الفصل الخامس

اللغات الصورية والأوتومات

1. الأوتومات المنتهي

تعريف: نُعرف "الأوتومات المنتهي" (Finite Automaton)، بأنها خماسية $A=(Q,q_0,F,\Sigma,\Delta)$ حيث:

1- Q : مجموعة منتهية من الحالات.

2- q_0 : حالة من Q ندعوها الحالة الابتدائية.

3- F : مجموعة حالات محتواة في Q وندعوها الحالات النهائية.

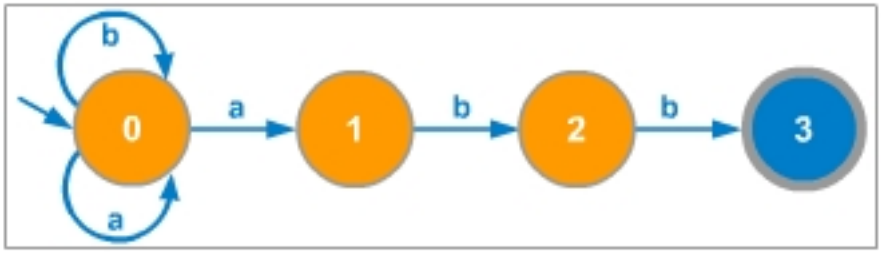
4- Σ : أبجدية تتألف من مجموعة من الرموز (بما فيها ε الرمز الفارغ) والتي ندعوها رموز الدخل.

5- Δ : تابع انتقال معرف بالشكل التالي: $\Delta: Q\times\Sigma\to 2^Q : \Delta(q_i,a)=\{q_{i1},...,q_{in}\}$

مثال: لتكن الأوتومات $A=(\{0,1,2,3\},0,\{3\},\{a,b\},\Delta)$

حيث يكون التابع: $\begin{cases}\Delta(0,a)=\{0,1\}\\ \Delta(0,b)=0\\ \Delta(1,b)=2\\ \Delta(2,b)=3\end{cases}$

وتكون الأوتومات ممثلة بالشكل التالي:



كما يمكن تمثيل التابع السابق بمصفوفة ندعوها مصفوفة الانتقال وتكون على الشكل التالي:

State/Alphabet	a	b
0	0,1	0
1	-	2
2	-	3
3	-	-

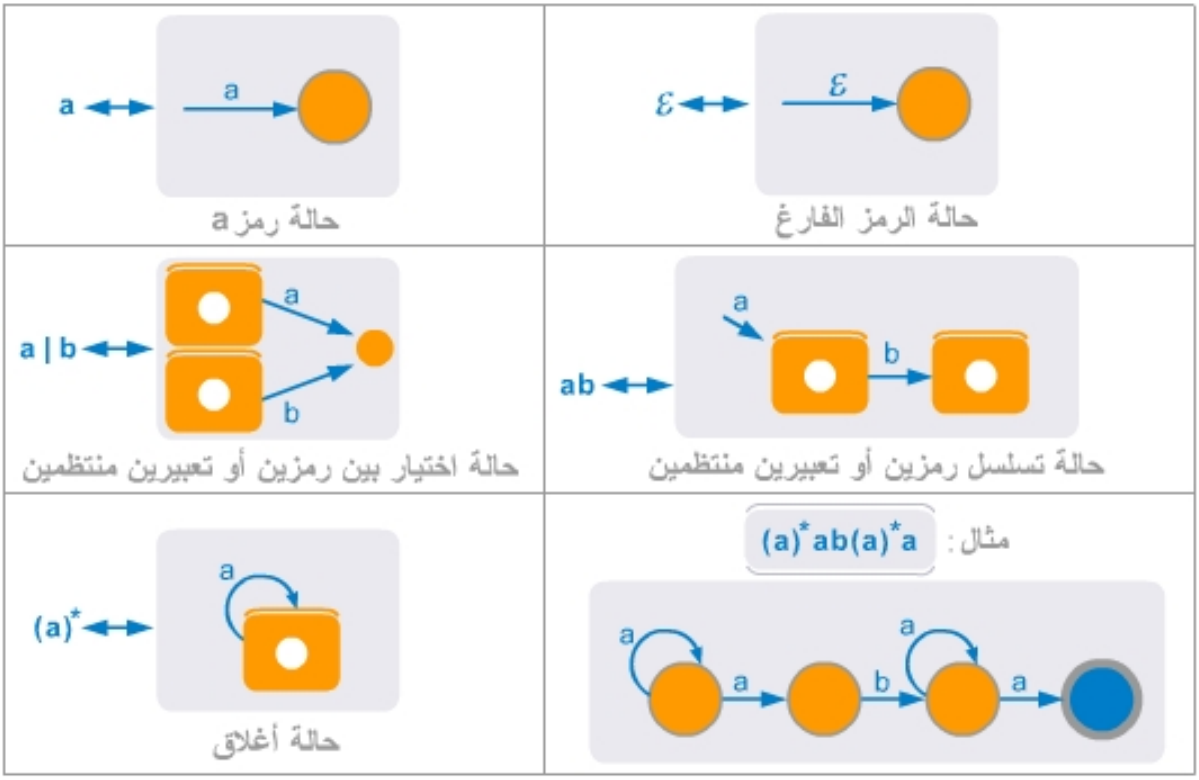
تعريف: نُعرف "اللغة التي تقبلها أوتومات" بأنها مجموعة السلاسل التي تسمح بالمرور من الحالة الابتدائية إلى إحدى الحالات النهائية للأوتومات.

مثال: في حالة الأوتومات السابقة، تقبل هذه الأوتومات اللغة الممثلة بالتعبير المنتظم: (a | b)* abb

بشكل عام، هناك تقابل بين الأوتومات المنتهي والخوارزمية، فكل أوتومات منته يعبر عن خوارزميـة أو عن برنامج منته. وتزداد سهولة التعبير عن أوتومات بخوارزمية، عندما تكون الأوتومات من النوع المنتهي والحتمي وهو ما سنعرفه لاحقاً.

2. تحويل تعبير منتظم إلى أوتومات منته لاحتمي

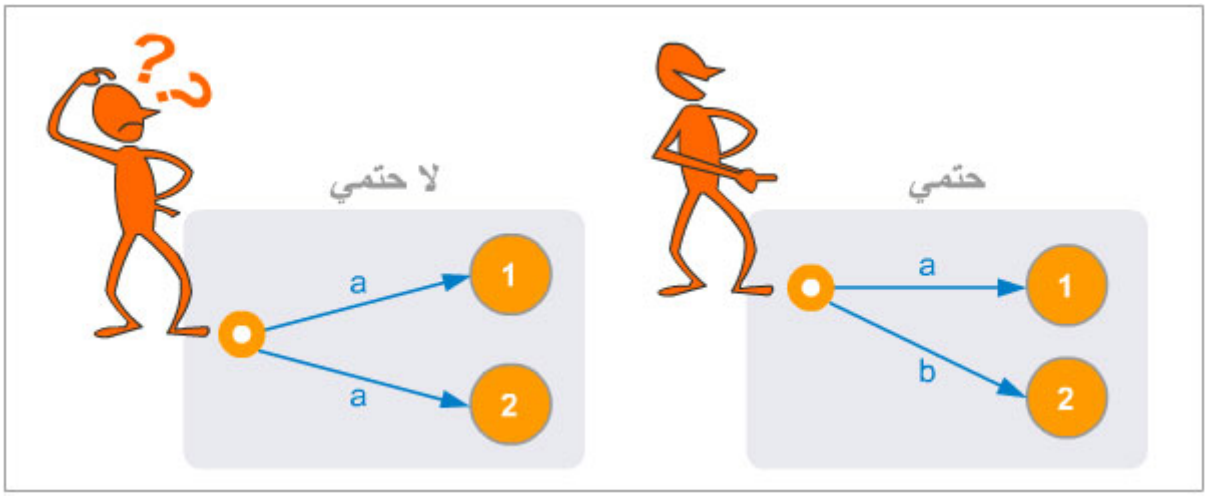
لبناء أوتومات منتهي اعتباراً من تعبير منتظم يمكننا اعتماد الخوارزمية الموضحة في الـشكل التـالي والتي تحدد الأوتومات المقابل لكل نوع من أنواع التعابير المنتظمة:



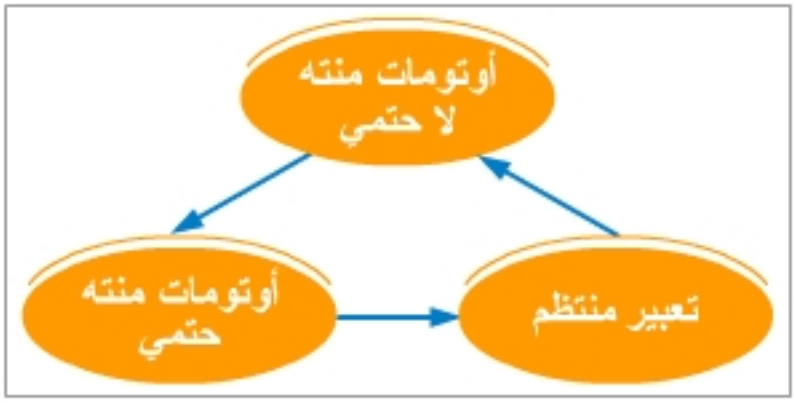
3. تحويل أوتومات منته لاحتمي إلى أوتومات منته حتمي

تعريف: نقول عن "الأوتومات المنتهي" أنه "**حتمي**" (Deterministic) في حال لم يكن في أبجديته الرمز ε وكان تابع الانتقال معرفاً بالشكل: $\Delta: Q \times \Sigma \to Q : \Delta(q_i, a) = q_j$ بحيث يتم الانتقال بأي رمـز من حالة إلى حالة واحدة فقط.

يسمح الانتقال من أوتومات منته لاحتمي إلى أوتومات منته حتمي بتجنب حالات الرجوع إلى الخلـف عند التأكد من قبول الأوتومات لكلمة من اللغة المعرفة بهذه الأوتومات. يعود السبب في ذلك إلى عدم وجود عدة خيارات للانتقال من حالة إلى حالة تليها باستخدام نفس الرمز.



نظرية: هناك تكافؤ بين الأشكال الثلاثة المعبرة عن لغة منتظمة وهي: التعبير المنـتظم، الأوتومـات المنتهي اللاحتمي والأوتومات المنتهي الحتمي.



يجري تحويل أوتومات منته لاحتمي إلى أوتومات منته حتمي اعتماداً على الخوارزمية التالية:

Input: Non Deterministic Finite Automaton $A1=(Q1,q_0,F1,\Sigma,\Delta1)$

Output: Deterministic Finite Automaton $A2=(Q2,q_0,F2,\Sigma,\Delta2)$

For each $p\in Q1$ and for each $a\in\Sigma$ **Do**

Add to transition table all the composite states produced by $\Delta1(p,a)$

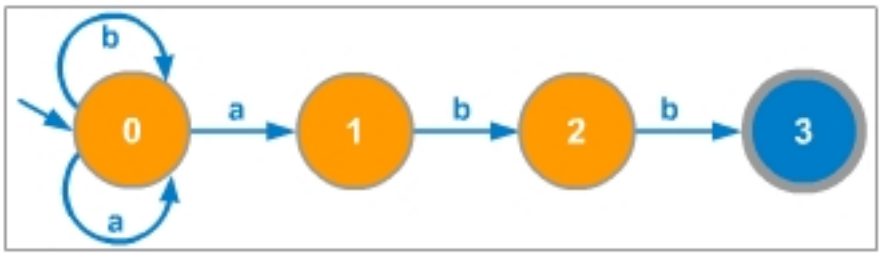
All states with at least one final state, become final states

Renumber the states

مثال: لنأخذ حالة $A=(\{0,1,2,3\},0,\{3\},\{a,b\},\Delta)$ ، حيث التابع:

$$\begin{cases}\Delta(0,a)=\{0,1\}\\ \Delta(0,b)=0\\ \Delta(1,b)=2\\ \Delta(2,b)=3\end{cases}$$

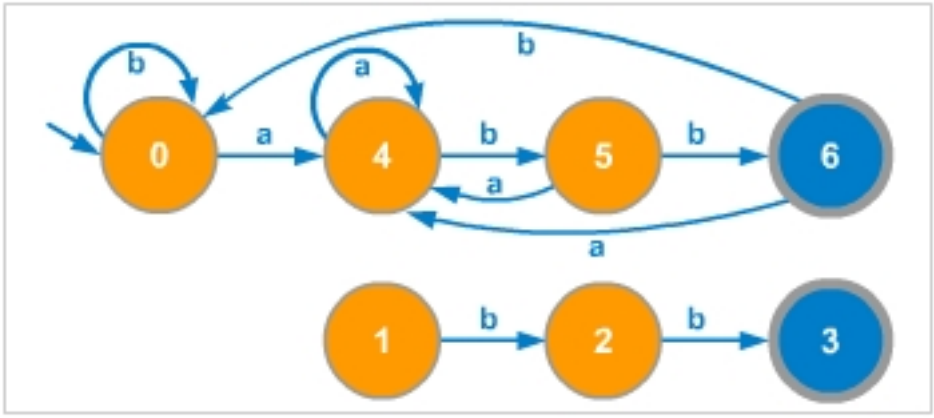
فيكون للأوتومات الشكل التالي.



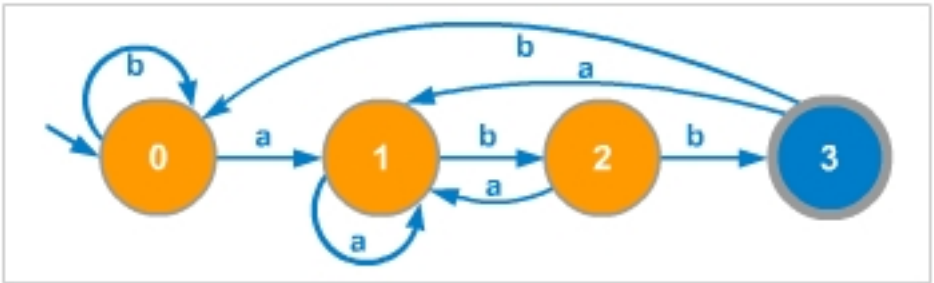
بتطبيق خوارزمية تحويل الأوتومات المنته اللاحتمي إلى أوتومات منته حتمي على الأوتومات السابق نجد:

Statel Alphabet	a	b
0	0,1	0
1	-	2
2	-	3
3	-	-

Statel Alphabet	a	b
0	4	0
1	-	2
2	-	3
3	-	-
4	4	5
5	4	6
6	4	0



أما جزء الأوتومات المؤلف من الحالات 1 و 2 و 3 فيمكن إهماله لأننا لا يمكن أن نصل إليه اعتباراً من الحالة الابتدائية. لذا يصبح هذا الجزء إضافي ولا معنى له ويمكن إهمالـه، وتكـون الأوتومـات الناتجة والمرسومة في الشكل السابق هي الأوتومات المنتهي الحتمي الناتج والتي يمكن إعـادة تـرقيم حالاتها واختصاره كما في الشكل التالي:



4. تحويل أوتومات منته إلى تعبير منتظم

لنفرض أن لدينا لغة L تقبلها الأوتومات $A=(Q,q_0,F,\Sigma,\Delta)$ ولنفرض أن L_i هي اللغة التي يمكن أن تقبلها الأوتومات A إذا اعتبرنا أن الحالة الابتدائية لجميع سلاسلها هي q_i. يمكننا عندها كتابة جملة معادلات التي تربط جميع الأجزاء L_i التي تكون اللغة الأصلية L التي تقبلها A، كما يلي:

1- كل انتقال من الشكل $\Delta(q_i,a)=q_j$ يسمح بكتابة المعادلة: $L_i=aL_j$.

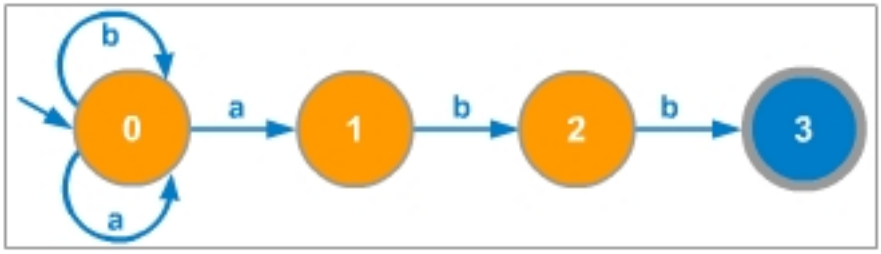
2- من أجل كل $q_i\in F$ لدينا المعادلة $L_i=\varepsilon$.

3- يمكن تجميع جميع المعادلات $L_i=\alpha$ و $L_i=\beta$ بالشكل $L_i=\alpha\,|\,\beta$.

4- يتم حل جملة المعادلات الناتجة عن طريق التعويض لحساب L_0.

خاصة مهمة: $\left[L=uL\,|\,v\Rightarrow L=u^*v\right]$

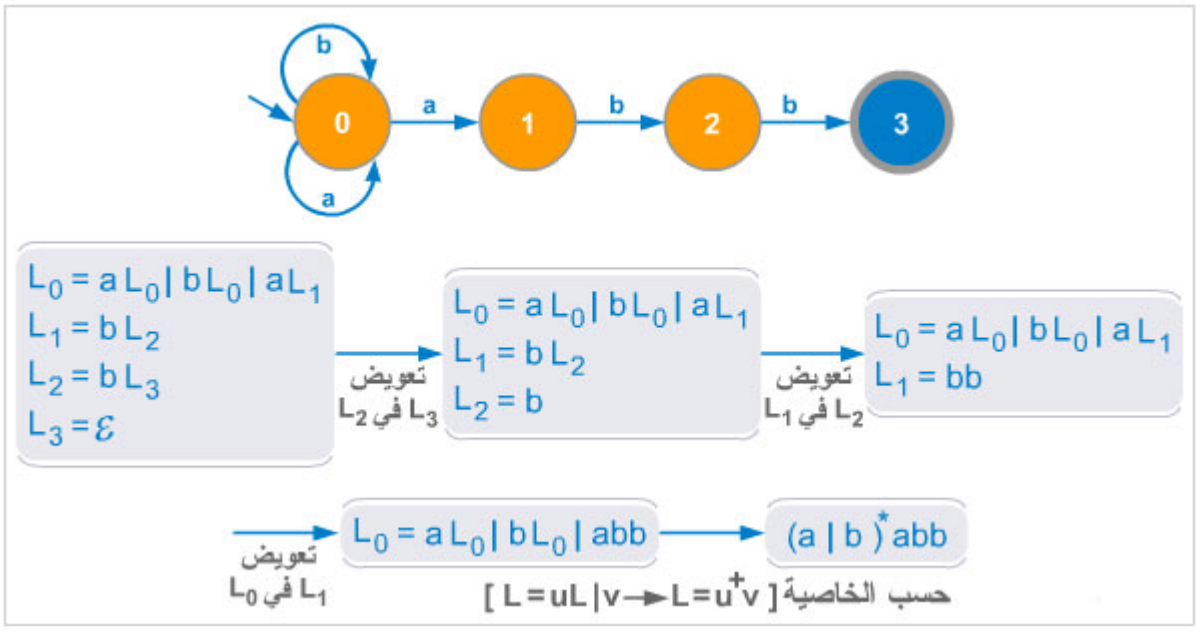
مثال: اعتباراً من الأوتومات



يمكننا أن نستنتج جملة المعادلات التالية: ...

$$\begin{cases} L_0=aL_0\,|\,bL_0\,|\,aL_1 \\ L_1=bL_2 \\ L_2=bL_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_0=aL_0\,|\,bL_0\,|\,aL_1 \\ L_1=bbL_3 \end{cases} \Rightarrow \{L_0=aL_0\,|\,bL_0\,|\,abbL_3 \Rightarrow$$

$$(a\,|\,b)^*abb$$



5. الأوتومات ذات المكدس

هناك بعض اللغات التي لا يمكن التعرف عليها باستخدام أوتومات منته ولا يمكن توصيفها باستخدام تعبير منتظم. تكون هذه اللغات أوسع من اللغات المنتظمة وندعوها باللغات خارج السياق. من الأمثلة النمطية على لغة من هذا النوع، اللغة المبنية على الرمزين a و b ولها الشكل $a^n b^n$ من أجل n صحيح موجب والتي تنتمي إليها سلاسل مثل ab أو aaabbb ... الخ.

يبدو واضحاً من شكل اللغة $a^n b^n$ أن محاولة تمثيلها بأوتومات ستصطدم بعائق الحاجة إلى وجود ذاكرة تسمح بتخزين عدد المرات (وهي n) التي ظهر فيها الرمز a في الكلمة للتأكد من أن b ستظهر بنفس العدد من المرات، وهو أمر غير ممكن في أي أوتومات منته كون n غير ثابتة وغير محددة ويمكن أن تسعى إلى اللانهاية. لتمثيل مثل هذه اللغات، نستخدم أداة ذات إمكانيات إضافية وهي الأوتومات ذات المكدس.

تعريف: نعرف "الأوتومات ذات المكدس" (Push Down Automaton)، عبارة عن سباعية $P=(Q,q_0,F,\Sigma,\Gamma,\tau,\Delta)$ حيث:

1- Q: مجموعة منتهية من الحالات.

2- q_0: حالة من Q ندعوها الحالة الابتدائية.

3- F: مجموعة حالات محتواة في Q وندعوها الحالات النهائية.

4- Σ: الأبجدية وتتألف من مجموعة من الرموز.

5- Γ: أبجدية المكدس.

6- τ: رمز قعر المكدس.

7- Δ: تابع انتقال معرف بالشكل التالي: $\Delta: Q\times\Sigma^*\times\Gamma^* \to Q\times\Gamma^*$

تعريف: تكون اللغة مقبولة من أوتومات ذات مكدس إذا كانت مجموعة السلاسل التي تنتمي لهذه اللغة تنتقل عند بدايتها من حالتي: مكدس فارغ يحوي رمز قعر المكدس وحالة الأوتومات الابتدائية، لتصل عند نهايتها (وبعد قراءة كافة رموزها) إلى إحدى حالتين:

1- حالة نهائية من حالات الأوتومات.

2- أو عودة إلى حالة مكدس فارغ.

مثال: لنعرف الأوتومات ذات المكدس التي تمثل $a^n b^n$ من أجل n صحيح موجب. تكون الأوتومات مؤلفة من العناصر التالية:

$$\begin{cases} Q = \{s, p, q\} \\ q_0 = s \\ F = \{q\} \\ \Sigma = \{a, b\} \\ \Gamma = \{A, \$\} \\ \tau = \$ \end{cases}$$

$$\Delta \begin{cases} (s, a, \varepsilon) \to (s, A) \\ (s, b, A) \to (p, \varepsilon) \\ (p, b, A) \to (p, \varepsilon) \\ (s, \varepsilon, \$) \to (q, \varepsilon) \\ (p, \varepsilon, \$) \to (p, \varepsilon) \end{cases}$$

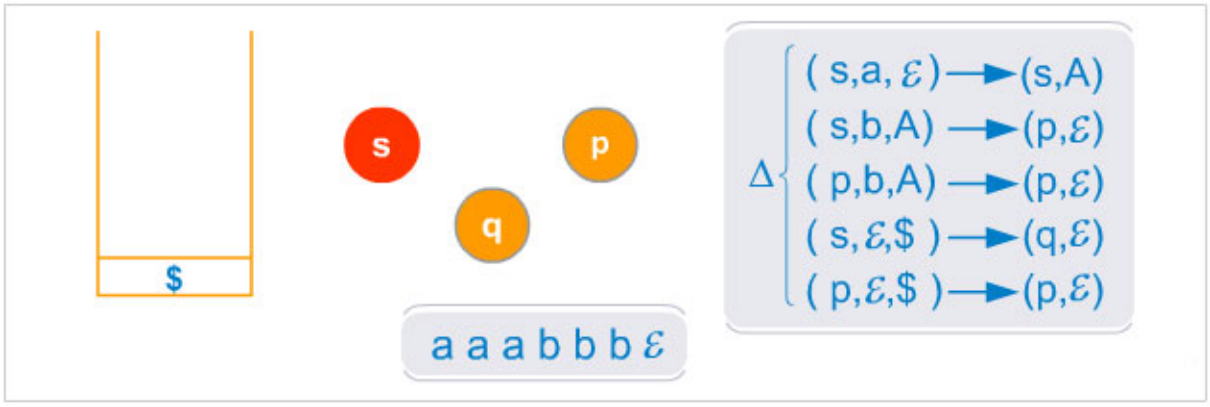
لتكن لدينا الكلمة: aaabbb، تكون حركة الأوتومات الناجمة عن قراءة الكلمة وقبولها ممثلة على النحو التالي:

$Q = \{ s,p,q \}$
$q_0 = s$
$F = \{ q \}$
$\Sigma = \{ a,b \}$
$\Gamma = \{ A,\$ \}$
$\tau = \$$

$$\Delta \begin{cases} (s, a, \varepsilon) \to (s,A) \\ (s, b, A) \to (p, \varepsilon) \\ (p, b, A) \to (p, \varepsilon) \\ (s, \varepsilon, \$) \to (q, \varepsilon) \\ (p, \varepsilon, \$) \to (p, \varepsilon) \end{cases}$$

Stack	Input	State	Transition
$	aaabbb	s	$(s, a, \varepsilon) \to (s, A)$
$A	aabbb	s	$(s, a, \varepsilon) \to (s, A)$
$AA	abbb	s	$(s, a, \varepsilon) \to (s, A)$
$AAA	bbb	s	$(s, b, A) \to (p, \varepsilon)$
$AA	bb	p	$(p, b, A) \to (p, \varepsilon)$
$A	b	p	$(p, b, A) \to (p, \varepsilon)$
$		p	$(p, \varepsilon, \$) \to (p, \varepsilon)$
$		q	ACCEPTED

يمكن توضيح المثال السابق بطريقة أخرى كمايلي:



6. تمارين

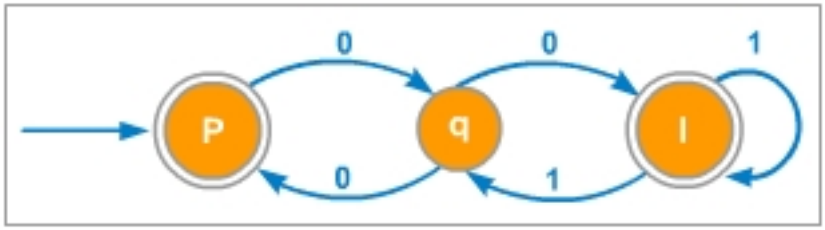
السؤال الأول

أعط الأوتومات المنتهي الحتمي التي تقبل سلاسل لها طول زوجي (عدا السلسلة الفارغة).

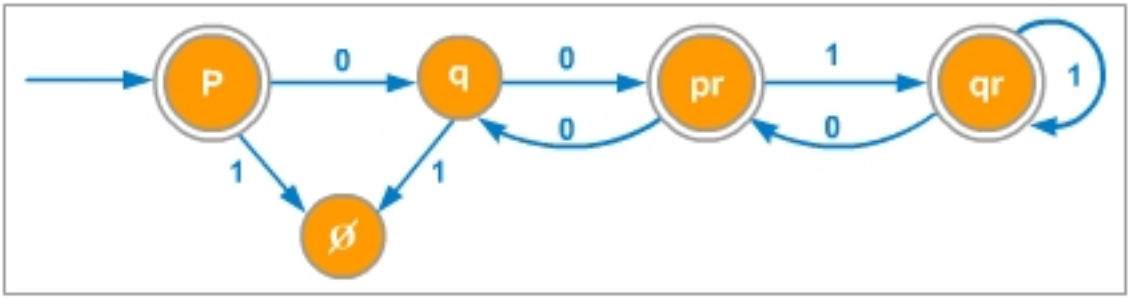
الجواب.

السؤال الثاني

أعط الأوتومات المنتهي الحتمي المكافئ للأوتومات المنتهي اللاحتمي التالي.



الجواب

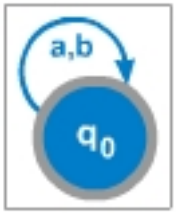


السؤال الثالث

هل اللغة $a*b*$ هي لغة منتظمة؟

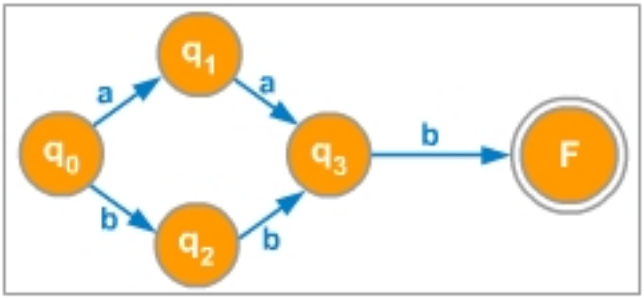
الجواب

نعم لأن بإمكاننا رسم أوتومات منته حتمي لها وهو:



السؤال الرابع

أعط التعبير المنتظم المعبر عن الأوتومات المنتهي الحتمي التالي.



الجواب

(aa|bb)b