الفصل الثاني

نظريات حل الدارات الكهربائية

2 - 1 - مقدمة:

تتكون الدارات الكهربائية من خليط من العناصر الفعالة والعناصر غير الفعالة الموصولة بشكل تسلسلي أو تفرعي أو مختلط.في هذا الفصل سنتطرق إلى تحليل الدارات الكهربائية الأكثر تعقيداً التي يمكن أن تحتوي على أكثر من مصدر للقوى الدافقة الكهربائية، وذلك باستعمال نظريات حل الدارات الكهربائية. يمكن حل جميع الدارات الكهربائية باستخدام القوانين الأساسية في الدارات، مثل قانون أوم وقوانين كيرشوف وغيرها.ولكن بوجود مجموعة من النظريات التي تسهل كتابة معادلات الدارات الخطية،نحصل على حل سريع لها. سوف نعرض في هذا الفصل تلك النظريات في حالة دارات التيار المستمر ،مع أنها تصلح مهما كان نوع إشارة التحريض، وسوف نعمم لاحقاً استخدام هذه النظريات.

2 - 2 - 1 - استعمال قوانين كيرشوف:

يمكن تحليل الدارات الكهربائية كما يمكن إيجاد التيارات في كل فرع من فروع الدارة الواحدة منها، و ذلك بالحل المشترك لمجموعة المعادلات التي تمثل قانوني كيرشوف الأول والثاني. ولابد لذلك من تحديد ما يلي:

١. عدد معادلات التيار المستقلة (باستخدام قانون كيرشوف الأول).

٢. عدد معادلات الجهد (القوة الدافقة) المستقلة (باستخدام قانون كيرشوف الثاني) في أي دارة كهربائية تحتوي على q فرعاً و n عقدة ويطلب معرفة التيارات في فروع هذه الدارة.

حسب قانون كيرشوف الأول يمكن أن نكتب:

(n-1)عدد معادلات التيار المستقلة، وأما معادلة آخر عقدة فنحصل عليها من المعادلات الأخرى.

وحسب قانون كيرشوف الثاني نكتب:

q−(n-1) عدد معادلات القوة الدافقة الكهربائية المستقلة. وبالحل الآتي

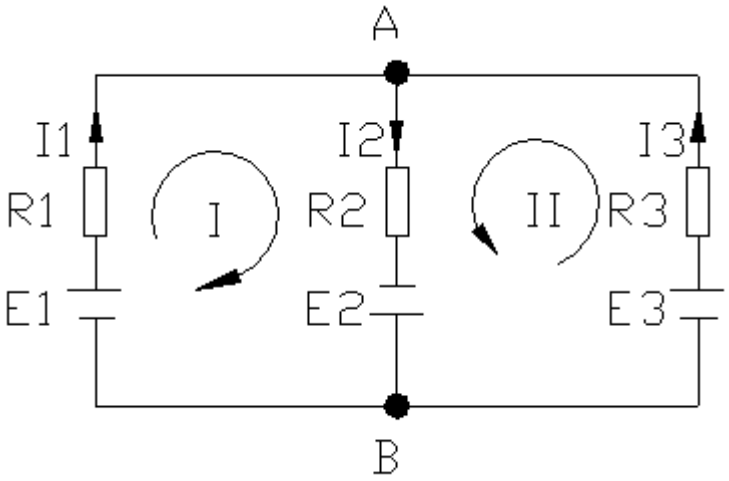
لجملة من المعادلات عددها $q = (n-1) + q-(n-1)$

أي بعدد الفروع يمكن حساب قيم الدارة الكهربائية المطلوبة .

– تطبيق :

الدارة الكهربائية المبينة بالشكل (1-2) فيها القوة الدافعة الكهربائية E_1 , E_2 , E_3 والمقاومات R_1 , R_2 , R_3 والمطلوب :

حساب قيمة التيارات الكهربائية التي ستجري في مختلف فروع الدارة .



الشكل (2 - 1)

الحل :

في الدارة المبينة بالشكل (2−1) عدد الفروع q=3 ، وعدد العقد N=2 ، عدد معادلات التيار المستقلة (n-1)=2-1=1

عدد معادلات القوة الدافعة الكهربائية المستقلة :

$$q-(n-1)=3-(2-1)=2$$

واتجاهات التيارات تحدد بالأسهم كما هو مبين بالشكل (2 - 1) .

و تطبيق قانون كيرشوف الأول في العقدة A يعطينا :

$$I_2=I_1+I_3$$

ونطبق قانون كيرشوف الثاني في الحلقتين I و II نجد :

$$E_1+E_2=I_1.R_1+I_2.R_2$$
$$E_3+E_2=I_3.R_3+I_2.R_2$$

وينتج لدينا ثلاث معادلات فيها ثلاثة مجاهيل وهي I_1 , I_2 , I_3 وبحسب هذا النظام نحصل على العلاقات التي تعطي قيمة هذه التيارات بمدلولية الدارة R_1 , R_2 , R_3 والقوى الدافعة الكهربائية E_1 , E_2 , E_3 وذلك كما يلي :

$$I_1=\frac{E_1\cdot R_3+E_1\cdot R_2+E_2\cdot R_3-E_2\cdot R_2}{R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_3+R_3\cdot R_1}$$

$$I_2=\frac{E_1\cdot R_2+E_2\cdot R_1}{R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_3+R_3\cdot R_1}$$

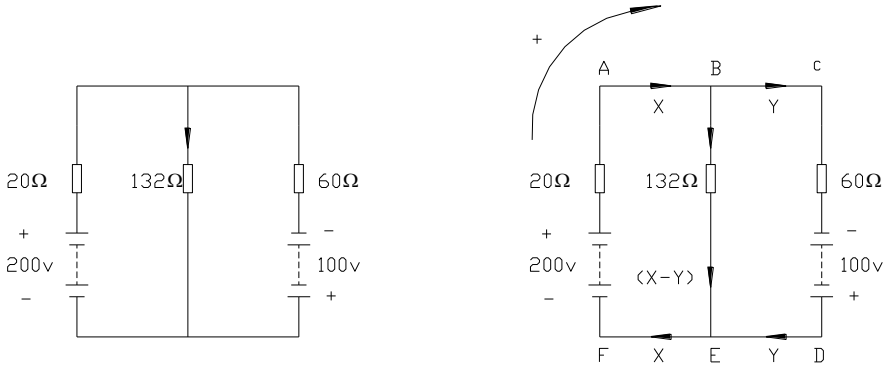
$$I_3=\frac{E_3\cdot R_1+E_3\cdot R_2+E_2\cdot R_1-E_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2+R_2\cdot R_3+R_3\cdot R_1}$$

مثال (2 - 1)

باستخدام قوانين كيرشوف احسب التيار المار في المقاومة R=132Ω ، وقيمة فرق الكمون على طرفي المقاومة Ω 20 وذلك للدارة البينة بالشكل (a-2-2)

الحل: بفرض اتجاهات التياراتX، Y كما هو موضح في الشكل (b-2-2) يمكننا كتابة ما يلي:

١. نأخذ الحلقة المغلقة ABEFA اعتباراً من النقطة F فنحصل على:



(a) **(b)**

الشكل(2-2)

$+200=20X+132(X-Y)$

$200=20X+132X-132Y$

$200=152X-132Y$

أو

$50=38X-33Y$ (1)

٢. نأخذ الحلقة المغلقة CDEBC اعتباراً من النقطة C فنحصل على:

$100=60Y-132(X-Y)$

$100=60Y-132X+132Y$

$100=192Y-132X$

$25=48Y-33X \Rightarrow -25=33X-48Y$ (2)

بحل المعادلتين (1) و(2) نحصل على قيمة التيارات X، Y:

$X=4,39A \qquad Y=3,54A$

لذلك يكون التيار المار في المقاومة 132Ω هو:

$X-Y=4.39-3.54=0,85A$

كذلك فرق الكمون على طرفي المقاومة 20Ω هو:

V=X20=87,8v

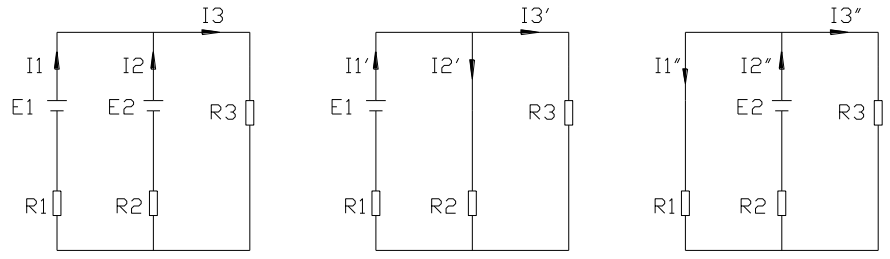
2 - 3 - نظرية التنضد:

تنص هذه النظرية على أنه في أية شبكة (دارة كهربائية) تحتوي على أكثر من مصدر للقوى الدافعة الكهربائية يساوي التيار المحصل في أية فرع من فروع هذه الدارة إلى المجموع الجبري للتيارات الناتجة عن كل مصدر على حدة مع حذف واستبدال المصادر الأخرى بمقاوماتها الداخلية إن وجدت.

إن الطريقة العملية المتبعة لحساب التيار الناتج عن أحد منابع القوة الدافقة الكهربائية يتم عندما نقصر باقي المنابع (بالنسبة لمنابع الجهد) ونفتح منابع التيار.

ليكن لدينا الدارة المبينة بالشكل(a-3-2) يطلب حساب التيارات الجزئية نتيجة تأثير E_2 و E_2 كلٍ على حدة وفي كل مرة نضع اتجاه التيارات على الشكل الجزئي ثم انطلاقاً من الاتجاهات الموضوعة تحدد قيمة التيار الحقيقي في الأفرع بطريقة الجمع الجبري (التنضد) للتيارات الفرعية في الفرع الأفرع شكل(c-b -3-2)

$$I_1 = I_1^{`} - I_1^{``} \quad , \quad I_2 = I_2^{``} - I_2^{`} \quad I_3 = I_3^{`} + I_3^{``} \quad ,$$

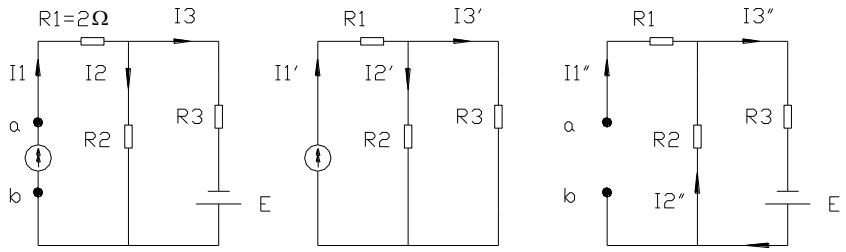


(a) **(b)** **(c)**

الشكل(3-2)

مثال (2-2) :

لدينا دارة كهربائية فيها R1=2Ω R2=4Ω R3=6Ω ومنبع تيار I=5A ومنبع قوة محركة كهربائية (جهد) E=20v والمطلوب حساب التيار في جميع فروع الدارة باستخدام نظرية التنضد . شكل(a-4-2)



(a) **(b)** **(c)**

الشكل (2 - 4)

الحل:

الشكل (b-4-2) يبين الدارة بعد قصر منبع الجهد ، ومقاومة الداخلية مهملة وفي هذه الحالة يكون

$$I_1^{'} = I = 5A$$

$$I_2^{`} = I_1^{`}.\frac{R3}{R2+R3} = 5.\frac{6}{4+6} = 3A$$

من الشكل (c-4-2)نحسب التيار الذي ينتجه منبع الجهد في فروع الدارة بحيث تكون الدارة مفتوحة عند النقطتين (b-a) مكان منبع التيار لأن المقاومة الداخلية لمنبع مساوية حتى اللانهاية. ومنه:

$$I_1^{``} = 0$$

$$I_2^{``} = I_3^{``} = \frac{E}{R3+R2} = 2A$$

وبالجمع الجبري لمركبات التيار في كل فرع من الفروع نجد أن:

$$I_1 = I_1^{`} + I_1^{``} = 5 + 0 = 5A$$

$$I_2 = I_2^{`} - I_2^{``} = 3 - 2 = 1A$$

$$I_3 = I_3^{`} + I_3^{``} = 2 + 2 = 4A$$

ويكون الجهد:

$$U_{ab} = I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_1 = 1.4 + 5.2 = 14v$$

والاستطاعة المعطاة بمولد التيار هي:

$$P_1 = U_{ab}.I = 14.5 = 70w$$

والاستطاعة التي يعطيها مولد الجهد هي:

$$P_2 = E.I_3 = 20.4 = 80w$$

وقانون توازن الاستطاعة يكون:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = U_{ab} I + E.I_3$$

$$25 \times 2 + 1 \times 4 + 16 \times 6 + = 70 + 80$$

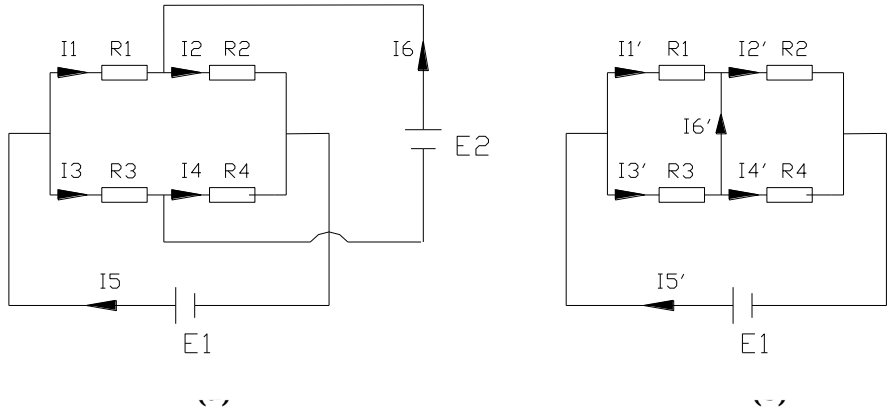
$$50 + 4 + 96 = 150$$

أي أن الاستطاعة المولدة في دارة تساوي الاستطاعة المصروفة أو المستهلكة في نفس الدارة. وهذا قانون توازن الاستطاعة.

مثال (3-2) :

في الدارة المبينة بالشكل (a-5-2) أوجد التيارات المارة في كل فرع من فروع الدارة باستخدام نظرية التنضد. علماً أن R1=2Ω، R2=3Ω، R3=4Ω , R4=1Ω , E1=20v , E2=10v

الحل:



الشكل (5-2)

في الحالة الأولى بوجود المنبع E1 فقط الشكل(b-5-2)

$$R_{eq}^{'} = (R_1 // R_3) + (R_2 // R_4)$$

$$= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{2x4}{2+4} + \frac{3x1}{3+1} = 2{,}085\Omega$$

$$I_5^{`} = \frac{E_1}{R_{eq}^{`}} = \frac{20}{2{,}083} = 9{,}6A$$

حسب مجزئ التيار

$$I_1^{`} = I_5^{`}\frac{R_3}{R_1+R_3} = 9{,}6x\frac{4}{2+4} = 6{,}4A$$

$$I_2^{`} = I_5^{`}\frac{R_4}{R_2+R_4} = 9{,}6\frac{1}{1+3} = 2{,}4A$$

$$I_3^{`} = I_5^{`}\frac{R_1}{R_1+R_3} = 9{,}6\frac{2}{2+4} = 3{,}2A$$

$$I_4^{`} = I_5^{`}\frac{R_2}{R_2+R_4} = 9{,}6\frac{3}{3+1} = 7{,}2A$$

$$I_6^{`} = I_2^{`} - I_1^{`} = 2{,}4 - 6{,}4 = -4A$$

الإشارة السالبة تدل على أن اتجاه التيار بعكس الاتجاه المرجعي

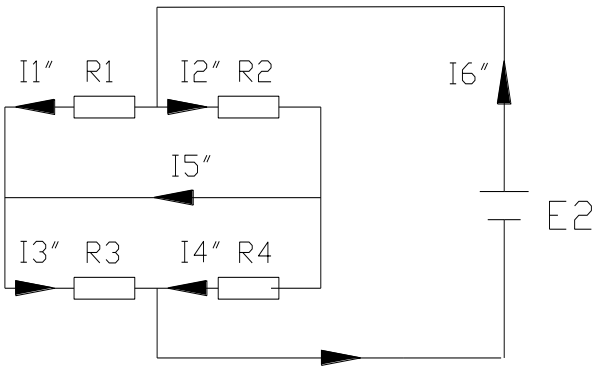
في الحالة الثانية بوجود المنبع E2 فقط الشكل (c-5-2)

$$R_{eq}^{``} = (R_1 // R_2) + (R_3 // R_4)$$

$$= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}$$

$$= \frac{2x3}{2+3} + \frac{4x1}{4+1} = 2\Omega$$

$$I_6^{``} = \frac{E_2}{R_{eq}^{``}} = \frac{10}{2} = 5\Omega$$



الشكل (c-5-2)

حسب مجزئ التيار مع مراعاة اتجاهات التيار نكتب:

$$I_1^{``} = I_6^{``}\frac{R_2}{R_1+R_2} = 5x\frac{3}{2+3} = 3A$$

$$I_2^{``} = I_6^{``}\frac{R_1}{R_1+R_2} = 5x\frac{2}{3+2} = 2A$$

$$I_3'' = I_6'' \frac{R_4}{R_4 + R_3} = 5x \frac{1}{4+1} = 1A$$
$$I_4'' = I_6'' \frac{R_3}{R_4 + R_3} = 5x \frac{4}{5} = 4A$$
$$I_5'' = I_3'' - I_1'' = 1 - 3 = -2A$$

ومنه الجمع الجبري لتيار في كل فرع من فروع الدارة:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 6,4 - 3 = 3,4A$$
$$I_2 = I_2' + I_2'' = 2,4 + 2 = 4,4A$$
$$I_3 = I_3' + I_3'' = 3,2 + 1 = 4,2A$$

$$I_4 = I_4' - I_4'' = 7,2 - 4 = 3,2A$$
$$I_5 = I_5' - I_5'' = 9,6 - 2 = 7,6A$$
$$I_6 = I_6' - I_6'' = -4 + 5 = 1A$$

2 - 4 - نظرية ثيفينين:

تنص نظرية ثيفينين على أنه يمكن الحصول على التيار المار في مقاومة قدرها R موصولة بين نقطتين B-A بتقسيم الجهد بين A و B عندما تكون المقاومة R مفصولة من الدارة على المقاومة (R+Rth) حيث Rth هي مقاومة المكافئة للدارة والمقاسة بين النقطتين (B،A) عندما تكون R مفصولة من الدارة، وعندما نقصر منابع الجهد كافة مع أخذ المقاومة الداخلية للمنابع بعين الاعتبار إذا كانت ذات قيمة. وتستخدم طريقة ثيفينين لحساب التيارات في فروع الدارة وبشكل خاص لمعرفة الجهد والتيار مع طرفي مقاومة الحمل.

وعليه تكون طريقة الحل هي:

١. فصل المقاومة المراد قياس شدة التيار فيها.
٢. حساب الجهد بين طرفي المقاومة المفصولة.
٣. الاستعاضة عن مصادر القوى بمقاوماتها الداخلية فقط وحساب المقاومة لتلك الدائرة بين طرفي المقاومة المفصولة فنحصل على Rth.
٤. نقسم الجهد في الفقرة (2) على (R+Rth) حيث Rth هي المقاومة التي حصلنا عليها في الفقرة (3). وبالتالي يمكن حساب التيار في الدارة من العلاقة التالية:

$$I = \frac{U_{AB}}{R + R_{th}}$$

مثال (2-4):

في الشكل (a-6-2) والمطلوب حساب التيار المار في المقاومة R=10Ω باستخدام نظرية ثيفينين علماً: R1=2Ω، R2=3Ω، E1=6v، E2=4v، R=10

الحل:

١- نفصل المقاومة R فيكون التيار الساري في الدارة هو الشكل (b-6-2)

$$I=\frac{E_1-E_2}{R_1+R_2}=\frac{6-4}{2+3}=0,4A$$

ويكون الجهد بين (B-A) هو:

$$U_{AB}=E_1-I(R_1)=6-(0,4)(2)=5,2v$$

وهو نفسه الجهد المحسوب عن طريق الفرع الثاني حيث:

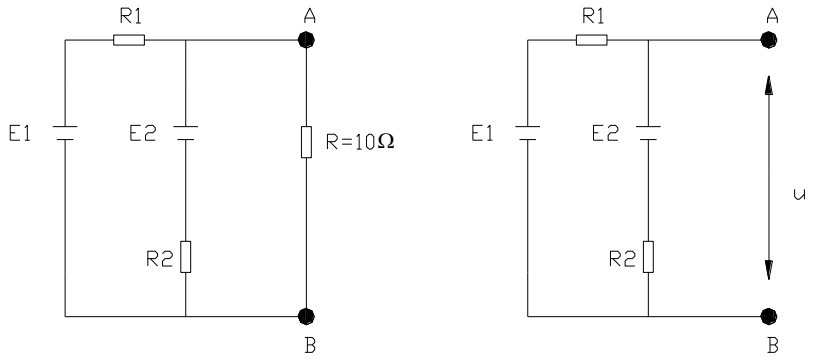
$$V_{AB}=E_2+I.R_2=4+(0,4)3=5,2v$$

٢-نحسب المقاومة المكافئة بين A-B عندما نحذف القوى الدافقة الكهربائية من الدارة فتكون المقاومة Rth هي الشكل (c-6-2)

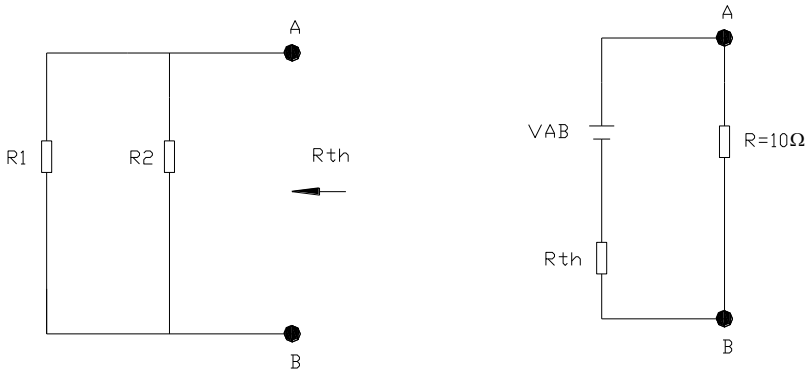
$$R_{th}=\frac{R_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2}=\frac{2.3}{2+3}=1,2\Omega$$

ويكون التيار المار في المقاومة R=10 هو الشكل (d-6-2)

$$I=\frac{U_{AB}}{R_{th}+R}=\frac{5,2}{1,2+10}=0,4613A$$



(a) **(b)**

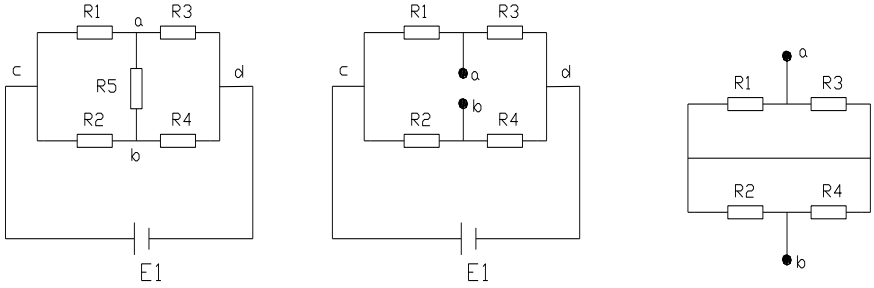


(c) **(d)**

الشكل (2-6-a)

مثال (2-5):

في الدارة المبينة بالشكل (2-7-a) والمطلوب حساب التيار المار في المقاومة R5 ثم احسب الجهد Uab إذا كان E1=2v , R1=10Ω , R2=20Ω R3=30Ω , R4=15Ω , R5=40Ω



(a) **(b)** **(c)**

الشكل (2-7)

الحل:

نحسب Uab بعد فصل المقاومة R5 الشكل(2-7-b)

١-

$$U_{ca} = E_1 \frac{R_1}{R_1 + R_3} = 2\frac{10}{10+30} = 0{,}5v$$

$$U_{cb} = E_1 \frac{R_2}{R_2 + R_4} = 2x\frac{20}{20+15} = 1{,}143v$$

ومنه

$$U_{ab} = U_{cb} - U_{ca} = 1{,}143 - 0{,}5 = 0{,}643v$$

٢-نحسب المقاومة المكافئة بين a،b بعد قصر المنبع E1 كما في الشكل (c-6-2)

$$R_{tn} = R_1 // R_3 + R_2 // R_4 = \frac{10x30}{10+30} + \frac{20x15}{20+15} = 16{,}07\Omega$$

ويكون التيار المار في المقاومة R5=40Ω هو:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_5 + R_{tn}} = \frac{0{,}643}{40 + 16{,}07} = 0{,}011A$$

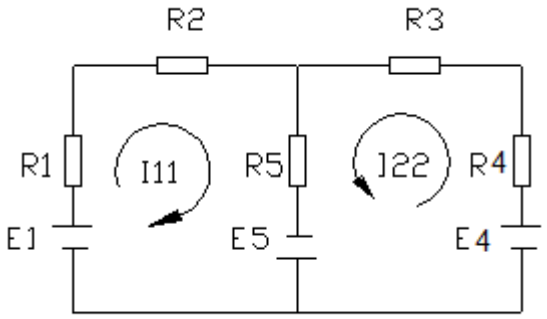
2 - 5 - طريقة تيارات الحلقات أو تيارات مكسويل:

تستخدم طريقة التيارات الدائرة بشكل كبير في حل الدارات الكهربائية، حيث فهذه الطريقة تختصر المعادلات التي تكتب حسب قانون كيرشوف الأول إذا كانت الدارة ذات عدة حلقات ، والتيارات في الأفرع تحدد من خلال التيارات الحلقية. وتعتمد هذه الطريقة على قانون كيرشوف الثاني وهي تفترض وجود تيارات وهمية دوارة في الحلقات المستقبلة تدعى التيارات الحلقية أو تيارات ماكسويل الدوارة. وعند استخدام هذه الطريقة تؤخذ الحلقات وتوضع فيها اتجاه للتيارات الدائرة ويفضل إعطاء اتجاه واحد لجميع التيارات الدائرة.

وتوضع المعادلات وفقاً لقانون كيرشوف الثاني لكل حلقة فيها تيار دائر وتكتب القوة الدافعة الكهربائية موجبة إذا كانت مع اتجاه التيار الدائر ، وسالبة إذا كانت عكس الاتجاه.

وأيضاً تكتب الجهود سالبة إذا كانت بعكس التيار وموجبة إذا كانت بنفس الاتجاه.

وفي حالة وجود فرع مشترك بين حلقتين يكون التيار الفعلي هو المجموع الجبري للتيارين الدوارين في الحلقتين المتجاورتين. أما التيارات في الأفرع الخارجية فتساوي التيار الدائر في تلك الحلقة. وسوف نستعرض الدارة التالية التي توضح هذه الطريقة ونضع المعادلات التالية حسب قانون كيرشوف الثاني الشكل (2 - 8).



الشكل (2-8)

بالنسبة للدارة الأولى:

$$I_{11}(R_1+R_2)+(I_{11}-I_{22})R_5=E_1+E_5$$
$$I_{11}(R_1+R_2+R_5)-I_{22}R_5=E_1+E_5 \qquad (1)$$

بالنسبة للدارة الثانية:

$$I_{22}(R_3+R_4)+(I_{22}-I_{11})R_5=-E_4-E_5$$
$$I_{22}(R_5+R_3+R_4)-I_{11}R_5=-E_4-E_5 \qquad (2)$$

وبملاحظة أن (R1+R2+R5) في المعادلة (1) هي مقاومة الدارة الكلية والتي يمكن تسميتها بالمقاومة الذاتية وملاحظة أن R5 هي المقاومة المتبادلة بإشارة سالب.

كذلك الحال في المعادلة (2) عند ذلك يمكن كتابة أن:

$$I_{11}R_{11}+I_{22}R_{12}=E_{11} \qquad (3)$$

E11 هي المجموع الجبري للقوة الدافعة الكهربائية في الدارة الأولى :

$$I_{22}R_{22}+I_{11}R_{21}=E_{22} \qquad (4)$$

E22 هي المجموع الجبري للقوة الدافعة الكهربائية في الدارة الثانية :

أما (R12 و R21) فهي المقاومات المتبادلة بين الدارة(1) والدارة (2) وبالعكس ، وهما متساويتان لذلك، وبعد اعتبار إشارة سالب للمقاومات المتبادلة يمكن كتابة المعادلات العامة بالشكل التالي:

$$I_{11}R_{11}-I_{22}R_{12}-I_{33}R_{13}-\cdots\cdots-I_{nn}R_{1n}=E_{11} \qquad (5)$$
$$I_{22}R_{22}-I_{11}R_{21}-I_{33}R_{23}-\cdots\cdots-I_{nn}R_{2n}=E_{22}$$
$$-I_{11}R_{21}+I_{22}R_{22}-I_{33}R_{23}-\cdots\cdots-I_{nn}R_{2n}=E_{22} \qquad (6)$$
$$-I_{11}R_{n1}-I_{22}R_{n2}-I_{33}R_{n3}-\cdots\cdots+I_{nn}R_{nn}=E_{nn} \qquad (7)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على التيارات I_{11} وI_{22} و I_{nn}، وبملاحظة التيارات في كل فرع نأخذ المجموع الجبري للتيارات في أي فرع نحصل على التيار المحصل في ذلك الفرع.

ويمكن استخدام طريقة المصفوفات لحل جملة المعادلات في (5-6-7)على الشكل التالي:

$$D=\begin{vmatrix} R_{11} & +R_{12} & +R_{13}\cdots\cdots & +R_{1n} \\ +R_{21} & R_{22} & +R_{23}\cdots\cdots & +R_{2n} \\ +R_{31} & +R_{32} & R_{33}\cdots\cdots & +R_{3n} \\ +R_{n1} & +R_{n2} & +R_{n3}\cdots\cdots & +R_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} E_{11} & +R_{12} & \cdots & +R_{1n} \\ E_{22} & R_{22} & \cdots & +R_{2n} \\ --- & --- & --- & --- \\ E_{nn} & +R_{n2} & \cdots & +R_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & +R_{1n} \\ +R_{21} & E_{22} & +R_{2n} \\ --- & --- & --- \\ +R_{n1} & E_{nn} & +R_{nn} \end{vmatrix}$$

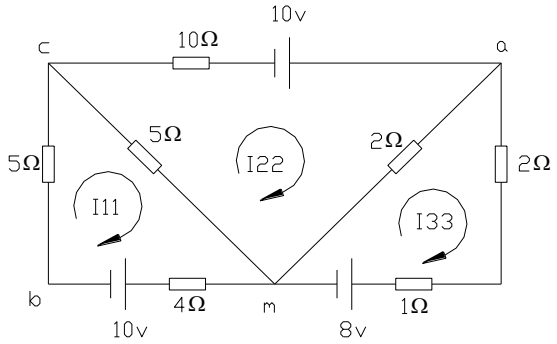
$$D_n=\begin{vmatrix} R_{11} & +R_{12} & \cdots & E_{11} \\ +R_{21} & R_{22} & \cdots & E_{22} \\ : & : & : & : \\ : & : & : & : \\ +R_{n1} & +R_{n2} & \cdots & E_{nn} \end{vmatrix}$$

ومنه ينتج:

$$I_{11}=\frac{D_1}{D}, I_{22}=\frac{D_2}{D}, I_{nn}=\frac{D_n}{D}$$

مثال (2-7):

حدد التيارات في الدارة المبينة في الشكل رقم (2-9) علماً بأن المقاومات والقوى الدافعة الكهربائية محددة على الرسم.



الشكل (2-9)

الحل:

$$R_{11} = 5 + 5 + 4 = 14\Omega$$
$$R_{22} = 5 + 10 + 2 = 17\Omega$$
$$R_{33} = 2 + 2 + 1 = 5\Omega$$

$$R_{12} = R_{21} = -5\Omega$$
$$R_{13} = R_{31} = 0$$
$$R_{23} = R_{32} = -2\Omega$$
$$E_{11} = -10v$$
$$E_{22} = 10v$$
$$E_{33} = -8v$$

وبتطبيق المعادلة (5) و(6).....(7) نجد:

$$14I_{11} - 5I_{22} + 0 = -10$$
$$-5I_{11} + 17I_{22} - 2I_{33} = 10$$
$$0 - 2I_{22} + 5I_{33} = -8$$

نحل المعادلات الثلاثة باستخدام طريقة المصفوفات:

$$D=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1009$$

$$I_{11}=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix}}{1009}=-0,635A$$

$$I_{22}=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}}{D}=0,225A$$

وبنفس الطريقة نجد أن التيار I_{33}=-1.52A .وبالتالي:

$$I_{cm}=I_{11}-I_{22}=-0,635-0,225=-0,86A$$

ويكون التيار في الفرع ma هو:

$$I_{ma}=I_{22}-I_{33}=0,225-1,52=1,745A$$

2 - 6 - طريقة التناسب :

نحل مسائل الدارات الكهربائية بطريقة سهلة وبسيطة ، وهي طريقة التناسب في هذه الطريقة لنفرض أن هناك تياراً وليكن واحد أمبير يمر في الفرع البعيد من المولد ثم نوجد التيارات والجهود في الأفرع الباقية. وبالتالي يمكن إيجاد الجهد عند بدء الدارة وتيارات الفروع وذلك بالنسبة إلى الأمبير المفروض (أمبير واحد) وعندها لا يكون الجهد المحسوب بهذه الطريقة في أول الدارة هو نفسه الجهد المسلط أو القوة الدافعة الكهربائية للمولد. لذا فلحساب تيارات الأفرع يجب ضرب التيارات المحسوبة بالنسبة بين جهد المولد/الجهد المحسوب.

وهذه الطريقة لا تستخدم إلا في الدوائر التي تحتوي على مجموعة من المقاومات الموصولة بشكل تفرعي وتسلسلي ، ولكن لا تحتوي إلا على مصدر جهد واحد.

مثال(2-8):

أوجد التيارات في الدارة المبينة بالشكل (2-10) ، ذلك باستخدام طريقة التناسب.

الحل:

نفترض أن التيار المار في الفرع الأخير ذي المقاومة Ω 2 هو 1A،عند ذلك يكون فرق الكمون بين (L-S)هو:

$$V_{LS} = I.(2+2) = 1.4 = 4v$$

ويكون التيار المار في الفرع (L-S) هو :

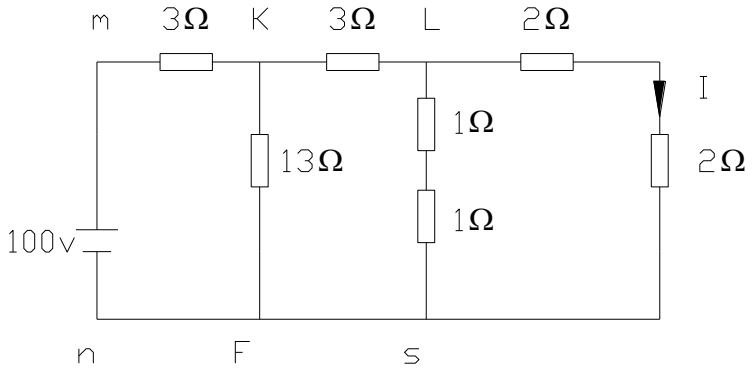
$$I_{LS} = \frac{U_{LS}}{R_{LS}} = \frac{4}{2} = 2A$$

والتيار المار في الفرع (K-L) هو:

$$I_{kl} = 2 + 1 = 3A$$

ومنه ينتج أن هبوط الكمون بين (K-L) هو:

$$U_{KL} = I.R = 3x3 = 9v$$



الشكل (2-10)

وفرق الكمون في الفرع (k-F) سيكون هو:

$$U_{KF} = U_{KL} + U_{LS} = 9 + 4 = 13$$

والتيار في الفرع (K-F) سيكون هو:

$$I_{KF} = \frac{U_{KF}}{R} = \frac{13}{13} = 1A$$

والتيار المحصل في الفرع (m-K) هو:

$$3 + 1 = 4A$$

والجهد بين (m-K) هو:

$$U_{MK} = 3x4 = 12v$$

أي أن الجهد بين (n-m) إذا كان التيار المار في الفرع الأخير ذي المقاومة (2+2) هو أمبيراً واحداً. سيكون:

$$U_{m,n} = U_{MK} + U_{KF} = 12 + 13 = 25v$$

ولأن الجهد المعطى في الدائرة هو 100v ،يجب أن نضرب كل تيار من التيارات المفروضة

والمحسوبة بالنسبة 100/25=4 وبذا يكون التيار المار في الفرع الأخير المقاومة (2+2) هو

1×4=4 A

وفي الفرع (L-S)هو:

2×4=8 A

وفي الفرع (K-L) هو:

3×4=12 A

وفي الفرع (K-F) هو:

1×4=4 A

وفي الفرع (M-K)هو:

4×4=16A

2 - 7 - أمثلة محلولة:

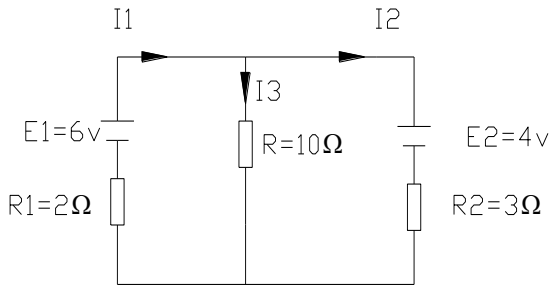
1. في الدارة المبينة بالشكل (a-11-2) القوة الدافعة الكهربائية للمنبع الأول 6v و مقاومته الداخليةΩ 2 والقوة الدافعة الكهربائية للمنبع الثاني 4v ومقاومته الداخلية Ω 3.

احسب شدة التيار في كل فرع من الدارة إذا كانت مقاومة الفرع المتوسط R=10Ω.

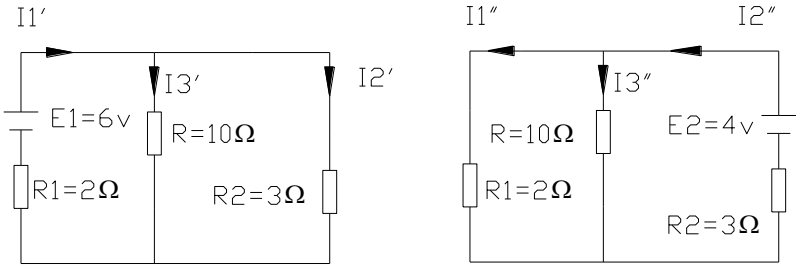
الحل:

الحل بطريقة التنضد:

باعتبار أن المنبع الأول فقط ، الشكل (b-11-2)



(a)



(b) **(c)**

الشكل (2-11)

$$I_1^{`} = \frac{6}{2 + \frac{10x3}{10+3}} = 1{,}392A$$

$$I_2^{`} = 1{,}392x\frac{10}{10+3} = 1{,}071A$$

$$I_3^{`} = 1{,}392 - 1{,}071 = 0{,}321A$$

وباعتبار أن المنبع الثاني فقط الشكل (2-11-c)

$$I_2^{``} = \frac{4}{3 + \frac{10x2}{10+2}} = 0{,}856A$$

$$I_1^{``} = 0{,}856x\frac{10}{10+2} = 0{,}713A$$

$$I_3^{``} = 0{,}856 - 0{,}713 = 0{,}143A$$

بالتنضد ينتج:

$$I_1 = 1{,}392 - 0{,}713 = 0{,}679A$$

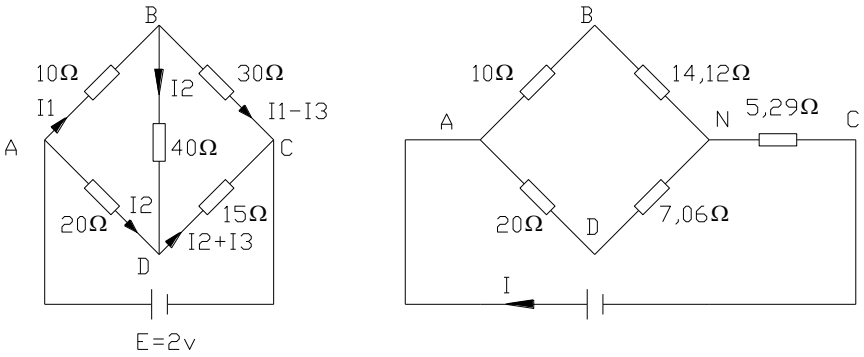
$$I_2 = 1{,}071 - 0{,}856 = 0{,}215A$$

$$I_3 = 0{,}321 + 0{,}143 = 0{,}464A$$

2. الشكل (2-12-a) يبين دارة جسر واطسطن يغذي منبع تيار مستمر E=2v عين قيمة واتجاه التيار في فرع الغالفامتر (BD)

الحل:

نحول الوصلΔ (B-C) بوصل λ كما في الشكل (2-12-b) وذلك باستعمال العلاقات التالية:



(a) (b)

الشكل (12-2)

$$R_{BN} = \frac{30x40}{30+40+15} = 14{,}12\Omega$$

$$R_{CN} = \frac{30x15}{30+40+15} = 5{,}29\Omega$$

$$R_{DN} = \frac{40x15}{30+40+15} = 7{,}06\Omega$$

$$R_{AN} = \frac{(10+14{,}12)(20+7{,}06)}{(10+14{,}12)+(20+7{,}06)} = \frac{24{,}12x27{,}06}{51{,}18} = 12{,}77\Omega$$

$$R_{eq} = R_{AC} = 12{,}77 + 5{,}29 = 18{,}06\Omega$$

$$I = \frac{2}{18{,}06} = 0{,}1108A$$

التيار في الفرع (AB)

$$I_1 = 0{,}1108\,x\,\frac{27{,}06}{51{,}18} = 0{,}0586A$$

التيار في الفرع (AD)

$$I_2 = 0{,}1108 - 0{,}0586 = 0{,}0522A$$

ومنه فرق الكمون بين(A) و(B):

$$V_{AB} = 0{,}0586x10 = 0{,}586valt$$

و فرق الكمون بين(A) و(D):

$$V_{AD} = 0{,}0522x20 = 1{,}044valt$$

وبالتالي يكون فرق الكمون بين (B) و(D) هو :

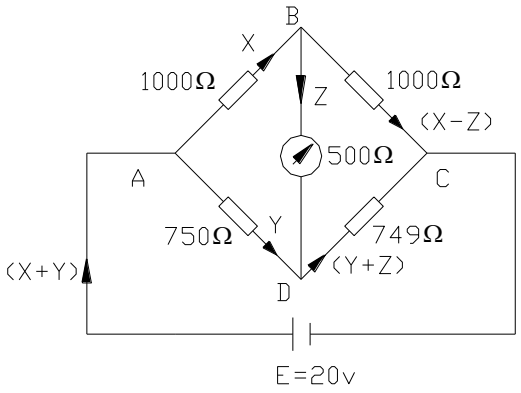
$$V_{bd} = 1,044 - 0,586 = 0,458 valt$$

التيار المار في الفرع (BD):

$$I_{BD} = \frac{0,458}{40} = 0,0115 A$$

واتجاهه من (B) إلى (D) لأن كمون النقطة (B) أكبر من كمون النقطة (D) .

3. مقاومة كل ذراع في جسر واطسطن الموضح بالشكل (13-2) هي $BC=AB=1000\Omega$ ،$CD=749\Omega$، $DA=750\Omega$، ما قيمة التيار المار في الغالفامتر ذي المقاومة 500Ω عندما يكون التوتر بين النقطتين A، C هو 20Ω



الشكل (13-2)

الحل:

نأخذ الحلقة المغلقة ABDA فنجد:

$$+1000X + 500Z - 750Y = 0$$

$$4X - 3Y + 2Z = 0 \qquad (1)$$

نأخذ الحلقة المغلقة BCDB نكتب:

$$1000(X - Z) - 749(Y + Z) - 500Z = 0$$

$$1000X - 1000Z - 749Y - 749Z - 500Z = 0$$

$$1000X - 749Y - 2249Z = 0 \qquad (2)$$

نأخذ الحلقة ABCEA نكتب:

$$1000X + 1000(X - Z) = 20$$

$$1000X + 1000X - 1000Z = 20$$

$$2000X - 1000Z = 20$$

$$100X - 50Z = 1 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) و(2) نحصل على:

$$\frac{X}{6747 + 1498} = \frac{Y}{2000 + 8996} = \frac{Z}{-2996 + 3000} = K$$

$$\frac{X}{8245} = \frac{Y}{10,996} = \frac{Z}{4} = K$$

$$Z = 4K$$

$$X=8245K$$

بتعويض هذه القيم في المعادلة (3) نجد:

$$100 \times 8245K - 50 \times 4K = 1$$

$$K = \frac{1}{824300}$$

وعليه فإن: $Z = \frac{4}{824300} = 0,485x10^{-6}\,A = 0,485MA$