التحويلات الهندسية ١
Geometrical Transformations

التحويلات الثنائية البعد
Two-dimensional transformations

محتويات المحاضرة:

١- الانسحاب Translation

٢- الدوران Rotation

٣- تغيير القياس Scaling

٤- تركيب التحويلات Concatenation

التحويلات الهندسية ثنائية البعد 2D:

- أي برنامج رسومي يحتاج إلى التحويلات الهندسية مثل: (الانسحاب – الدوران – التكبير - ..).

١- تحويل الانسحاب (translation):

بفرض نقطه نريد تطبيق انسحاب عليها ما التغير الذي ممكن؟
حجم؟؟ عدد؟؟

تتغير احداثيات هذه النقطه على المحورين x و y.

P(x,y) ____ p(x+dx , y + dy)

نستنتج :

تحويل الانسحاب لايؤثر في حجم الشكل، فقط بموضعه ضمن الشاشة.

$$x' = x + d_x \quad , \qquad\qquad y' = y + d_y \tag{2.1}$$

If we define the column vectors:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

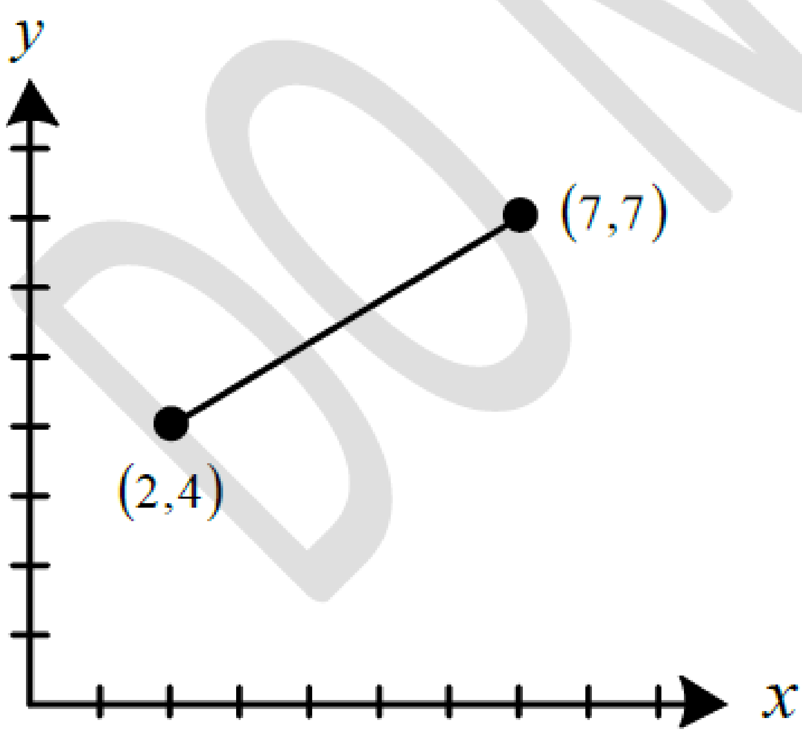


Figure (a): Before translation

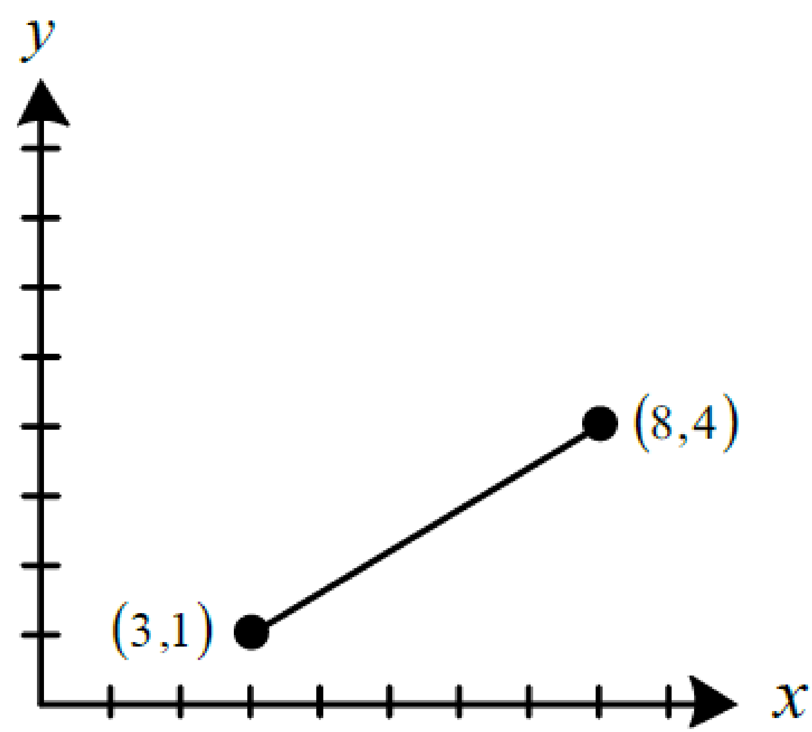
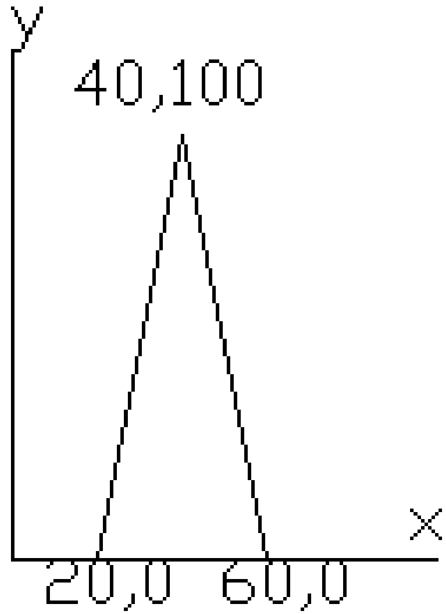


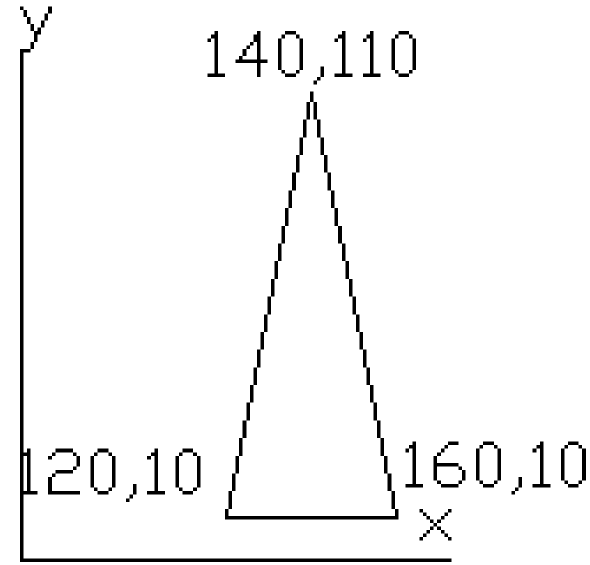
Figure (b): After translation

١ـ الانسحاب

$$x' = x + T_x$$

$$y' = y + T_y$$





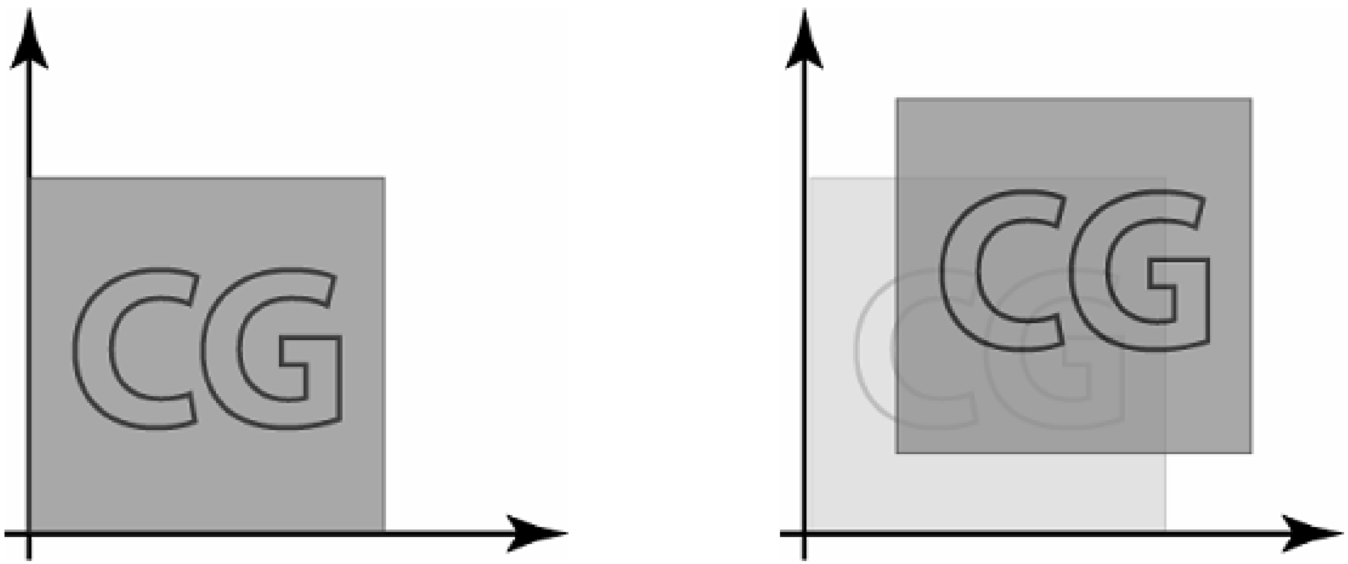
عند القيام بسحب جسم وليس فقط نقطة، نطبق الانسحاب على كافة نقاط الكائن.

حيث كل كائن يمثل بمصفوفة نقاط.

بالنسبة لمستقيم، يتم انسحابه بسحب نقطتي البداية والنهاية.

translation

- simplest form $T_{\mathbf{t}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{t}$
- inverse $T_{\mathbf{t}}^{-1}(\mathbf{p}) = T_{-\mathbf{t}}(\mathbf{p}) = \mathbf{p} - \mathbf{t}$



٢- تغيير القياس Scaling

- يمكن تغيير المقياس للنقاط بمقدار sx على المحور x أو بمقدار sy على المحور y.

- نحصل على النقاط الجديدة بعد تغيير المقياس بالنسبة للمبدأ بالمعادلات التالية:

$$x' = s_x \cdot x, \qquad y' = s_y \cdot y$$

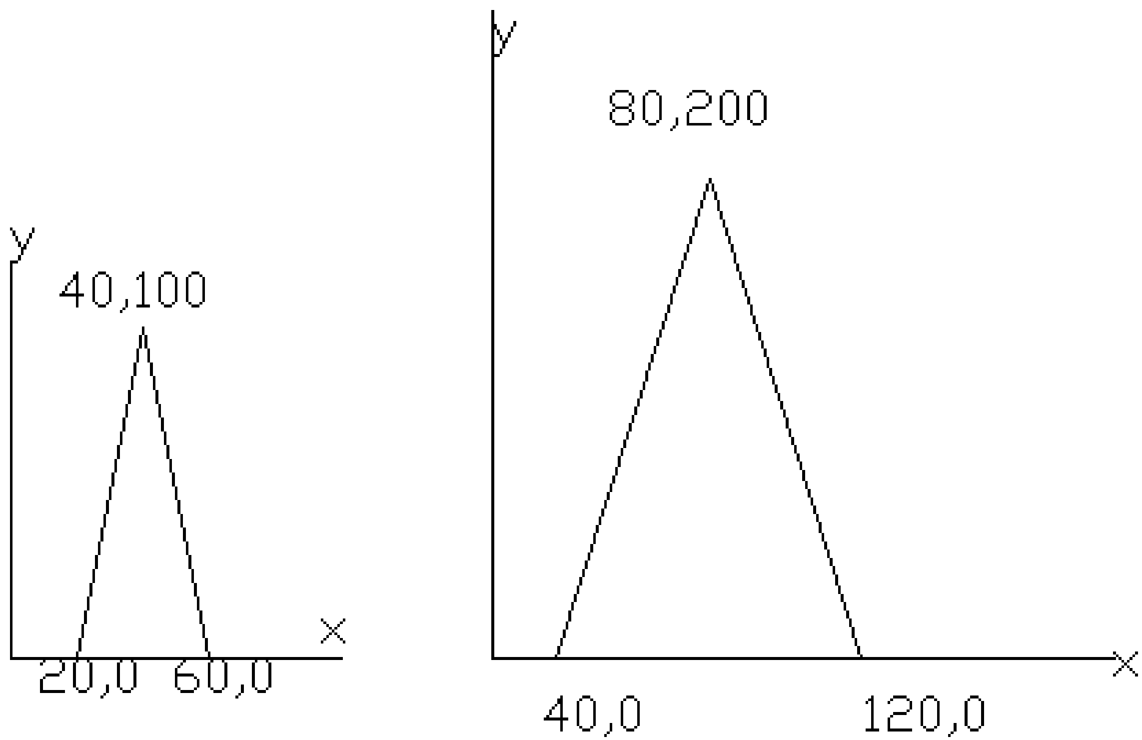
In matrix form, this is:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad or \qquad P' = S \cdot P \ ,$$

المصفوفة s هي مصفوفة تغيير المقياس.

Scaling تغيير القياس

$$X' = x * S_x \qquad y' = y * S_y$$



Sx=Sy=2

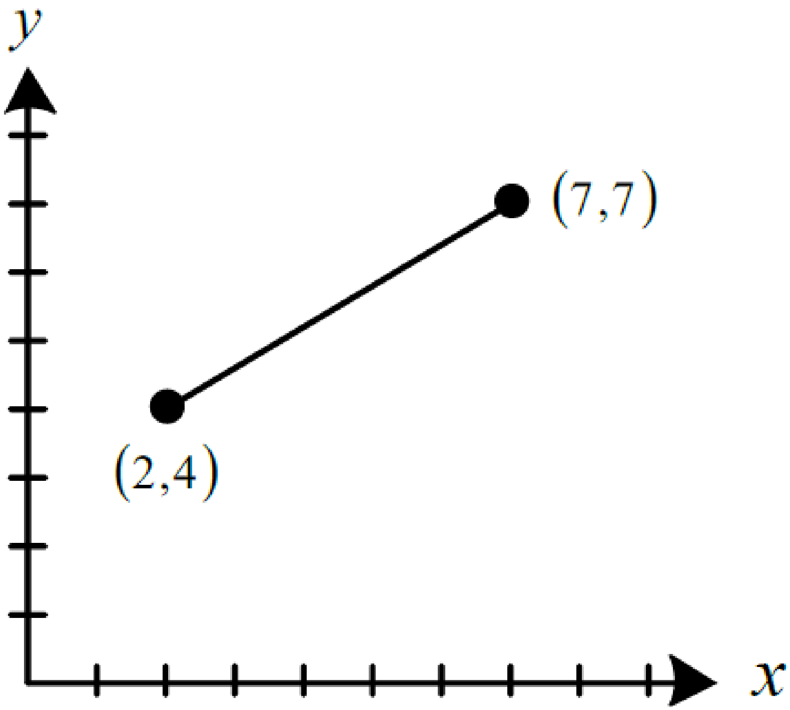


Figure (a): Before scaling

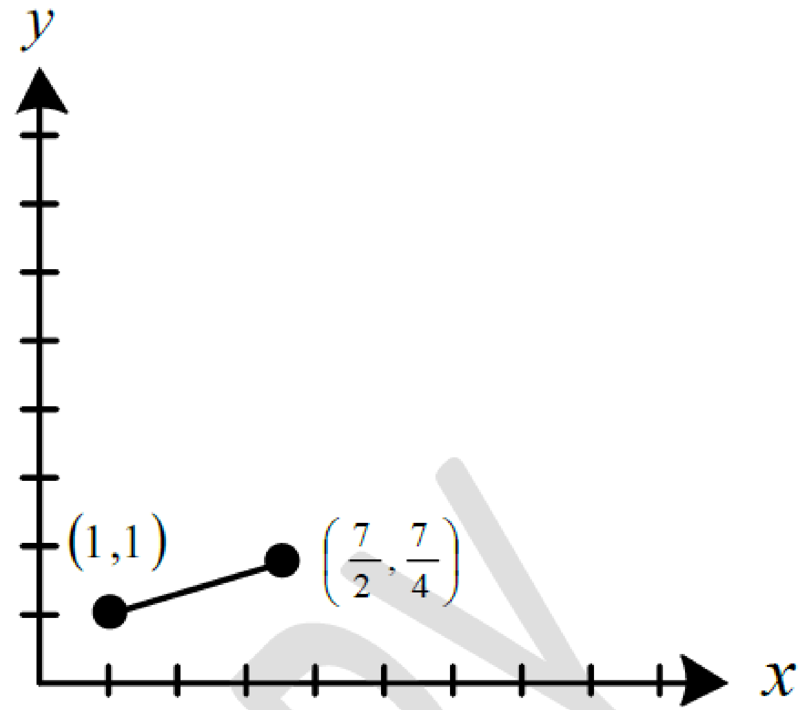


Figure (b): After scaling

إذا كان sx = sy وأصغر من الواحد !

إذا كان sx = sy وأكبر من الواحد !

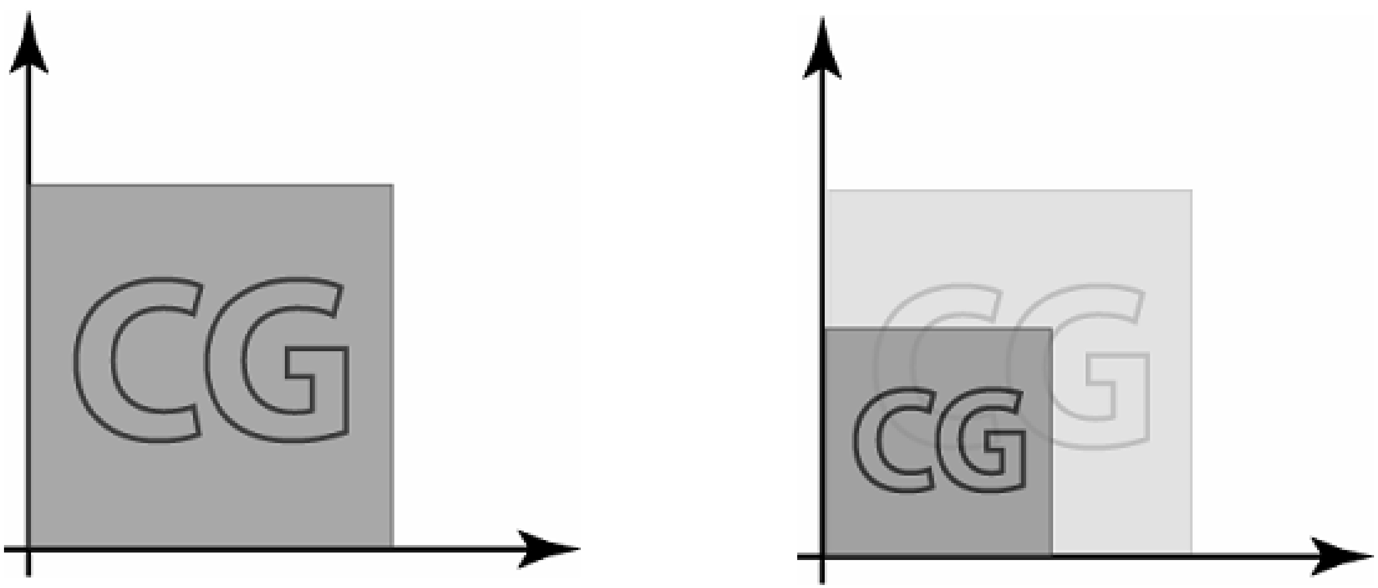
إذا كان sx = sy = 1 !! (تغير المقياس منتظم)

إذا كان sx والـ sy غير متساويان ؟؟

uniform scale

$$S_s\mathbf{p} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sp_x \\ sp_y \end{bmatrix}$$

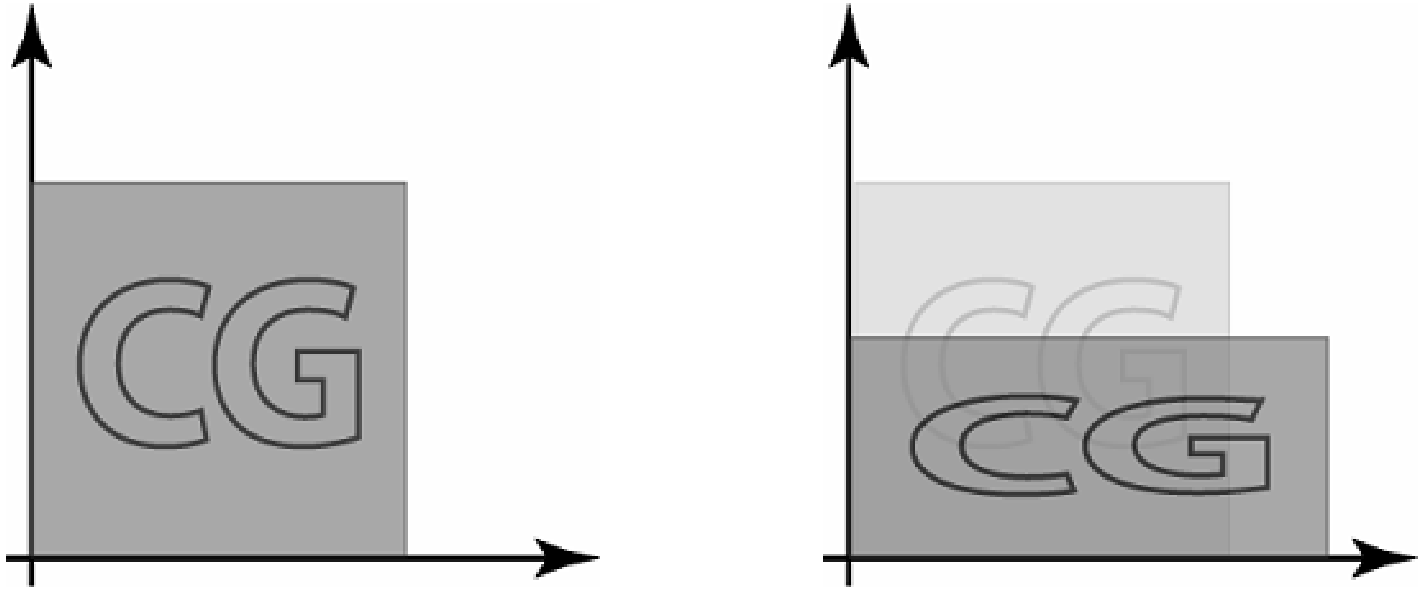
$$S_s^{-1} = S_{1/s}$$



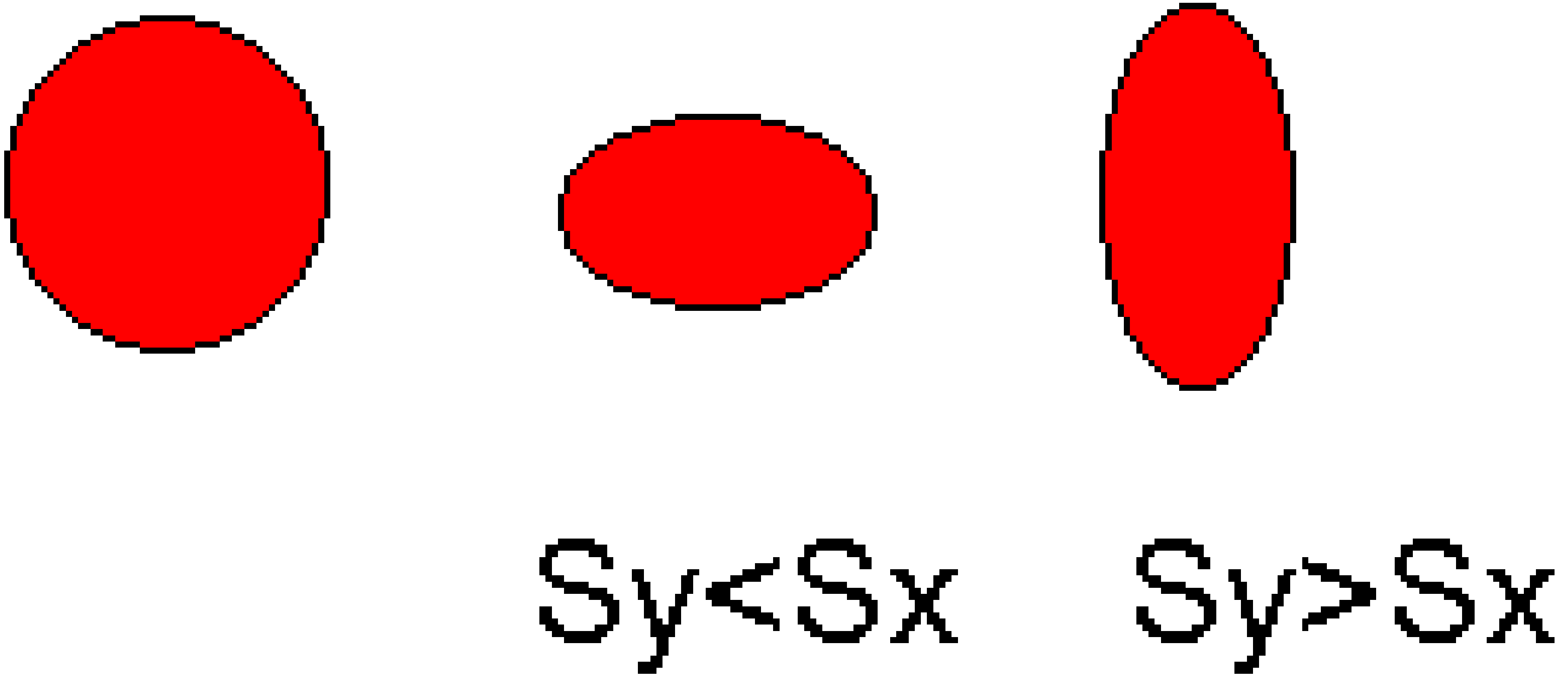
non-uniform scale

$$S_{\mathbf{s}}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x p_x \\ s_y p_y \end{bmatrix}$$

$$S_{\mathbf{s}}^{-1} = S_{(1/s_x, 1/s_y)}$$



تشويه للأغراض ⇐ $Sx \neq Sy$



الدوران Rotation

- ✓ اتجاه الدوران .
- ✓ مقدار زاوية الدوران.

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

- ❖ الزاوية تكون موجبة اذا كان الدوران عكس عقارب الساعة.
- ❖ وتكون سالبة اذا كان الدوران مع عقارب الساعة.

معادلات الدوران بالنسبة للمبدأ بالشكل المصفوفي:

$$x' = x \cdot cos(\theta) - y \cdot sin(\theta)\,, \qquad y' = x \cdot sin(\theta) + y \cdot cos(\theta)$$

In matrix form, we have:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad or \qquad P' = R \cdot P$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\text{Sin}(-\theta) = -\sin\theta$$

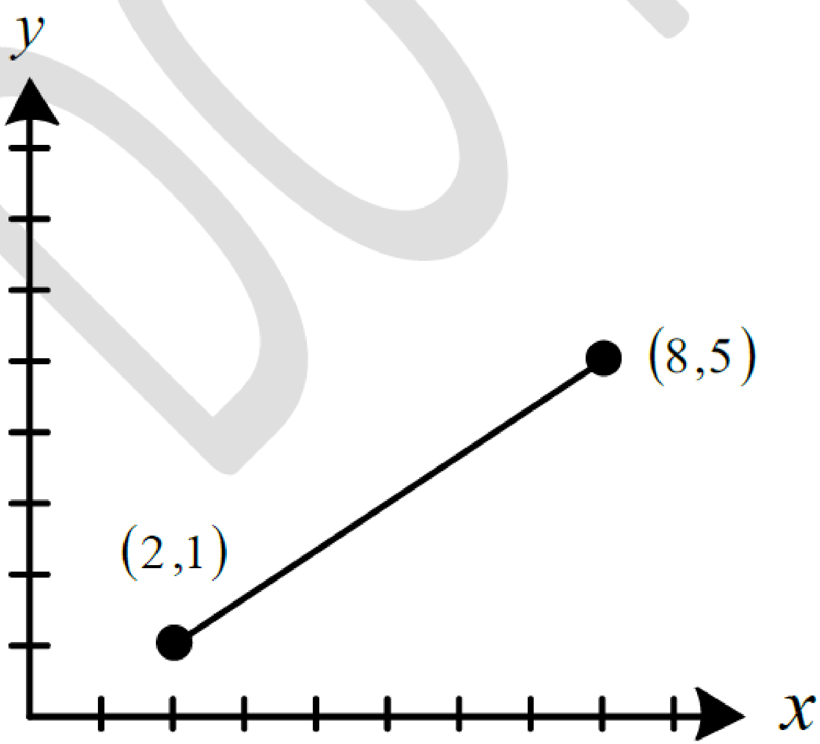


Figure (a): Before rotation

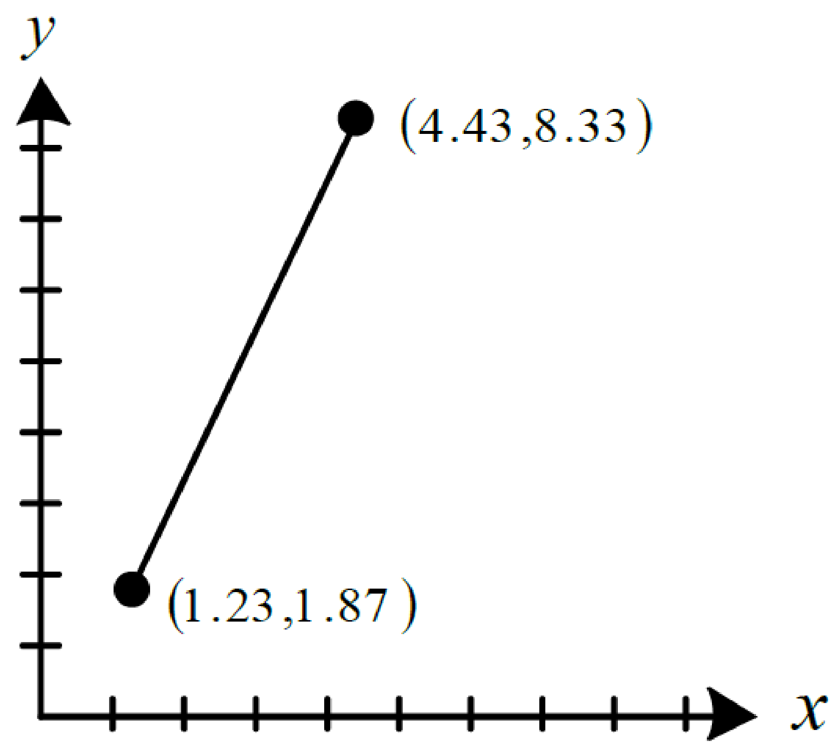


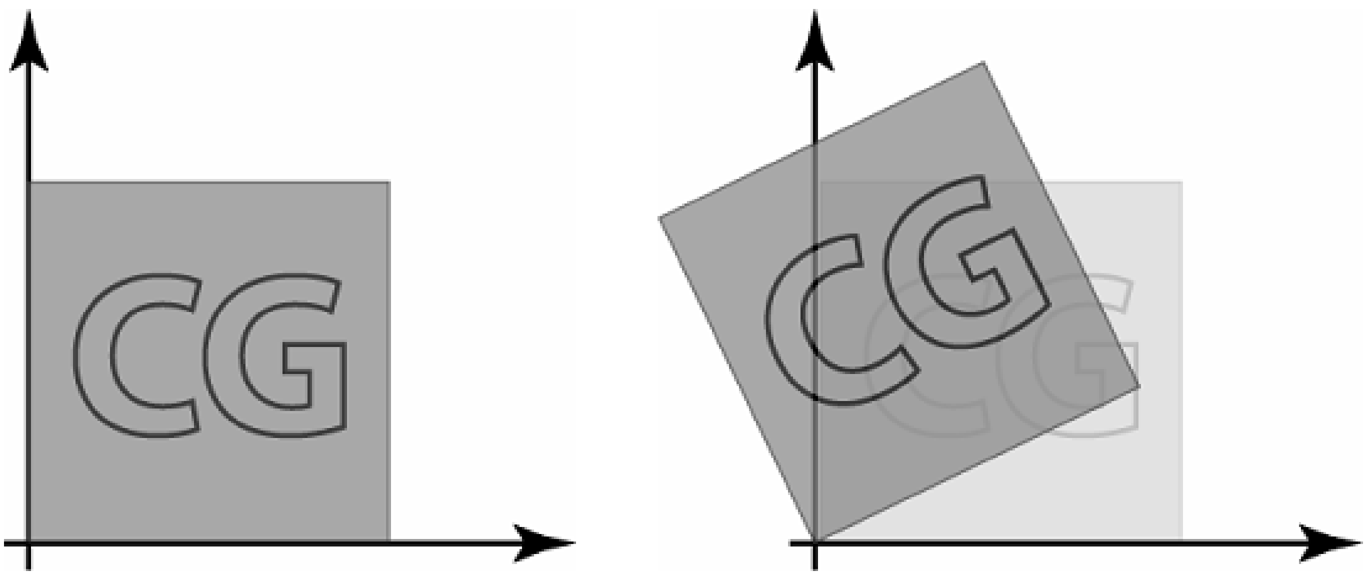
Figure (b): After rotation

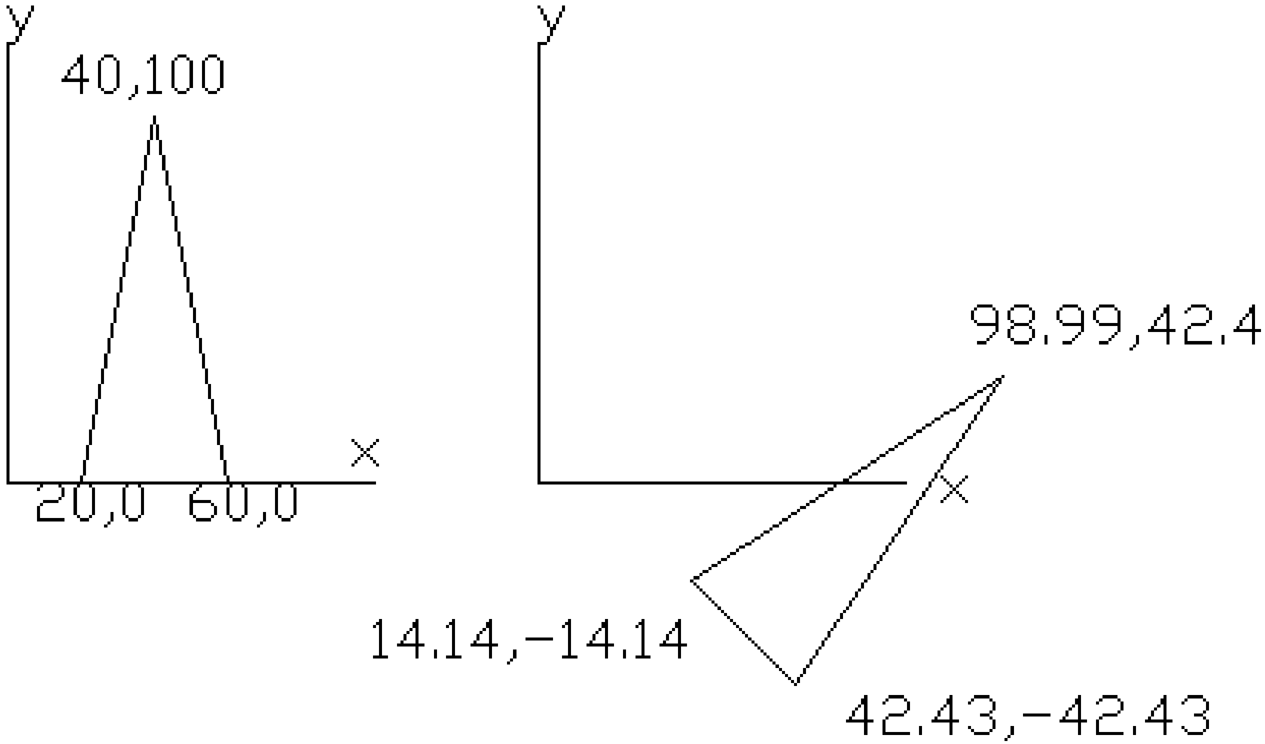
الدوران بعكس عقارب الساعه بمقدار 30

rotation

$$R_\theta \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \cos\theta - p_y \sin\theta \\ p_x \sin\theta + p_y \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$$





– حول المركز - باتجاه عقارب الساعة $\theta=45$

الاحداثيات المتجانسة

Homogeneous coordinates

إذا كان أحد الأبعاد في المحاور محددا تسمي الإحداثيات التي يمثل فيها الشكل بالإحداثيات المتجانسة.

الفائدة منها أنها تسمح لنا بمعاملة جميع الأشكال في مستوى الـ 2d كمصفوفة وذلك لتسهيل تطبيق التحويلات عليها.

$$P' = P + T$$

$$P' = S \cdot P$$

$$P' = R \cdot P$$

(نلاحظ المشكلة كانت تظهر فقط بتحويل الانسحاب)

تحويل الانسحاب في الاحداثيات المتجانسة :

homogeneous coordinates, the translation equations

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T\left(d_x, d_y\right) \cdot P$$

where,

مصفوفة تحويل الانسحاب:

$$T\left(d_x, d_y\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الانسحاب العكسي !

تحويل تغير المقياس في الاحداثيات المتجانسة :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Defining

مصفوفة تحويل تغير المقياس:

$$S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

we have:

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P$$

تغير المقياس العكسي!

تحويل الدوران في الاحداثيات المتجانسة :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Letting مصفوفة تحويل الدوران :

$$R = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الدوران العكسي !

affine transformations

translation

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

scale

$$S_s = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotation

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :

تدعى التحويلات التي تحافظ على التوازي بالتحويلات الأفينية affine transformation

حالة تنفيذ عمليتي انسحاب متتاليتين على نقطة واحدة: (تركيب)

What happens if a point P is translated by $T(d_{x1}, d_{y1})$ to P' and then translated by $T(d_{x2}, d_{y2})$to P''? The result we expect intuitively is a net translation $T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$. To confirm this intuition, we start with the givens:

$$P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P\,,$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P'\,,$$

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot (T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P) = \left(T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})\right) \cdot P$$

The matrix product $T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1})$ is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حالة تنفيذ عمليتي تغيير مقياس متتاليتين على نقطة واحدة: (تركيب)

$$P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P \,,$$

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P' \,,$$

then, substituting equation (2.26) **into equation** (2.27)**, we get:**

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot (S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P) = \left(S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1})\right) \cdot P$$

The matrix product $S(d_{x2}, d_{y2}) \cdot S(d_{x1}, d_{y1})$ **is:**

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مالمقصود بالتركيب :

المقصود بكلمة تركيب أي اجراء أكثر من تحويل على الشكل (ضربه بأكثر من مصفوفة)

تغير المقياس حول نقطة معينة:

نلاحظ ترتيب جداء المصفوفات السحب إلى المركز هي المصفوفة الأخيرة، ثم تغير المقياس وبالخطوة الأخيرة نعيد الشكل إلى موضعه الأصلي.

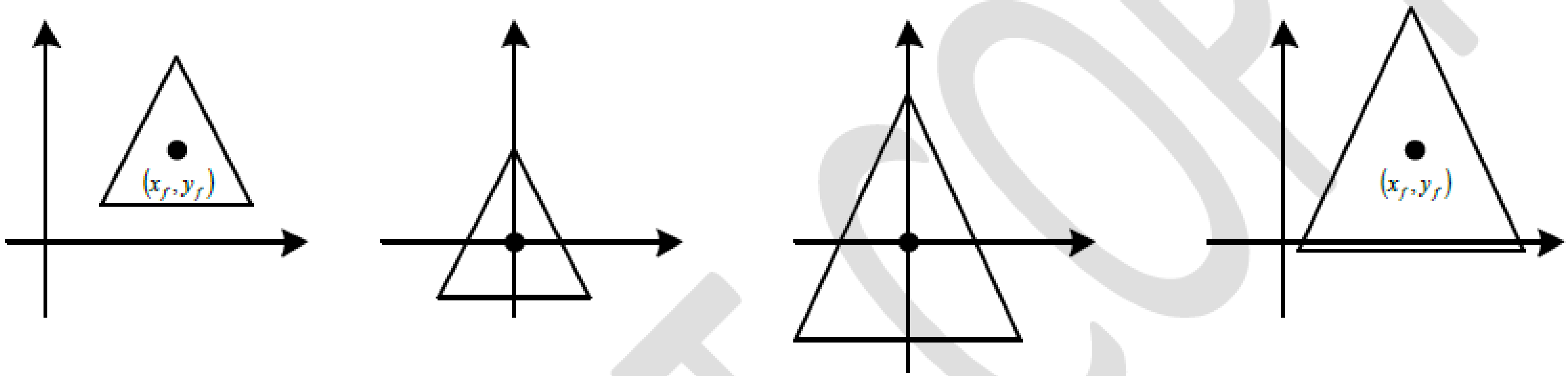


Figure (a):Original Position of Object and Fixed Point

Figure (b):Translate Object so that Fixed Point (x_f, y_f) is at Origin

Figure (c):Scale Object with Respect to Origin

Figure (d):Translate Object so that the Fixed Point is Returned to Position (x_f, y_f)

Concatenating the matrices for these three operations produces the required scaling matrix:

$$\overset{\text{٣}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\text{٢}}{\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\text{١}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

الدوران حول نقطة معينة:

نلاحظ ترتيب جداء المصفوفات السحب إلى المركز هي المصفوفة الأخيرة، ثم الدوران وبالخطوة الأخيرة نعيد الشكل إلى موضعه الأصلي.

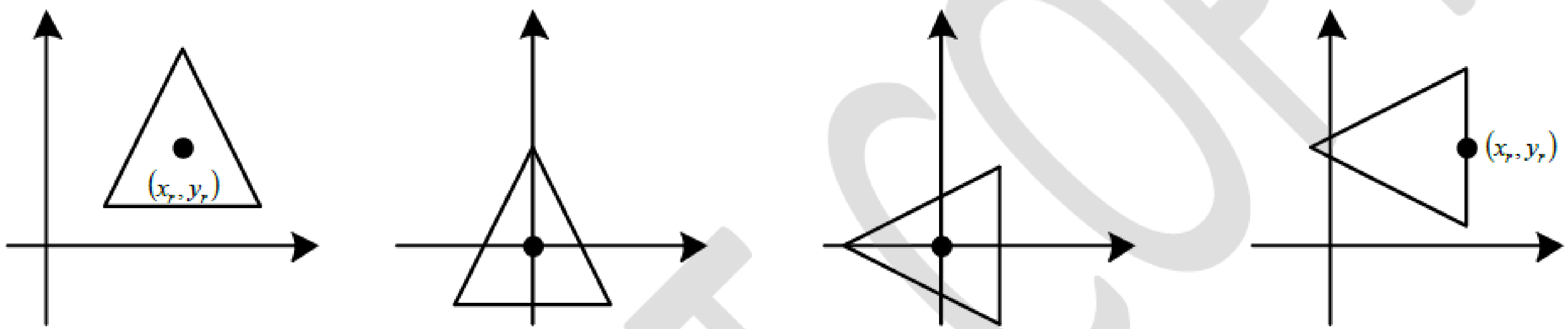


Figure (a):Original Position of Object and Pivot Point

Figure (b):Translation of Object so that Pivot Point (x_r, y_r) is at Origin

Figure (c):Rotation about Origin

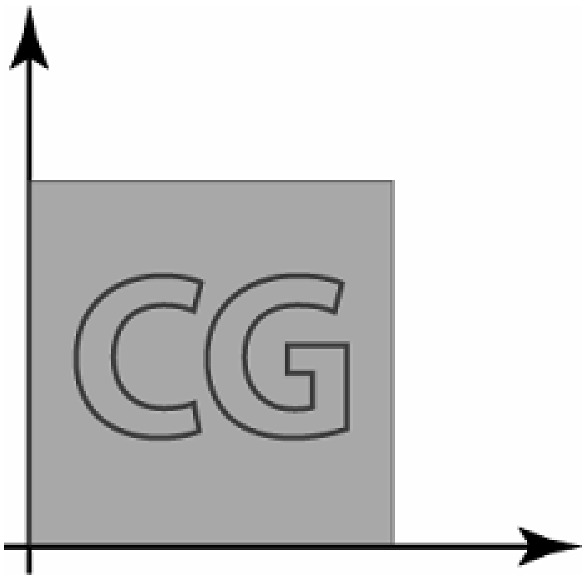
Figure (d):Translation of Object so that Pivot Point is Returned to Position (xr,yr)

The composite transformation matrix for this sequence is obtained with the concatenation:

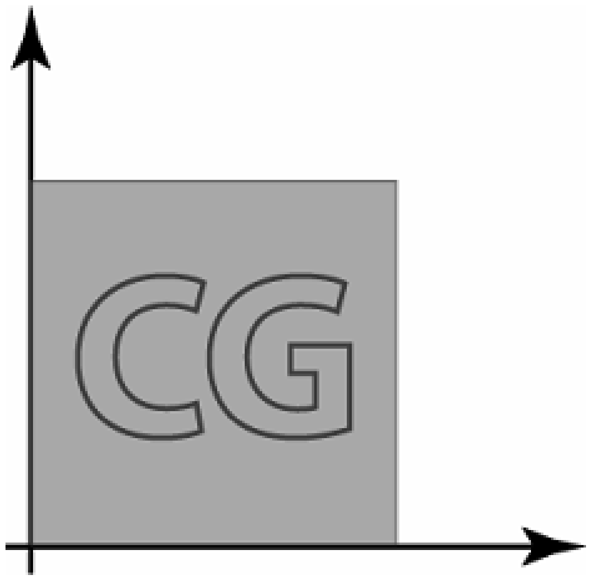
$$\overset{\text{٣}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\text{٢}}{\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \overset{\text{١}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & x_r(1-cos(\theta)) + y_r sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) & y_r(1-cos(\theta)) + x_r sin(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

compositing transformations

- composition is not commutative



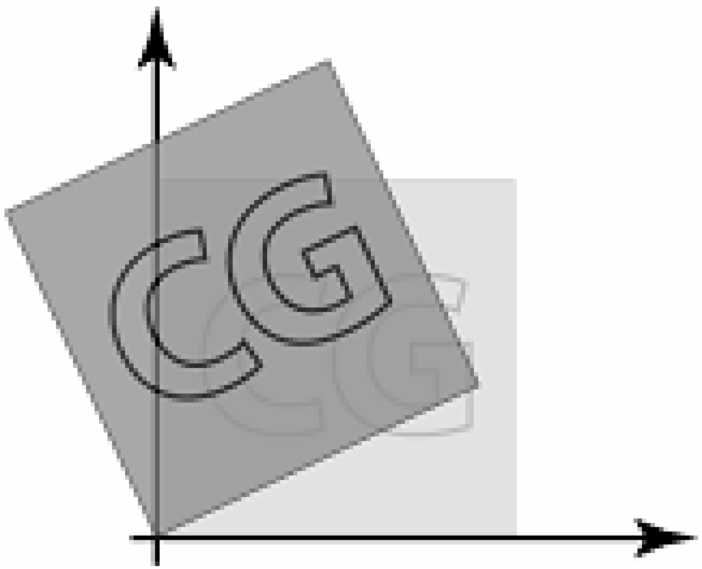
rotate,
then translate



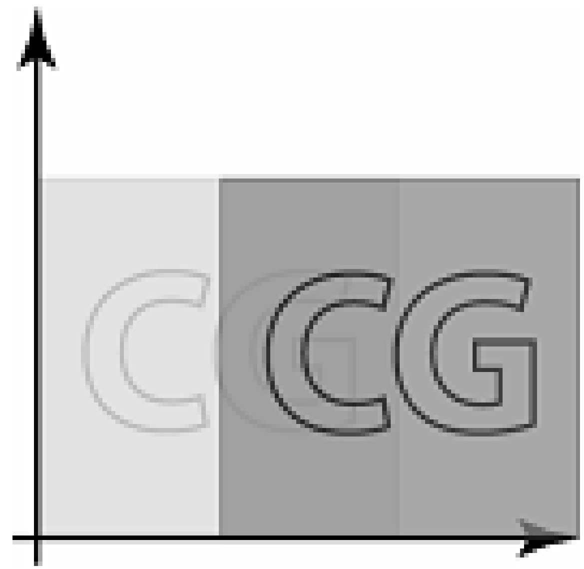
translate,
then rotate

compositing transformations

- composition is not commutative



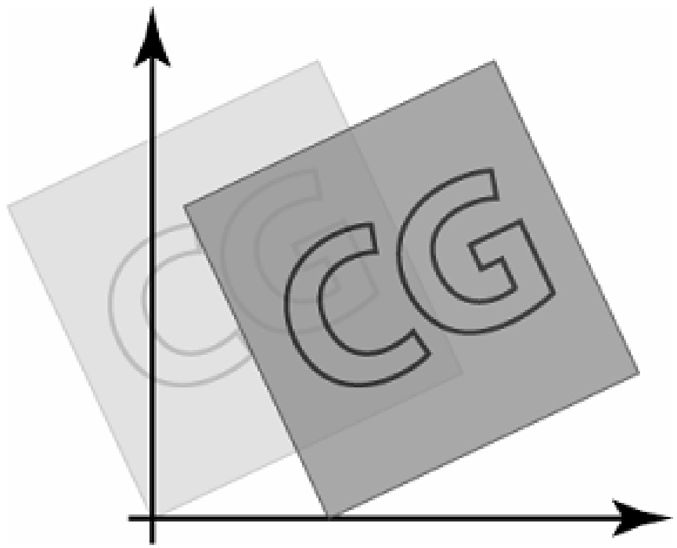
rotate,
then translate



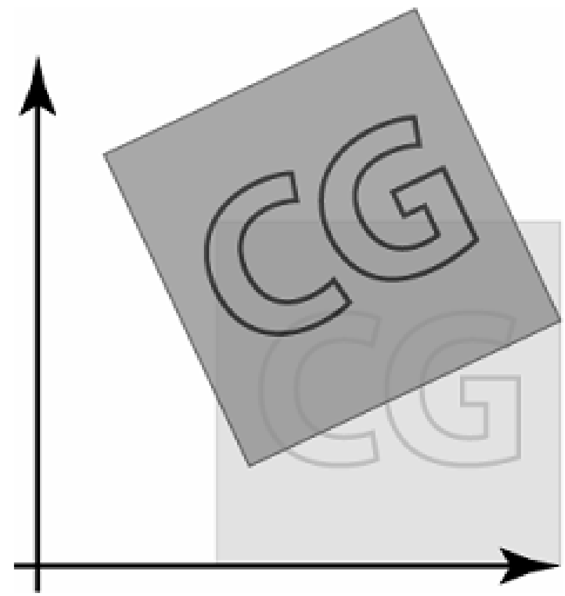
translate,
then rotate

compositing transformations

- composition is not commutative



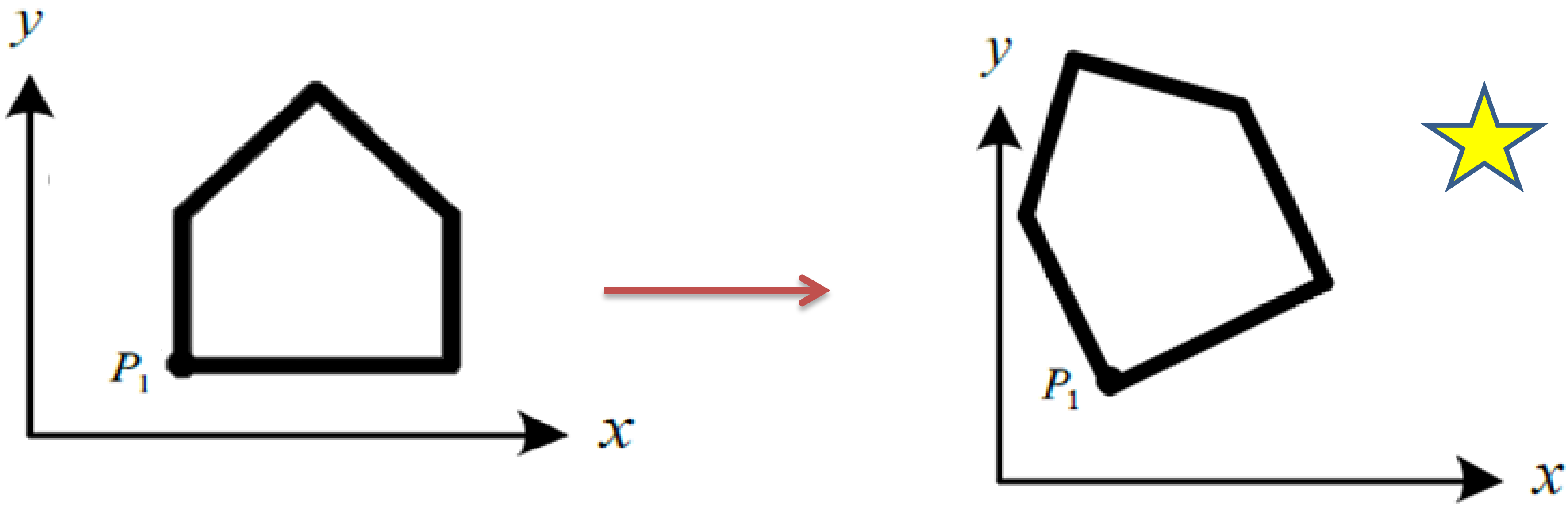
rotate,
then translate



translate,
then rotate

نستنتج:

تحويلات التركيب ليست تبديلية أي:
الصورة الناتجة من تدوير الشكل ثم سحبه تختلف عن الصورة الناتجة من سحب الشكل ثم تدويره.


y
P1
x
y
P1
x

يجب تميز بين المصطلحين التاليين:

- مصفوفة التحويل:

هي جداء مصفوفات التحويل ببعضها بدون ضربها بالنقاط الأساسية للشكل.

- مصفوفة النقاط للشكل بعد التحويل:

هي النقاط التي تنتج بجداء مصفوفة التحويل بالنقاط.

مثال:

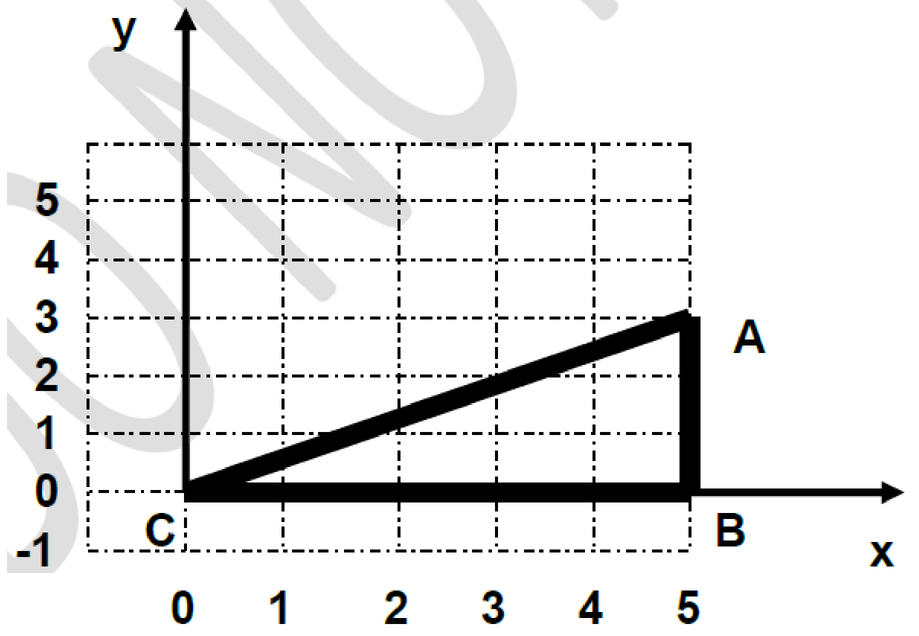


Figure (1)

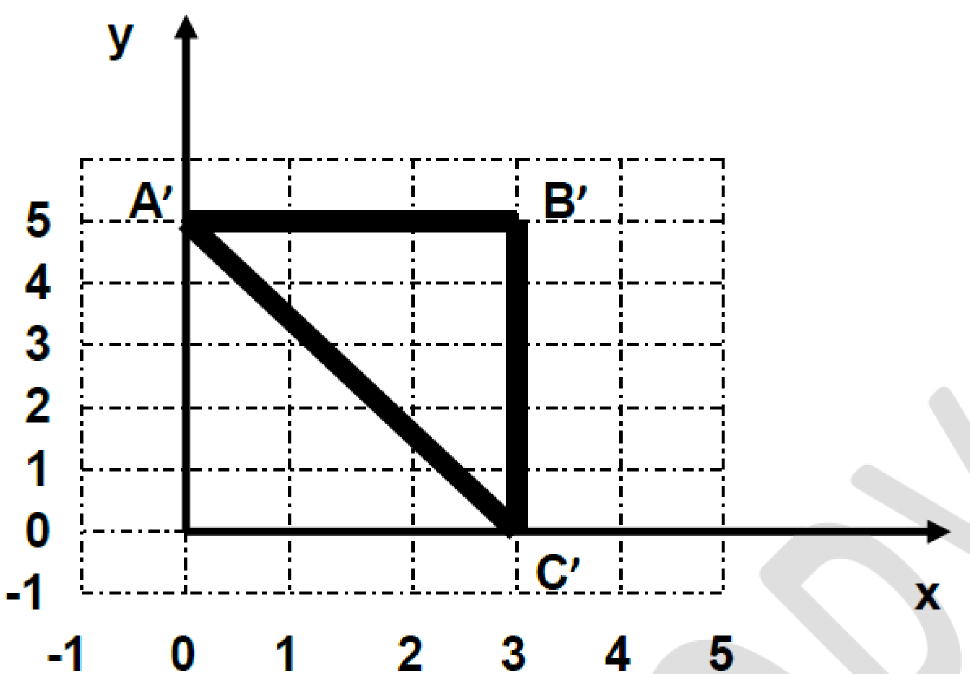


Figure (2)

First: **Rotation by 90 degrees anticlockwise**

$$Ro = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) & 0 \\ \sin(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Second: **Translation by** $(x_{C'}, y_{C'}) = (3,0)$

$$Tr = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{Composite Matrix}} = Tr.Ro = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verification:

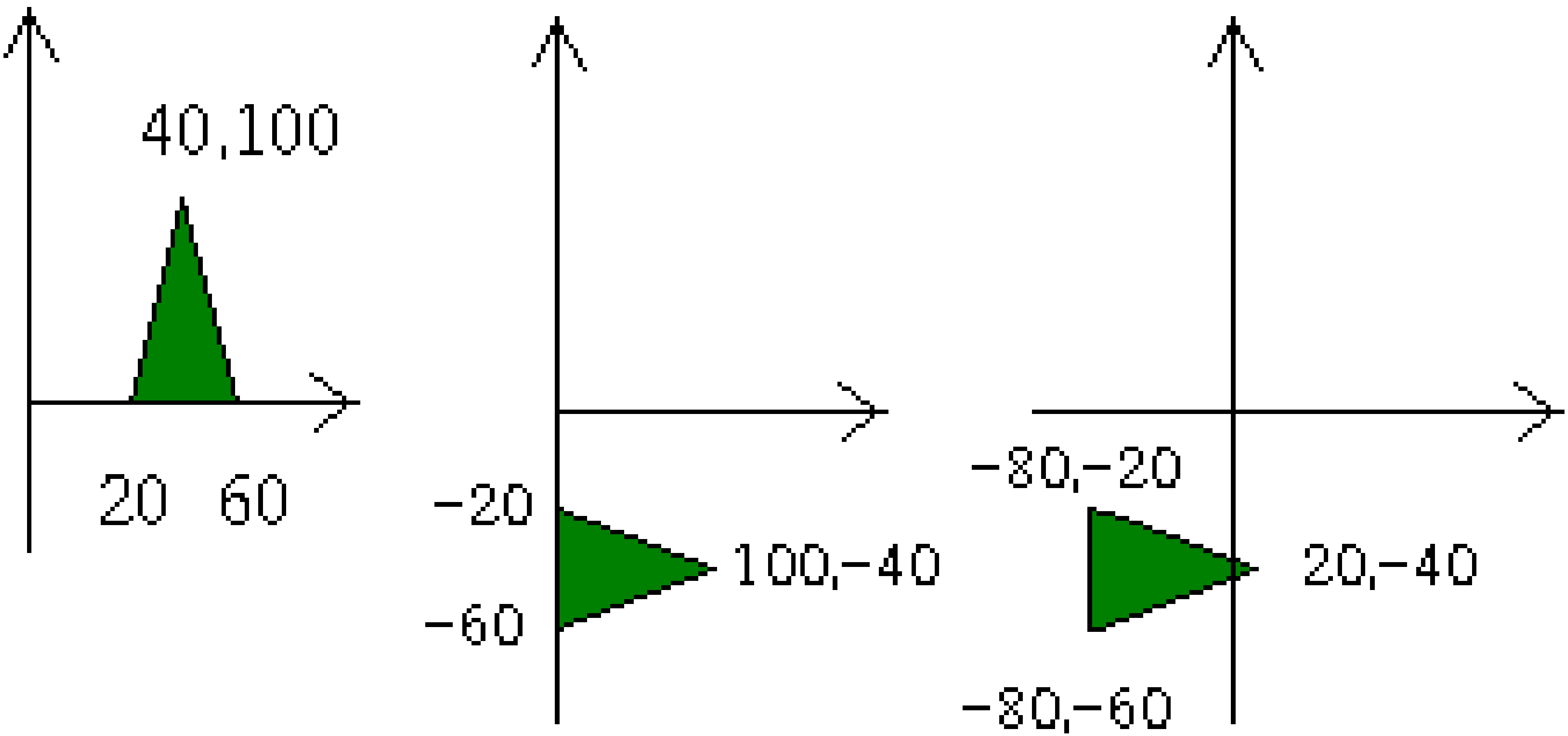
$$P_{A'B'C'} = M_{\text{CompositeMatrix}}.V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i.e.,

$A'(0,5)$
$B'(3,5)$
$C'(3,0)$

بعد ايجاد مصفوفة التحويل للتأكد من صحتها نقوم باجراء عملية جداء مصفوفات بين مصفوفة التحويل والنقاط الأصلية فإذا كانت النقاط الجديدة صحيحة فبالتالي مصفوفة التحويل صحيحه.

مثال:



الدوران(90) ثم تم اجراء الاتسحاب (Tx=-80,Ty=0)

قم بحساب مصفوفة التحويل؟

كيف أقوم بعمل دوران حول نقطة معينة؟

- الدوران حول نقطة P=(Px,Py) بزاوية θ وباتجاه عقارب الساعة

١. انسحاب T(-Px,-Py,1)

٢. دوران بزاوية θ

٣. انسحاب T(Px,Py,1)

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -Px & -Py & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ Px & Py & 1 \end{bmatrix}$$

Any questions ؟؟؟