الفصل الخامس

التيار المتناوب الأحادي الطور

1-5- مقدمة :

يتم توليد القدرة الكهربائية في الغالبية العظمى من المحطات الكهربائية الموجودة في مختلف دول العالم على شكل قدرة كهربائية متناوبة ثلاثية الطور . كما يتم نقل وتوزيع هذه القدرة باستخدام التيار المتناوب بشكل عام في خطوط نقل وشبكات كهربائية ثلاثية الأطوار أيضاً . كما أن المحركات التي تعمل على التيار المتناوب هي أكثر المحركات انتشاراً في العالم .

إن الإشارات الكهرطيسية التي تشكل حجر الأساس في علوم الاتصالات هي عبارة عن تراكم لعدد من الاهتزازات المتناوبة الجيبية . واستخدام الأمواج الكهرطيسية في تطبيقات الراديو والتلفزيون تحتاج أيضاً لتيار متناوب ذا تواتر عالٍ جداً .

استناداً لما ذكر يمكن التعرف إلى أهمية دراسة التيار المتناوب والدارات الكهربائية الخطية في التيار المتناوب والتي تمثل أساس كافة التطبيقات العملية والتقنية .

ويسمى التيار أو التوتر متناوباً إذا تغيرت قيمته واتجاهه بشكل دوري خلال الزمن وعدد الدورات التي تتغير فيها قيمة التيار واتجاهه تدعى تردد التيار المتناوب .

ويعتبر التيار المتناوب المصدر الأساسي في تغذية المصانع والمدن والمناحي والمجالات الصناعية الأخرى كافة بالقدرة الكهربائية اللازمة .

ويتم توليد التيار الكهربائي المتناوب بواسطة مولدات أحادية الطور أو مولدات ثلاثية الطور مؤلفة من :

١– الجزء الثابت (Stator) الذي يحوي الوشائع الموضوعة ضمن أخاديد الصفائح المغناطيسية .

٢– الدوار (Rotor) الذي يتكون من مغناطيس دائم أو كهربائي (وهو الأكثر شيوعاً) ذو أقطاب زوجية يدور بواسطة محرك كهربائي أو ديزل أو بواسطة عنفات مائية أو بخارية ، بنتيجة الدوران سيتم تغير في الفيض المغناطيسي المترابط مع وشائع الثابت فتنشأ قوة محركة كهربائية تحريضية تعطى بالعلاقة التالية :

$$e = -N.\frac{\partial Q}{\partial t}$$

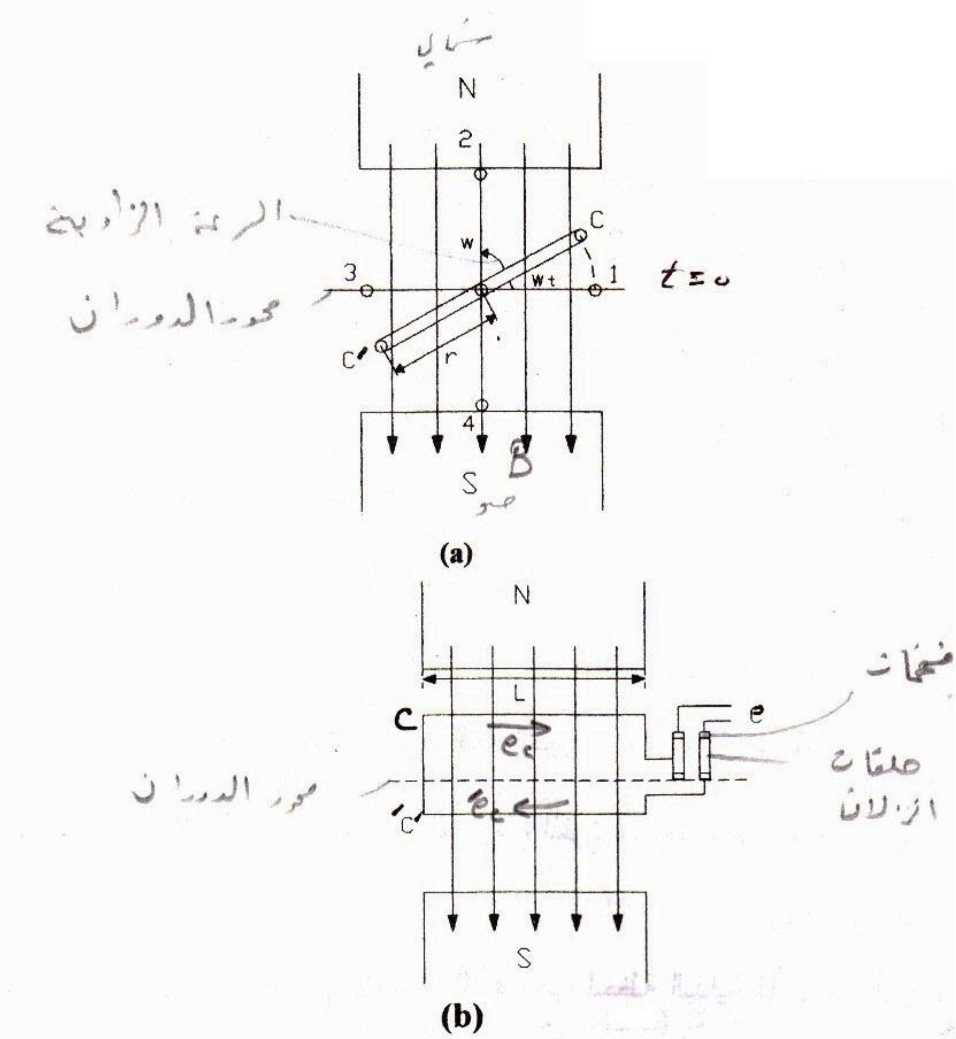
N- عدد لفات الملف الثابت .

$-\frac{\partial Q}{\partial t}$ تغير الفيض المغناطيسي بالنسبة للزمن .

2-5- مبدأ توليد التيار المتناوب :

يمكن الحصول على أنواع متعددة الأشكال من موجات التوتر المتناوب ولكن التوتر المتناوب الجيبي الموجي هو النوع المولد السائد وللحصول على توتر متناوب جيبي .

نعتبر مجالاً مغناطيسياً منتظماً كثافة تدفقه B ويدور في هذا المجال ملف `CC ذي لفة واحدة وجانباه `CC متعامدان في كل أوضاعها في المجال B حول المحور O بسرعة زاوية ثابتة ولتكن ω . والملف متصل بحلقتي انزلاق وهما من مادة موصلة ويدوران مع عمود الدوران ولكنهما معزولتان كهربائياً عنه عن طريق مسفرتين (فحمتين) . فإذا وضع حمل بين طرفي الفحمتين فإنه يمر به تيار متناوب وبذلك نكون قد قمنا بتوليد توتر وتيار متناوب – الشكل (5-1)–.



الشكل (5-1)

ومن المعروف أنه إذا تحرك الموصل في المجال B بسرعة U فإن قوة دافعة كهربائية تتولد بين طرفي الموصل (C) تعطى بالعلاقة التالية :

$$e_C=B.L.U_n \qquad (1)$$

B- كثافة المجال ويقاس بـ $\frac{\text{فولت}\ \ \text{ثانية}}{m^2}=\frac{\phi}{m^2}=$ تسلا

L− طول الموصل ويقاس بالمتر (m) .

U_n− مركبة السرعة U العمودية على المجال B وتقاس بـ m/sec .

وبالمثل فإن القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في الموصل (\`C) هي :

$$e'_C=B.L.U_n \qquad (2)$$

ولا تتولد ق.ء.ك في طرفي الملف لأنهما لا يقطعان خطوط المجال . وعلى ذلك فإن ق.ء.ك المتولدة في الملف (\`CC) هي :

$$e=e_c+e\grave{}_c=2B.L.U_n \qquad (3)$$

من الشكل (5-1) يتضح أن مركبة السرعة العمودية على المجال B هي :

$$U_n=U.\sin\omega t=\omega.r.\sin\omega t \qquad (4)$$

r− نصف قطر الدوران .

بالتعويض في المعادلة (3) نجد :

$$e=2B.L.\omega.r.\sin\omega t=E_{max}.\sin\omega t \qquad (5)$$

e− القيمة اللحظية للقوة الدافعة الكهربائية عند أي لحظة t .

E_{max}− القيمة العظمى (الذروة) للقوة الدافعة الكهربائية المتولدة .

$$E_m=[2B.L.\omega.r]$$

ωt− هي الزاوية التي يدورها الملف من لحظة البداية t=0 إلى أي لحظة t .

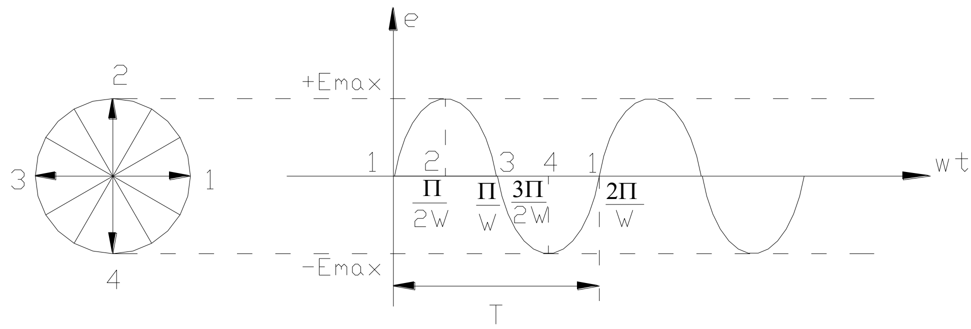
ومن المعادلة (5) نلاحظ أن ق.ء.ك التي تولد بين طرفي الملف تتغير تغيراً جيبياً بالنسبة للزمن .

5-2-1- تمثيل التوتر الجيبي :

يمكن تمثيل التوتر الجيبي المعطى بالعلاقة $e=E_{max}.\sin\omega t$ بيانياً كما هو موضح بالشكل (5-2) حين نتبع حركة الملف في دورة كاملة ، وعندما يكون الملف في الوضعية (1) كما في الشكل (5-1) تكون مركبة السرعة العمودية على المجال B صفراً . أي أن معدل قطع خطوط المجال صفر وبالتالي فإن ق.ء.ك المتولدة صفر وعندما يغادر الملف الوضع (1) يبدأ في قطع خطوط المجال ويزداد معدل

القطع حتى تصل ق.ء.ك إلى أقصاها عند الوضع (2) أي تصل إلى [E_{max}] . ثم يتناقص معدل القطع حتى يصل الصفر عند الوضع (3) ثم يبدأ معدل القطع في الزيادة ولكن في الاتجاه السالب (المعاكس) حتى تصل قيمة ق.ء.ك المتولدة إلى أقصاها في الاتجاه السالب في الوضع (4) أي تصل إلى [$-E_{max}$] ثم تقل بتناقص معدل القطع حتى تصل إلى الصفر في الوضع (1) وبذلك يكون الملف قد استكمل دورة واحدة والقوة

القيمة اللحظية



ويعرف التردد F بأنه عدد الذبذبات التي يستكملها الجهد في الثانية الواحدة ويقاس بوحدة هي الهرتز (Hz) (دورة/ثانية) فإذا كان عدد دورات الملف في الدقيقة هو n فإن $F = \frac{n}{60}$ وذلك إذا كان عدد أزواج الأقطاب زوجاً واحداً كما في الشكل (5-1) . أما إذا كان عدد أزواج الأقطاب هو P فإن $F = \frac{P.n}{60}$ ، P عدد أزواج الأقطاب ويساوي إلى عدد الأقطاب مقسم على 2.

وتعرف السرعة الزاوية ω بالزاوية التي يدورها الملف في الثانية وتعطى بالعلاقة التالية :

$$\omega = 2\pi.f = \frac{2\pi.P.n}{60}$$

أما الزمن الدوري (الدور) فهو أقل زمن بين نقطتين متماثلتين (في المقدار والاتجاه) من نقطة الموجة والدورة يساوي :

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

ليس من الضروري أن نختار نقطة المبدأ بالنقطة التي يكون فيها التيار أو التوتر مساوياً الصفر كما في الشكل (5-2) . كما أن التوتر والتيار في دارة ما يختلفان بالطور بصورة عامة . أي انهما يمران بقيمة الصفر أو الذروة في أوقات مختلفة كما في الشكل (5-3) الذي يبين موجة توتر الدافعة الكهربائية قد استكملت ذبذبة واحدة ... وهكذا .

جيبية زاوية طورها بالنسبة لمبدأ اختياري تساوي (α) وموجة تيار جيبية زاوية طورها بالنسبة لنفس المبدأ تساوي (β) . وعليه فإن معادلات الموجتين هي :

$$e=E_{max}.\sin(\omega t+\alpha)$$
$$i=I_{max}.\sin(\omega t+\beta)$$

i وe− القيمة اللحظية للتيار وللتوتر .

E_{max} وI_{max}− القيمة العظمى للتوتر ثم للتيار .

وفرق الطور بين التيار والتوتر يساوي :

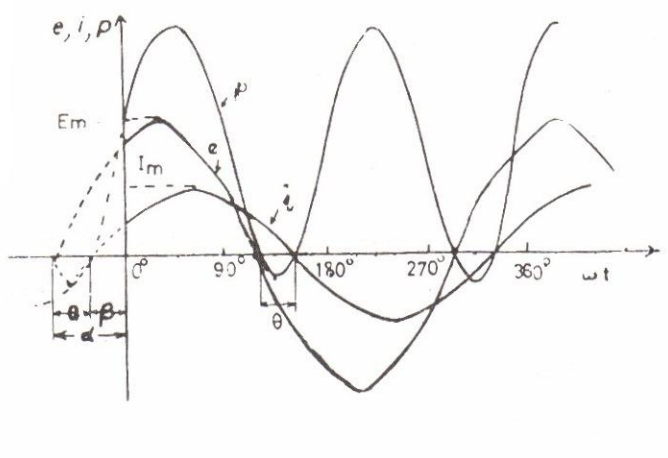
$$\alpha-\beta=Q$$

وإذا وصلت موجة التيار ذروتها قبل موجة التوتر يقال بأن التيار سابق أو متقدم وإذا تأخرت موجة التيار عن موجة التوتر يقال بأن التيار لاحق أو متأخر .

الاستطاعة الآنية P هي جداء القيمة اللحظية للتيار والتوتر أي أن :

$$P=e.i$$

ومن الشكل (5-3) يتبين أنه بالرغم من كون التيار والتوتر متناوبين تكون الاستطاعة موجبة على الغالب ، مما يدل على إمكانية نقل الاستطاعة بالتيار المتناوب .



الشكل (5-3) موجات التيار والتوتر والاستطاعة

إن أهم مزايا التيار المتناوب هي إمكانية استعمال المحولات التي تمكننا من توليد الكهرباء ضمن ظروف فنية واقتصادية مناسبة ، ونقل القدرة بالتوتر الفني والاقتصادي المناسب للنقل ، وتوزيع القدرة

بالتوتر الفني الاقتصادي المناسب للاستعمال .

ويتم الحصول على تيار مستمر من التيار المتناوب عند اللزوم باستعمال دارات التقويم .

مثال (1-5) :

منبع تيار متناوب تردده f=50 Hz قيمته العظمى $I_m=100$ A وقيمته تساوي الصفر عندما t=0 يزداد هذا التيار بالاتجاه الموجب بعد هذه اللحظة مباشرةً والمطلوب ما يلي :

١- كتابة معادلة التيار اللحظية .

٢- حساب قيمته اللحظية عندما $t=\frac{1}{600}\sec$.

٣- حساب زمن وصول التيار لأول مرة إلى القيمة 80 A .

٤- رسم المنحني الجيبي لهذا التيار وتعيين نقطتي التيار عليه في الطلبين الثاني والثالث .

الحل : $i=I_{max}.\sin(\omega t\pm\varphi)$

١) : بما أن $I_m=100$ A , $\varphi=0$

$$\omega=2\pi.f=2\pi\times50=100\,\pi$$

تكون المعادلة اللحظية للتيار :

- الزاوية بالراديان $i=100\sin(100\,\pi t)$ (A)

- الزاوية بالدرجات/ثانية $i=100\sin(18000\,t)$ (A)

٢) عندما $t=\frac{1}{600}\sec$ نكتب :

$$i=100.\sin 100\,\pi.\frac{1}{600}=100.\sin\frac{\pi}{6}=50\text{ A}$$

وعندما نأخذ (ω) بالدرجات نكتب :

$$i=100.\sin\frac{18000}{600}=100.\sin 30=50\text{ A}$$

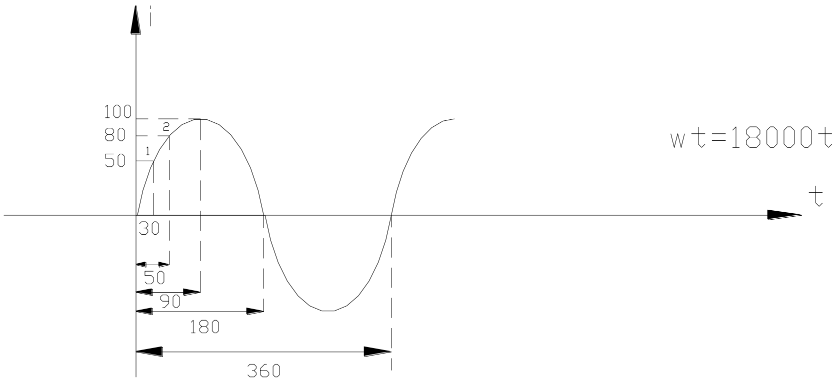
٣) عندما i=80 A وباستخدام صيغة القيمة اللحظية عندما نقيس الزاوية بالدرجات يكون الزمن اللازم :

$$80=100.\sin 18000\,t$$
$$18000\,t=\sin^{-1}0{,}8=53^{\circ}$$

ومنه تكون قيمة t هي :

$$t = \frac{53}{18000} = 0,00295\,\text{sec}$$
$$t = 2,95\,\text{msec}$$

٤) نرسم المنحني الجيبي :



الشكل (5-4)

3-5- القيمة المتوسطة للتيار والتوتر المتناوب :

لكي نأخذ فكرة عن القيمة المتوسطة للتيار الجيبي الموجه نجد القيمة المتوسطة على نصف فترة ، لأن القيمة المتوسطة للتيار على فترة كاملة تساوي إلى الصفر . لأن عدد أنصاف الفترات السالبة يساوي عدد أنصاف الفترات الموجبة .

فمثلاً إذا كانت القيمة اللحظية للتيار والتوتر المتناوب هي :

$$i = I_{max}.\sin \omega t$$
$$v = V_{max}.\sin \omega t$$

فإن القيمة المتوسطة للتيار تعطى خلال نصف الفترة أي نصف الدور من العلاقة التالية :

$$I_{av} = \frac{1}{T/2}.\int_0^{T/2} i.dt = \frac{1}{T/2}.\int_0^{T/2} I_{max}.\sin \omega t.dt$$

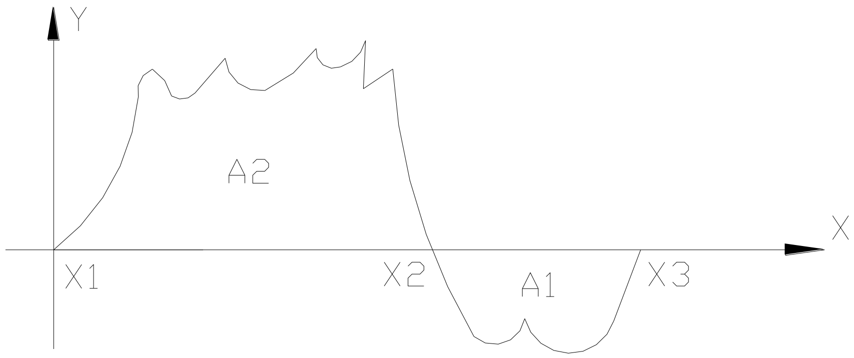
$$I_{av} = \frac{\omega}{\pi}.\int_0^{\omega/\pi} I_{max}.\sin \omega t.dt = \left(\frac{2}{\pi}\right).I_{max} = 0,637.I_{max}$$

وكذلك بالنسبة للتوتر :

$$V_{av}=\frac{1}{T/2}.\int_0^{T/2}v.dt=\frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi}V_{max}.\sin\omega t.d(\omega t)=\frac{V_{max}}{\pi}.\left[-\cos(\omega t)\right]_0^{\pi}$$

$$V_{av}=\frac{2V_{max}}{\pi}=0,637.V_{max}$$

وبشكل عام تعطى القيمة المتوسطة للتابع $Y=f(x)$ المبين بالشكل (5-5) بالعلاقة التالية :

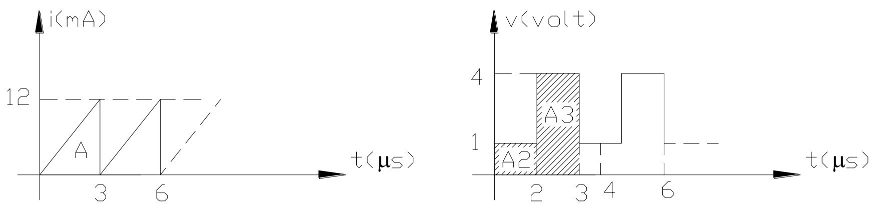


الشكل (5-5)

$$Y_{av}=\frac{\int_{X_1}^{X_3}f(x).dx}{X_3-X_1}=\frac{\int_{X_1}^{X_2}f(x).dx+\int_{X_2}^{X_3}f(x).dx}{X_3-X_1}=\frac{A_2-A_1}{X_3-X_1}$$

أما في التوابع الجيبية فتساوي المساحة A_1 المساحة A_2 ومن ثم تساوي القيمة المتوسطة للتابع الجيبي خلال دور كامل الصفر .

مثال (2-5) :احسب القيمة المتوسطة للتوابع المبينة في الشكل (6-5) .



الشكل (6-5)

الحل :من الشكل (a-6-5) نلاحظ أن التابع دوري ، فيكفي أن نحسب القيمة المتوسطة خلال دور واحد .

مساحة أحد المثلثات A :

$$A=\frac{1}{2}\times 3\times 12=18\ \text{mA.}\mu\text{s}$$

$$i_{av}=\frac{A_2-A_1}{X_3-X_1}=\frac{A}{3}=\frac{18}{3}=6\ \text{mA}$$

من الشكل (b-6-5) بما أن التابع في هذه الحالة دوري أيضاً سنكتفي بحساب القيمة المتوسطة خلال دور واحد من الصفر حتى 3 .

$$v_{av}=\frac{A_2-A_1}{X_3-X_1}=\frac{(A_3+A_2)-0}{X_3}=\frac{A_3+A_2}{X_3}=\frac{1.2+4.1}{3}=\frac{6}{3}=2\ \text{volt}$$

4-5- القيمة الفعالة للتيار المتناوب :

تعرف القيمة الفعالة للتيار المتناوب بأنها قيمة ذلك التيار المستمر الذي يعطي نفس التأثير الحراري الذي يعطيه التيار المتناوب إذا مرّ في مقاومة معينة لنفس الزمن .

نعتبر مقاومة R سلط بين طرفيها توتر متناوب معادلته $v=V_{max}.\sin \omega t$ فالتيار المار في المقاومة له المعادلة التالية $i=I_{max}.\sin \omega t$ وحسب قانون أوم $i=\frac{v}{R}$ فالاستطاعة المصروفة في الدارة هي :

$$P=v.i=(R.i).i=i^2.R$$

P- الاستطاعة اللحظية بالـ (w) .

v- التوتر اللحظي بالـ (V) .

i- التيار اللحظي بالـ (A) .

وهذه الاستطاعة تصرف بالمقاومة على شكل حرارة .

والقدرة المبددة في المقاومة R نتيجة مرور التيار المتناوب في فترة زمنية متناهية في الصغر dt هي :

$$dw_1=P.dt$$

وخلال فترة كاملة T :

$$W_1=\int_0^T dw=\int_0^T P.dt=\int_0^T i^2.R.dt \qquad (1)$$

ولكن القدرة المبددة في المقاومة R عند تطبيق توتر مستمر هي :

$$W_1=P.T=I^2.R.T \qquad (2)$$

وبمساواة العلاقتين (1) و(2) نحصل على :

$$I^2.R.T=\int_0^T i^2.R.dt=R\int_0^T I_m^2.\sin^2 wt.dt$$

تكون I_{eff} هي القيمة الفعالة للتيار المتناوب $i=I_m.\sin wt$ عندما يتحقق $w_1=w_2$ أي أن :

$$R.I_{eff}^2.T=R\int_0^T I_m^2.\sin^2 wt.dt$$

$$I_{eff}=\sqrt{\frac{I_m^2.\int_0^T.\sin^2 wt.dt}{T}}=\sqrt{\frac{I_m^2.\int_0^T(1-\cos 2wt).dt}{2T}}$$

$$I_{eff}=\sqrt{\frac{I_m^2.\left[t-\frac{1}{2}.\sin 2wt\right]_0^T}{2T}}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

ومنه يمكن القول أن القيمة الفعالة للتيار المتناوب تساوي الجذر التربيعي لمتوسط مربع قيمته .
وبشكل عام يمكن أن نقول إن القيمة الفعالة لتابع $Y=f(t)$ تساوي الجذر التربيعي لمتوسط قيمته المربعة أي :

$$Y_{eff}=\sqrt{\frac{\int_0^T Y^2.dt}{T}}$$

5-5- الاستطاعة المتوسطة :

من تعريف القيمة المتوسطة P يتضح أن الاستطاعة المتوسطة P هي :

$$P=\frac{1}{T}.\int_0^T \rho.dt$$

ρ – هي الاستطاعة اللحظية .

وفي حالة المقاومة R :

$$\rho=v.i=V_{max}.\sin wt.I_{max}.\sin wt \Rightarrow$$

$$P=\frac{1}{T}.\int_0^T V_m.I_m.\sin^2 wt.dt=\frac{1}{2}V_m.I_m=\frac{V_m}{\sqrt{2}}.\frac{I_m}{\sqrt{2}}=V.I$$

أي أن الاستطاعة المتوسطة في مقاومة R تساوي حاصل ضرب القيمة الفعالة للتوتر في القيمة الفعالة للتيار ومنه فإن :

$$P = V.I = I^2.R = \frac{V^2}{R}$$

5-6- عامل الذروة (C.F) وعامل الشكل (F.F) :

5-6-1- عامل الذروة :

وهو النسبة بين قيمة الذروة للموجة والقيمة الفعالة لها أي أن :

$$C.F = \frac{I_{max}}{I_{eff}} = \frac{\text{القيمة العظمى}}{\text{القيمة الفعالة}} = \frac{I_{max}}{0{,}707 I_{max}} = 1{,}44$$

5-6-2- عامل الشكل (F.F) :

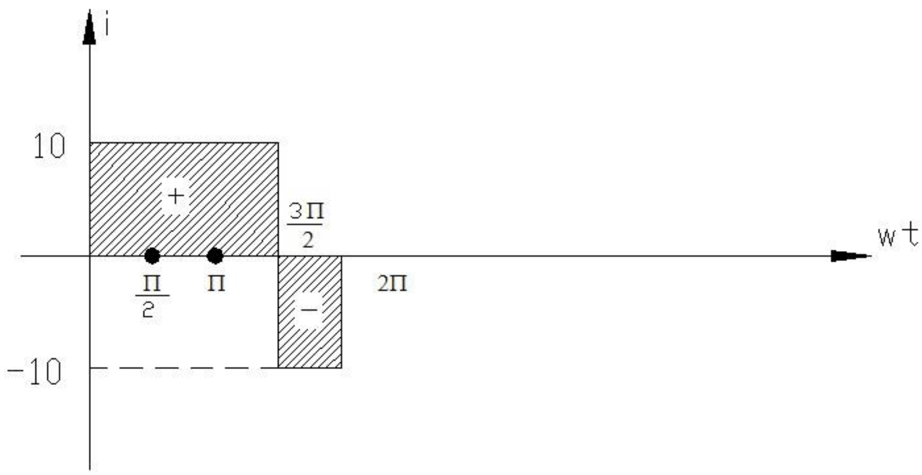
يعرف عامل الشكل بأنه النسبة بين القيمة الفعالة للموجة والقيمة المتوسطة لها ، فبالنسبة للموجة الجيبية :

$$F.F = \frac{\text{القيمة الفعالة}}{\text{القيمة المتوسطة}} = \frac{I_m/\sqrt{2}}{2I_m/\pi}$$

$$= \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2I_{max}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

مثال (5-5) :

لموجة التيار المبينة أدناه بالشكل (5-9) أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعالة وعامل الشكل .



الشكل (5-9)

الحل :

$$I_{av}=\frac{10\times 3\pi/2-10\left(2\pi-3\pi/2\right)}{2\pi}$$
$$=\frac{15\pi-5\pi}{2\pi}=\frac{10\pi}{2\pi}=5\,\mathrm{A}$$

$$I_{eff}=\sqrt{\frac{(10)^2\times\frac{3\pi}{2}+(-10)^2\times\frac{\pi}{2}}{2\pi}}$$
$$=\sqrt{\frac{300\times\frac{\pi}{2}+100\times\frac{\pi}{2}}{2\pi}}=\sqrt{\frac{400}{4}}=10\,\mathrm{A}$$

عامل الشكل :

$$F.F=\frac{\text{القيمة الفعالة}}{\text{القيمة المتوسطة}}=\frac{10}{5}=2$$

5-7- دارات التيار المتناوب :

5-7-1- الدارات تحتوي على مقاومة صرفة R :

نفرض أن القيمة اللحظية للتوتر المتناوب المسلط على مقاومة R المبينة بالشكل (5-12-a) هي :

$v=v_{max}.\sin wt$

عندها يكون التيار اللحظي هو :

$$i=\frac{V}{R}=\frac{V_{max}.\sin wt}{R}=I_{max}.\sin wt$$

وبذلك يكون التيار في نفس اتجاه الجهد كما هو مبين بالمخطط الشعاعي للدارة بالشكل (5-12-b) في مثل هذه الشروط نقول إن التيار متفق بالطور مع التوتر .

أما الاستطاعة الآنية المصروفة في هذه الدارة فتساوي حاصل ضرب القيمة اللحظية للتوتر بالقيمة اللحظية للتيار أي أن :

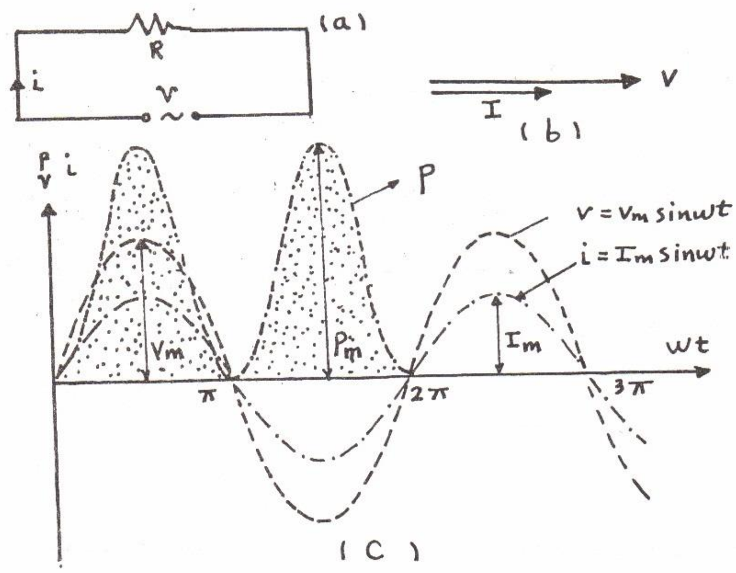
$$P=V.i=V_m\cdot I_m\cdot\sin^2 wt=\frac{V_m\cdot I_m}{2}-\frac{V_m\cdot I_m}{2}.\cos 2wt$$

ونلاحظ أن الاستطاعة P تتكون من جزء ثابت هو $\frac{V_m\cdot I_m}{2}$ ومن جزء متغير تردده يساوي ضعف تردد المنبع هو $\frac{V_m\cdot I_m}{2}.\cos 2wt$ وتكون الاستطاعة المصروفة في الدارة تساوي القيمة المتوسطة للاستطاعة اللحظية P وتساوي إلى الجزء الثابت ، وذلك لأن القيمة المتوسطة للجزء المتغير تساوي الصفر لأنه تابع جيبي لذا نكتب :

$$P_{av} = \frac{V_m \cdot I_m}{2} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \times \frac{I_m}{\sqrt{2}} = U_{eff} \cdot I_{eff}$$

أي أن الاستطاعة المصروفة في مقاومة صافية تعطى بحاصل جداء القيمتين الفعالتين للتوتر والتيار .

والشكل (c-12-5) يبين تغيرات موجات الجهد والتيار والاستطاعة في دارة تحتوي على مقاومة صافية بالنسبة للزمن . مع ملاحظة أن الاستطاعة P هي دائماً موجبة وهذا يعني أن الاستطاعة تتوجه بشكل دائم من المنبع .



الشكل (12-5)

2-7-5- الدارة تحتوي على وشيعة مهملة المقاومة :

بفرض أنه لدينا وشيعة (ملف) مهملة المقاومة ذات عامل تحريض ذاتي L وكانت هذه الوشيعة موصولة بمنبع تيار متناوب قيمته اللحظية هي $i=I_{max}.\sin wt$ كما في الشكل (a-13-5) . فإذا ازداد التيار بمقدار di في زمن قدره ∂t فإن القوة الدافعة الكهربائية المنتجة في الوشيعة ستعاكس الجهد المسلط أي أن :

$$v = -e = -\left(-L.\frac{di}{\partial t}\right) = L.\frac{di}{\partial t}$$

$$v = L.\frac{d}{\partial t}\left(I_{max}.\sin wt\right) = I_m.wL.\cos wt$$

$$v = I_m.XL.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) = V_{max}.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$

نلاحظ أن موجة التيار تتأخر عن موجة التوتر بزاوية قدرها $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أما القيمة XL فتسمى مفاعلة الوشيعة وواحدتها الأوم وتساوي :

$$XL=Wl=2\pi f.L$$

f– التردد بالهرتز .

L– عامل التحريض الذاتي بالهنري .

والمخطط الشعاعي بحالة وشيعة مهملة المقاومة موضح على الشكل (b-13-5) والشكل (c-13-5) يبين تغيرات موجات الجهد والتيار والاستطاعة في دارة تحوي على وشيعة صرفة بالنسبة للزمن . ونلاحظ أن التيار يأخذ قيمة أعظمية موجبة وسالبة عندما يكون V=0 ويأخذ قيمة صفرية عندما يكون $V=\pm V_{max}$ وفي هذه الحالة التيار يعاكس التوتر ويتأخر عنه بزاوية 90° .

فإذا كانت معادلة التوتر $V=V_m.\sin wt$ فإن معادلة التيار :

$$i = I_{max}.\sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

الاستطاعة الآنية P في الوشيعة تساوي :

$$P = V.i = V_{max}.\sin wt.\, I_{max}.\sin\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P=V_{max}.\sin wt\ (-I_{max}\ .\cos wt)$$

$$P = -\frac{1}{2}.V_{max}.I_{max}.\sin 2wt$$

والاستطاعة المصروفة في الدارة P تساوي القيمة المتوسطة للاستطاعة :

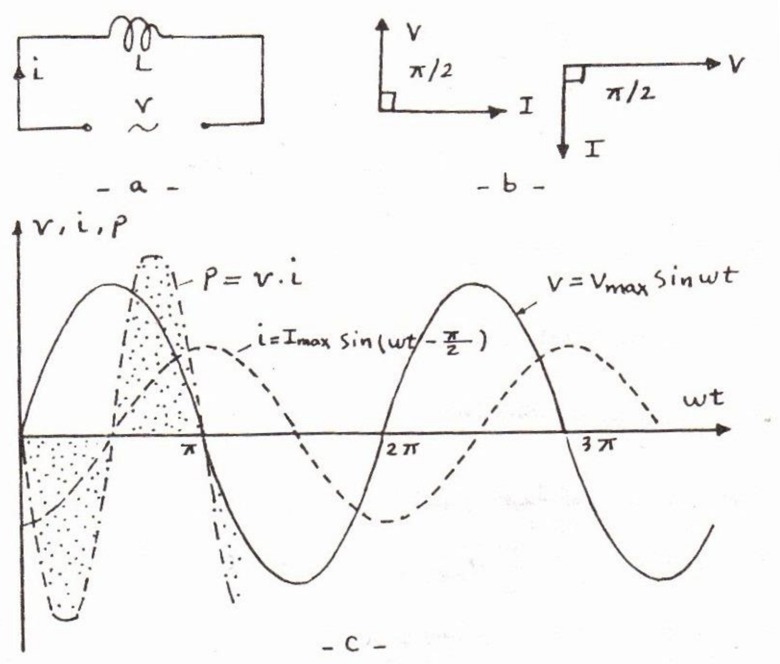
$$P=P_{av}=0$$

أي أن الاستطاعة تمثل بتابع دوري يساوي تردده ضعف تردد المنبع . بالتالي فإن الاستطاعة المتوسطة المصروفة في هذه الدارة تساوي الصفر . أي أن الوشيعة المهملة المقاومة لا تستهلك أي استطاعة فعالة . أما الاستطاعة التي تأخذها الوشيعة من المنبع خلال ربع الدور الأول فسوف تختزن في الوشيعة على شكل قدرة كهر ومغناطيسية تعود لتعطيها خلال الربع الثاني من الدور إلى المنبع ويمكن حساب هذه القدرة المختزنة :

$$w = \int_{T/4}^{T/2} P.dt = \int_{\pi/2w}^{\pi/w} -\frac{1}{2}.V_{max}.I_{max}.\sin 2wt.dt$$

$$= \left[\frac{V_m.I_m}{2.2w}.\cos 2wt\right]_{\pi/2w}^{\pi/w} = \frac{V_m.I_m}{2w}$$

بما أن $V_m=I_mXL$ فإن الاستطاعة :
$$P = \frac{1}{2}.L.I_{max}^2$$



الشكل (13-5)

3-7-5- الدارة تحتوي على مكثف فقط :

لنفرض أن لدينا دارة تحوي على مكثفة سعتها (c) فاراد كما في الشكل (14-5) فإذا كان التوتر المطبق على هذا المكثف هو $V=V_{max}.\sin wt$ فإن الشحنة q في المكثف C تساوي :

$$Q=V.C=C.V_{max}.\sin wt$$

التيار اللحظي المار في المكثف :

$$i = C.\frac{d\left(V_{max}.\sin wt\right)}{\partial t}$$

$$i = C.w.V_m.\cos wt = C.w.V_m.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i = \frac{V_m}{1/c.w}.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V_{max}}{X_c}.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= I_{max}.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$

نرمز للمفاعلة السعوية بالرمز X_c والتي تساوي :

$$X_c = \frac{1}{w.c} = \frac{1}{2\pi f.c} \quad (\Omega)$$

c– سعة المكثف وتقاس بالفاراد .

f- تردد المنبع ويقاس بالهرتز .

ومن معادلة التيار نلاحظ أن التيار في المكثفة يتقدم عن التوتر بزاوية مقدارها $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. أما الاستطاعة المبددة في المكثف P فتساوي :

$$P = V.i = V_m.I_m.\sin wt.\sin\left(wt + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= V_m.I_m.\sin wt.\cos wt = \frac{V_m.I_m}{2}.\sin 2wt$$

وهي معادلة تابع دوري تردده يساوي ضعف تردد المنبع ، وبالتالي فإن الاستطاعة المبددة في الدارة P تساوي متوسط الاستطاعة المعطاة والتي تساوي الصفر :

$$P=P_{av}=0$$

أي أن المكثف لا يستهلك أي استطاعة فعالة ، وأن الاستطاعة التي يأخذها المكثف خلال ربع الدور الأول والتي تخزن في المكثف على شكل قدرة كهربائية من المنبع ليعود ليعطيها خلال الربع الثاني .

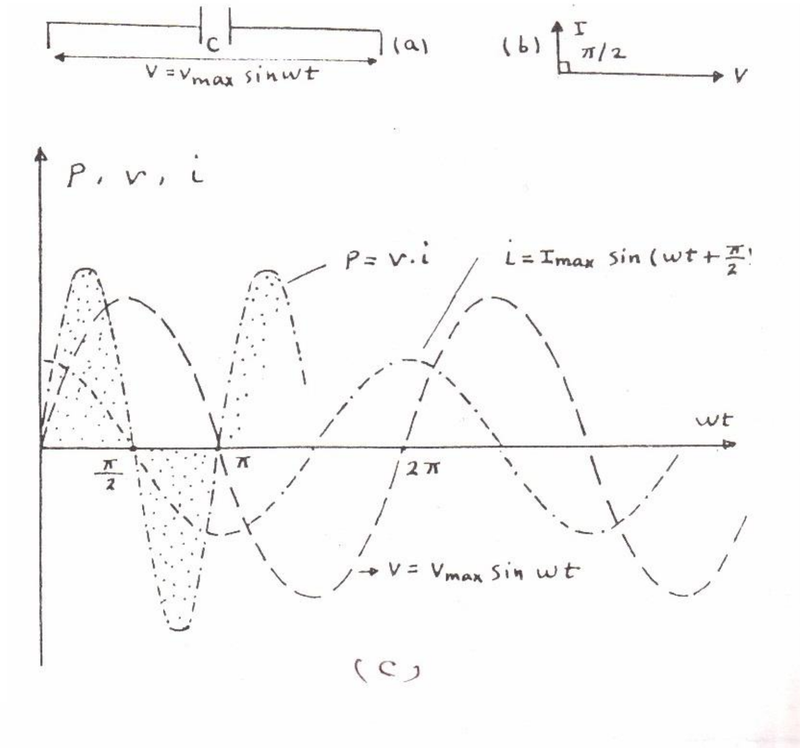
ويمكن حساب القدرة المختزنة في المكثف w كما يلي :

$$w = \int_0^{T/4} P.dt = \frac{1}{2}\cdot V_{max}\cdot I_{max}\cdot\int_0^{\pi/2w}\sin 2wt.dt$$
$$w = \frac{1}{2}\cdot V_m\cdot I_m\cdot\left[\frac{-\cos 2wt}{2w}\right]_0^{\pi/2w} = \frac{V_m\cdot I_m}{2w}$$

علماً أن : $$I_m = \frac{V_m}{X_c} = V_m.wc$$

ومنه :
$$w = \frac{V_m \cdot V_m}{2w}.wc = \frac{1}{2}.V_m^2.c$$

والشكل (b-14-5) يبين المخطط الشعاعي لحالة مكثف مثالية . أما الشكل (c-14-5) فيبين تغيرات موجات الجهد والتيار والاستطاعة في دارة تحوي مكثفة مثالية صرفة بالنسبة للزمن .



الشكل (14-5)

5-7-4- الدارة تحوي مقاومة وملفاً على التسلسل :

نفرض أنه لدينا دارة كهربائية مؤلفة من مقاومة R موصولة على التسلسل بملف عامل تحريضه الذاتي L(H) كما في الشكل (a-15-5) . عندما نطبق على هذه الدارة منبع توتر متناوب سوف يمر في الدارة تيار معادلته اللحظية $i=I_{max}.\sin wt$ ويؤدي هذا التيار إلى هبوط جهد المقاومة R قيمته تساوي $V_R=R.I_m.\sin wt$ وإلى تحريض قوة دافعة كهربائية في الوشيعة $eL = -VL = -L.\frac{di}{\partial t}$ علماً أن مجموع هبوط التوتر على المقاومة V_R وعلى الملف V_L يساوي مجموع هبوط التوتر الكلي .

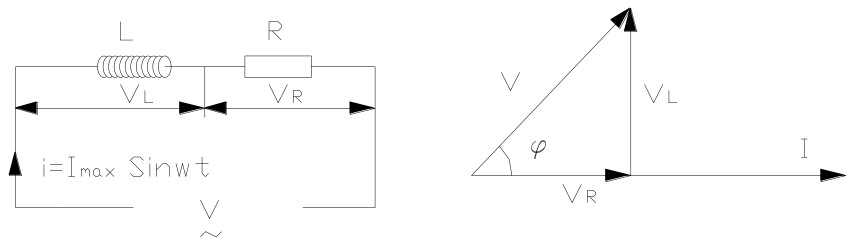
وكما مر معنا سابقاً ينطبق التوتر V_R على التيار ، أما التوتر في الوشيعة فيسبق التيار بزاوية مقدارها 90° كما في الشكل (b-15-5) ومنه نكتب :

$$V^2 = V_R^2 + V_L^2 = I^2 \cdot R^2 + X_L^2 \cdot I^2$$

$$V=\sqrt{R^2+X_L^2}\,.I=Z.I\ \Rightarrow I=\frac{V}{Z}$$

نسمي الحد $Z=\sqrt{R^2+X_L^2}$ بمفاعلة الوشيعة وتقاس بالأوم .

ومن الشكل (b-15-5) نلاحظ أيضاً أن زاوية فرق الطور بين V و I هي φ علماً أن I متأخر ومنه نكتب :



(a) **(b) المخطط الشعاعي**

الشكل (15-5)

$$\cos\varphi=\frac{V_R}{V}=\frac{I_R}{I_Z}=\frac{R}{Z}$$

$$\sin\varphi=\frac{V_L}{V}=\frac{X_L}{Z}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{V_L}{V_R}=\tan^{-1}\frac{X_L}{R}$$

$$\varphi=\cos^{-1}\frac{V_R}{V}=\cos^{-1}\frac{R}{Z}$$

وتسمى الزاوية بين التوتر والتيار في الدارة بزاوية الطور أو بفرق الطور . كما نسمي cos φ بعامل استطاعة الدارة .

من الشكل (a-15-5) نجد أن التوتر الكلي المطلق على الدارة هو V ويساوي :

$$V=V_R+V_L=R.I_m.\sin wt+L.\frac{d}{dt}\left(I_m.\sin wt\right)$$

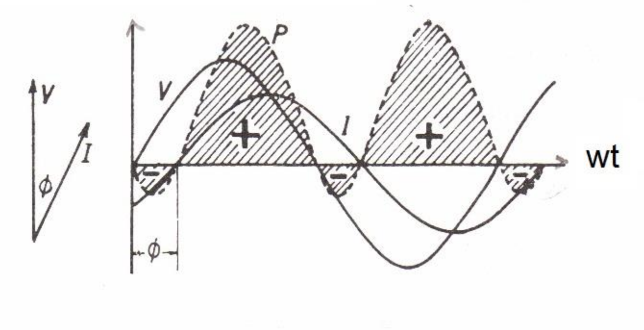
$$V = I_m.R.\sin wt + I_m.X_L.\cos wt$$
$$= I_{max}\left(R.\sin wt + X_L.\cos wt\right)$$
$$= \frac{Z.I_m}{Z}\left(R.\sin wt + X_L.\cos wt\right)$$
$$V = Z.I_{max}\left(\frac{R}{Z}.\sin wt + \frac{X_L}{Z}.\cos wt\right)$$
$$= Z.I_m\left(\cos\varphi.\sin wt + \sin\varphi.\cos wt\right)$$
$$V = Z.I_{max}.\sin\left(wt+\varphi\right) = V_{max}.\sin\left(wt+\varphi\right)$$

أي أن :
$$V = V_{max}.\sin\left(wt+\varphi\right)$$

ومن المعادلة الأخيرة يمكن استنتاج أن التوتر في دارة تحتوي على مقاومة ووشيعة يتقدم على التيار بزاوية قدرها φ حيث $\varphi = \arccos\frac{R}{Z}$.

أو بكلمة أخرى يمكن القول إن التيار في دارة تحوي على مقاومة ووشيعة يتأخر عن التوتر بزاوية قدرها φ.

فإذا كان التوتر المطبق هو $V=V_{max}.\sin wt$ يكون التيار المار هو $i=I_m.\sin(wt-\varphi)$ ، والشكل (16-5) يبين تغيرات موجات التوتر والتيار والاستطاعة في دارة تحوي على مقاومة ووشيعة موصولين على التسلسل بالنسبة للزمن .



الشكل (16-5)

لنحسب قيمة الاستطاعة في مثل هذه الدارة :

إذا أخذنا $V=V_{max}.\sin wt$ و $i=I_m.\sin(wt-\varphi)$ عندها فإن الاستطاعة اللحظية تكون :

$$P=V.i=V_{max}.\sin wt.I_{max}.\sin(wt-\varphi)$$
$$=V_m.I_m.\sin wt.\sin(wt-\varphi)$$

$$= \frac{V_m \cdot I_m}{2}.\left[\cos\varphi - \cos(2wt - \varphi)\right]$$

وتكون الاستطاعة P المبددة في الدارة هي القيمة المتوسطة للاستطاعة اللحظية أي :

$$P_{av} = \frac{V_m \cdot I_m}{2}.\cos\varphi$$

لأن القيمة المتوسطة للجزء الثاني $-\frac{V_m \cdot I_m}{2}.\cos(2wt - \varphi)$ تساوي الصفر لأنه تابع جيبي .

ومن ثم فالاستطاعة المبددة في دارة تحتوي على مقاومة ووشيعة صرفة يمكن حسابها من المعادلة :

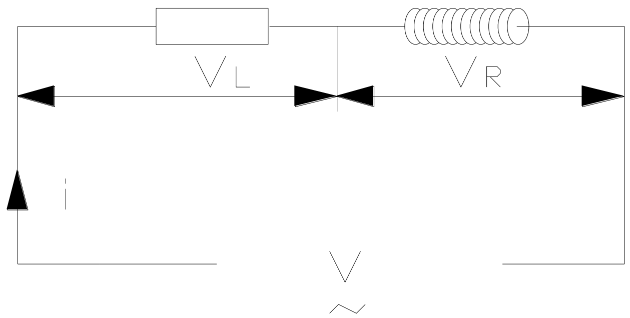
$$P = \frac{V_m}{\sqrt{2}}.\frac{I_m}{\sqrt{2}}.\cos\varphi = V_{eff}.I_{eff}.\cos\varphi$$

مثال (5-8) :

في الدارة المبينة بالشكل (5-17) :

f=60 Hz . V=230 v , L=0,1 H , R=20Ω

احسب القيم التالية : $i(t)$, V_L , V_R , I , $V_L(t)$, $V_R(t)$, $V(t)$



الشكل (5-17)

الحل :

X_L=w.L=2π.f.L=2π(60).0,1=37,7 Ω

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{(20)^2 + (37{,}7)^2} = 42{,}6\,\Omega$$

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{230}{42{,}6} = 5{,}4\,A$$

من مثلث الممانعات يكون :

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{X_L}{R} = \tan^{-1}\frac{37,7}{20} = 62,1^{\circ}$$

$V_R = I.R = 5,4 \times 20 = 108\ v$

وهو متفق بالطور مع (I) .

$V_L = 5,4 \times 37,7 = 204\ v$

وهو يتقدم على التيار بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{2}$ راديان .

إذا اعتبرنا التيار مرجعاً يمكن أن نكتب :

$$i = I_m.\sin wt = I_m.\sin 2\pi f.t$$
$$= \sqrt{2} \times 5,4.\sin(6,28 \times 60)t = \sqrt{2} \times 5,4.\sin 377t\ A$$
$$V = V_m.\sin(wt + \varphi)$$
$$= \sqrt{2} \times 230.\sin(377t + 62,1)\ v$$
$$V_R = \sqrt{2} \times 108.\sin 377t\ \ v$$
$$V_l = \sqrt{2} \times 204.\sin\left(377t + \frac{\pi}{2}\right)\ v$$

5-7-5- الدارة تحتوي على مقاومة ومكثف على التسلسل :

إذا كان لدينا دارة تحوي مقاومة R ومكثفاً C على التسلسل كما في الشكل (a-18-5) فإذا طبقنا على الدارة توتر v فإن :

هبوط التوتر على المقاومة هو :

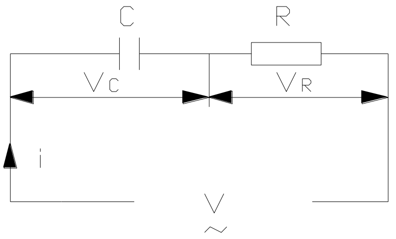
$V_R = I.R$

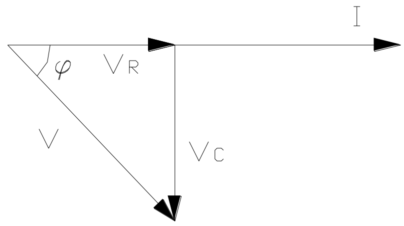
V_R متفق بالطور مع التيار المار.

وهبوط التوتر على المكثف V_c :

$Vc = I.X_c$

V_c متأخر عن التيار بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$.





ومن المخطط الشعاعي لهبوط التوتر شكل (b-18-5) نكتب :

$$V = \sqrt{V_R^2 + V_C^2} = I.\sqrt{R^2 + X_C^2} = I.Z$$

علماً أن $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ وهي ممانعة الدارة .

ومن الشكل (b-18-5) نلاحظ أيضاً أن زاوية فرق الطور بين V و I هي φ حيث التوتر V متأخر ومنه :

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{V_C}{V_R} = \tan^{-1}\frac{X_C}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{V_R}{V} = \frac{I.R}{I.Z} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\frac{R}{Z}$$

$$\sin\varphi = \frac{V_C}{V} = \frac{I.X_C}{I.Z} = \frac{X_C}{Z} \Rightarrow \varphi = \sin^{-1}\frac{X_C}{Z}$$

أما التوتر اللحظي الكلي V= التوتر اللحظي V_R+ التوتر اللحظي V_C

$$V = V_R + V_C = i.R + \frac{q}{C} = R.I_m.\sin wt + \frac{1}{C}.\int i.dt$$

$$= R.I_m.\sin wt + \frac{1}{C}.\int_0^T I_m.\sin wt.dt$$

$$= R.I_m.\sin wt - \frac{1}{wc}.I_m.\cos wt$$

$$= I_m(R.\sin wt - X_C.\cos wt)$$

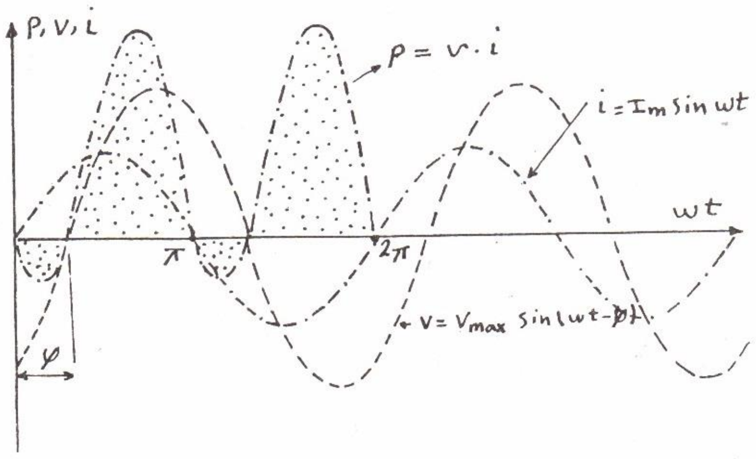
$$= I_m.Z\left(\frac{R}{Z}.\sin wt - \frac{X_C}{Z}.\cos wt\right)$$

$$= I_m.Z(\cos\varphi.\sin wt - \sin\varphi.\cos wt)$$

ومن المخطط الشعاعي الشكل (b-18-5) :

$$V = V_{max}.\sin(wt - \varphi)$$

ومن المعادلة الأخيرة نجد أن التوتر يتأخر عن التيار I بزاوية φ علماً أن $\varphi = \cos^{-1}\frac{R}{Z}$ أو بكلمة أخرى يمكن القول بأن التيار في دارة تحتوي على مقاومة ومكثف على التسلسل يتقدم على التوتر بزاوية قدرها φ . وإذا كان التوتر المطبق هو $V=V_{max}.\sin wt$ يكون التيار المار في الدارة $i=I_{max}.\sin(wt+\varphi)$.



الشكل (19-5)

والشكل (19-5) يبين تغيرات موجات التوتر والتيار والاستطاعة في دارة تحتوي على مقاومة ومكثفة موصولين على التسلسل بالنسبة للزمن .

لنحسب قيمة الاستطاعة في مثل هذه الدارات :

إذا فرضنا أن الجهد المطبق من الشكل $V=V_{max}.\sin(wt-\varphi)$ فإن القيمة اللحظية للتيار المار في الدارة هي $i=I_m.\sin wt$ وعليه تكون الاستطاعة اللحظية:

$$P=V.i= I_{max}.\sin wt.V_{max}.\sin(wt-\varphi)$$

$$= \frac{V_m \cdot I_m}{2}.\left[\cos\varphi - \cos(2wt - \varphi)\right]$$

وتكون الاستطاعة المبددة بالدارة هي القيمة المتوسطة للاستطاعة اللحظية أي :

$$P = P_{av} = \frac{V_m \cdot I_m}{2}.\cos\varphi$$

لأن القيمة المتوسطة للجزء الثاني $\frac{V_m \cdot I_m}{2}.\cos(2wt-\varphi)$ – تساوي الصفر لأنه تابع جيبي .

ومن ثم تحتوي الاستطاعة المبددة في دارة على مقاومة ومكثف ويمكن حساب هذه المقاومة من المعادلة :

$$P = \frac{V_m}{\sqrt{2}} . \frac{I_m}{\sqrt{2}} . \cos\varphi = V_{eff} . I_{eff} . \cos\varphi$$

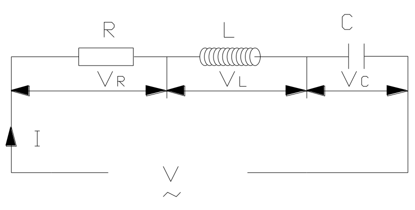
5-7-6- دارة تحتوي على مقاومة وملف ومكثف على التسلسل :

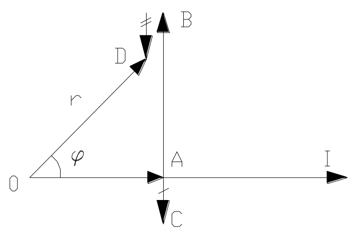
الشكل (5-20) يبين دارة التسلسل العامة التي تحتوي على مقاومة R ووشيعة صرفة معامل تحريضها الذاتي L(H) ومكثف صرف C(F) على التسلسل . فعند تطبيق توتر V على الدارة التسلسلية سوف يمر في الدارة تيار قيمته I ونتيجة مرور التيار I في الدارة تكون قيم هبوطات التوتر على عناصر الدارة هما :

$$V_R = I.R$$
$$V_L = I.X_L = I.w.L$$
$$V_C = I.X_C = I.\frac{1}{wc}$$

التوتر V_R يكون في طور واحد مع التيار أي V_R منطبق على التيار I ، V_L متقدم بزاوية 90° عن التيار ، V_C فيكون متأخراً بزاوية 90° عن التيار .

ولأجل رسم المخطط الشعاعي (5-20-b) نتبع ما يلي :





(a) **(b)**

V_R= O A , V_L = AB , V_C = AC

الشكل (5-20)

نرسم OI بحيث يمثل التيار ونعتبره المرجع الأساسي في الدارة ثم نمثل هبوط التوترات السابقة

بالأطوال AC , AB , OA بالتتالي تكون محصلة AC , AB هي OD حيث :

$$AD = w.L.I - \frac{I}{wc}$$

وبالتالي يكون الجهد الكلي المسلط على الدارة كما يلي :

$$V = \sqrt{(OA)^2 + (AD)^2} = I.\sqrt{R^2 + (wL - X_C)^2} = I.Z$$

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2}}$$

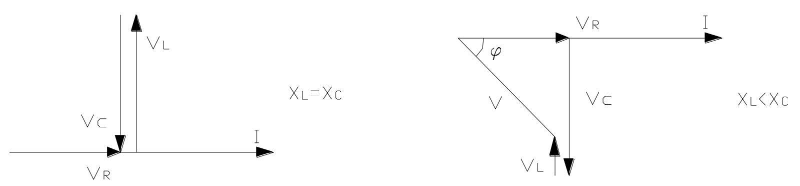
وبالتالي تكون الممانعة الكلية للدارة Z هي :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wc}\right)^2}$$

وتكون المفاعلة الكلية X هي : $X = \left(wL - \frac{1}{wc}\right)$

وبحسب قيم X_L وX_C سنميز ثلاث حالات :

١ً- $X_L>X_C$ هذا يعني أن $V_L>V_C$ والمخطط الشعاعي لهذه الحالة موضح في الشكل (5-20-b) والتيار في هذه الحالة يكون متأخراً عن التوتر وهذا يكافئ الدارة المكونة من مقاومة ووشيعة على التسلسل . في هذه الحالة نقول إن الدارة تحريضية .



الشكل (5-21)

٢ً- عندما يكون $X_L=X_C$ هذا يعني أن $V_L=V_C$ وبالتالي ينطبق التوتر على التيار وتكون Z=R والمخطط الشعاعي لهذه الحالة موضح في الشكل (5-21-a).

٣- $X_L<X_C$ هذا يعني أن $V_L<V_C$ والمخطط الشعاعي في هذه الحالة مبين بالشكل (b-21-5) أي أن المفاعلة السعوية أكبر من المفاعلة التحريضية ، لذا ستكون المحصلة مفاعلة سعوية ويكون التيار متقدماً على التوتر بزاوية φ . والدارة في هذه الخالة تكافئ الدارة المؤلفة من سعة ومقاومة على التسلسل.

مثال (5-9) :

مقاومة $R=1\ \Omega$ ومفاعلة عامل تحريضها الذاتي $L=0,00955\ H$ والمطلوب :

١- حساب السعة الواجب ربطها معهم بالتسلسل بحيث يصبح التيار في الدارة مضاعفاً .

٢- حساب مكافئ (R , L) أو (C , R) إذا علم أن تردد منبع التغذية 50 Hz .

الحل :

$X_L=w.L=0,00955\times 314=3\ \Omega$

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L)^2}=\sqrt{1^2+3^2}=3,1623\,\Omega$$

ولكي يكون التيار مضاعفاً يجب أن تكون الممانعة الكلية مساوية النصف أي أن :

$$R^2+X^2=\left(\frac{Z}{2}\right)^2=(1,5812)^2=2,5$$

$1+X^2=2,5\ \Rightarrow\ X=\pm 1,2248$

$X=X_L-X_C\ \Rightarrow X_C=X_L-X=3\pm 1,2248$

$X_C=1,7752$ or $4,2248$

وبذلك فإن السعة الضرورية هي :

$$C=\frac{1}{w.X_C}=\frac{1}{314\times 1,7752}=1,794\times 10^{-3}\ \text{Farad}$$

أو أن السعة :

$$C=\frac{1}{4,2248\times 314}=0,754\times 10^{-5}$$

وعندما تكون $X_C=1,7752$ فإن :

$X=3-1,7752=1,2278\ \Omega$

وتكون الدارة المكافئة لـ L و R هي :

$$L=\frac{1,2248}{314}=0,0039\ \text{H}$$

وعندما تكون $X_C=4,2248$ فإن :

$X=3-4,2248=-1,2248\ \Omega$

وتكون الدارة المكافئة هي دارة C و R علماً أن :

$$C = \frac{1}{1,2248 \times 314} = 2,6 \times 10^{-3}\,\mathrm{F}$$

5-7-7- ظواهر الطنين الكهربائي في دارات التيار المتناوب الأحادي الطور :

تغذي محطات التوليد الكهربائية المستهلكين بشكل عام بالاستطاعة الفعلية اللازمة لاستخداماتها المختلفة وبالاستطاعة الرد فعلية اللازمة لتغطية تغيرات القدرة الكهربائية المخزونة في الحقل الكهربائي والمغناطيسي للشبكات الكهربائية المختلفة التي تربط المولد مع المستهلك .

وفي حالات خاصة قد تكون القدرة التي تختزن في أحد الحقول مساوية للقدرة التي تنقص في نفس الوقت في أحد الحقول أي أن الحقلين الكهربائي والمغناطيسي تغطي بنفسها تغيرات القدرة اللازمة . وقيمة الاستطاعة الردية المستدرجة في لحظة ما من محطات التوليد تكون معدومة ، والمولد يعطي شبكة المستهلك استطاعة مقلبة فقط بالرغم من إن الشبكة تحتوي على عناصر ردية من مكثفات وملفات في مثل هذه الحالات الخاصة نقول أن الشبكة الكهربائية قد ظهرت لها حادثة الطنين .

5-7-7-1- الطنين الكهربائي في الدارات التسلسلية :

إذا كان لدينا دارة كهربائية فيها مقاومة وملف ومكثف مربوطة على التسلسل فإن الممانعة الردية لهذه الدارة تعطى بالعلاقة :

$$X = X_L - X_C = wL - \frac{1}{wc}$$

وحسب شرط الطنين الكهربائي في مثل هذه الدارات ينتج لدينا :

$$X = 0 \Rightarrow X_L = X_C \Rightarrow wL - \frac{1}{wc} = 0$$

أي أن شرط الطنين هو أن تساوي الممانعة التحريضية بالقيمة المطلقة الممانعة السعوية للدارة أي أن :

$$wL = \frac{1}{wc} \Rightarrow 2\pi.f_r.L = \frac{1}{2\pi.f_r.C}$$

$$4\pi^2.f_r^2.L.C = 1 \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{1}{L.C}}$$

f_r – تردد الطنين .

تتمتع دارات الطنين التسلسلية ببعض الخواص الهامة وهي :

١- إن التيار الذي يمر في الدارة يساوي :

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

عند الطنين $X_L=X_C$ وبالتالي تكون الممانعة الكلية للدارة (Z=R) والتيار أعظمي أي $I_{max} = \frac{V}{R}$ وقيمة هذا التيار لا تعتمد على (wL) ولا على $\left(\frac{1}{wc}\right)$.

٢- حسب العلاقة المحددة لشرط الطنين :

فإن هبوط التوتر على الوشيعة $V_L=w.L.I$ وهبوط التوتر على المكثف $V_C = \frac{I}{c.w}$ يكونان متساويان ومتعاكسان في الطور ومحصلتهما تساوي الصفر $(V_L+V_C=0)$ كما هو مبين بالشكل (a-21-5) .

٣- إن هبوط التوتر عل المقاومة الأومية يساوي التوتر الكلي V المطبق على الدارة :

$$\vec{V}_R = R.\vec{I} = R.\frac{\vec{V}}{R} = \vec{V}$$

٤- إن هبوطات التوتر على الملف وعلى المكثف تعطى بالعلاقات التالية :

$$V_L = V_C = L.w.I = L.w.\frac{V}{R} = L.\frac{V}{R}.\frac{1}{\sqrt{L.C}}$$

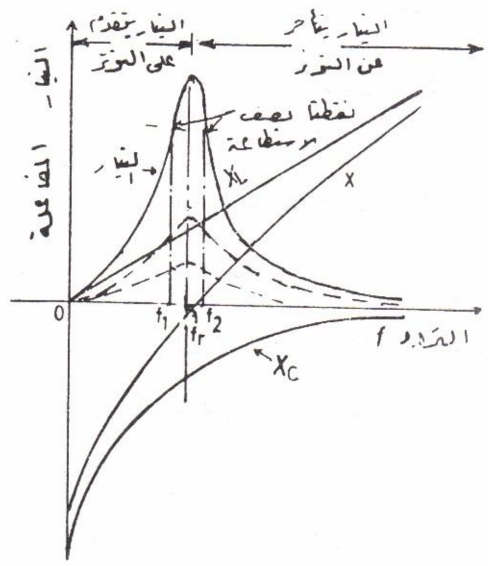
$$V_L = V_C = \frac{V}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}$$

وذلك لأن w عند حدوث الطنين تساوي $w = \frac{1}{\sqrt{L.C}}$.

وبشكل عام يعطى التيار في حالة الطنين الكهربائي بقانون أوم $I = \frac{V}{R}$ ويكون هذا التيار في طور مع الجهد ، ولفهم ما يحصل في الدارة عند حدوث هذه الحالة نتصور أن R=0 وأن هناك جهداً ثابتاً V وأن التردد يتغير من الصفر إلى قيمة عالية جداً ، عند ذلك فإن مفاعلة الوشيعة $X_L=2\pi.f.L$ تمثل بخط مستقيم يمر من نقطة الأصل ، أما المفاعلة السعوية $X_C = \frac{-1}{2\pi.f.C}$ فتمثل قطعاً زائداً في الربع الرابع ، وتكون المفاعلة الكلية $X=X_L+X_C$ ويكون منحني X أيضاً قطعاً زائداً يقطع محور التردد في نقطة f_r شكل (23-5) .

تعتمد حدة الطنين C على مقاومة الدارة وتقل بازديادها . وتعرف حدة الطنين لدارة ما بمدى التردد

بين النقطتين f_1 وf_2 المقابلتين لنصف الاستطاعة ، أي أن الاستطاعة المستهلكة عند كل من هذين الترددين تساوي نصف الاستطاعة العظمى عند تردد الطنين . وبما أن الاستطاعة تتناسب مع مربع التيار ، لذلك إن قيمة التيار عند هاتين النقطتين تساوي ($\frac{1}{\sqrt{2}}\times$القيمة العظمى للتيار عند تردد الطنين) مع بقاء القوة المحركة بالدارة ثابتة .



الشكل (5-23)

في النقطة f_r تكون المفاعلة الكلية للدارة X مساوية الصفر ولأن المفاعلة تساوي الصفر فإن الممانعة الكلية تساوي الصفر . ويكون التيار في هذه النقطة نظرياً مساوياً اللانهاية . أما من أجل ترددات أعلى من Of_r فإن الممانعة تنقلب إلى تحريضية ولذا فإن التيار يتأخر عن التوتر ، كما انه من أجل ترددات أقل من Of_r فإن X_C تكون أكبر من X_L وبالتالي يكون التيار متقدماً .

مثال (5-10) :

دارة تسلسلية مؤلفة من $R=5\ \Omega$ وملف عامل تحريضه الذاتي $L=0,6\ H$ ومكثف سعته $C=10\ \mu F$ تغذى بتوتر متناوب قدره $V=200\ v$ وتردده هو تردد الطنين احسب :

١- مقدار تردد الطنين .

٢- التيار المار في الدارة عند الطنين .

٣- التوتر على كل من الملف والمكثف .

الحل :

١- تردد الطنين :

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,6\times10\times10^{-6}}} = 65\,Hz$$

٢- التيار المار في الدارة عند حدوث الطنين :

$$I = \frac{V}{R} = \frac{200}{5} = 40\,A$$

٣- التوتر عند الطنين :

- على الملف

$$V_L = \frac{V}{R}.2\pi.f_0.L$$
$$= 40\times2\times3{,}14\times65\times0{,}6 = 9801{,}7\,v$$

- التوتر على المكثف :

$$V_C = I.X_C = \frac{V}{R}.\frac{1}{2\pi.f_0 C}$$
$$= \frac{40}{2\pi\times65\times10\times10^{-6}} = 9794\,v$$

5-7-8- الدارة تحتوي على R,L,C موصولة بالتفرع :

عند تطبيق توتر V على الدارة التفرعية المؤلفة من مقاومة $R\ (\Omega)$ وملف $L(H)$ ومكثف $C(F)$ كما هو مبين بالشكل (a-24-5) فإن التيار المار في المقاومة $I_R = \frac{V}{R}$ يكون متفق بالطور مع توتر المنبع V أما التيار المار في الملف $I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{V}{2\pi.f.L}$ فيكون متأخراً عن توتر المنبع بزاوية 90° . والتيار المار في المكثف $I_C = \frac{V}{X_C} = V.2\pi.f.C$ يكون متقدماً عن توتر المنبع بـ 90° . أما التيار الكلي فيعطى بالعلاقة التالية :

$$\vec{I} = \vec{I_A} + \vec{I_L} + \vec{I_C}$$

ونميز في الدارات التفرعية ثلاث حالات :

١- $X_L > X_C$ هذا يعني أن $I_C > I_L$: في هذه الحالة الشكل (b-24-5) يحس التيار الكلي من القانون التالي :

$$|I|=\sqrt{|I_R|^2+\left[|I_C|-|I_L|\right]^2}$$

ومعامل الاستطاعة :

$$\cos\varphi=\frac{I_R}{I}$$

التيار I يتقدم عن التوتر V ، فالدارة سعوية ويمكن التعويض عنها بدارة تسلسلية مكونة من مقاومة قيمتها $\frac{V}{I}.\cos\varphi$ مع مكثف على التسلسل مفاعلته $\frac{V}{I}.\sin\varphi$.

٢- $X_L<X_C$: المخطط الشعاعي في هذه الحالة مبين في الشكل (c-24-5) التيار I متأخر عن التوتر بزاوية φ فالدارة في هذه الحالة تحريضية ويمكن مكافئتها بدارة تسلسلية مكونة من مقاومة تساوي $\frac{V}{I}.\cos\varphi$ ووشيعة مقاعلتها $\frac{V}{I}.\sin\varphi$.

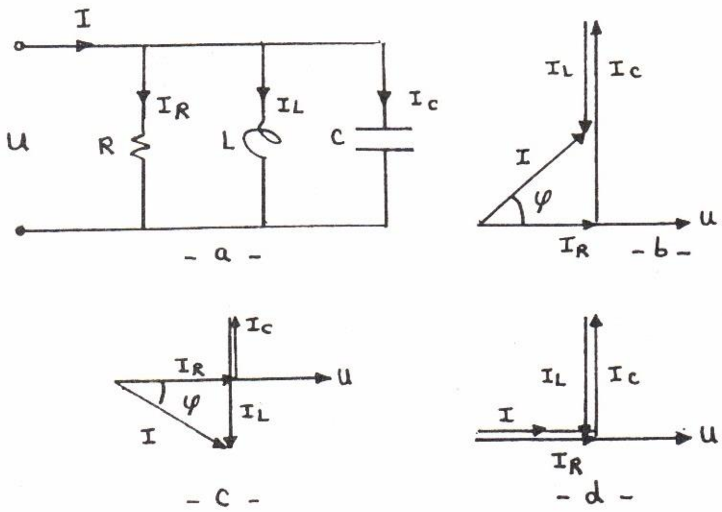
٣- $X_L=X_C$: وبالتالي $I_C=I_L$ ومنه $I=I_R$ و $\cos\varphi=1$ والدارة يمكن مكافئتها بمقاومة تساوي المقاومة الموجودة في الدارة (R) .

والاستطاعة المبددة في الدارة يمكن أن تحسب من العلاقة التالية :

$$P=V.I.\cos\varphi$$

$$P=R.I_R^2$$

والشكل (d-24-5) يبين المخطط الشعاعي لهذه الحالة .



الشكل (24-5)

مثال (11-5) :

في الدارة المبينة في الشكل (25-5) إذا كان $R=10\ \Omega$ ، $X_L=5\ \Omega$ ، $X_C=20\Omega$ والتوتر المطبق على الدارة $U=120\ V$ تردده $f=50\ Hz$ والمطلوب:

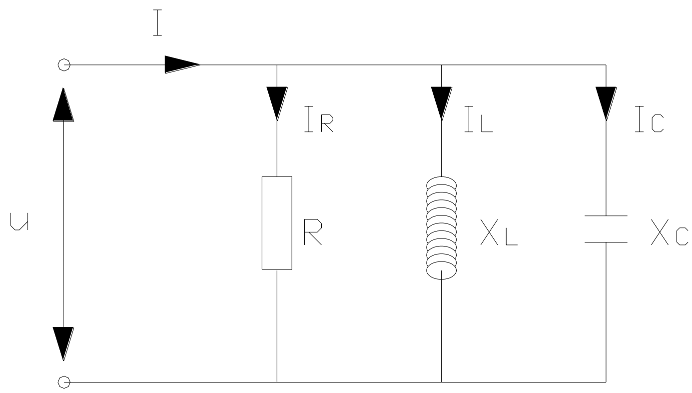
١- حساب تيارات الفروع I_C , I_L , I_R .

٢- رسم المخطط الشعاعي للدارة .

٣- حساب التيار الكلي I .

٤- معامل استطاعة الدارة والاستطاعة المبددة .

٥- إيجاد عناصر الدارة التسلسلية المكافئة .



الشكل (25-5)

الحل :

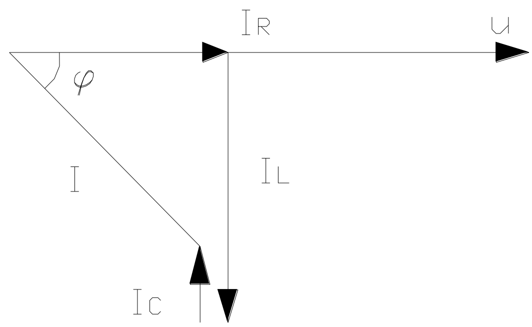
التيارات الفرعية :

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{120}{10} = 12\ A$$

$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{120}{5} = 24\ A$$

$$I_C = \frac{V}{X_C} = \frac{120}{20} = 6\ A$$

٢- المخطط الشعاعي موضح على الشكل (26-5) .



الشكل (5-26)

٣- التيار الكلي I يساوي المجموع الشعاعي للتيارات في الفروع الثلاثة وطويلته تساوي :

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}$$
$$= \sqrt{(12)^2 + (6-24)^2} = 21,63 \text{ A}$$

٤- معامل استطاعة الدارة :

$$\cos\varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{12}{21,63} = 0,55$$

الاستطاعة المبددة في الدارة :

$$P = V.I.\cos\varphi = 120 \times 21,63 \times \frac{12}{21,63} = 1440 \text{ watts}$$

أو :

$$P = R.I_R^2 = 10 \times 12^2 = 1440 \text{ watts}$$

٥- من المخطط الشعاعي نلاحظ أن التيار الكلي I متأخر عن التوتر V فالدارة تحريضية ويمكن مكافئتها بدارة تسلسلية مؤلفة من مقاومة `R تساوي :

$$R` = \frac{V}{I}.\cos\varphi = \frac{120}{21,63} \times 0,55 = 3,05 \ \Omega$$

ووشيعة معامل تحريضها الذاتي L يحسب كما يلي :

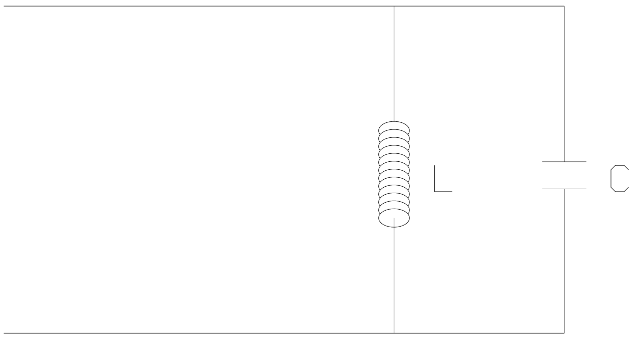
$$X'_L = \frac{U}{I}.\sin\varphi = \frac{U}{I}.\sqrt{1-\cos^2\varphi}$$
$$= \frac{120}{21,63}.\sqrt{1-(0,55)^2} = 4,63 \ \Omega$$

$$X'_L = 2\pi.f.L' = 4,63 \Rightarrow L' = \frac{4,63}{2\pi \times 50} = 0,0147 \text{ H}$$

5-7-9- الطنين في حالة الوصل على التفرع :

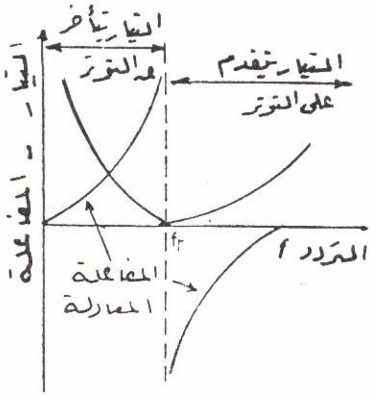
إن الممانعة (Z) للوشيعة والمكثف الموصولين على التفرع كما في الشكل (5-27) هي :

$$Z=\frac{(j\times 2\pi f.L).\left(-\frac{j}{2\pi f.C}\right)}{(j\times 2\pi f.L)+\left(-\frac{j}{2\pi f.C}\right)}=\frac{\frac{L}{C}}{j\left(2\pi f.L-\frac{1}{2\pi f.C}\right)}$$



الشكل (5-27) دارة وشيعة ومكثفة على التفرع

وهي مفاعلة صرفة وتختلف باختلاف التردد حسب الشكل (5-28) والذي يبين أيضاً اختلاف التيار I المغذي للدارة .



الشكل (5-28)

ويحصل الطنين في هذه الدارة أيضاً حين تتساوى المفاعلة التحريضية للوشيعة مع المفاعلة

السعوية للمكثفة ، أي عند قيمة التردد التي تحقق المعادلة :

$$\frac{1}{2\pi.f_r.L} = 2\pi.f_r.C$$

ومنه :

$$f_r = \frac{1}{2\pi.\sqrt{L.C}} \qquad (1)$$

وبعكس دارة التسلسل يحصل الطنين في الدارة التفرعية حين تبلغ ممانعة الدارة قيمة عظمى (لا نهاية) ، وتبلغ قيمة التيار المغذي قيمة صغرى (صفر) علماً بأن قيمة التيار في كل من الفرعين ربما تكون كبيرة ولكنهما متعاكسان طوراً .

تفيد هذه الدارة في حذف تردد غير مرغوب في دارة . وإذا وجدت مقاومة في أحد الفرعين فإن حدة الطنين توافق القيمة التي تنعدم فيها المفاعلة ، وتختلف قليلاً عن القيمة المعطاة في العلاقة (1) كما هو مبين في الأمثلة التالية.

مثال (5-12) :

وشيعة تحريضها L=10 Mh ومقاومتها R=60 Ω . أوجد سعة المكثفة الموصولة على التفرع للحصول على طنين بتردد 100 KH واحسب الممانعة عند الطنين .

الحل :

بالنسبة لفرع الوشيعة ، الممانعة :

$$\begin{aligned} Z_1 &= 60 + j.2\pi.(10^5).(0,010) \\ &= 60 + j.6280 \quad \Omega \end{aligned}$$

بالنسبة لفرع المكثفة ، الممانعة :

$$Z_2 = 0 - j.\frac{1}{2\pi\left(10^5\right).C} \quad \Omega$$

والممانعة المعادلة (Z) تعطى بالقيمة التالية :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{60 + j.6280} + \frac{1}{-j/6,28\times10^5\times C} \\ &= 1,52\left(10^{-6}\right) + j.\left[6,28\times10^5\times C - 159\times10^{-6}\right] \end{aligned}$$

ولتكون المفاعلة في الممانعة تساوي الصفر ، يجب أن تكون المركبة الخيالية $\left(\frac{1}{Z}\right)$ تساوي

الصفر أيضاً أي أن :

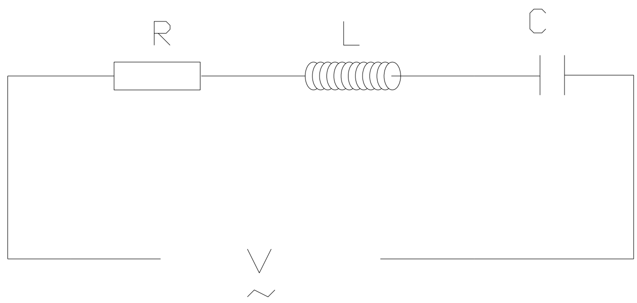
$$6,28\times(10^{5})\times C-159\times(10^{-6})=0$$

ومنه : $C=254\times10^{-6}\ F$

والممانعة المعادلة عند الطنين :

$$Z=\frac{1}{1,52\times10^{-6}}=658000\ \Omega$$

مثال (13-5) :



في دارة التسلسل المبينة في الشكل (29-5) :

$C=0,053\ \mu F$, $R=500\ \Omega$, $L=60\ mH$

احسب تردد الطنين ونقطتي نصف الاستطاعة .

الحل :

تردد الطنين يعطى بالعلاقة التالية :

$$f_r=\frac{1}{2\pi.\sqrt{L.C}}=\frac{1}{2\pi.\sqrt{0,06\times0,053\times10^{-6}}}=2820\ Hz$$

الممانعة عند الطنين : $R=500\ \Omega$

وفي نقطتي نصف الاستطاعة ، قيمة التيار تساوي ($\frac{1}{\sqrt{2}}\times$تيار الطنين)

والممانعة في نقطتي نصف الاستطاعة = $\sqrt{2}\times$الممانعة عند الطنين = $500\times\sqrt{2}$ أوم .

$$500\sqrt{2}=\sqrt{(500)^{2}+\left[2\pi f.(0,06)-2\pi f.\left(0,053\times10^{-6}\right)\right]^{2}}$$

ومنه تنتج قيم التردد عند نقطتي نصف الاستطاعة وهي :

$f_1=2240$ Hz

$f_2=3560$ Hz

10-7-5- إيجاد العلاقة بين الترددين (f_1-f_2) بدلالة (C,L,R) في دارة تسلسلية :

عند الطنين التسلسلي نجد أن الممانعة تساوي : $Z=R$

والممانعة عند نقاط نصف الاستطاعة : $Z_h=\sqrt{2}.R$

والمفاعلة عند نقاط نصف الاستطاعة :

$$X_h=\sqrt{Z_h^2-R^2}=\sqrt{2R^2-R^2}=\mp R$$

وهي موجبة عند التردد (f_2) حين تكون الدارة تحريضية إجمالاً وسالبة عند التردد (f_1) حين تكون الدارة سعوية إجمالاً . أي أن :

$$2\pi.f_2.L-\frac{1}{2\pi.f_2.C}=R \qquad (1)$$

$$2\pi.f_1.L-\frac{1}{2\pi.f_1.C}=-R \qquad (2)$$

بتقسيم العلاقة (1) على (f_1) والعلاقة (2) على (f_2) ينتج :

$$2\pi.L.\frac{f_2}{f_1}-\frac{1}{2\pi.f_1.f_2.C}=\frac{R}{f_1} \qquad (3)$$

$$2\pi.L.\frac{f_1}{f_2}-\frac{1}{2\pi.f_1.f_2.C}=\frac{-R}{f_2} \qquad (4)$$

وبطرح المعادلتين (4) و(3) ينتج :

$$2\pi.L.\left(\frac{f_2}{f_1}-\frac{f_1}{f_2}\right)=\frac{R}{f_1}+\frac{R}{f_2}$$

$$2\pi.L.\left(\frac{f_2^2-f_1^2}{f_1.f_2}\right)=R.\frac{f_1+f_2}{f_1.f_2}$$

ومنه :

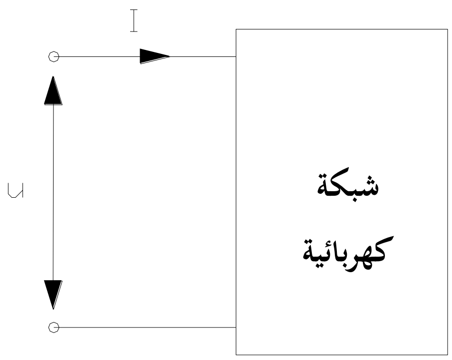
$$f_2-f_1=\frac{R}{2\pi.L}$$

وهذه النتيجة تؤيد ما سبق ذكره من أن حدة الطنين تتناسب عكساً مع التردد .

وبتعويض القيمة المعطاة في المثال (5-13) نجد :

$$f_2 - f_1 = \frac{500}{2\pi(0,06)} = 1320 \ \text{Hz}$$

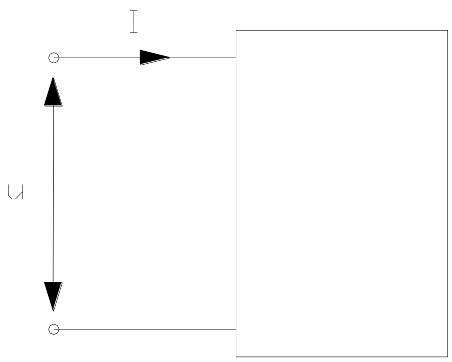
5-8- الاستطاعة الفعلية والردية والظاهرية – معامل الاستطاعة :



في أي دارة كهربا ... ر

المسحوب هو I وكانت ... ي

هذه الدارة هي :

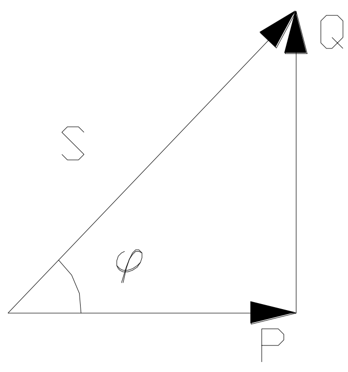


أما الاستطاعة الرد

أما الاستطاعة الظاهرية للدارة فتساوي : S=V.I (VA)

نحصل على الاستطاعة الظاهرية للدارة انطلاقاً من الاستطاعة الفعلية

والردية ، وذلك من المخطط الشعاعي للاستطاعات المبينة على الشكل (b-30-5).



شكل (b-30-5)

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{V^2.I^2.(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$
$$=\sqrt{V^2.I^2}=V.I \quad (VA)$$

ومن المخطط الشعاعي (b-30-5) يمكن حساب بسهولة معامل الاستطاعة $\cos\varphi$:

$$\frac{Q}{P}=\frac{V.I.\sin\ \varphi}{V.I.\cos\ \varphi}=tg\ \varphi \Rightarrow \ \varphi=arc\ tg\ \frac{Q}{P}$$

ويكون معامل استطاعة الدارة : $\cos\ \varphi=\cos\left(arc\ tg\ \frac{Q}{P}\right)$

ويمكن أيضاً إيجاد معامل الاستطاعة مباشرةً من المخطط الشعاعي :

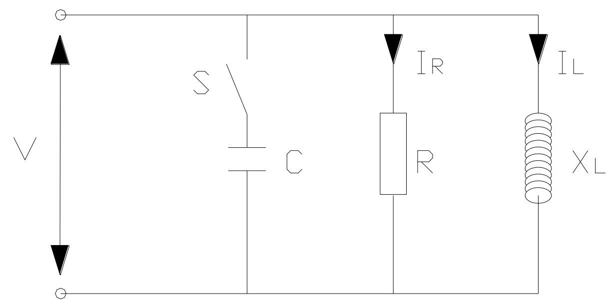
$$\cos\ \varphi=\frac{P}{S}=\frac{P}{\sqrt{P^2+Q^2}}$$

في الحياة العملية لا يستفاد إلا من الاستطاعة الفعلية فقط ، أما الاستطاعة الردية فلا يستفاد منها ، وتؤدي إلى زيادة التيار المحسوب من نبع التغذية فقط ، ومعروف أنّ الاستطاعة الردية تتناقص مع زيادة معامل استطاعة الدارة $\cos\varphi$ - .

وتعتمد معظم الآلات والتجهيزات الكهربائية على عامل الاستطاعة حيث الحمولات الصناعية تعتبر تحريضية بصورة عامة . لذلك يمكن تحسين عامل الاستطاعة بإضافة مكثفات على التوازي مع الحمولات بمواصفات واستطاعات كافية للحصول على عامل الاستطاعة المطلوب .

مثال (14-5) :

في الدارة المبينة بالشكل (a-31-5) إذا كان $X_L=5\ \Omega$ ، $R=2\ \Omega$ وتوتر التغذية $V=220\ v$ والتردد $f=50\ Hz$ احسب ما يلي : ١- سعة المكثف الواجب ربطه على التفرع مع الدارة وذلك من أجل رفع عامل الاستطاعة إلى 0,98



الشكل (a-31-5)

الحل :

$$I_R = \frac{V}{R} = \frac{220}{2} = 110\ A$$

$$I_L = \frac{V}{X_L} = \frac{220}{5} = 44\ A$$

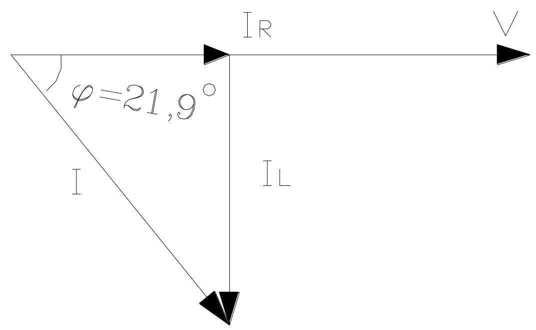
التيار الكلي I يساوي المجموع الشعاعي لـ (I_L, I_R) .

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{(110)^2 + (44)^2} = 118,5\ A$$

معامل الاستطاعة $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{110}{118,3} = 0,928$$

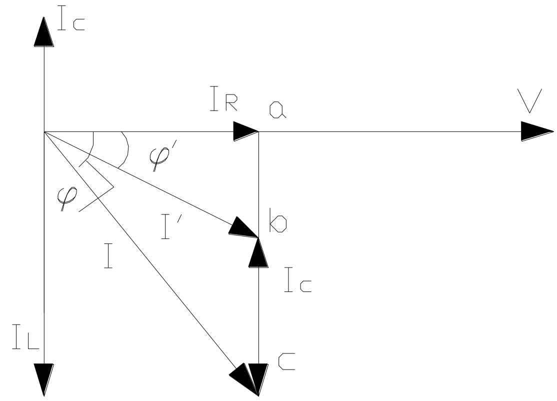
والمخطط الشعاعي للدارة موضح بالشكل (b-31-5) .



الشكل (b-31-5)

المكثف الواجب إضافته إلى الدارة يجب أن يسحب تياراً I_C إذا أضفناه إلى التيار الكلي I يجب أن يعمل التيار الجديد `I (بعد وصل القاطع S) زاوية مع V بحيث يكون $(\cos\varphi=0,98)$.

الشكل (32-5) يبين المخطط الشعاعي للدارة بعد إضافة المكثف أي بعد إغلاق القاطع S ومن الشكل (32-5) نكتب :



الشكل (32-5)

$I_C=bc=ac-ab$

$I_C=I.\sin\varphi-I_R.tg\ \varphi`$

$=I.\sin\varphi-I_R.tg\ (arc\cos 0,98)$

$I_C=V.w.c=I.\sin\varphi-I_R.tg\ 11,47$

$$C=\frac{118,5\sin 21,9-110\ tg 11,47}{2\pi\times 50\times 220}=3,136\times 10^{-4}\ F$$

9-5- التمثيل الشعاعي للقيم الجيبية في المستوى العقدي :

لقد درسنا في الفقرات السابقة طرق حل بعض دارات التيار المتناوب البسيطة باستخدام المخططات الشعاعية . وفي المسائل المعقدة ، تصبح هذه الطريقة صعبة جداً ، لذلك يعمد عادةً إلى استعمال طريقة لإعداد المركبة في تحليل دارات التيار المتناوب ، هذه الطريقة تسمح بالتعبير عن الجهود والتيارات بصيغة جبرية .

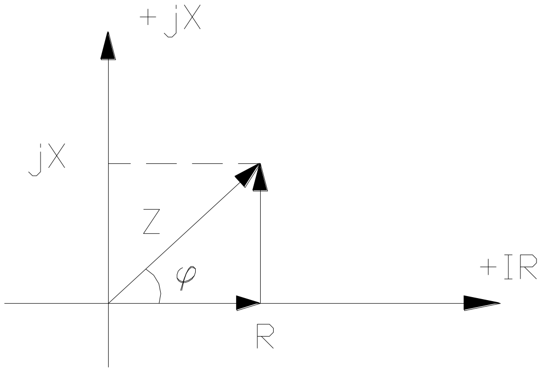
الشكل (5-33) يبين مستوياً عقدياً حيث يمكن تمثيل الأعداد العقدية عليه . ويتألف العدد العقدي من مركبتين واحدة حقيقية ، والأخرى وهمية أو تخيلية وتحمل على محور السينات للمستوى العقدي المركبة الحقيقية أما المركبة التخيلية فنرسمها على محور العينات ، نضع على محور السينات إشارة 1+ وعلى محور العينات الإشارة $+j$ $\left(j=\sqrt{-1}\right)$.

فإذا كان لدينا الشعاع Z الذي يمثل ممانعة دارة كهربائية في الشكل العقدي :

$Z=R+j.X$

R− الجزء الحقيقي .

X− الجزء التخيلي .



الشكل (5-33)

كما نعلم أيضاً أن مسقط أي شعاع على محور يساوي الشعاع بالقيمة المطلقة مضروباً بـ تجيب الزاوية المحصورة بين الشعاع ومحور الإسقاط .

من الرياضيات نعلم حسب علاقة ايلر :

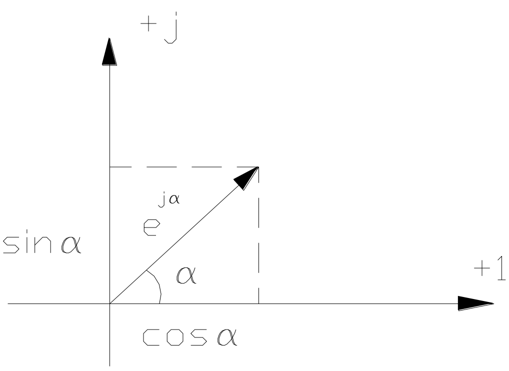
الشكل المثلثي $$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j.\sin\alpha$$

يمثل العدد العقدي $e^{j\alpha}$ على المستوى العقدي بشعاع يساوي عددياً الواحد الصحيح ويصنع زاوية α مع محور الأعداد الحقيقية (المحور 1+) نقيس الزاوية α بعكس اتجاه عقارب الساعة اعتباراً من المحور (1+) كما هو مبين في الشكل (5-34) وفي الحقيقة نكتب :

$$\left| e^{j\alpha} \right| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$$

إن مسقط التابع $e^{j\alpha}$ على المحور 1+ يساوي $\cos\alpha$ وعلى المحور j+ يساوي $\sin\alpha$ فإذا أخذنا عوضاً عن التابع $e^{j\alpha}$ التابع $I_m \cdot e^{j\alpha}$ فإنه : $I_m \cdot e^{j\alpha} = I_m.\cos\alpha + j.I_m.\sin\alpha$

تمثل هذه الكمية كذلك على المستوى العقدي بشعاع يصنع مع المحور 1+ زاوية α ولكن قيمة الشعاع ستكون أكبر من $e^{j\alpha}$ بمقدار I_m مرة .



الشكل (5-34)

إن الزاوية α يمكن أن تأخذ أية قيمة ، لنفرض أن α=wt+φ أي أن الزاوية α تتغير طرداً مع الزمن عندها:

$$I_m.e^{j(wt+\varphi)} = I_m.\cos(wt+\varphi) + j.I_m.\sin(wt+\varphi)$$

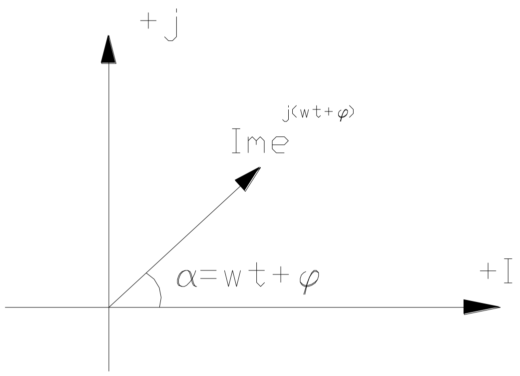
يمثل الحد $I_m.\cos(wt+\varphi)$ القسم الحقيقي (R_e) من العلاقة $I_m.e^{j(wt+\varphi)}$ وبالتالي :

$$I_m.\cos(wt+\varphi) = \text{Re}\ I_m.e^{j(wt+\varphi)}$$

أما التابع $I_m.\sin(wt+\varphi)$ فهو القسم التخيلي (I_m) من العلاقة $I_m.e^{j(wt+\varphi)}$ أي :

$$i = I_m.\sin(wt+\varphi) = \text{Im}\ e^{j(wt+\varphi)}$$

وبهذا الشكل يمكن تمثيل التيار i على المستوى العقدي كما في الشكل (5-35) .



الشكل (5-35)

5-9-1- العمليات الأربعة على الأعداد العقدية في الشكل الديكارتي :

يتم جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد العقدية باتباع قواعد جمع وضرب الأعداد الحقيقية مع ملاحظة ما يلي :

$J^2=-1 \quad , J^3=J^2.J=-J \quad , J^4=J^2.J^2=1$

إذا كان : $Z_1=R_1+j\,X_1 \quad , Z_2=R_2+j\,X_2$

فإن :

$$Z_1 \pm Z_2=(R_1+j\,X_1)\pm(R_2+j\,X_2)=(R_1\pm R_2)+ j\,(X_1\pm X_2)$$

$$Z_1.Z_2=(R_1+j\,X_1).(R_2+j\,X_2)$$

$$=(R_1.R_2- X_1.X_2)+j(R_1.X_2+R_2.X_1)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{R_1+j.X_1}{R_2+j.X_2}$$

بضرب الصورة والمخرج بمرافق المخرج :

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{(R_1+j.X_1)(R_2-j.X_2)}{(R_2+j.X_2)(R_2-j.X_2)}$$
$$=\frac{R_1.R_2+X_1.X_2}{R_2^2+X_2^2}+j\frac{R_2.X_2-R_1.X_2}{R_2^2-X_2^2}$$

. $Z_2\neq 0$

5-9-2- ضرب وقسمة الأعداد العقدية بالشكل القطبي :

ليكن لدينا العددان العقديان :

$$Z_1=|Z_1|\ \underline{|\varphi_1}\qquad,\qquad Z_2=|Z_2|\ \underline{|\varphi_2}$$

ولكن :

$$Z_1=|Z_1|\ \underline{|\varphi_1}=|Z_1|.\cos\varphi_1+j|Z_1|\sin\varphi_1$$
$$Z_2=|Z_2|\ \underline{|\varphi_2}=|Z_2|.\cos\varphi_2+j|Z_2|\sin\varphi_2$$

إن حاصل الضرب $Z_1.Z_2$ هو :

$$Z_1.Z_2=|Z_1|\ \underline{|\varphi_1}.|Z_2|\ \underline{|\varphi_2}$$
$$=\left(|Z_1|.\cos\varphi_1+j|Z_1|\sin\varphi_1\right).\left(|Z_2|.\cos\varphi_2+j|Z_2|\sin\varphi_2\right)$$
$$=|Z_1|.|Z_2|.\cos(\varphi_1+\varphi_2)+j|Z_1|.|Z_2|.\sin(\varphi_1+\varphi_2)$$
$$Z_1.Z_2=|Z_1|\ \underline{|\varphi_1}.|Z_2|\ \underline{|\varphi_2}=|Z_1|.|Z_2|\ \underline{|\varphi_1+\varphi_2}$$

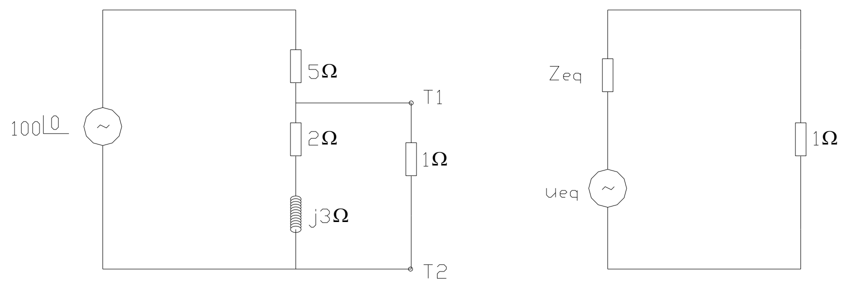
أما حاصل قسمة Z_1 على Z_2 فهو :

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{|Z_1|\ \underline{|\varphi_1}}{|Z_2|\ \underline{|\varphi_2}}=\frac{|Z_1|(\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1)}{|Z_2|(\cos\varphi_2+j\sin\varphi_2)}$$
$$=\frac{|Z_1|}{|Z_2|}.[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+j\sin(\varphi_1-\varphi_2)]=\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|\ \underline{|\varphi_1-\varphi_2}$$

ويلاحظ أنه من أجل عملية ضرب وجمع وطرح القيم العقدية يفضل أن تكون في الصيغة الديكارتية . من أجل عمليات الضرب والقسمة بفضل أن تكون بالصيغة القطبية .

مثال (5-22) :

لدينا الدارة المبينة بالشكل (5-40) والمطلوب حساب التيار المار في المقاومة $1\ \Omega$ بتطبيق نظرية ثيفينين .



(a) **(b)**

الشكل (5-40)

الحل :

تنتج الدارة بين طرفي المقاومة $1\ \Omega$ ونحسب الممانعة المكافئة Z_{eq} وفرق الكمون للمنبع المكافئ U_{eq} لتصبح الدارة كما هو مبين بالشكل (5-40-b) . الممانعة المكافئة للدارة بعد قصر المنابع هي :

$$Z_{eq} = \frac{5\left(2+j3\right)}{5+2+j3} = 2+j1,3$$

فرق الكمون بين T_1 وT_2 هو :

$$U_{eq} = \frac{100\left(2+j3\right)}{5+2+j3} = 39,7+j\,25,9\ \text{v}$$

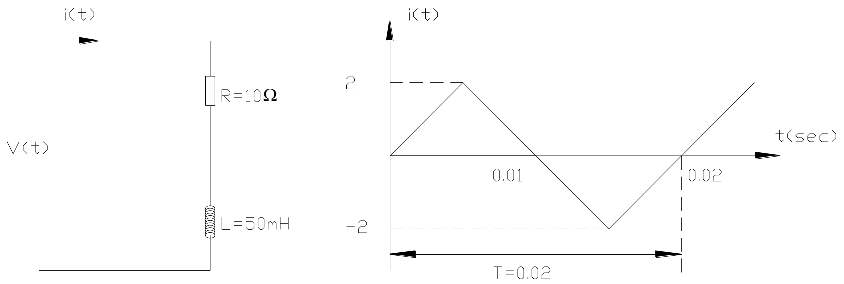
وأخيراً التيار المار في المقاومة $1\ \Omega$ هو :

$$I = \frac{U_{eq}}{Z_{eq}+R_b} = \frac{39,7+j\,25,9}{2+j1,3+1}$$
$$=14,3+j\,2,6 = 14,53\underline{\left|10,3^{\circ}\right.}\ A$$

أمثلة محلولة :

1- يبين الشكل (5-41) موجة التيار المار خلال مقاومة $R=10\Omega$ ووشيعة $L=50\ mH$ ، أوجد

شكل موجة التوتر للمنبع V الذي يعطي هذا التيار .



الشكل (5-41)

الحل :

توتر الدارة يعطى بالعلاقة :

$$V = V_R + V_L = i_R + L.\frac{di}{dt}$$

بالنسبة لتوتر المقاومة V_R فله نفس شكل موجة التيار ولكن مضروبة بـ R ولذلك فقيمته الأعظمية $2\times10=20$ v وبالنسبة لجهد الملف V_L فإنه يتناسب مع معدل تغير التيار أي يتناسب مع ميل موجة التيار بالنسبة للزمن ففي ربع الموجة الأول نجد أن معدل تغير التيار ثابت وقيمته :

$$\frac{di}{dt} = \frac{2}{0,005} = 400$$

وعليه فإن :

$$V_L = L.\frac{di}{dt} = 50\times10^{-3}\times400$$

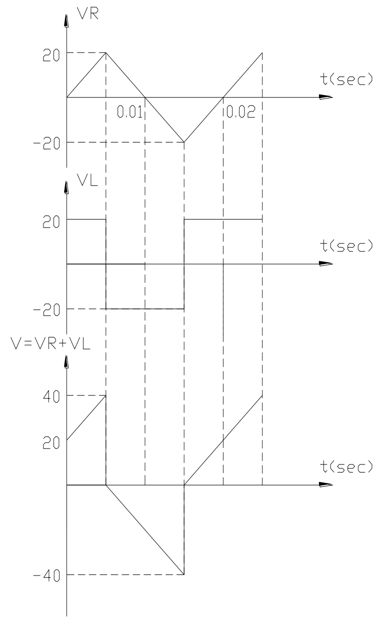
عندما $t=0 \to t=0,005$ فإن :

$$V_L = L.\frac{di}{dt} = 400\times50\times10^{-3} = 20 \text{ v}$$

وفي ربعي الموجة التاليين نجد أن معدل تغير التيار ثابت ويساوي (400-) وعليه فالتوتر V_L ثابت في هذه الفترة وقيمته هي .

عندما $t=0,005 \to t=0,015$ sec فإن : $V_L=-20$ v

ويبين الشكل (5-42) جهد المقاومة V_R وجهد الملف V_L والجهد الكلي V الذي حصلنا عليه بجمع V_R مع V_L نقطة بنقطة .



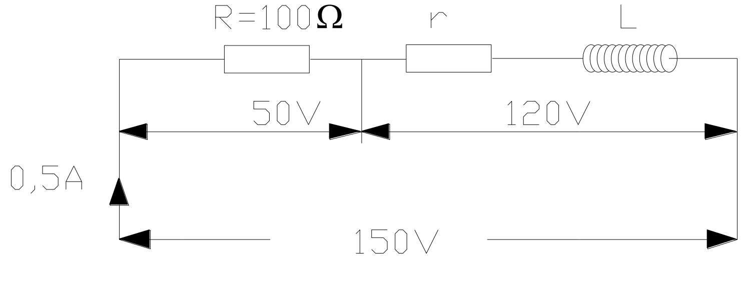
الشكل (5-42)

٢- وصل ملف ذات نواة حديدية على التسلسل مع مقاومة $R=100\ \Omega$ إلى منبع تغذية متناوب أحادى الطور تردده 50Hz . فإذا كان التيار المار في الدارة 0,5A وكان فرق الجهد على طرفي المقاومة 50v وفرق الجهد على طرفي الملف 120 v وفرق الجهد على طرفي الدارة 150 v أوجد :

1- عامل التحريض الذاتي للوشيعة .

2- الاستطاعة المبددة في الدارة وارسم المخطط الشعاعي .

الحل :الشكل (5-45) يبين دارة المثال ، والشكل (5-46) يبين المخطط الشعاعي لها .

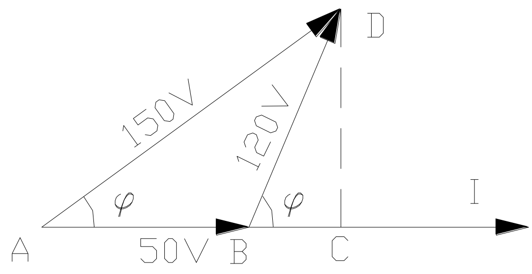


الشكل (5-45)

من الشكل (5-46) نلاحظ BC تمثل هبوط الجهد بسبب المقاومة الداخلية للملف r وبالتالي :

$$(BC)^2+(CD)^2=(120)^2 \qquad (1)$$

$$(50+BC)^2+(CD)^2=(150)^2 \qquad (2)$$



الشكل (5-46)

وبحل هاتين المعادلتين نجد هبوط الجهد بسبب المقاومة (r) :

$$(50)^2+2\times 50BC+(BC)^2+(120)^2-(BC)^2=(150)^2$$

$$2500+100BC+(BC)^2+14400-(BC)^2=22500$$

$$BC=56\ v$$

ومنه هبوط الجهد على الملف هو :

$$CD=106{,}1\ v \Rightarrow I.X_L=106{,}1 \Rightarrow X_L=\frac{106{,}1}{0{,}5}=212{,}2\ \Omega$$

$$L=\frac{X_L}{2\pi f}=\frac{212{,}3}{314}=0{,}675\ H$$

أما مقاومة الملف r :
$$r=\frac{56}{I}=\frac{56}{0{,}5}=112\ \Omega$$

المقاومة الكلية في الدارة :

$$R_t=R+r=100+112=212\ \Omega$$

ومنه الاستطاعة المبددة في الدارة :
$$P=I^2.R=(0{,}5)^2\times 212=53\ w$$