقد الرئيسية في الدارة الكهربائية نسبة إلى عقدة معينة تسمى عقدة الأساس (أو عقدة الإسناد) ، والتي يؤخذ كمونها مساوياً إلى الصفر.

وبعد ذلك يتم حساب التيارات في فروع الدارة باستخدام قانون أوم العقدي .

وكما هو معروف فإن العقدة هي نقطة مشتركة في الدارة الكهربائية لعنصرين أو أكثر من عناصر هذه الدارة . وعند اتصال ثلاثة عناصر أو أكثر عند عقدة ما ، فإن هذه العقدة تسمى بالعقدة الرئيسية ، ويكون جهد العقدة هو جهد عقدة ما بالنسبة لعقدة الإسناد . وسنوضح كيفية استخدام هذه الطريقة للدارة المبينة في الشكل (٢-٨) ، حيث إنها تحتوي ثلاث عقد رئيسية (1, 2, 3) ، وعقدتين غير رئيسيتين (A , B) ، فإذا تم اختيار العقدة الرئيسية (3) كعقدة إسناد فإننا نرى وجود جهدي عقدة في هذه الدارة ، هما $\underline{U}_{13}$ الذي يمثل الجهد بين العقدتين (3,1) ، و $\underline{U}_{23}$ الذي يمثل الجهد بين العقدتين (3,2) . ولكن كما ذكرنا سابقاً فإن جهد العقدة يحدد دائماً بالنسبة لعقدة الإسناد ، ولذلك فإننا سنستخدم الرموز $\underline{U}_1$ و $\underline{U}_2$ بدلاً من $\underline{U}_{13}$ و $\underline{U}_{23}$ على الترتيب .



الشكل (٢-٨)

وبتطبيق قانون كيرشوف الأول على العقدتين (1 , 2) يمكننا الحصول على معادلتين بمجهولين هما $\underline{U}_1$ و $\underline{U}_2$ ، وبفرض أن جميع تيارات الفروع المتعلقة بالعقدة تكون خارجة منها فإنه يمكننا أن نكتب المعادلات كما يلي :

Scanned by CamScanner

- بالنسبة للعقدة رقم 1 (مجموع التيارات الخارجة من هذه العقدة يساوي إلى الصفر):

$$\frac{\underline{U}_1-\underline{E}_1}{\underline{Z}_1}+\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2}+\frac{\underline{U}_1+\underline{U}_2}{\underline{Z}_3}=0 \qquad (2.6)$$

- بالنسبة للعقدة رقم (2) وبالطريقة نفسها :

$$\frac{\underline{U}_2-\underline{U}_1}{\underline{Z}_3}+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_4}+\frac{\underline{U}_2-\underline{E}_2}{\underline{Z}_5}=0 \qquad (2.7)$$

وبترتيب حدود المعادلتين (2.6) , (2.7) نحصل على جملة المعادلتين :

$$\left.\begin{aligned}(\frac{1}{\underline{Z}_1}+\frac{1}{\underline{Z}_2}+\frac{1}{\underline{Z}_3})\underline{U}_1-(\frac{1}{\underline{Z}_3})\underline{U}_2&=(\frac{1}{\underline{Z}_1})\underline{E}_1\\ -(\frac{1}{\underline{Z}_3})\underline{U}_1+(\frac{1}{\underline{Z}_3}+\frac{1}{\underline{Z}_4}+\frac{1}{\underline{Z}_5})\underline{U}_2&=-(\frac{1}{\underline{Z}_5})\underline{E}_2\end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

وبما أن $\underline{Y}=\frac{1}{\underline{Z}}$ فيمكن كتابة جملة المعادلتين (2.8) بدلالة السماحيات العقدية كما يلي :

$$\left.\begin{aligned}(\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3)\underline{U}_1-\underline{Y}_3\underline{U}_2&=\underline{Y}_1\underline{E}_1\\ -\underline{Y}_3\underline{U}_1+(\underline{Y}_3+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5)\underline{U}_2&=-\underline{Y}_5\underline{E}_2\end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

ويمكننا كتابة جملة المعادلتين (2.9) بالصيغة العامة المعبرة عن طريقة جهود العقد على النحو الآتي :

$$\left.\begin{aligned}\underline{Y}_{11}\underline{U}_1+\underline{Y}_{12}\underline{U}_2&=\underline{I}_1\\ \underline{Y}_{21}\underline{U}_1+\underline{Y}_{22}\underline{U}_2&=\underline{I}_2\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

حيث :

$\underline{Y}_{11}$: السماحية العقدية الذاتية للعقدة (1) وتساوي مجموع السماحيات العقدية المتصلة بهذه العقدة ، أي :

$$(\underline{Y}_{11}=\underline{Y}_1+\underline{Y}_2+\underline{Y}_3)$$

$\underline{Y}_{22}$: السماحية العقدية الذاتية للعقدة (2) وتساوي مجموع السماحيات العقدية المتصلة بهذه العقدة أي :

$$(\underline{Y}_{22}=\underline{Y}_3+\underline{Y}_4+\underline{Y}_5)$$

Scanned by CamScanner

$\underline{Y}_{12}$ ، $\underline{Y}_{21}$: السماحية العقدية المتبادلة بين العقدتين (1 , 2) أو بالعكس وهي تساوي مجموع السماحيات العقدية الواقعة بين العقدتين (1 , 2) . وتؤخذ السماحيات المتبادلة دائماً بإشارة سالبة للدارات الكهربائية التي لا تحتوي منابع طاقة كهربائية مقادة والتي تكون فيها أيضاً جميع جهود العقد موجهة باتجاه عقدة الإسناد وهنا لدينا :

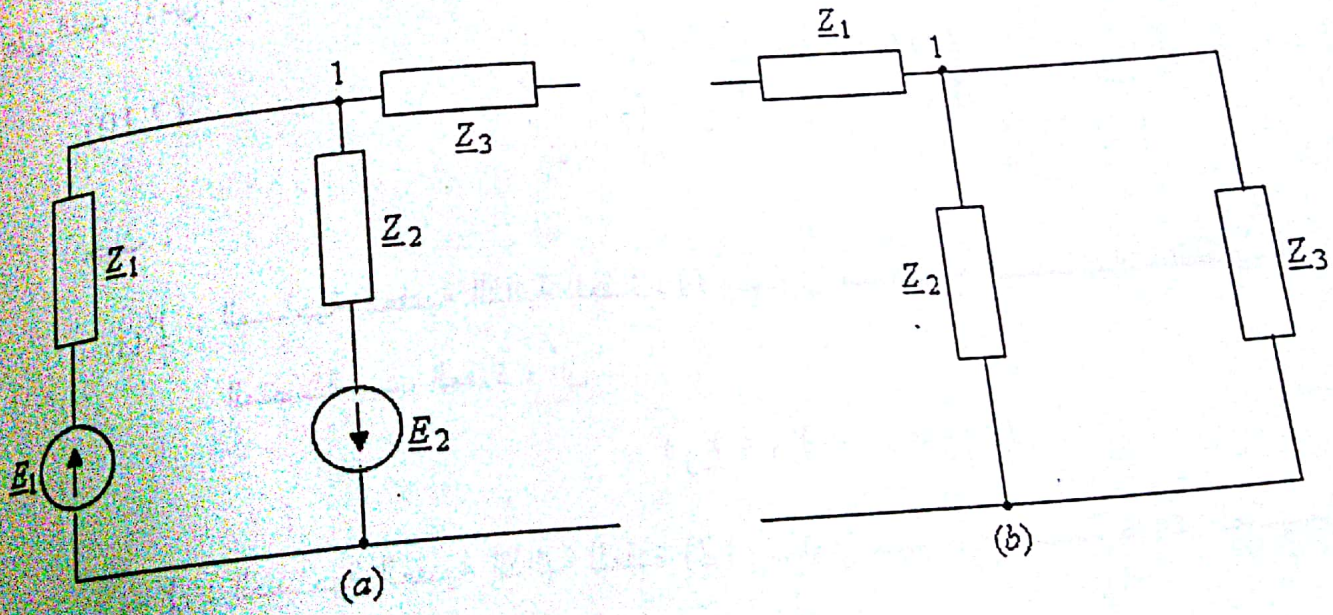
$$(\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_3)$$

$\underline{I}_1$: هو مجموع التيارات القادمة إلى العقدة رقم (1) من جميع المنابع المتصلة بهذه العقدة ، وللدارة المبينة في الشكل (٢-٨) لدينا تيار واحد يقترب إلى العقدة (1) من المنبع $\underline{E}_1$ ، ولذلك تؤخذ إشارته موجبة ويساوي :

$$(\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1})$$

$\underline{I}_2$: مجموع التيارات القادمة إلى العقدة رقم (2) من جميع المنابع المتصلة بهذه العقدة وهنا لدينا تيار واحد يتجه مبتعداً عن العقدة وناتجاً عن المنبع $\underline{E}_2$ ولذلك يؤخذ بإشارة سالبة وتساوي قيمته :

$$(\underline{I}_2 = -\frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_5})$$



الشكل (٢-٩)

Scanned by CamScanner

ويجب الإشارة إلى أنه إذا قام منبعان بتغذية عقدة رئيسية ما في دارة كهربائية (العقدة 1 مثلاً) كما في الشكل (٢-٩ a) فإن تيار هذه العقدة يساوي :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} \qquad (2.11)$$

وفي الحالة التي لا يوجد فيها أي منبع يقوم بتغذية عقدة رئيسية ما في الدارة (مثلاً العقدة 1) كما في الشكل (٢-٩ b) فإن تيار هذه العقدة سيكون مساوياً إلى الصفر ($\underline{I}_1 = 0$) .

كما ننوه أيضاً إلى إمكانية حل جملة المعادلتين (2,10) باستخدام المصفوفات حيث يمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

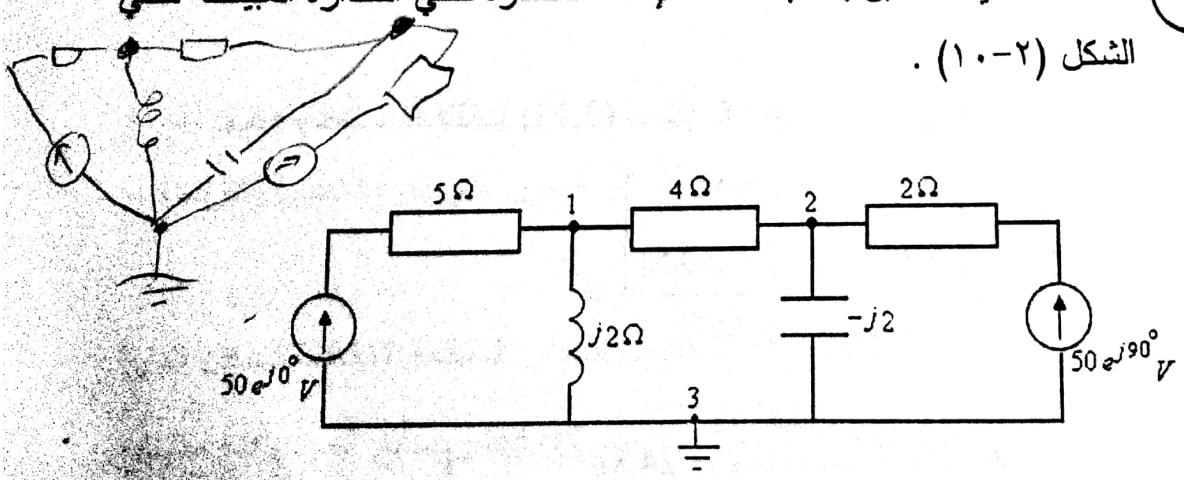
ويتم حساب جهود العقدتين الرئيسيتين في الدارة المبينة في الشكل (٢-٨) بسهولة :

$$\underline{U}_1 = \frac{\begin{bmatrix} \underline{I}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{I}_2 & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}}{\Delta_{\underline{Y}}} \quad , \quad \underline{U}_2 = \frac{\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{I}_1 \\ \underline{Y}_{12} & \underline{I}_2 \end{bmatrix}}{\Delta_{\underline{Y}}} \qquad (2.13)$$

حيث :

$\Delta_{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$: مصفوفة السماحيات العقدية .

مثال (٥) : احسب جهدي العقدتين بالنسبة لنقطة الإسناد المختارة في الدارة المبينة في الشكل (٢-١٠) .



الشكل (٢-١٠)

Scanned by CamScanner

الحل : حسب العلاقة (2.10) وتعريفاتها لدينا :

$$\underline{I}_1 = \frac{50e^{j0^o}}{5} = 10 \ A$$

$$\underline{I}_2 = \frac{50e^{j90^o}}{2} = 25e^{j90^o} = j25 \ A$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{5} + \frac{1}{j2} + \frac{1}{4} = 0,45 - j0,5 \ S$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{4} + \frac{1}{-j2} + \frac{1}{2} = 0,75 + j0,5 \ S$$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\frac{1}{4} = -0,25 \ S$$

وبالتالي تكون معادلتا العقدة في الصيغة المصفوفية :

$$\begin{bmatrix} (0,45 - j0,5) & -0,25 \\ -0,25 & (0,75 + j0,5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ j25 \end{bmatrix}$$

نحسب قيمة $\Delta_{\underline{Y}}$:

$$\Delta_{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} (0,45 - j0,5) & -0,25 \\ -0,25 & (0,75 + j0,5) \end{bmatrix} =$$

$$= 0,525 - j0,15 = 0,546e^{-j15,95^o} \ S$$

ومنه وحسب العلاقات (2,13) نحسب كلاً من $\underline{U}_1$ و $\underline{U}_2$:

$$\underline{U}_1 = \frac{\begin{bmatrix} 10 & -0,25 \\ j25 & (0,75 + j0,5) \end{bmatrix}}{0,546e^{-j15,95^o}} =$$

$$= \frac{13,52e^{j36,3^o}}{0,546e^{-j15,95^o}} = 24,8e^{j52,25^o} \ V$$

Scanned by CamScanner

$$\underline{U}_2 = \frac{\begin{bmatrix} (0,45 - j\,0,5) & 10 \\ -0,25 & j\,25 \end{bmatrix}}{0,546\,e^{-j15,95^o}} =$$

$$= \frac{18,75\,e^{j36,9^o}}{0,546\,e^{-j15,95^o}} = 43,3\,e^{j52,85^o}\ V$$

٢-٦ طريقة الدارات المكافئة العقدية لثنائيات الأقطاب الفعالة :

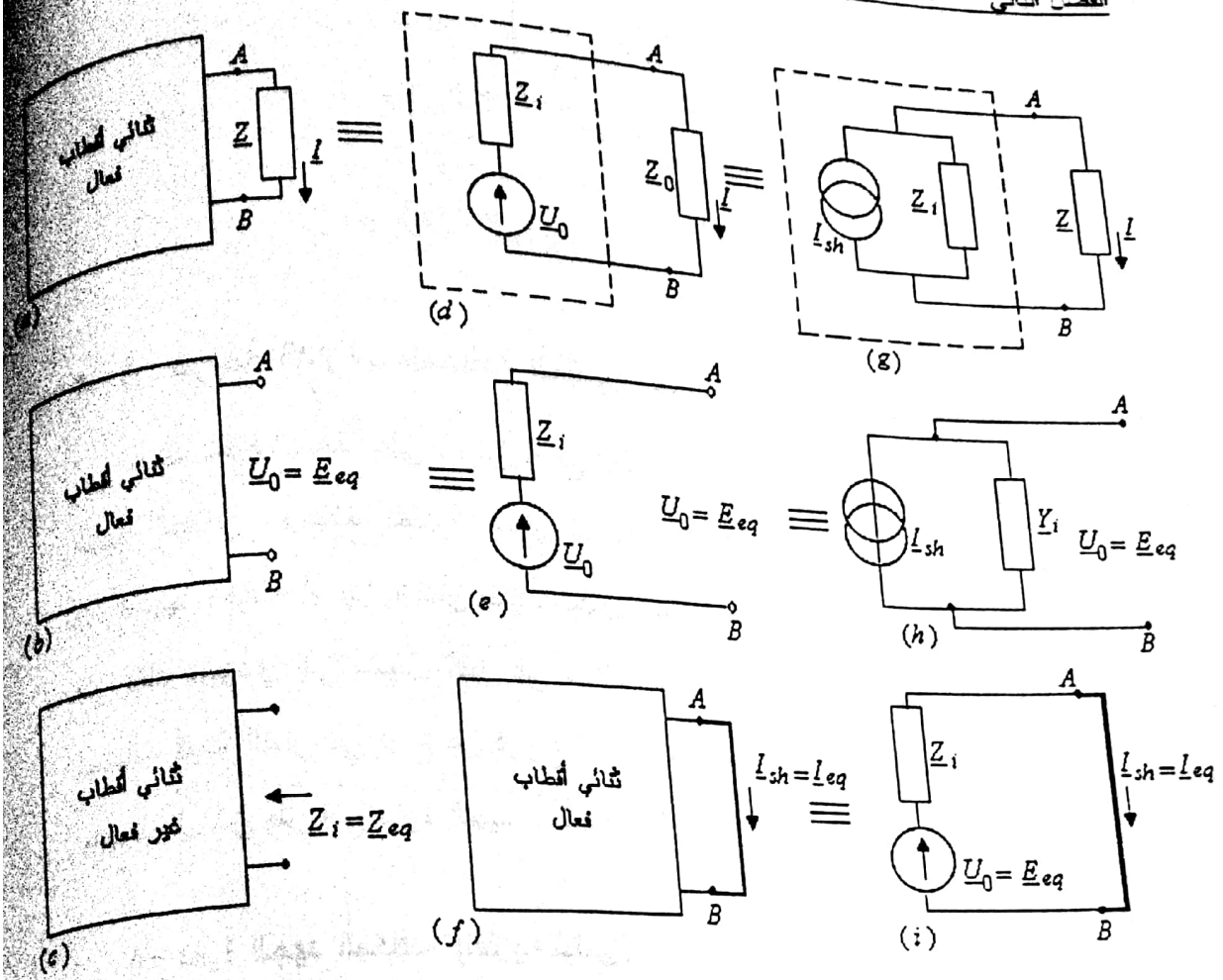
لقد تعرفنا سابقاً على دارتي منابع الطاقة الحقيقة ، وهما منبع التيار الحقيقي ومنبع الجهد الحقيقي . وعندما نعلم أنه يمكن استبدال أي دارة كهربائية فعالة (ثنائي أقطاب فعال) بدارة جهد مكافئة أو بدارة تيار مكافئة تكون أبسط بكثير من دارة ثنائي الأقطاب الفعال نفسه ، فإن ذلك سيؤدي إلى تسهيل كبير في حساب الدارات الكهربائية . وتستخدم هذه الطريقة عادة لحساب قيمة التيار في فرع من فروع الدارة الكهربائية المعقدة . وسنتعرف فيما يلي على مفهوم كل من طريقتي دارة الجهد المكافئة ودارة التيار المكافئة.

١- دارة الجهد المكافئة (نظرية ثيفنن) :

عند استخدام دارة الجهد المكافئة لإيجاد التيار ($\underline{I}$) في الفرع (AB) ذي الممانعة ($\underline{Z}$) من دارة كهربائية خطية كما في الشكل (٢-١١ a) ، نقوم بفتح الفرع AB (أي فصله عن الدارة) ، كما في الشكل (٢-١١ b) ، أو القسم الآخر من الدارة الكهربائية الموصول مع هذا الفرع ، والذي يمثل دارة كهربائية فعالة ذات المأخذين المفتوحين (AB) فنقوم باستبداله بدارة جهد مكافئة فعالة الشكل (٢-١١ e) تملك الوسيطين :

- $\underline{U}_0 = \underline{E}_{eq}$: جهد اللاحمل، وهو الجهد الذي يوجد على المأخذين المفتوحين لهذه الدارة المكافئة . ويتم حسابه بأية طريقة من الطرق التي تعرفنا عليها (كيرشوف، مقسم الجهد ... الخ) .
- $\underline{Z}_i = \underline{Z}_{eq}$: الممانعة الداخلية للدارة المكافئة وتساوي الممانعة المكافئة لمدخل الدارة غير الفعالة والتي تظهر بعد فصل جميع المنابع (قصر منابع الجهد وفتح منابع التيار) حسب الشكل (٢-١١ c) ، وبذلك نحصل على دارة كهربائية خطية .

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-١١)

وهكذا يمكننا حساب التيار ($\underline{I}$) في الفرع (AB) كما في الشكل (٢-١١ d) وباستخدام قانون أوم العقدي كما يلي :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z} + \underline{Z}_i} = \frac{\underline{E}_{eq}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{eq}} \qquad (2.14)$$

نظرية

٢- دارة التيار المكافئة (نظرية نورتن) :

يمكن أيضاً حساب التيار ($\underline{I}$) في الفرع (AB) من الدارة الكهربائية عن طريق استبدال القسم الفعال لهذه الدارة بدارة تيار مكافئة يمثلها الشكل (٢-١١ h) وتتميز بالوسيطين:

$\underline{I}_{sh} = \underline{I}_{eq}$: التيار المكافئ ويتم حسابه بأية طريقة ممكنة من الطرق المعروفة بعد قصر المأخذين (A , B) كما في الشكل (٢-١١ f, i) .

Scanned by CamScanner

$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{eq}$: الممانعة الداخلية للدارة المكافئة وتحسب بالطريقة نفسها المتبعة في دارة الجهد المكافئة ، انظر الشكل (٢-١١ c) ، ويمكن أن تحسب أيضاً مباشرة حسب الشكل (٢-١١ h) بالعلاقة :

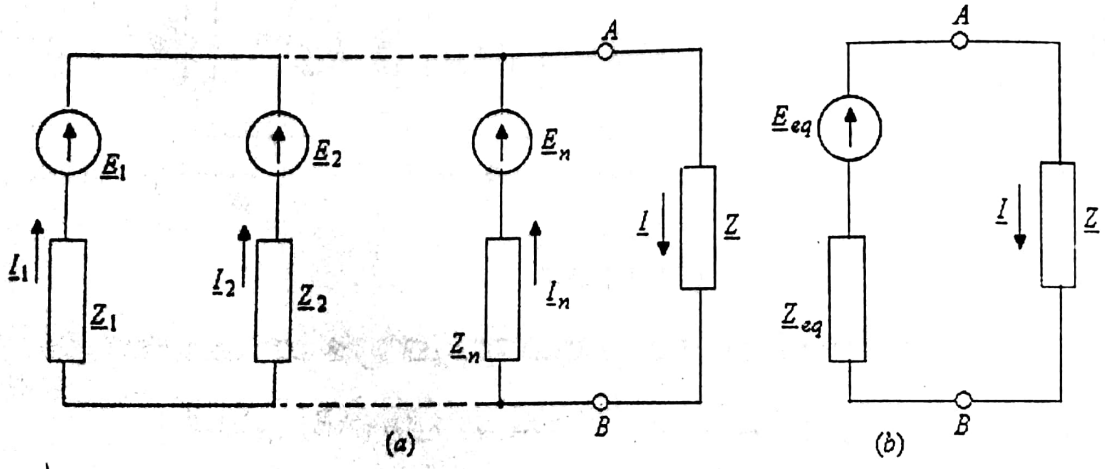
$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_{sh}} = \frac{\underline{E}_{eq}}{\underline{I}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Y}_i} \qquad (2.15)$$

وبالتالي فإن التيار المطلوب حسابه في الفرع ذي الممانعة ($\underline{Z}$) وحسب الشكل (٢-١١ g) :

$$\underline{I} = \underline{I}_{sh}\frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}+\underline{Z}_i} = \underline{I}_{eq}\frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}+\underline{Z}_{eq}} \qquad (2.16)$$

وتسمح هذه الطريقة أيضاً باستبدال عدة منابع جهد متصلة بشكل تفرعي بمنبع جهد مكافئ واحد . فإذا تكونت الدارة من عدة منابع متصلة فيما بينها على التفرع وتملك قيم القوى المحركة الكهربائية $\underline{E}_n , \dots , \underline{E}_2 , \underline{E}_1$ والممانعات الداخلية $\underline{Z}_n , \dots , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_1$ ، حيث تغذي هذه المنابع حملاً ما ممانعته ($\underline{Z}$) كما في الشكل (٢-١٢ a) فيمكننا استبدال هذه المنابع بمنبع مكافئ جهده (E_{eq}) وممانعته الداخلية تساوي ($\underline{Z}_i = \underline{Z}_{eq}$) كما في الشكل (٢-١٢ b) ، وحيث إن :

$$\underline{E}_{eq} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \underline{E}_k \cdot \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k} \quad , \quad \underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k} \qquad (2.17)$$



الشكل (٢-١٢)

Scanned by CamScanner

وتحسب التيارات على النحو الآتي :

- في الممانعة $\underline{Z}$:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_{eq}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{eq}} \qquad (2.18)$$

- وفي كل فرع من فروع الدارة :

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{E}_k - \underline{U}}{\underline{Z}_k} \qquad (2.19)$$

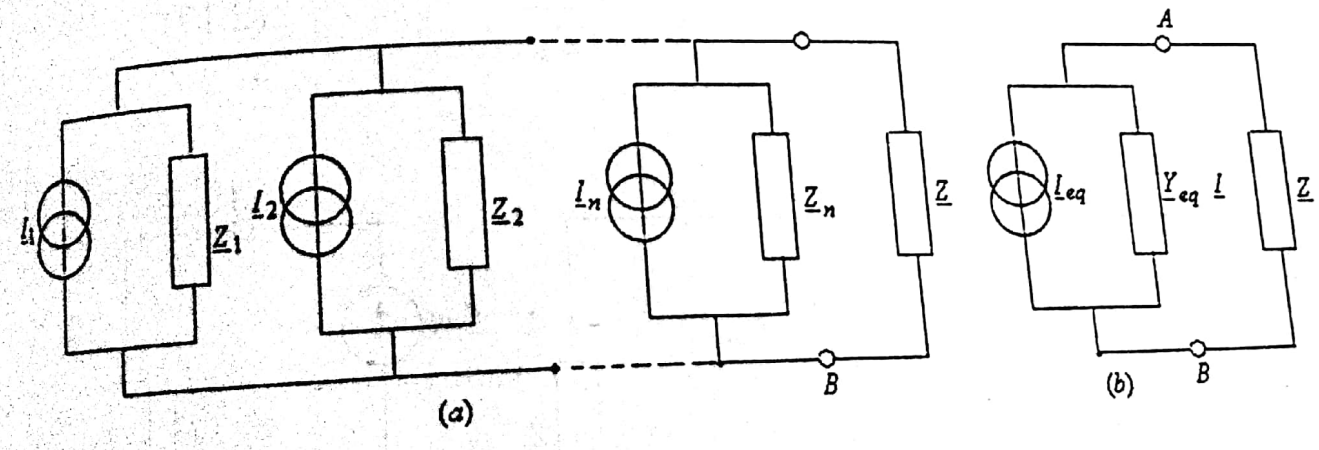
حيث : $\underline{U} = \underline{U}_{AB} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$

وبالطريقة نفسها يمكن استبدال عدة منابع تيار متصلة على التفرع فيما بينها بتيارات $(\underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \dots , \underline{I}_n)$ وسماحيات داخلية $(\underline{Y}_1 , \underline{Y}_2 , \dots , \underline{Y}_n)$ كما في الشكل (٢-١٣ a) بمنبع تيار مكافئ واحد ذي تيار $(\underline{I}_{eq})$ وسماحية داخلية $(\underline{Y}_i = \underline{Y}_{eq})$ يوضحه الشكل (٢-١٣ b)

وتحسب كما يلي :

$$\underline{I}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k \qquad (2.20)$$

$$\underline{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^{n} \underline{Y}_k \qquad (2.21)$$



الشكل (٢-١٣)

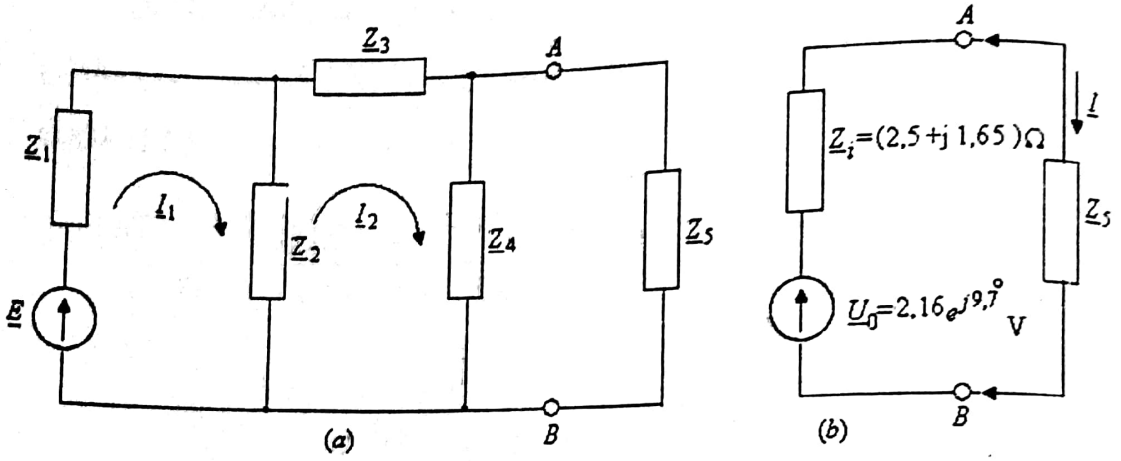
مثال (٦) : استبدل قسم الدارة الكهربائية المبينة في الشكل (٢-١٤ a) والذي يقع على يسار المأخذين (AB) بدارة جهد مكافئة ، ثم احسب قيمة التيار المار في الممانعة $\underline{Z}_5 = (2 - j2)\Omega$ ، مع العلم أن :

Scanned by CamScanner

$$\underline{Z}_1 = (5 - j2)\Omega \ , \ \underline{Z}_2 = 3\,\Omega \ ,$$
$$\underline{Z}_3 = j5\,\Omega \ , \ \underline{Z}_4 = 5\,\Omega \ , \ \underline{E} = 10e^{j30^o}\ V$$

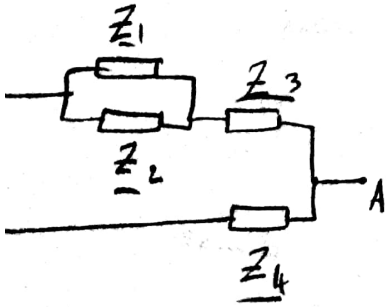
الحـــل :

نفصل الدارة المبينة في الشكل (٢-١٤ a) عند المأخذين (AB) إلى ثنـائيي أقطـاب أحدهما غير فعال ، ويمثل الفرع المراد حساب التيار فيه ، ونعده كحمولة مطبقة على الدارة ، والآخر فعال ويمثل جزء الدارة الواقع على يسار المأخذين (AB) والمراد وضع دارة مكافئة له . ويلزم لوضع دارة الجهد المكافئة حساب الوسيطين ($\underline{U}_0 \ , \underline{Z}_i$) لها .



الشكل (٢-١٤)

وكما نعرف فإن الممانعة الداخلية لمنبع الجهد المكافئ (الممانعة المكافئة) تحسب بعد قصر القوة المحركة الكهربائية وتساوي :



$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_{eq} = [(\underline{Z}_1 // \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3] // \underline{Z}_4$$
$$= [\frac{(5 - j2).3}{8 - j2} + j5] // 5 = \frac{(1{,}94 + j4{,}73).5}{6{,}94 + j4{,}73}$$
$$= 3.e^{j33{,}4^o} = (2{,}5 + j1{,}65)\ \Omega$$

أما الجهد ($\underline{U}_0$) الذي يمثل كما ذكرنا جهد المأخذين المفتوحين فهـو يـساوي جـداء الممانعة ($\underline{Z}_4$) والتيار ($\underline{I}_2$) المار فيها ، ولذلك يلزم حساب التيار ($\underline{I}_2$) بأية طريقة من الطرق المعروفة (مقسم التيار، تيارات الحلقات ...)

Scanned by CamScanner

فمثلاً، باستخدام طريقة تيارات الحلقات العقدية وباعتبار أن الدارة المفتوحة يكون :

$$\underline{I}_2 = \frac{\begin{bmatrix} 8-j2 & 10e^{j30^o} \\ -3 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 8-j2 & -3 \\ -3 & 8+j5 \end{bmatrix}} = \frac{30e^{j30^o}}{69{,}25e^{j20{,}3}} = 0{,}43e^{j9{,}7^o}\ A$$

ومنه تكون قيمة $(\underline{U}_0)$ مساوية :

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_4 = 0{,}43e^{j9{,}7^o} \cdot 5 = 2{,}16e^{j9{,}7^o}\ V$$

وبالتالي يمكننا رسم دارة الجهد المكافئة العقدية كما في الشكل (٢-١٤ b)، وبإعادة وصل الممانعة $(\underline{Z}_5)$ إلى دارة الجهد المكافئة يمكننا حساب قيمة التيار $(\underline{I})$ حسب العلاقة (2.14) :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_5} = \frac{2{,}16e^{j9{,}7^o}}{2{,}54 + j1{,}67 + 2 - j2} = \frac{2{,}16e^{j9{,}7^o}}{4{,}54 - j0{,}33}$$

$$\underline{I} = \frac{2{,}16e^{j9{,}7^o}}{4{,}55\ e^{-j4{,}16^o}} = 0{,}475\ e^{j13{,}86^o}\ A$$

مثال (٧) : احسب القيمة اللحظية للتيار المار في التحريض (L) بمساعدة طريقة دارة التيار المكافئة العقدية للدارة المبينة في الشكل (٢-١٥ a) ، علماً أن :

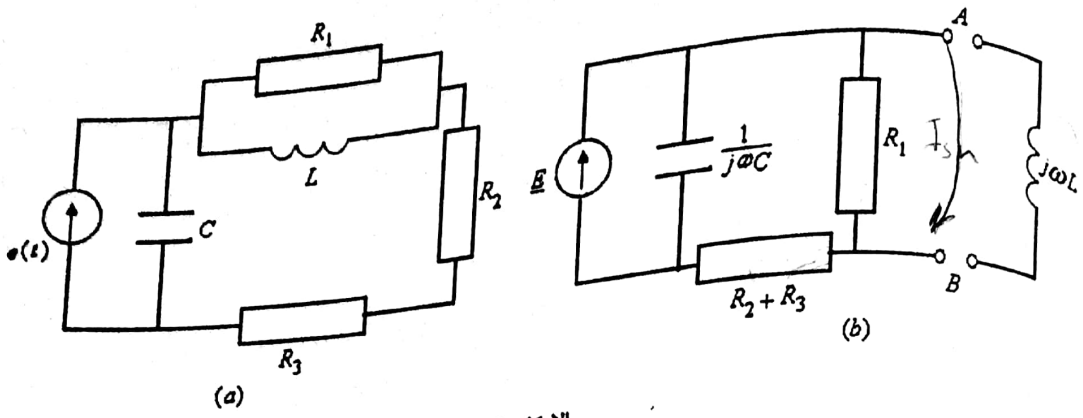
$$R_1 = 100\Omega\ ,\quad R_2 = R_3 = 50\Omega\ ,\quad L = 0{,}1H\ ,$$
$$e(t) = 100V \sin \omega t\ ,\ \omega = 500 rad/\sec$$

الحل :

قمنا بتحويل الدارة إلى المستوى العقدي كما في الشكل (٢-١٥ b) ، ثم فصلنا التحريض واعتبرناه بمثابة حمل كثنائي أقطاب غير فعال ، أما الجزء الآخر من الدارة فنعتبره ثنائي أقطاب فعالاً ، ونضع دارة التيار المكافئة العقدية له.

سنحدد وسيطي دارة التيار المكافئة وهما $(\underline{Z}_i\ ,\ \underline{I}_{sh})$ كما يلي :

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-١٥)

- نحسب تيار القصر ($\underline{I}_{sh}$) بعد قصر المأخذين (B , A) :

$$\underline{I}_{sh} = \frac{\underline{E}}{R_2 + R_3} = \frac{100/\sqrt{2}}{100} = 0{,}707 \ \ A$$

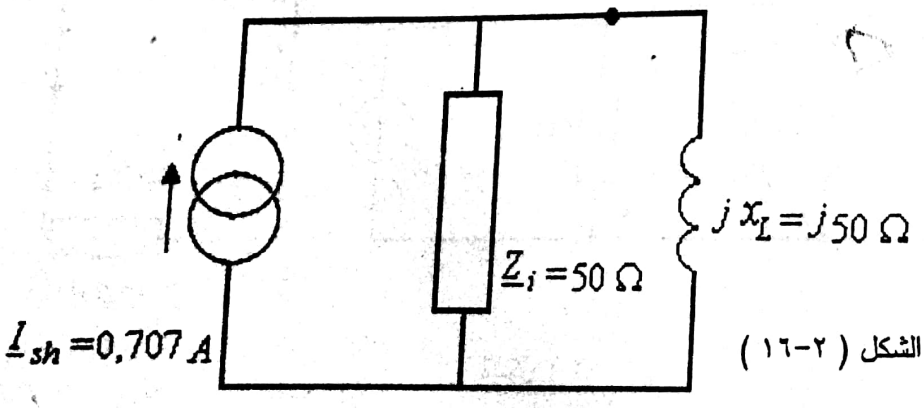
- نحسب ممانعة الدخل لثنائي الأقطاب الفعال والتي تظهر على المأخذين (AB) بعد قصر منبع الجهد :

$$\underline{Z}_i = R_1 // (R_2 + R_3) = \frac{100.100}{200} = 50\Omega$$

نرسم دارة التيار المكافئة العقدية كما في الشكل (٢-١٦) ومن ثم نقوم بوصل التحريض إليها لحساب التيار المار في هذا التحريض وفقاً للعلاقة (2.16) :

$$\underline{I}_L = \underline{I}_{sh} \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_i + jx_L} = 0{,}707 \frac{50}{50 + j\,50}$$

$$\underline{I}_L = \frac{35{,}35}{70{,}71 e^{j45^o}} = 0{,}5 e^{-j45^o} \ \ A$$



الشكل (٢-١٦)

Scanned by CamScanner

و لإيجاد القيمة اللحظية لهذا التيار نضرب طرفي علاقته بالقيم ($\sqrt{2}$ و $e^{j\omega t}$) لتحويلها من شعاع ساكن يمثل التيار ($\underline{I}$) إلى شعاع دائر :

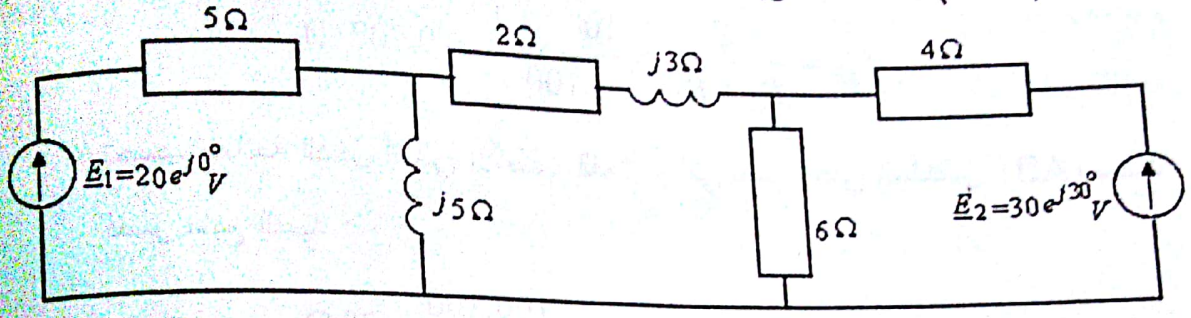
$$\underline{I}_L \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} = 0{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t} e^{-j45^o}$$

$$\underline{i}(t) = 0{,}707\, e^{j(\omega t - 45^o)} =$$

$$= 0{,}707 \cos(\omega t - 45^o) + j\, 0{,}707 \sin(\omega t - 45^o)$$

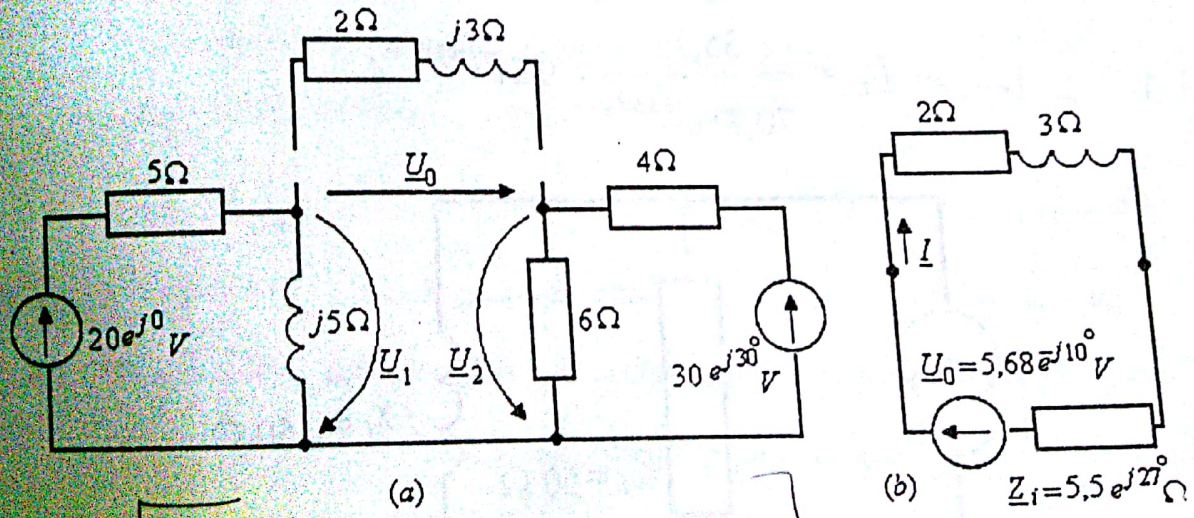
$$i(t) = \mathrm{Im}[\underline{i}(t)] = 0{,}707 \sin(\omega t - 45^o)\ \ A$$

مثـــال (٨) : أوجد قيمة التيار المار في الممانعة $(2+j3)\,\Omega$ في الدارة الموضحة في الشكل (٢-١٧) بمساعدة طريقة الدارات المكافئة العقدية .



الشكل (٢-١٧)

الحـــل : نفصل فرع الدارة المتضمن المانعة والمراد حساب التيار المار فيه ونعتبره ثنائي أقطاب غير فعال ، وبقية الدارة نَعدّها ثنائي أقطاب فعالاً نكافئه بدارة جهد مكافئة مثلاً، كما في الشكل (٢-١٨ a, b) .



الشكل (٢-١٨)

Scanned by CamScanner

ونحسب الوسيطين ($\underline{Z}_i$, $\underline{U}_0$) لدارة الجهد المكافئة :

- جهد الدارة المفتوحة ($\underline{U}_0$) ، يمكن حسابه بالاستفادة من قانون كيرشـــوف الثـــاني بصيغته العقدية :

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \quad , \quad \underline{U}_0 + \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 0$$

ونحسب كلاً من ($\underline{U}_1$ و $\underline{U}_2$) بمساعدة قاعدة مقسّم الجهد العقدي :

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 \frac{j5}{5+j5} = 20\frac{j5}{5+j5} = 14{,}14\,e^{j45^o}\ V$$

$$\underline{U}_2 = \underline{E}_2 \frac{6}{4+6} = 30\,e^{j30^o}\,\frac{6}{10} = 18\,e^{j30^o}\ V$$

$$\underline{U}_0 = 14{,}14\,e^{j45^o} - 18\,e^{j30^o} = 5{,}68\,e^{-j10^o}\ V$$

- الممانعة الداخلية لدارة الجهد المكافئة :

$$\underline{Z}_i = (5\,//\,j5) + (6\,//\,4) = \frac{5.j5}{5+j5} + \frac{6.4}{4+6}$$

$$\underline{Z}_i = \frac{j25}{5+j5} + \frac{24}{10} = (4{,}9 + j2{,}5)\ \Omega = 5{,}5\,e^{j27^o}\ \Omega$$

وبالتالي ، وحسب الشكل (٢-١٨ b) يمكن حساب التيـــار ($\underline{I}$) المـــار فـــي الفـــرع ($2+j3$)Ω :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_i + 2 + j3} = \frac{5{,}68\,e^{-j10^o}}{6{,}9 + j5{,}5} = \frac{5{,}68\,e^{-j10^o}}{8{,}82\,e^{j38{,}6^o}} = 0{,}64\,e^{-j48{,}6^o}\ A$$

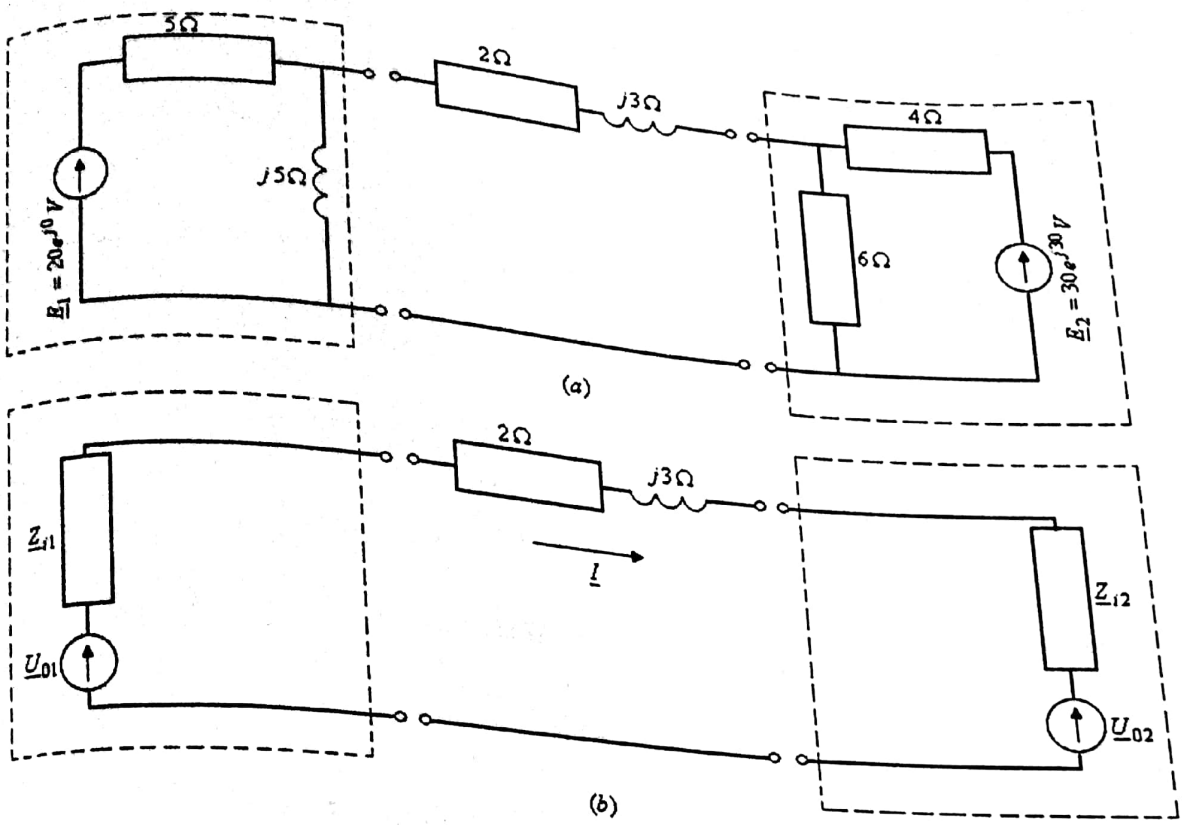
ونشير إلى أنه يمكن حساب قيمة ($\underline{U}_0$) بطريقة أخرى تدعو إلى تقسيم الدارة في الشكل (٢-١٧) إلى ثلاث ثنائيات أقطاب كما في الشكل (٢-١٩ a) .

وهنا تحسب قيم ($\underline{U}_{01}$) و ($\underline{U}_{02}$) كما يلي :

$$\underline{U}_{01} = 20\,\frac{j5}{5+j5} = 14{,}14\,e^{j45^o}\ V$$

$$\underline{U}_{02} = 30\,e^{j30^o}\,\frac{6}{6+4} = 18\,e^{j30^o}\ V$$

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-١٩)

ويكون التيار المار في الفرع $\Omega(2+j3)$ مساوياً وحسب الشكل (٢-١٩ b) إلى :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{01} - \underline{U}_{02}}{\underbrace{\underline{Z}_{i1} + \underline{Z}_{i2}}_{\underline{Z}_i} + 2 + j3}$$

حيث :

$$\underline{Z}_{i1} = \frac{5.j5}{5+j5} = (2{,}5 + j\,2{,}5)\ \Omega \ , \quad \underline{Z}_{i2} = \frac{6.4}{6+4} = 2{,}4\ \Omega$$

ومنه :

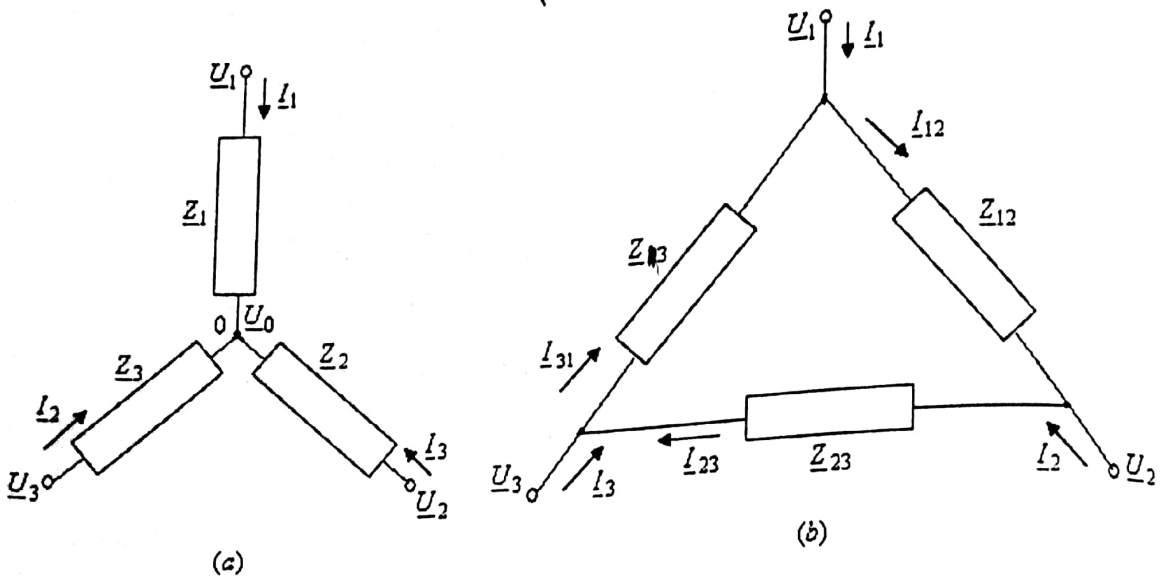
$$\underline{I} = \frac{14{,}14\,e^{j45^\circ} - 18\,e^{j30^\circ}}{6{,}9 + j\,5{,}5} = 0{,}64\ e^{-j48{,}6^\circ}\ A$$

$$= 0{,}64\ \angle 131{,}31^\circ \times (-1)$$

Scanned by CamScanner

٢-٧ التحويل من دارة نجمية غير فعالة إلى دارة مثلثية غير فعالة ، وبالعكس :

لقد تعرفنا حتى الآن على كيفية مكافأة ثنائيات الأقطاب غير الفعالة والفعالة . ولكن الدارات الكهربائية متعددة الأقطاب أيضاً تملك دارات مكافئة لها وخاصة الدارات النجمية والدارات المثلثية المبينة في الشكل (٢-٢٠ a, b) .



الشكل (٢-٢٠)

ويمكن لأي من هاتين الدارتين أن تكون مكافئة للدارة الأخرى إذا تم تأمين قيم التيارت ($\underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3$) نفسها عند قيم جهود العقد ($\underline{U}_1 , \underline{U}_2 , \underline{U}_3$) نفسها في الدارتين النجمية والمثلثية ، وذلك حسب معيار التكافؤ العام في الدارات الكهربائية .

ولإيجاد معادلات التحويل من دارة نجمية غير فعالة ومعروفة الوسائط إلى دارة مثلثية مكافئة ، وبالنظر إلى الشكل (٢-٢٠ a) نكتب :

$$\left.\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_1(\underline{U}_1 - \underline{U}_0) \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_2(\underline{U}_2 - \underline{U}_0) \\ \underline{I}_3 &= \underline{Y}_3(\underline{U}_3 - \underline{U}_0) \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

وبجمع هذه العلاقات سنتمكن بمساعدة قانون كيرشوف الأول بصيغته العقدية ($\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$) من إيجاد جهد العقدة (0) :

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{Y}_1\underline{U}_1 + \underline{Y}_2\underline{U}_2 + \underline{Y}_3\underline{U}_3}{\underline{Y}} \qquad (2.23)$$

Scanned by CamScanner

حيث :

$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$: السماحية الذاتية للعقدة المركزية (0) .

من العلاقتين (2.22) و(2.23) ، يمكن تحديد تيارات الدارة النجمية :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2(\underline{U}_1 - \underline{U}_2)}{\underline{Y}} + \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_3(\underline{U}_1 - \underline{U}_3)}{\underline{Y}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_1(\underline{U}_2 - \underline{U}_1)}{\underline{Y}} + \frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3(\underline{U}_2 - \underline{U}_3)}{\underline{Y}}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1(\underline{U}_3 - \underline{U}_1)}{\underline{Y}} + \frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_2(\underline{U}_3 - \underline{U}_2)}{\underline{Y}}$$

ولكن من جهة أخرى ترتبط تيارات الدارة المثلثية فيما بينها بالعلاقات :

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \ , \ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \ , \ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

حيث :

$$\underline{I}_{12} = \underline{Y}_{12}(\underline{U}_1 - \underline{U}_2) \ , \ \underline{I}_{23} = \underline{Y}_{23}(\underline{U}_2 - \underline{U}_3) \ , \ \underline{I}_{31} = \underline{Y}_{31}(\underline{U}_3 - \underline{U}_1)$$

وبمقارنة هذه التيارات مع التيارات في الدارة النجمية يمكننا التأكيد إنها ستكون متساوية عندما يتحقق الشرط الآتي :

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{Y}_{12} = \dfrac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}} & \text{أو} & \boxed{\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} \\ \underline{Y}_{23} = \dfrac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}} & \text{أو} & \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \dfrac{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1} \\ \underline{Y}_{31} = \dfrac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}} & \text{أو} & \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 + \dfrac{\underline{Z}_3\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} \end{array}\right\} \quad (2.24)$$

وهذه العلاقات تسمح بتحويل الدارة الكهربائية غير الفعالة الموصولة بشكل نجمي إلى دارة مكافئة لها وموصولة على شكل مثلثي .

أما لتحويل الدارة المثلثية إلى دارة نجمية فيمكن اشتقاق علاقات التحويل اللازمة بمعالجة العلاقات (2.24) وحلها بالنسبة للممانعات ($\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$) . ولهذه الغاية نجد من هذه المعادلات الجداءات : ($\underline{Z}_{31}\ \underline{Z}_{32}$ و $\underline{Z}_{12}\ \underline{Z}_{23}$ و $\underline{Z}_{12}\ \underline{Z}_{13}$) ، وأيضاً المجموع

Scanned by CamScanner

($\underline{Z} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}$) والذي يُعد الممانعة الذاتية لحلقة المثلث ، وبالتالي تكون معـادلات التحويل من دارة مثلثية إلى دارة نجمية هي :

$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_1 &= \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}} \\ \underline{Z}_2 &= \frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}} \\ \underline{Z}_3 &= \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{32}}{\underline{Z}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.25)$$

مع العلم أن : ($\underline{Z}_{mn} = \underline{Z}_{nm}$) .

مثال (٩) : دارة مؤلفة من ثلاث ممانعات متساوية $\underline{Z}_\Delta = 15e^{j30^o}\ \Omega$ وموصولة على شكل مثلثي ، أوجد الدارة المكافئة لها والموصولة على شكل نجمي .

الحـــل : بتطبيق العلاقات (2.25) يمكننا إيجاد الممانعات المكافئة في الدارة النجميـة ، مع العلم أن :

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{23} = 15e^{j30^o}\ \Omega$$

وحيث إن :

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23} = 3.15e^{j30} = 45e^{j30^o}\ \Omega$$

فتكون ممانعات الدارة النجمية المكافئة مساوية :

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{13}}{\underline{Z}} = \frac{15e^{j30}.15e^{j30}}{45e^{j30^o}} = \frac{225e^{j60^o}}{45e^{j30^o}} = 5e^{j30^o}\ \Omega\ ,$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{21}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}} = 5e^{j30^o}\ \Omega \quad , \quad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{32}}{\underline{Z}} = 5e^{j30^o}\ \Omega$$

ونلاحظ أن :

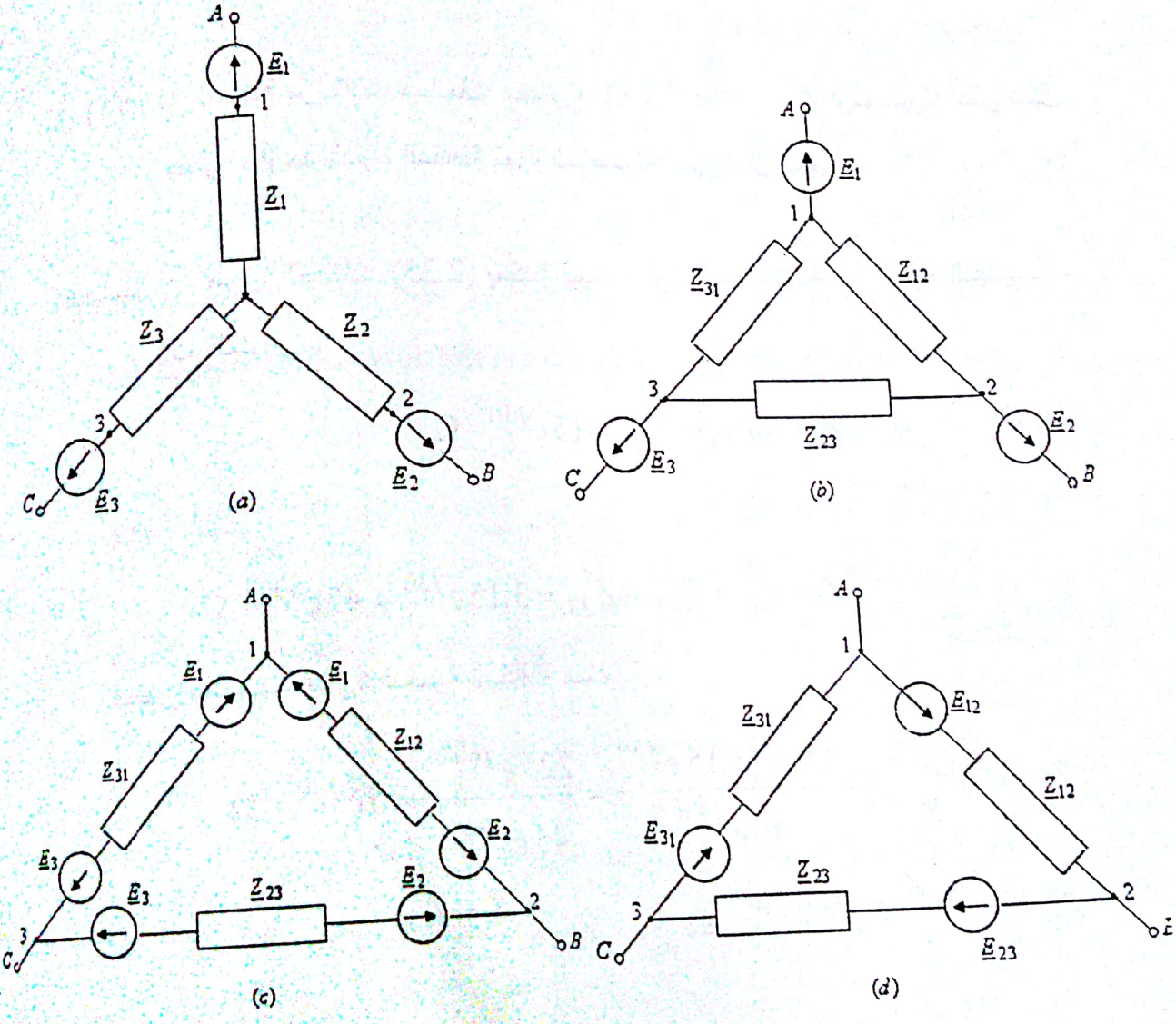
$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_\Delta}{3}$$

Scanned by CamScanner

ومنه يمكننا القول : إن أية دارة موصولة على شكل مثلثي ومؤلفة من ثلاث ممانعات متساوية يمكن مكافأتها بدارة نجمية تساوي ممانعاتها ثلث ممانعات الدارة المثلثية . وبالعكس فإن ممانعات الدارة المثلثية المكافئة لدارة نجمية ذات الممانعات المتساوية ، تساوي ثلاثة أضعاف ممانعات الدارة النجمية .

٢-٨ التحويل من دارة نجمية فعالة إلى دارة مثلثية فعالة ، وبالعكس :

يمكن تحويل الدارة النجمية الفعالة الموضحة في الشكل (٢-٢١ a) إلى دارة مكافئة فعالة موصولة بشكل مثلثي .



الشكل (٢-٢١)

Scanned by CamScanner

ولذلك نبدأ أولاً بتحويل الدارة النجمية غير الفعالة إلى دارة مكافئة مثلثية غير فعالة حسب العلاقات (2.24) ، وكما هو موضح في الشكل (٢-٢١ *b*) . ثم نقوم بعد ذلك بنقل منابع القوة المحركة الكهربائية الثلاثة إلى فروع الدارة المثلثية وفقاً للشكل (٢-٢١ *c*) . والآن سنعمل على توحيد منابع الجهد المثالية الموصولة تسلسلياً فيما بينها في الفروع الثلاثة كما هو مبين في الشكل (٢-٢١ *d*) . وتحدد قيم هذه الجهود بالعلاقات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_{12} &= \underline{E}_2 - \underline{E}_1 \\ \underline{E}_{23} &= \underline{E}_3 - \underline{E}_2 \\ \underline{E}_{31} &= \underline{E}_1 - \underline{E}_3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

وهكذا ، فإن تحويل وسائط الدارة المثلثية الفعالة المكافئة للدارة النجمية الفعالة يتم باستخدام العلاقات (2.24) و (2.26) .

وبالعكس فإن تحويل الدارة الفعالة المثلثية الموضحة في الشكل (٢-٢٢ *a*) إلى دارة نجمية فعالة مكافئة لها يمكن تحقيقه على خمس مراحل .

ففي المرحلة الأولى نقوم بتحويل منابع الجهد إلى منابع تيار مكافئة لها حسب الشكل (٢-٢٢ *b*) مستخدمين علاقات التحويل المعروفة الآتية :

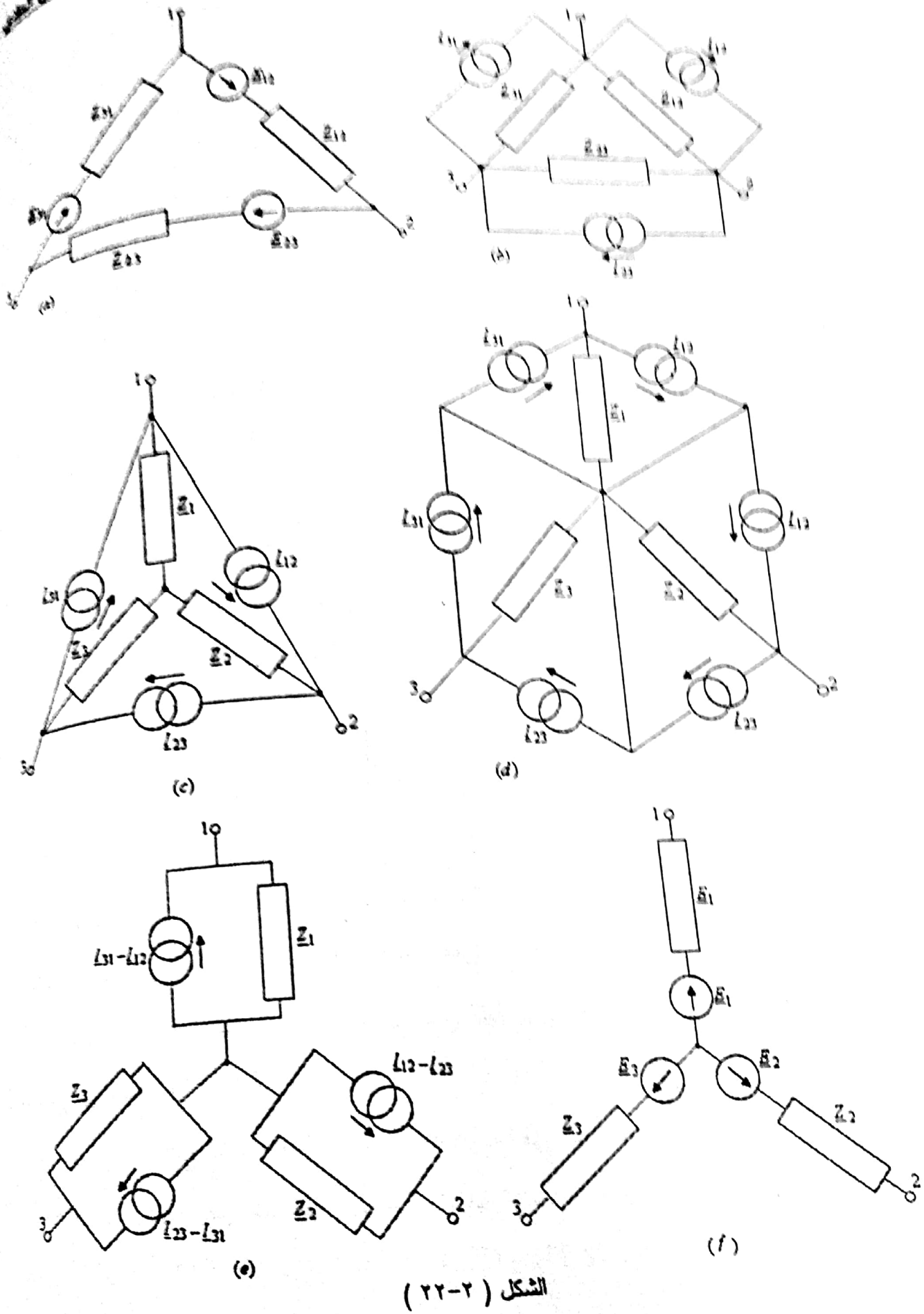
$$\left.\begin{aligned} \underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i} \quad , \quad \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i} \\ \underline{E} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_i} \quad , \quad \underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i} \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

ثم نقوم في المرحلة الثانية بتحويل الدارة المثلثية غير الفعالة إلى دارة نجمية غير فعالة مكافئة لها كما في الشكل (٢-٢٢ *c*) بالاعتماد على العلاقات (2.25) .

وفي المرحلة الثالثة يتم توزيع ونقل منابع التيار إلى العقدة المركزية (0) كما هو موضح في الشكل (٢-٢٢ *d*) .

ثم نوحد منابع التيار المثالية الموصولة تفرعياً في المرحلة الرابعة كما هو موضح في الشكل (٢-٢٢ *e*) . وفي المرحلة الخامسة والأخيرة نعود ونحول منابع التيار إلى منابع جهد حسب الشكل (٢-٢٢ *f*) باستخدام العلاقات (2.24) و (2.27) .

Scanned by CamScanner



الشكل (٢-٢٢)

Scanned by CamScanner

وعندها وبمساعدة العلاقات (2.25) يتم تحديد وسائط الدارة المكافئة :

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_1 &= \frac{\underline{Z}_{12}\underline{E}_{31} - \underline{Z}_{31}\underline{E}_{12}}{\underline{Z}} \\ \underline{E}_2 &= \frac{\underline{Z}_{23}\underline{E}_{12} - \underline{Z}_{12}\underline{E}_{23}}{\underline{Z}} \\ \underline{E}_3 &= \frac{\underline{Z}_{31}\underline{E}_{23} - \underline{Z}_{23}\underline{E}_{31}}{\underline{Z}} \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

وهكذا ، فإن حساب وسائط الدارة النجمية المكافئة يتم باستخدام العلاقات (2.25) و(2.28) .

٢-٩ توصيات حول اختيار الطريقة الأمثل لحساب الدارات الكهربائية :

سنقوم فيما يلي بصياغة بعض التوصيات بخصوص كيفية اختيار الطريقة الأمثل من الطرق التي تعرفنا عليها واستخدامها في حل الدارات الكهربائية .

آ- تحسب الدارات الكهربائية ، التي تحوي على منبع طاقة كهربائية واحد ، عادة باستخدام قانون أوم وذلك بعد القيام بإجراءات تبسيط الدارة .

ب- تُعد طريقة علاقات كيرشوف الأكثر شمولية، حيث إنها تعطي مباشرة قيماً حقيقية للتيارات في فروع الدارة الكهربائية . ولكن نظراً لحجم العمل الكبير عند استخدامها ، فإنه من الأفضل استخدام هذه الطريقة عندما لا يزيد عدد الفروع في الدارة عن ثلاثة أو أربعة فروع .

ج- تستخدم طريقة تيارات الحلقات في حساب الدارات الكهربائية التي تملك عدد حلقات مستقلة لا يزيد عن عدد العقد المستقلة .

د- أما عندما يكون عدد العقد المستقلة في مخطط الدارة الكهربائية أقل من عدد الحلقات المستقلة فيفضل استخدام طريقة جهود العقد .

هـ- إن استخدام طريقة التراكم يُعد مفضلاً وسهلاً عندما يكون عدد المنابع الكهربائية في الدارة الكهربائية قليلاً (منبعين أو ثلاثة) ، وعندما تكون التحويلات المكافئة لحل الدارات الكهربائية المساعدة حسب قانون أوم لا تشكل صعوبات كبيرة .

و- تستخدم طريقة الدارات المكافئة لثنائيات الأقطاب الفعالة غالباً عندما يطلب التيار في فرع واحد من فروع الدارة الكهربائية أو حساب جهد بين العقد .

Scanned by CamScanner