الفصل الثالث

قانون كولون – عناصر تخزين الطاقة الكهربائية

3 - 1- مقدمة :

من المعروف أن ذرة أي عنصر تتكون من البروتونات والإلكترونات والنيترونات وتتعلق الشحنة الكهربائية ببنية الذرة ، فالشحنة الموجبة أو السالبة التي يحتويها عنصر ما معين تتكون من عدد من الشحنات العنصرية المتساوية في مقاديرها .

وهذه الشحنة العنصرية هي شحنة الإلكترون السالبة التي تساوي ($e = 1.6\times10^{-19}$ c) أو شحنة البروتون الموجبة التي تساوي نفس قيمة شحنة الإلكترون. لذلك فإن تحديد ما إذا كان الجسم مشحوناً كهربائياً أم لا ، يتوقف على عدد الشحن العنصرية فيه . فإذا كان عدد الشحنات العنصرية الموجبة لذرة هذا العنصر هي (Q_1) وعدد الشحنات السالبة هي (Q_2) فإن الشحنة الكلية للذرة تساوي [$(Q_1 - Q_2)\, e$] .

فالقيمة الكبرى تستطيع تحديد طبيعة الشحن ، ويكون الجسم متعادلاً كهربائياً فيما إذا كان نوعا الشحنات متساوياً .

وبما أن الشحنات الموجبة لأي ذرة تساوي الشحنات السالبة فليس من الممكن لذرة عادية تغيير الشحنة الكلية إلا بإعطائها شحنات من الخارج أو نزع شحنات منها ، والعملية التي تؤدي إلى جعل الذرة الحيادية موجبة الشحنة بسبب نزع الإلكترونات منها تسمى بالتأين .

وتقسم كل الأجسام من وجهة نظر الظواهر الكهربائية التي تحدث في هذه الأجسام إلى نواقل وعوازل ، وهناك مجموعة أخرى من الأجسام أصبحت ذات أهمية في وقتنا الحاضر ، تسمى أنصاف النواقل وهي تتوسط بين النواقل والعوازل في استطاعتها للتوصيل الكهربائي ومن بين هذه المواد السيليكون والجرمانيوم. وفي أنصاف النواقل يمكن أن يزداد التوصيل الكهربائي بشكل كبير وذلك بإضافة كميات صغيرة من عناصر أخرى ، ولأنصاف النواقل تطبيقات كثيرة كتركيب الترانزيستور .

أما النواقل فهي أجسام تنزاح فيها الشحنات الكهربائية تحت تأثير الحقل الكهربائي إلى مسافات ماكروسكوبية في كل المادة ، مشكلة تياراً كهربائياً. أما العوازل فهي مواد يؤدي تأثير الحقل الكهربائي عليها فقط إلى انزياح يسير لشحناتها بالنسبة لأوضاع انطلاقها ، وبالتالي لا يجري فيها تيار كهربائي في الشروط العادية .

3 - 2 - قانون كولون :

ينص قانون كولون على أن جسمين مشحونين متناهيين في الصغر(شحنتين نقطيتين) يتدافعان إذا كانت شحنتاهما متفقتين اسمياً ، ويتجاذبان إذا اختلفا بالاسم.

وعند إذ تعطى قوة التأثير بالعلاقة التالية :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon_r r^2}$$

q_1 ، q_2 - شحنتا الجسم الأول و الثاني على الترتيب وتقاسان بواحدة الكولون أو الأمبير في الثانية (A . S) .

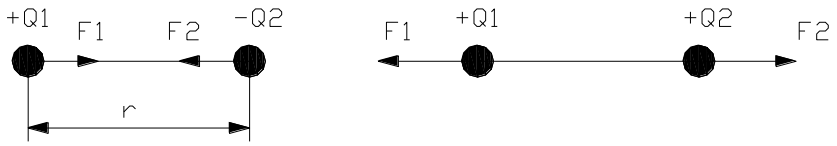
r - المسافة الفاصلة بين الشحنتين وتقاس بالمتر أنظر الشكل (3 - 1).

ε_0 - السماحية المطلقة للفراغ وتساوي في الوحدات الدولية :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\times 9\times 10^9} \quad \text{Farad}/\text{met}$$

$$= 8{,}85\times 10^{-12} \quad \text{F}/\text{m}$$

أما ε_r – فتسمى بالسماحية النسبية وليس لها واحدات.



الشحنتان مختلفتان **الشحنتان متماثلتان**

الشكل (3 - 1)

وبشكل آخر يمكن القول بأن قوة الدفع أو الجذب بين شحنتين كهربائيتين مركزتين في نقطتين تتناسب طرداً مع حاصل جداء الشحنتين وعكساً مع مربع البعد بينهما ، ومحور هذه القوة يقع على الخط

الواصل بين هاتين الشحنتين ، وكلمة مركزة تعني في هذه المعادلة أن المسافة بين الشحنتين كبيرة جداً إذا ما قورنت بأبعادهما.

والعلاقة الرياضية التي تعطي قيمة السماحية المطلقة الكهربائية لمواد أخرى غير الهواء هي :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r$$

ε – تسمى بالسماحية المطلقة.

وفيما يلي الجدول (3 - 1) يبين السماحية النسبية ε_r لبعض المواد :

المادة	السماحية النسبية (ε_r)	المادة	السماحية النسبية (ε_r)
الهواء	1	الفيبر	2.5 ÷ 5
البترول	2	الباكاليت	4.5 ÷ 5.5
البارافين	2.1 ÷ 2.5	الميكا	3.5 ÷ 6.6
الورق	2 ÷ 2.6	البورسلان	5.7 ÷ 6.8
الإسفلت	27	الخشب	2.5 ÷ 7.7
المطاط	2 ÷ 3.5	الماء المقطر	8.1
الزيت	2.2 ÷ 4.7	الزجاج	5.4 ÷ 9.9

وتتأثر هذه القيم بتغير الحرارة والرطوبة والضغط والتوتر المطبق وسماكة المادة العازلة .

أما إذا كان لدينا أكثر من شحنتين فإن القوة المؤثرة على أي شحنة منهم ، مثلاً الشحنة (q_i) يمكن الحصول عليها من المعادلة الشعاعية التالية :

$$F_1 = F_{12} + F_{13} + F_{14} + F_{15} + \ldots\ldots$$

F_{12} – هي القوة المؤثرة على الشحنة q_1 من الشحنة q_2 .

مثال (3 - 1) :

ماذا يجب أن تكون المسافة بين شحنتين متساويتين بالقيمة إحداهما موجبة والأخرى سالبة وذلك كي تكون قوة الجذب بينهما (4,5 N) علماً بأن قيمة الشحنة الواحدة :

$$q_1 = q_2 = q = 1{,}3 \times 10^5 \text{ c}$$

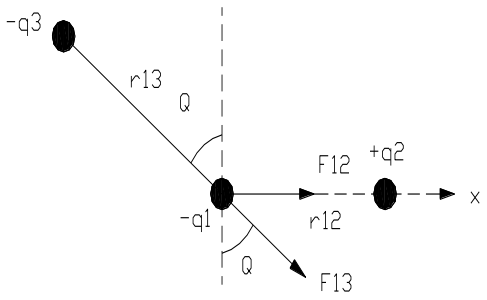
الحل : نطبق قانون كولون :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$$r = q\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{F}} = 1{,}3\times10^{5}\sqrt{\frac{9\times10^{9}}{4{,}5}} = 5{,}8\times10^{9} \qquad m$$

مثال (3 - 2) :

الشكل (3 - 2) يبين ثلاث شحنات (q_1 , q_2 , q_3) ، احسب القوة المؤثرة على الشحنة q_1 بافتراض أن :



$q_1 = - 1 \times 10^{-6}$ c
$q_2 = +3 \times 10^{-6}$ c
$q_3 = -2 \times 10^{-6}$ c
$r_{13} = 10$ cm
$r_{12} = 5$ cm
$Q = 30^o$

الشكل (3 - 2)

الحل : نطبق قانون كولون :

$$F_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} = 9\times10^{9}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = \frac{9\times10^{9}(1\times10^{-6})(3\times10^{-6})}{(5\times10^{-2})^2} = 10{,}8 \qquad N$$

$$F_{13} = 9\times10^{9}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = \frac{9\times10^{9}(1\times10^{-6})(2\times10^{-6})}{(10\times10^{-2})^2} = 1{,}8 \qquad N$$

أما اتجاهات القوى المؤثرة ف(F_{12} , F_{13}) مبينة على الشكل ومحصلة القوى المؤثرة على الشحنة q_1 هي F_1 ،ونحسب مركبات هذه المحصلة كما يلي:

المركبة الأفقية :

$$F_{1x}=F_{12x}+F_{13x}=F_{12}+F_{13} \cdot SinQ=10{,}8+1{,}8\ Sin30=11{,}7 \qquad N$$

المركبة العمودية :

$$F_{1y}=F_{12y}+F_{13y}=0 - F_{13}\ Cos\ 30=- (1{,}8)\ Cos\ 30=- 1{,}6 \qquad N$$

وتكون المحصلة أي محصلة القوة المؤثرة على الشحنة q_1 هي :

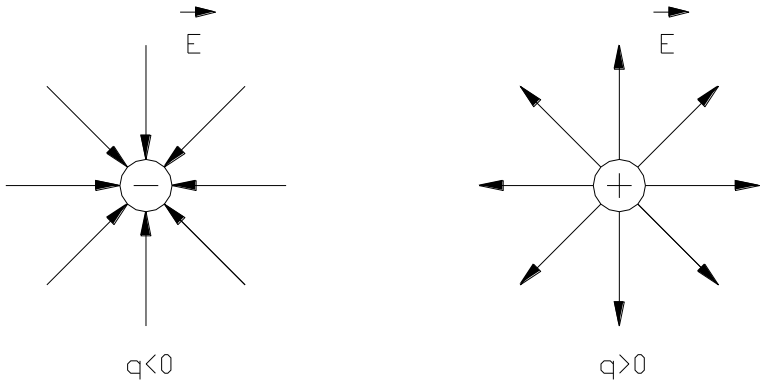
$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2 + F_{1y}^2} = \sqrt{(11,7)^2 + (-1,6)^2} = 11,8 \quad N$$

3 - 3 - خطوط الحقل الإلكتروستاتيكي :

لنأخذ شحنة كهربائية(q+) موجبة قيمتها تساوي واحدة الشحنة الكهربائية ، ولنأخذ هذه الشحنة إلى نقطة ما (P) داخل منطقة من الفراغ ، يوجد فيها حقل كهربائي $\vec{E}$ ، إن هذا الحقل سوف يؤثر على هذه الشحنة بقوة كهربائية $\vec{F}$ توازي هذه القوة اتجاه الحقل الكهربائي ، ثم ننقل بعد ذلك الشحنة إلى نقطة أخرى قريبة جداً من النقطة الأولى وتقع على اتجاه القوة الكهربائية المؤثرة على الشحنة ، ونقوم بعد ذلك بتحديد اتجاه القوة المؤثرة على الشحنة ، وننقلها بعد ذلك إلى نقطة أخرى ثالثة مجاورة لها وفي اتجاه عمل القوة وهكذا. ثم نصل معاً كافة النقاط التي وضعنا فيها الشحنة الكهربائية بخط مستمر ، و هذا الخط يسمى خط الحقل الكهربائي. وإذا كررنا العملية بحيث نبدأ كل مرة من نقطة مختلفة عن النقطة P) (نحصل على مجموعة من الخطوط تمثل صورة الحقل الكهربائي في المنطقة المعتبرة من الفراغ .

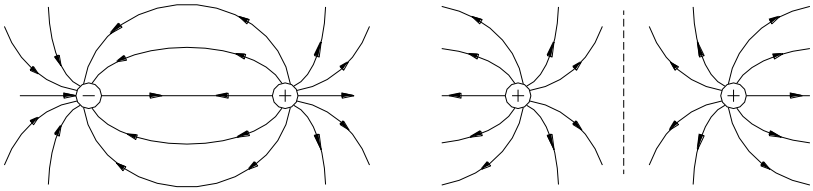
إن خطوط الحقل تتصف بصفة خاصة ، وهي أنها في نقطة ما لا يمكن أن تتقاطع أبداً ، وهذا يعني أنه يوجد اتجاه واحد للقوة الكهربائية التي يمكن أن تؤثر على الشحنات الكهربائية فيما لو وضعت هذه الشحنات في النقطة المعتبرة ، وإن اتجاه القوة هو نفس اتجاه خط الحقل المار هناك ، وإذا كان خط الحقل غير مستقيم أي خطاً منحنياً فإن اتجاه القوة عند أي نقطة ضمن الحقل هو اتجاه المماس لخط الحقل المار في هذه النقطة .

وخطوط شدة الحقل الناتجة عن شحنة نقطية معطاة في الشكل (3 - 3) :



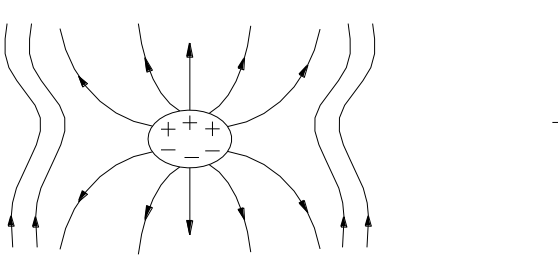
الشكل (3 - 3)

ويبين الشكل (3 - 4) خطوط الحقل لبعض الحالات المألوفة للأجسام المشحونة وغير المشحونة



(a) خطوط الحقل بين شحنتين متماثلتين بالإشارة

(b) خطوط الحقل بين شحنتين متماثلتين (مختلفتين بالإشارة)



(c) خطوط الحقل بين جسم مدبب مشحون إيجابيا ومستو مشحون سلبياً

(d) خطوط الحقل حول كرة معدنية ناقلة غير مشحونة متوضعة ضمن حقل كهربائي منتظم

الشكل (3 - 4)

يجب ملاحظة أن كثافة خطوط الحقل تكون معبرة عن مقدار الحقل الكهربائي وشدته بحيث يتناسب عدد الخطوط المارة عبر وحدة السطوح العمودية على اتجاه الحقل في نقطة ما مع شدة الحقل في هذه النقطة.

3 - 3 - 1 - شدة الحقل الكهربائي ($\vec{E}$) :

لتحديد شدة الحقل الكهربائي $\vec{E}$ تجريبياً ، نضع جسم اختبار صغيراً يحمل شحنة قدرها (q_0) (

نفرض أنها موجبة للسهولة) في النقطة المراد اختبارها في المجال ، ونقيس القوة الكهربائية المؤثرة عليه $\overrightarrow{F}$ فتكون شدة الحقل الكهربائي $\overrightarrow{E}$ في هذه النقطة هي :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

وتكون $\overrightarrow{E}$ هنا بشكل شعاعي لأن $\overrightarrow{F}$ بشكل شعاعي ، ويكون اتجاه $\overrightarrow{E}$ نفس اتجاه $\overrightarrow{F}$ أي أن اتجاه $\overrightarrow{E}$ هو الاتجاه الذي تحاول أن تتحرك فيه شحنة موجبة ساكنة موضوعة في تلك النقطة.

لقد أثبتت التجارب أنه إذا كان لدينا جسم مادي مشحون كهربائياً وموجود تحت تأثير عدد من الأجسام الكهربائية المشحونة (n) فإن القوة التي تؤثر على هذا الجسم $\overrightarrow{F}$ تساوي المجموع الشعاعي للقوى ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots\ldots, \vec{F}_n$) التي يؤثر بها كل جسم من الأجسام (n) إذا ما وجد هذا الجسم وحده مع الجسم المادي المتأثر.

ويمكن أن نكتب :

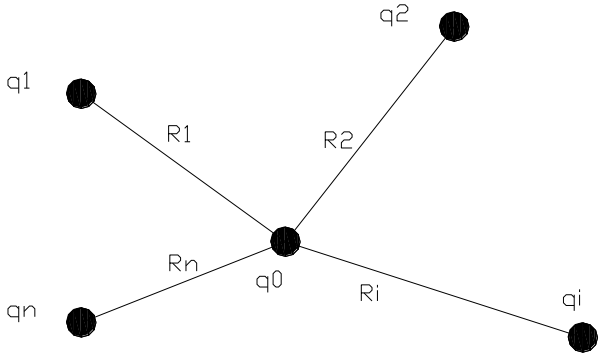
$$\overrightarrow{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

وإن كل قوة كهربائية تتولد من تأثير مجموعة الأجسام (n) في الشكل (3 - 5) هي:

$$\vec{F}_i = q_0 \cdot \vec{E}_i$$

حيث q_0 – شحنة الجسم المتأثر.

E_i – شدة الحقل الكهربائي الذي يولده الجسم (i) بفعل الشحنة q_i



الشكل (3 - 5)

وعليه يمكن أن نكتب :

$$\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1}{q_0}+\frac{\vec{F}_2}{q_0}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\vec{F}_n}{q_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\vec{F}_i}{q_0}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\ldots\ldots\ldots+\vec{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

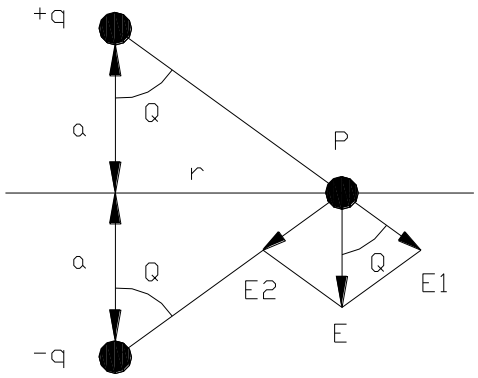
من قانون كولون نكتب :

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i^2}$$

مثال (3 - 3):

الشكل (3 - 6) بين شحنتين متساويتين بالقيمة q ومختلفتين بالإشارة ، المسافة بينهما (2a). أوجد الحقل الكهربائي $\vec{E}$ الناتج عن هاتين الشحنتين وذلك في نقطة (P) التي تبعد مسافة (r) عن منتصف المستقيم الواصل بين مركزي الشحنتين ، افرض أن :

$a << r$



الشكل (3 - 6)

الحل :

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2$$

$$\vec{E}_1=\vec{E}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+r^2}$$

إن المجموع الشعاعي للشدتين E_1 وE_2 في الاتجاه العمودي كما هو واضح من الشكل:

$$\vec{E} = 2E_1 \text{Cos } Q \quad \Rightarrow \quad \text{Cos } Q = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

ومنه :

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{a^2 + r^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qa}{(a^2 + r^2)^{3/2}}$$

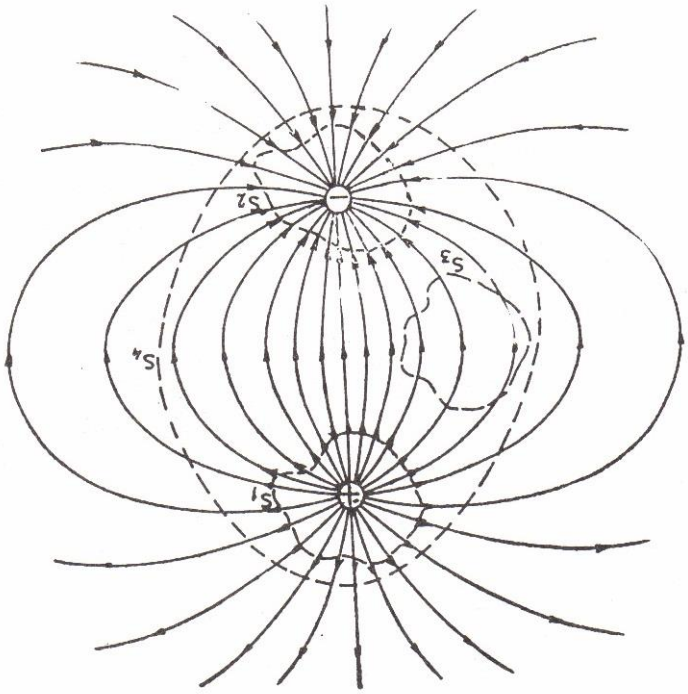
وإذا كان $a << r$ يمكن إهمال a في مخرج الكسر وتصبح شدة الحقل E هي :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qa}{r^3}$$

أما المجموع الشعاعي للمركبات الأفقية فيساوي الصفر.

3 - 4 - الفيض الكهربائي:

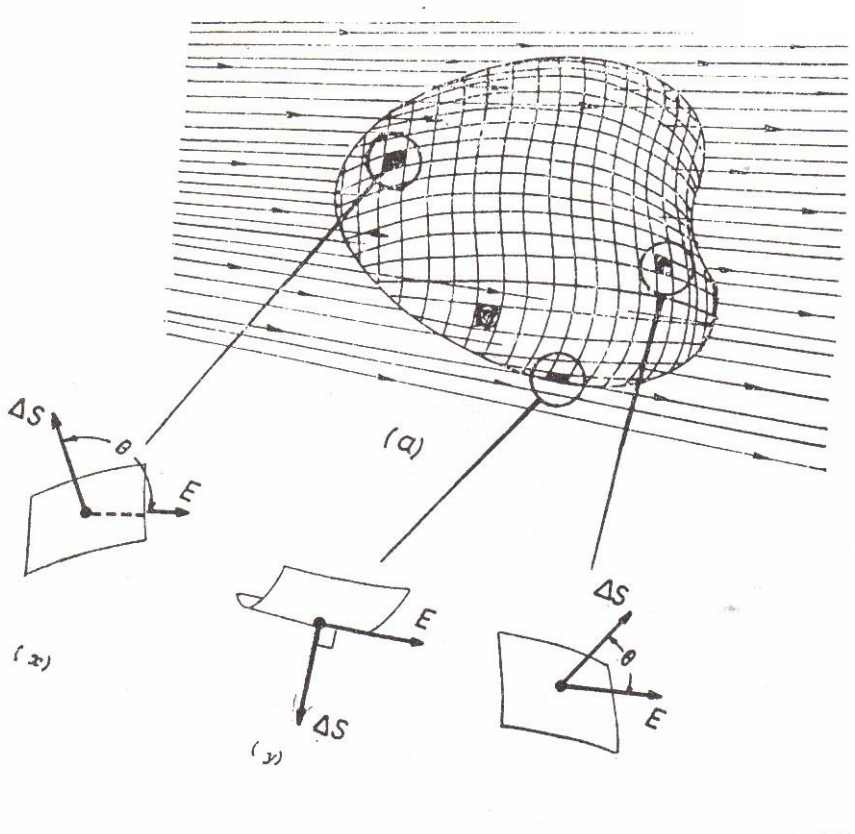
يقاس الفيض الكهربائي Φ بعدد خطوط الحقل التي تقطع سطحاً معيناً ، وبالنسبة للسطوح المغلقة يكون الفيض Φ موجباً إذا كانت خطوط القوى تؤثر خارجياً وتكون سالبة إذا أثرت داخلياً .



الشكل (3 - 7)

فالشكل (3 - 7) يبين شحنتين متساويتين متضادتين ، كما يبين خطوط الحقل الكهربائي لهما . أما المنحنيات S_1 , S_2 , S_3 , S_4 فهي منحنيات متقاطعة مع سطح الشكل في أربعة سطوح فرضية ، ويكون الفيض موجباً بالنسبة للسطح S_1 وسالباً بالنسبة للسطح S_2 .

لتحديد الفيض بشكل تام ننطلق من الشكل (3 - 8) الذي يبين سطحاً مغلقاً متوضعاً في مجال كهربائي ، فإذا قسمنا السطح إلى مربعات صغيرة جداً $\triangle S$ ، فإن مساحة هذا المربع يمكن أن تمثل بالشعاع $\triangle S$ ذي القيمة المطلقة $\triangle S$ وأما اتجاه هذا الشعاع فهو في جهة الانسحاب الخارجي الطبيعي للسطح ، ونعتبر وجود شعاع الحقل الكهربائي (المجال) في كل مربع وبما أن المربعات أخذت صغيرة جداً فإن E يمكن أن تؤخذ ثابتة بالنسبة لكل نقاط المربع المفروض.



الشكل (3 - 8)

الشكل (3 - 8)

أما أشعة $\overrightarrow{E}$ و $\overrightarrow{\Delta s}$ التي تعطي خواص كل مربع فتحصر بينها زاوية Q ويمثل على الشكل (3 - 8 منظراً مكبراً للمربعات الثلاثة على السطح ، وهي المربعات (Z) , (Y) , (X) ونلاحظ أن Q عند (X) أكبر من 90^o وعند (Y) تساوي 90^o وعند (Z) أقل من 90^o ، وبالتالي يكون الفيض:

$$\Phi = \Sigma E.ds$$

وعلى سبيل المثال إذا كانت المساهمة في الفيض عند (X) سالبة أما عند (Y) تكون صفراً

وعند (Z) تكون موجبة. عندها يمكن إجراء الفيض الكهربائي بإجراء التكامل بعد استبدال عملية الجمع بالتكامل على السطح أي أن :

$$\Phi = \int E.ds$$

ويبين تكامل السطح هذا أنه يجب تقسيم السطح المدروس إلى عناصر صغيرة مساحة كل منها ds ثم تحسب الكمية E.ds لكل عنصر ثم يؤخذ المجموع للسطح الداخلي.

3 - 5 - السعة الكهربائية للمكثف :

إن وجود شحنة كهربائية في جسم اتجاه جسم آخر يفترض وجود فرق توتر u بينهما يتناسب وكمية الشحنة الكهربائية $Q = C . u$ وثابت التناسب بينهما C يسمى بالسعة الكهربائية للمكثف.

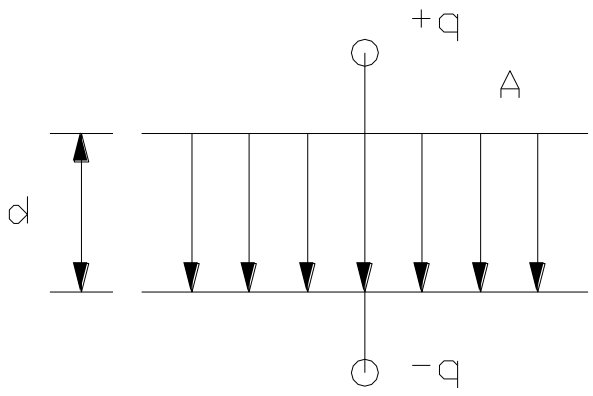
وإذا كان لدينا مكثف مكون من صفيحتين متوازيتين مساحة كل منهما A ومفصول أحدهما عن الآخر بمسافة قدرها d فإذا وصلنا كل صفيحة إلى طرف بطارية فستظهر شحنة قدرها q + على إحدى الصفائح وتظهر على الصفيحة الثانية شحنة قدرها q - وإذا كانت المسافة الفاصلة بين الصفيحتين صغيرة بالنسبة لأبعاد الصفيحة فإن خطوط الحقل $\vec{E}$ بين الصفائح تكون منتظمة ومتوازية ومفصولة بمسافات متساوية ، كما في الشكل (3 - 9):وتحسب سعة المكثفة بالعلاقة التالية :

$$C = \frac{Q}{u} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E \cdot A}{E\ d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

وإذا كان الوسط الناقل بين الصفيحتين يختلف عن الهواء ومعامل السماحية النسبي له εr فإن سعة المكثف تصبح :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

وهذه المعادلة صالحة فقط بالنسبة للمكثفات من نوع الصفائح المتوازية ، وهناك معادلات مختلفة بالنسبة للمكثفات ذات الأشكال المختلفة.



الشكل (3 - 9)

3 - 5 - 1 - المكثف المثالي:

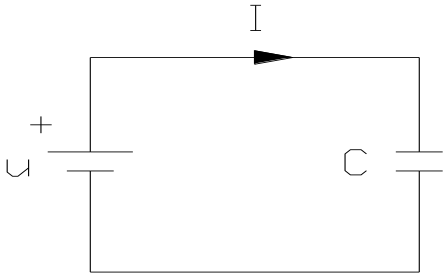
تتألف المكثفة المثالية من صفيحتين متوازيتين يفصل بينهما عازل كهربائي ، وتكون الشحنة المخزنة في عازل مكثفة مثالية معطاة بالمعادلة $q = C \cdot u$ أما التيار الذي يشحن المكثف فيعطى بالمعادلة التالية:

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du}{dt}$$

إذا كان لدينا الدارة المبينة بالشكل (3 - 10) ، المكثفة موصولة بمنبع التغذية فترة طويلة كافية لشحن المكثفة كلياً ، فإن التيار المار في المكثفة هو :

$$I = C\frac{du}{dt} = 0\ A$$

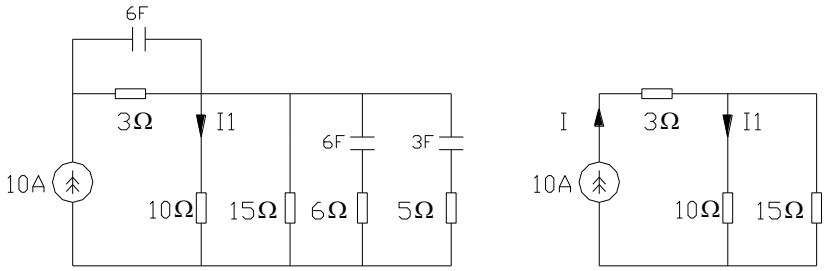
ومنه نلاحظ أن المكثفة المثالية في دارة ،مفتوحة في حالة التيار المستمر.



الشكل (3 - 10) التيار في مكثف بدارة تيار مستمر

مثال (3 - 4) :

في الدارة المبينة بالشكل (3 - 11 - a) بفرض أن المكثفات مشحونة كلياً احسب تيار الحالة الدائمة I_1 المار في المقاومة 10 Ω .



(a) **(b)**

الشكل (3 - 11)

الحل :

بما أن منبع التيار مستمر والمكثفات مشحونة كلياً يمكن اختزال الدارة إلى الشكل (3 - 11 - b) ومن ثم يكون التيار المار في المقاومة $R = 10\ \Omega$ هو :

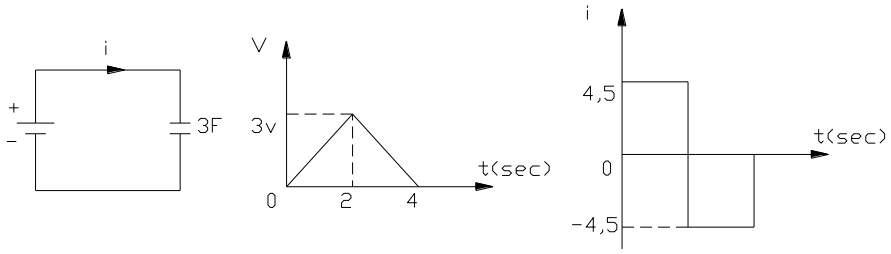
$$I_1 = I\ \frac{15}{10+15} = 10\ \frac{15}{10+15} = \frac{150}{25} = 6\ A$$

مثال (3 - 5) :

لنفرض أن الجهد المطبق على الدارة المبينة بالشكل (3 - 12 - a) موصف بالعلاقة:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & t < 0 \\ 1.5t & 0 \le t < 2 \\ (6 - 1.5t) & 2 \le t < 4 \\ 0 & 4 \le t \end{bmatrix}$$

أوجد شكل التيار المار في الدارة:



(a) **(b)** **(c)**

الشكل (3 - 12)

الشكل (3 - 12 - b) يبين إشارة الجهد المطبق ويعبر عن التيار في هذه الدارة والمبين بالشكل (3 - 12 - c) بالعلاقة التالية :

$$i = C\frac{dv}{dt} = 3\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 4{,}5 & 0 \le t < 2 \\ -4{,}5 & 2 \le t < 4 \\ 0 & 4 \le t \end{cases}$$

3 - 5 - 2 - الطاقة المخزنة في المكثفات:

تخزن الطاقة ضمن الحقل الكهربائي للمكثفة ، ويعبر عن الطاقة الآنية المقدمة لمكثفة سعتها C خلال المدة dt بالعلاقة:

$$dw = p.dt = v.i.dt = v.c\frac{dv}{dt}dt = v.c.dv$$

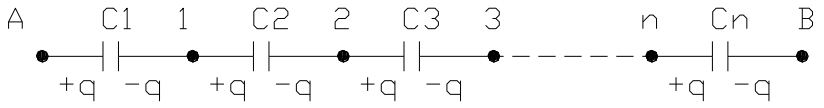
والطاقة الكلية في المكثفة تعطى بالتكامل الزمني للعبارة:

$$w = \int_0^v c.v.dv = \frac{1}{2}c.v^2$$

3 - 5 - 3 - ربط المكثفات على التسلسل:

الربط التسلسلي يعني أن تربط اللبوس السالب للمكثف الأول باللبوس الموجب للمكثف الثاني وهكذا ، والشكل (3 - 13) يبين عدد n من المكثفات مربوطاً على التسلسل .

في هذه الحالة تكون شحنات المكثفات متساوية ، وفرق الكمون الكلي على طرفيها الخارجيين مساو لمجموع الكمون على طرفي كل منها.



الشكل (3 - 13)

$$q_1 = q_2 = q_3 = ... = q_n = q$$

$$V_{AB} = V_1 + V_2 + V_3 + ... + V_n$$

$$V_1 = \frac{q}{C_1} \ , \ V_2 = \frac{q}{C_2} \ , \ V_3 = \frac{q}{C_3} \ , \ ....., \ V_n = \frac{q}{C_n}$$

من هذه العلاقة ينتج:

$$V_{AB} = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...+ \frac{1}{C_n})$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...+ \frac{1}{C_n}$$

ويمكن تعريف المكثف المكافئ للربط على التسلسل بأنه المكثف الذي تحقق سعته العلاقة التالية:

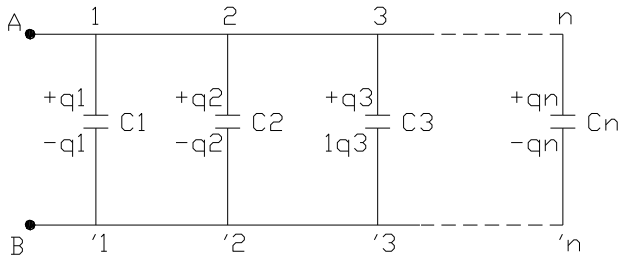
$$\frac{q}{V_{AB}} = C_{eq}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

وتكون السعة للمكثف المكافئ أصغر من سعة أي مكثف من المكثفات المربوطة على التسلسل.

3 - 5 - 4 - ربط المكثفات على التفرع:

الربط التفرعي للمكثفات يعني أن نربط اللبوس الموجب للمكثفات مع بعضها واللبوس السالب مع بعضها ، وفي هذه الحالة تكون التوترات المطبقة على المكثفات متشابهة والشحنة الكلية مساوية لمجموع الشحنات على كل مكثف ، وليكن لدينا n مكثف مربوطة على التفرع كما في الشكل (3 - 14)



الشكل (3 - 14)

$$V_1 = V_2 = V_3 = ... = V_n$$
$$q = q_1 + q_2 + q_3 + ... + q_n$$
$$q_1 = C_1 V_{AB} \ , \ q_2 = C_2 V_{AB} \ , \ q_3 = C_3 V_{AB} , \ ....., \ q_n = C_n V_{AB}$$

$$q = V_{AB}(C_1 + C_2 + C_3 + ...+ C_n)$$
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + ...+ C_n$$

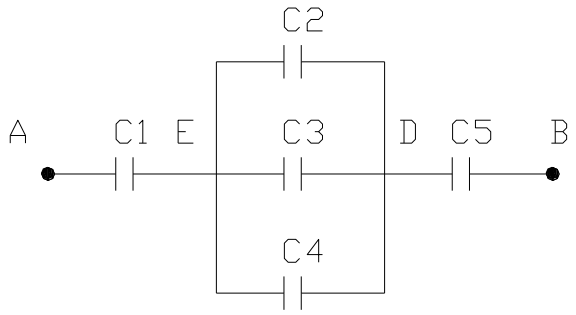
وبالتعريف يسمى المكثف المكافئ للربط على التفرع المكثف الذي تحقق سعته العلاقة التالية:

$$\frac{q}{V_{AB}} = C_{eq}$$

أي $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$ وتكون سعة المكثف المكافئ أكبر من سعة أي مكثف من المكثفات المربوطة على التفرع.

3 - 5 - 5 - الربط المختلط للمكثفات:

تكون السعة المكافئة لعدة مكثفات مربوطة بشكل مختلط كما في الشكل (3 - 15) :



الشكل (3 - 15)

ويمكن جمع المكثفات جمعاً مختلطاً على التسلسل وعلى التفرع ، ويمكن حساب المكثف المكافئ لهذا الربط باستعمال النظريتين السابقتين للجمع التسلسلي وللجمع التفرعي ، ومن الشكل (3 - 15) نكتب :

المكثف المكافئ للربط التفرعي بين النقطتين (ED) يساوي :

$$C_{ED} = C_2 + C_3 + C_4$$

والمكثف المكافئ للربط التسلسلي بين النقطتين (AB) يساوي :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{ED}} + \frac{1}{C_5}$$

وهي المكثفة المكافئة الكلية .

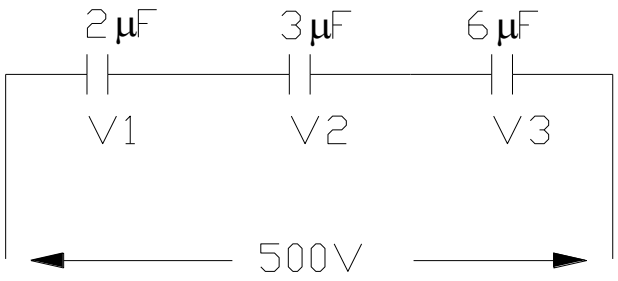
مثال (3 - 6) :

ثلاث مكثفات موصولة على التسلسل بمنبع 500v شكل (3 - 16) احسب:

١ – شحنة كل مكثف.

٢ – فرق الكمون عبر كل مكثف.

٣ – الطاقة المخزنة في المكثف C3 .



الشكل (3 - 16)

الحل :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$C_{eq} = 1 \ \mu F$$

١ – الشحنة تكون :

$$q = V.C = 500 \times 1 = 500 \ \ \mu C$$

$$q = q_1 = q_2 = q_3 = 500 \ \ \mu C$$

٢ – فرق الكمون عبر كل مكثف :

$$V_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{500}{2} = 250 \ \ v$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{500}{3} = 166,7 \ \ v$$

$$V_3 = \frac{q}{C_3} = \frac{500}{6} = 83,3 \ \ v$$

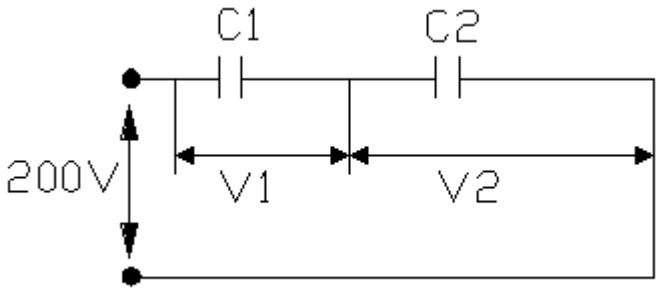
٣ – الطاقة المختزنة في المكثف C3 :

$$w = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(6)(83{,}3)^2 \times 10^{-6} = 208{,}3 \times 10^{-4} \quad \text{joules}$$

مثال (3 - 7) :

لدينا مكثفان موصولان على التسلسل الشكل (3 - 17) سعتهما C1= 6μF و C2=10μF ، وصل المكثفان على جهد V=200v .

احسب الجهد والشحنة على كل مكثف في هذه الحالة.



الشكل (3 - 17)

الحل :

$$V_1 = V\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V_1 = 200 \times \frac{10}{10+6} = 125 \text{ v}$$

$$V_2 = V\frac{C_1}{C_1 + C_2} = 200 \times \frac{6}{16} = 75 \text{ v}$$

أما الشحنة على المكثف C1 فتساوي الشحنة على المكثف C2 أي :

$$q_1 = q_2$$

$$Q1 = C_1 V_1 = 6 \times 10^{-6} \times 125 = 750 \times 10^{-6} \quad \text{C}$$

3 - 6 - الوشيعة (الملف) :

ينتج عن مرور تيار في سلك حقل مغناطيسي حوله ، وعندما يلف السلك على شكل ملف أو

وشيعة يزداد الحقل المغناطيسي قوة . ونسمي التحريضية L للملف بالنسبة بين التدفق φ والتيار I ويعطى بالعلاقة التالية :

$$L = \frac{\varphi}{I} \quad (H)$$

L – عامل التحريض الذاتي وواحدته الهنري.

φ – الفيض المغناطيسي وواحدته الويبر (wb) .

I – التيار المار في الملف وواحدته الأمبير (A) .

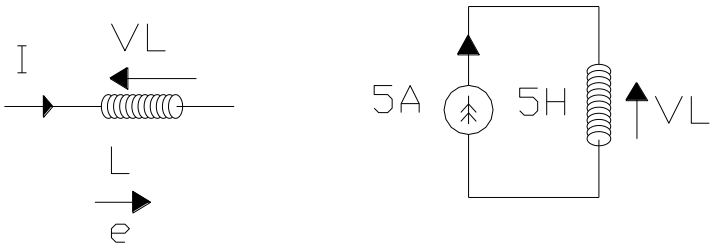
وينتج عن تغير التيار المار في الملف تغير في التدفق المغناطيسي ، وهذا ما يولد قوة محركة كهربائية للتحريض الذاتي e في الملف حسب العلاقة:

$$e = -L\frac{di}{dt} \quad (V)$$

ويعطى فرق الكمون على طرفي الوشيعة بالعلاقة :

$$V_L = L\frac{di}{dt} \quad (V) \quad \Rightarrow \quad V_L = -e$$

أي أن V و e هما في اتجاهين متعاكسين والشكل (3 - 18 - a) يبين ذلك .



إذا كان لدينا الدارة المبينة في الشكل (3 - 18 - b) الذي يبين وشيعة مثالية في دارة تيار مستمر 5A تدفق منذ مدة كافية لإيصال الدارة إلى الحالة الدائمة فإن علاقة الجهد بالتيار لهذه لدارة تكتب كالتالي :

$$V_L = L\frac{di}{dt} = 0 \quad (V)$$

ومنه نلاحظ أن سلوك الوشيعة يبدو كأنه قصر دارة ضمن دارة تيار مستمر خاضعة لشروط الحالة الدائمة.

3 - 6 - 1 - الطاقة المخزنة في وشيعة :

تعطى الطاقة الآنية المقدمة للوشيعة بالعلاقة التالية :

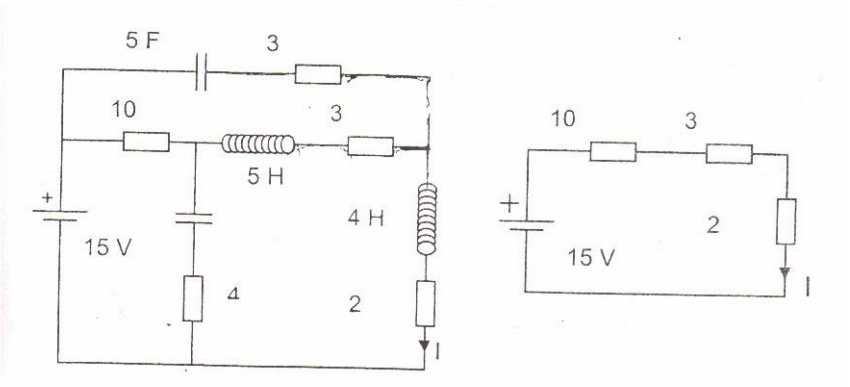
$$dw = pdt = VLidt = L\frac{di}{dt}idt = Lidi$$

أما الطاقة الكلية فهي التكامل الزمني لهذه العبارة أي :

$$w = \int_0^I Lidt = \frac{1}{2}LI^2$$

مثال (3 - 8) :

لتكن لدينا دارة التيار المستمر المبينة في الشكل (3 - 19 - a) والتي تتضمن مكثفات ووشائع مثالية . احسب قيمة التيار في الحالة الدائمة.



(a) (b)

الشكل (3 - 19)

الحل :

نستعيض عن المكثفات بدارة مفتوحة وعن الملفات بقصر الدارة ، فنختزل الدارة إلى تلك المبينة بالشكل (3 - 19 - b) وتكون قيمة التيار وفقاً لقانون أوم.

$$I = \frac{15}{10+3+2} = 1 \quad A$$

3 - 6 - 2 - ربط الوشائع على التسلسل :

ليكن لدينا عدد n من الوشائع مربوطة على التسلسل شكل (3 - 20) ويمكن أن نكتب علاقة الجهد بالتيار لعناصر الدارة التسلسلية حسب ما يلي :

$$V_1 = L_1\frac{di}{dt} \qquad V_2 = L_2\frac{di}{dt} \ \ldots\ldots\ldots \ V_n = L_n\frac{di}{dt}$$

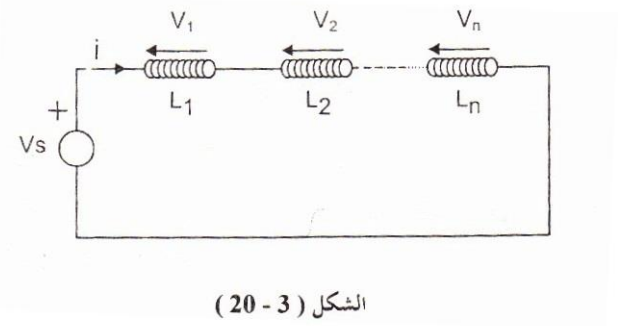
ولكن

$$V_S = V_1 + V_2 + \ldots\ldots\ldots V_n = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + \ldots\ldots\ldots + L_n\frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + \ldots\ldots\ldots + L_n)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

L_{eq} التحريضة المكافئة للدارة ، فإننا نحصل على :

$$V_S = L_{eq}\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots\ldots + L_n$$



الشكل (3 - 20)

3 - 6 - 3 - ربط الوشائع على التفرع :

ليكن لدينا عدد n من الوشائع مربوطة على التفرع ، الشكل (3 - 21)

ويمكن أن نكتب حسب قوانين كيرشوف ما يلي :

$$i_S = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots\ldots\ldots + i_n$$

$$V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} = \ldots\ldots\ldots = L_n\frac{di_n}{dt}$$

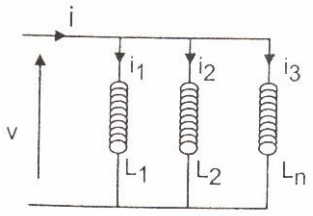
بالتعويض بعلاقة مشتق التيار نجد :

$$\frac{di_S}{dt} = \frac{V}{L_1} + \frac{V}{L_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{V}{L_n} = V\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{L_n}\right)$$

$$= \frac{V}{L_{eq}} \quad \Rightarrow \quad V = L_{eq}\frac{di_S}{dt}$$

ونستنتج من ذلك :

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{L_n}$$

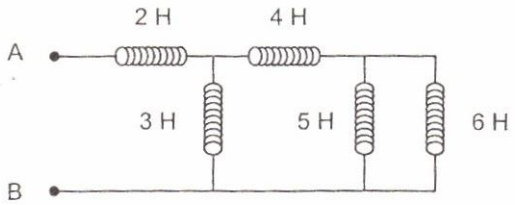


الشكل (3 - 21)

مثال (3 - 9) :

احسب عامل التحريض الذاتي بين الطرفين B وA للدارة المبينة

بالشكل (3 - 22) .



الشكل (3 - 22)

الحل : الوشيعتان 5H و6H مربوطتان على التفرع وبالتالي :

$$L_7 = \frac{5\times 6}{5+6} = 2{,}727 \quad H$$

وهكذا يصبح لدينا الوشيعة L7 على التسلسل مع الوشيعة 4H وهذا يكافئ

$$L_8 = 4 + 2{,}727 = 6{,}727 \quad H$$

الوشيعة L8 على التفرع مع الوشيعة 3H ومنه :

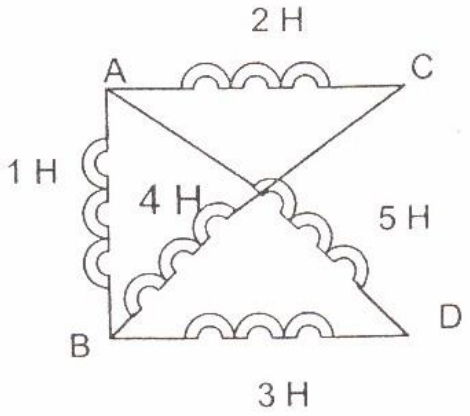
$$L_9 = \frac{3 \times 6,727}{3 + 6,727} = 2,075 \quad H$$

وأخيرا نحصل على الوشيعة المكافئة للدارة :

$$L_{eq} = 2 + 2,075 = 4,075 \quad H$$

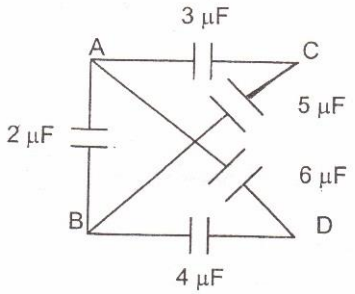
مسائل غير محلولة :

1 – احسب التحريضية المكافئة بين الطرفين A و B من الدارة المبينة بالشكل (3 - 23) في الحالتين : C و D دارة مفتوحة ، C و D قصر دارة .



الشكل (3 - 23)

2 – احسب المكثفة المكافئة بين الطرفين A و B من الدارة المبينة بالشكل (3 - 24) في الحالتين : C و D دارة مفتوحة ، C و D قصر دارة .



الشكل (3 - 24)