*الفصـل الأول*

*صفـوف المجمـوعات*

**(1-1)** *تمهيد:*

*نذكر فيما يأتي بعض الرموز والمفاهيم التي نستخدمها في هذا الكتاب.*

 *نعتبر أنَّ العمليات الأساسية على المجموعات والعلاقات فيما بينها معروفة تماماً لدى القارئ ، مثل: التقاطع، الاجتماع، الفرق، الفرق التناظري.*

* + 1. *سنرمز للمجموعات بأحرف لاتينية كبيرة من قبيل:**، ونرمز لعناصرها بأحرف لاتينية صغيرة من قبيل:* *.*

*بشكل خاص سنرمز بـ*  *للمجموعة الخالية (أي المجموعة التي ليس فيها أي عنصر).*

* + 1. *سنتعامل مع مجموعات الأعداد:*

**الطبيعية** *،*

**الصحيحة**  *،*

**العادية**  *،*

**الحقيقية** *،*

**العقدية***.*

**(3-1-1)** *إذا كانت*  *مجموعة مفروضة فنرمز بـ*  *( أو*  *) لأسرة كل المجموعات الجزئية في* ، أي*: .*

**(4-1-1)** *كل مجموعة جزئية من*  *نسميها صفاً من أجزاء* *، أو صفاً من*  *للاختصار)، وسوف نستخدم من الرموز*



*للدلالة على صفوف المجموعات.*

*لاحظ أن كل عنصر من صف هو مجموعة جزئية من X.*

**(5-1-1)** *إذا كانت*  *مجموعة منتهية (أي يوجد فيها عدد منتهٍ من العناصر) وفيها*  *عنصر فنكتب .*

**(6-1-1)** *نقول إن الصف  منتهٍ إذا وُجِدَ فيه عدد منتهٍ من العناصر وليكن* *عنصراً ونكتب في هذه الحالة:  ، وكذلك  .*

*وإذا كان الصف  يحوي عدداً غير منتهٍ  من المجموعات الجزئية من*  *فنكتب  أو .*

*بشكل مشابه:*

*إذا كانت  مجموعة أدلة (منتهية أو عدودة أو غير عدودة) فنكتب:*

* أو *

**(7-1-1)** *إذا كان  و صفين من*  *فنكتب  إذا وفقط إذا كان كل عنصر من  هو بالوقت نفسه عنصر من .*

**(8-1-1)** *إذا كانت  مجموعات مفروضة فيكون اجتماعها هو:*

*,*

*ويتألف من كل العناصر الموجودة على الأقل في إحدى هذه المجموعات.*

*بشكل مشابه: يكون اجتماع المجموعات  هو:*

**

*إذا كانت  أسرة مجموعات مفروضة، حيث  مجموعة أدلة، فنرمز لاجتماعها بالرمز ، وهذا بدوره يتألف من كل العناصر الموجودة على الأقل في إحدى المجموعات .*

**(9-1-1)** *إذا كانت  مجموعات مفروضة فيكون تقاطعها هو:*

*,*

*ويتألف من كل العناصر الموجودة في جميع المجموعات* *.*

*بشكل مشابه لحالة الاجتماع نكتب:*

* أو *

*ويتألف هذا بدوره من العناصر الموجودة في جميع المجموعات*  *أو* *.*

**(10-1-1)** *نقول عن مجموعتين*  *إنهما منفصلتان (أو غير متقاطعتين) إذا كان لا يوجد فيهما عناصر مشتركة. في هذه الحالة نكتب .*

**نقول إن المجموعات**  **منفصلة مثنى مثنى اذا كانت كل مجموعتين مختلفتين منفصلتين** *، أي  عندما .*

**(11-1-1)** *إذا كانت المجموعات  منفصلة مثنى مثنى فنعبّر عن اجتماعها بالشكل:*

*.*

*وبشكل مشابه نكتب: ، وكذلك  .*

*نقول عن الصف*  *إنه منفصل إذا كانت المجموعات* *منفصلة مثنى مثنى.*

**(12-1-1)** *إذا كانت*  *مجموعة جزئية من المجموعة*  *فتكون المجموعة المتممة لها هي* *، ونكتب فقط  عندما لا يحدث التباس.*

*من أجل مجموعة أدلة  (منتهية أو عدودة أو غير عدودة) يكون:*

**

*وهذه تسمى قوانين دومورغان . إضافة لذلك يكون:*

**

**(13-1-1)** *نرمز لمتتالية المجموعات بـ  ( أو اختصاراً بـ )، ونعرف:*

* *النهاية العليا لها على أنها .*
* *والنهاية الدنيا لها على أنها .*

*( يرمز للنهاية العليا أيضاً بالرمز  وللنهاية الدنيا بالرمز  ).*

*نقول إن المتتالية  متقاربة إذا كان *

*ونكتب في هذه الحالة  ونسميها نهاية المتتالية.*

 *يمكن إثبات الآتي:*

*( أ ) يكون دوماً  .*

*(ب) تتألف المجموعة  من العناصر الموجودة في كل المجموعات  باستثناء عدد منتهٍ من هذه المجموعات.*

*( ج) تتألف المجموعة  من العناصر الموجودة في عدد غير منته من المجموعات .*

*( د) إذا كانت المتتالية متزايدة، أي ، فتكون متقاربة ونهايتها . في هذه الحالة نكتب* *.*

*(هـ) إذا كانت المتتالية  متناقصة، أي ، فتكون متقـاربة ونهايتها  . في هذه الحالة نكتب* *.*

*( و) كل متتالية متزايدة أو متناقصة تسمى متتالية مطردة ( بازدياد أو بتناقص ).*

**(14-1-1) يعرف الجداء الديكارتي لمجموعتين****، ويرمز له بـ ، على أنه ثنائيات مرتبة:**

**

*جدير بالذكر أن .*

*بشكل مشابه نعرف الجداء الديكارتي لعدد منته من المجموعات :*

**

*وكذلك لعدد غير منته من المجموعات :*

**

*إذا كان  فنكتب:*

**

*بشكل خاص: إذا كان  مجموعة الأعداد الحقيقية فإن:*

**

*نكتب أيضاً: .*

**(15-1-1) يمكن التعبير عن مجموعة الأعداد الحقيقية**  **بأحد الأشكال:**

**

*إذا كانت*  *أعداد حقيقية من*  *فنعرف المجال الذي طرفاه*  *و*  *:*

**المفتوح:** **

**المغلق:** **

**نصف المفتوح** *(أو نصف المغلق):*

**

*نعتبر دوماً أن .*

**(16-1-1) اذا كانت**  **مجموعة مفروضة فنرمز بـ  لعدد عناصر**  ونسمي هذا العدد قدرة المجموعة **.**

*نعتبر أن  و  إذا كانت المجموعة*  *غير منتهية.*

**نقول عن مجموعتين** **إنهما متكافئتان (أو لهما نفس القدرة ) إذا أمكن إنشاء تطبيق واحد – لواحد بينهما ( أي يمكن إنشاء تقابل بينهما ).**

*في حالة خاصة: إذا كانت كلا المجموعتين*  *منتهية فتكونان متكافئتين إذا وفقط إذا كان فيهما العدد نفسه من العناصر. هذا الكلام غير صحيح من أجل المجموعات غير المنتهية.*

*نقول إن المجموعة*  *عدودة (قابلة للعد) إذا كانت A تكافئ مجموعة الأعداد الطبيعية. بعبارة أخرى: تكون المجموعة*  *عدودة إذا أمكن ترقيم عناصرها بالأعداد الطبيعية على شكل متالية متباينة لانهائية.*

**من الأمثلة على المجموعات العدودة:**

* *مجموعة الأعداد الزوجية (وهي مجموعة جزئية من* *) وهي غير منتهية.*
* *مجموعة الأعداد الفردية (وهي مجموعة جزئية من* *) وهي غير منتهية.*
* *مجموعة الأعداد الأولية (وهي مجموعة جزئية من* *) وهي غير منتهية.*
* *مجموعة الأعداد الصحيحة* *.*
* *مجموعة الأعداد العادية* *.*
* *الاجتماع العدود لأسرة من المجموعات المنتهية أو العدودة.*

**من الأمثلة على مجموعات غير عدودة:**

* *مجموعة الأعداد الحقيقية* *.*
* *المجال ، بل كل المجالات من الشكل:*

**

*نقول عن مجموعة*  *إن لها قدرة المستمر إذا كانت تكافئ المجال .*

*لاحظ أن كل مجموعة لها قدرة المستمر تكون غير عدودة.*

*نقول عن مجموعة*  *إنها عدودة على الأكثر (أو قابلة للعد على الأكثر) إذا كانت*  *إما منتهية أو عدودة.*

**(17-1-1) ليكن  صفاً من**  **ولتكن . عندئذٍ نضع:**



*لاحظ أن كلاً من*  *و  عبارة عن صف من* *.*

**(18-1-1) نذكر فيما يأتي بعض العلاقات بين العمليات على المجموعات:**

*(أ)  (هذا يعني أن التقاطع توزيعي على الاجتماع).*

*(ب)  (هذا يعني أن الاجتماع توزيعي على التقاطع).*

*(ج) إذا كانت  أسرة عدودة من المجموعات (ليست بالضرورة منفصلة مثنى مثنى) فيمكن تمثيل اجتماعها بشكل اجتماع مجموعات منفصلة مثنى مثنى:*

**

*وذلك بأخذ المجموعات  كما يأتي:*

**

*(د) ليكن  و  صفان من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى، عندئذٍ يكون:*

**

**(19-1-1) من أجل أسرة المجموعات (الصف)  يكون**  **

**(20-1-1)** *نقول إن المجموعات* *تشكل تغطية للمجموعة*  *إذا كان:*



*ونقول إن المجموعات* *تشكل تجزئة للمجموعة*  *إذا كانت منفصلة مثنى وكان*  ( أي أن ).

قد تكون التغطية أو التجزئة منتهية.

**(21-1-1)** *نذكر الأمور الآتية البسيطة عن العمليات على المجموعات:*

**

**(2-1)** *نصف الحلقة ونصف الجبر:*

*فيما يأتي نعتبر أن*  *مجموعة غير خالية و  صف كل المجموعات الجزئية في* *، كما نعتبر أن*  *صف جزئي غير خال من* *، أي .*

**(1-2-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف*  *إنه يشكل نصف حلقة على*  *إذا كان من أجل أية مجموعتين  فإن:*

*(ن ح***1*) .***

*(ن ح***2*) توجد مجموعات منفصلة مثنى مثنى  بحيث إن:***

*.*

**(2-2-1)** *نتيجة:*

**(1)** *لتكن*  *نصف حلقة على*  *ولتكن ، عندئذٍ بحسب* ***(ن ح 2)*** *توجد مجموعات  بحيث إن:*

*.*

*من هذا ينتج أن . أي إن: .*

**(2)** *إذا كانت  فنجد بالاستقراء أن .*

**(3-2-1)** *أمثلة على نصف الحلقة:*

**(1)** *لنأخذ المجموعة  والصف ، فنجد أن*  *نصف حلقة على*  *وذلك لأنه:*

***(ن ح*** 1***)*** *من أجل أي مجالين  ، فإن:*

 اذا كان المجالان  منفصلين و

اذا كان المجالان غير منفصلين، حيث:



*انظر الشكل التوضيحي في الصفحة التالية:*

















***(ن ح* 2*)*** *ليكن  ، عندئذٍ:*

*إما  وذلك عندما يكون  .*

*عدا ذلك يكون:*

**

*الطرف الأيمن في المساواة الأخيرة يمثل اجتماع مجالين من الصف* *.*

**(2)**  *بشكل مشابه لما تقدم يمكن التحقق أن كلاً من الصفوف الآتية يشكل نصف حلقة على*  *:*

**

**(3)** *لنأخذ الآن المجموعة  وصف المجالات نصف المفتوحة فيها:*

**

*فنجد أن  نصف حلقة على . كذلك الأمر مع الصف:*

**

**(4)** *من أبسط الأمثلة على نصف الحلقة على مجموعة مفروضة*  *(غير خالية) هو*

*الصف*  *وكذلك الصف* *.*

**(4-2-1)** *ملاحظة:*

*إذا كانت*  *نصف حلقة على مجموعة*  *وكانت* *، فليس بالضرورة أن يكون* *. فمثلاً: لو أخذنا نصف الحلقة*  *من المثال (***1***) والمجموعتين  و  فمن الواضح أن .*

**(5-2-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف*  *إنه يشكل نصف جبر على*  *إذا كان*  *نصف حلقة وكان أيضاً .*

**(6-2-1)** *أمثلة على نصف الجبر:*

**(1)** *من أجل كل مجموعة*  *(غير خالية) تشكل كل من الصفوف الآتية نصف جبر على* *:*

**

**(2)** *لتكن المجموعة:*

**

*وليكن الصف:*

**

*عندئذٍ*  *يشكل نصف جبر على*  *.*

**(3)** *كل من صفوف المجالات الآتية يشكل نصف جبر على المجموعة :*

**

*حيث نعتبر أن .*

**(7-2-1)** *مبرهنة:*

*ليكن*  *نصف جبر على*  *. عندئذٍ:*

**(1)** *من أجل كل  يوجد عدد منته من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى  بحيث يكون (ليس بالضرورة أن يكون).*

**(2)** *إذا كانت  فإن .*

*الإثبات:*

**(1)** *بما أن*  *نصف حلقة فنجد بحسب الشرط (ن ح* 1 *) أنه من أجل كل :*

**

**(2)** *لتكن  عندئذٍ بحسب التعريف يكون  ومن ثم  . وهكذا بالتدريج نحصل على المطلوب.*

**(8-2-1)** *مبرهنة:*

*ليكن*  *نصف جبر على*  *وليكن:*

**

*صفين منفصلين بحيث إن  .*

*عندئذٍ يوجد عدد طبيعي*  *ومجموعات  من*  *بحيث تشكل المجموعات  صفاً منفصلاً من*  *ويكون:*

**

*الإثبات:*

*بحسب (*18-1-1*)/(د) يكفي الإثبات من أجل (تمثيل الاجتماعات المنفصلة لعناصر* *):*

**

*بما أن  من أجل*  *فيكون:*

**

*حيث إن  ومنفصلة مثنى مثنى ، لذلك يكون:*

**

*الطرف الأيمن في هذه العلاقة يمثل اجتماعاً منتهياً لعدد منته من تقاطع مجموعات منفصلة مثنى مثنى، وهذا بدوره يمكن التعبير عنه كاجتماع منته منفصل لعدد منته من التقاطعات. أي إن الطرف الأيمن عبارة عن اجتماع منته لمجموعات منفصلة مثنى مثنى من* *. ومنه نحصل على المطلوب.*

**(3-1)** *الحلقة والجبر:*

*فيما يأتي نعتبر أن* *مجموعة غير خالية و صف المجموعات الجزئية في X كما نعتبر أن  صف جزئي غير خال من* *؛ أي .*

**(1-3-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف  إنه حلقة على*  *إذا كان من أجل أية مجموعتين  فإن:*

***(ح* 1*)*** *،*

***(ح* 2*)*** *.*

**(2-3-1)** *ملاحظة:*

*كل حلقة  هي نصف حلقة، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة. لأنه:*

*إذا كانت*  *حلقة وكان فيكون لدينا بحسب التعريف السابق:*



*وبما أن:*

**

*فينتج أن . بذلك يكون الشرط (ن ح* 1*) محققاً.*

*إذا فرضنا  فنجد أن الشرط (ن ح* 2*) محقق أيضاً.*

*الآن: إذا كانت*  *نصف حلقة و  فليس بالضرورة أن  كما رأينا في (*2-2-1*).*

**(3-3-1)** *مبرهنة:*

*لتكن حلقة على* *. عندئذٍ:*

*(***1***)*  **

*(***2***) من أجل  يكون:  وكذلك .*

*الإثبات:*

***(*1*)*** *لتكن . عندئذٍ .*

***(*2*)*** *ليكن . عندئذٍ يكون:*

**

*وكذلك*

**

**(4-3-1)** *نتيجة:*

*إذا كانت*  *حلقة وكان  فإن*  و *،*

*ويتم إثبات ذلك بالاستقراء.*

**(5-3-1)** *أمثلة عن الحلقة:*

**

*حيث*  *مجموعة جزئية (كيفية) من* *.*

 *فيما يأتي نعتبر أن .*

**(6-3-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف  إنه جبر على*  *إذا كان  حلقة وكان أيضاً .*

**(7-3-1)** *مبرهنة:*

*يكون الصف  جبراً على*  *إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:*

***(ج* 1*)*** *من أجل  فإن .*

***(ج* 2*)*** *من أجل  فإن  (حيث ).*

*الإثبات:*

*لنعتبر بداية أن  جبر على* *. عندئذٍ يكون بحسب التعريف (*6-3-1*):*

**

*أي إن (ج* 1*) محقق. يكون أيضاً . أي إن (ج* 2*) محقق.*

*والآن نعتبر أن الشرطين (ج* 1*) و (ج* 2*) محققان ونبيّن أن  جبر على**.*

*لدينا هنا:  من أجل أي . يكون أيضاً بحسب (ج* 2*):*

**

*لذلك فإن  حلقة على* *. وبما أن  بحسب (*3-3-1*)/(*1*) فيكون:*

*.*

*بذلك يتم المطلوب.*

**(8-3-1)** *أمثلة عن الجبر:*

***(*1*)*** *الصفوف المذكورة في (*5-3-1*).*

***(*2*)*** *لتكن  وليكن  صف المجموعات*  *الجزئية من  بحيث إنه:*

*إما*  *منتهية أو  منتهية:*

*إن  جبر على*  *(أثبت ذلك).*

**(4-1)** * الحلقة و الجبر:*

 *فيما يأتي نعتبر أن*  *مجموعة غير خالية و* *صف المجموعات الجزئية في* *، كما نعتبر أن  و صفان جزئيان غير خاليين من* *.*

**(1-4-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف  إنه حلقة على*  *إذا تحقق الشرطان الآتيان:*

*(****ح* 1***) من أجل  يكون .*

*(****ح* 2***) من أجل  يكون .*

**(2-4-1)** *ملاحظة:*

***(*1*)*** *من الواضح أن كل حلقة هي حلقة لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.*

***(*2*)*** *بأخذ  في ( ح* 1*) نجد أن .*

**(3-4-1)** *مبرهنة:*

*إذا كانت*  *حلقة وكانت  فإن .*

*الإثبات:*

*للحصول على المطلوب يكفي إثبات صحة المساواة .*

*وهذا يتم كالآتي:*

**

**

**

**

**

**

*وبذلك يتم المطلوب.*

**(4-4-1)** *أمثلة عن  الحلقة:*

***(1)*** *الصفوف المذكورة في (*5-3-1*).*

***(2)*** *لتكن*  *مجموعة عدودة وليكن  صف المجموعات الجزئية في*  *العدودة على الأكثر. عندئذٍ  تشكل  حلقة على* *.*

**(5-4-1)** *تعريف:*

*نقول عن الصف  إنه  جبر على*  *إذا كان  حلقة وكان .*

**(6-4-1)** *ملاحظة:*

***(*1*)*** *من الواضح أن كل  جبر هو جبر لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة.*

***(*2*)*** *إذا كان  جبر على*  *فإن .*

***(*3*)*** *إذا كان  جبر على*  *وكان  فإن .*

***(*4*)***  *إذا كان  جبر على*  *وكان فإن  .*

***(5)***  *يكون جبر على*  *إذا وفقط إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية (أثبت ذلك):*

*(ج* 1*)* .

*(ج 2) اذا كان*  *فان* *.*

*(ج 3) اذا كان  فان*  .

لذلك تعتبر هذه الشروط بمثابة تعريف لـ *الجبر*.

**(7-4-1)** *أمثلة عن  الجبر:*

***(*1*)*** *الصفوف المذكورة في (*5-3-1*).*

***(*2*)*** *الصف  المذكور في (*4-4-1*)/(*2*).*

***(*3*)*** *لتكن* *مجموعة غير خالية وليكن  صف المجموعات الجزئية في* *العدودة أومتمماتها عدودة. عندئذٍ  جبر على* *.*

**(8-4-1)** *ملاحظة:*

*من الطبيعي أن يطرح السؤال الآتي: هل يوجد جبر دون أن يكون جبر ؟ الجواب "نعم" كما يبين المثال الآتي:*

**(9-4-1)** *مثال عن جبر ليس جبر:*

*في المجموعة  نأخذ صف المستطيلات :*

**

*ونعتبر أن .*

*ليكن  صف الاجتماعات المنتهية لعناصر :*

**

*ولنبين أن  جبر على .*

*في الواقع لدينا  لأن كل مجموعة  يمكن تمثيلها بشكل اجتماع منته لمجموعات من ، على الأقل اجتماع واحد ، ومن ثم .*

*الآن نعتبر أن*  *اجتماع لصفر عنصر من  ومن ثم .*

*لتكن الآن . عندئذٍ:*

**

*من ثم .*

*يكون أيضاً .*

*إذا كتبنا (مثلاً):*



*فنجد أن: ؛ أي إن  جبر على .*

*الآن لنأخذ المجموعات:*

**

*عندئذٍ:  ليس اجتماعاً منتهياً لعناصر ، من ثم لا ينتمي إلى . أي إن  ليس جبر.*

**(5-1)** *صف دنكين والصف المطرد:*

 *فيما يأتي نعتبر أن* *مجموعة غير خالية و* *صف المجموعات الجزئية في* *، كما نعتبر أن  و صفان جزئيان غير خاليين من* *.*

**(1-5-1)** *تعريف:*

*نقول عن  إنه صف دنكين على* *، إذا حقق الشروط الآتية:*

***(د* 1*)*** *.*

***(د* 2*)*** *من أجل  بحيث  فإن .*

***(د* 3*)*** *من أجل  منفصلة مثنى مثنى فإن .*

**(2-5-1)** *ملاحظة:*

1. *ليكن*  *صف دنكين ولتكن* *. عندئذٍ من (د* 1*) و(د* 2*) ينتج أن:*

*.* 

*بشكل خاص ينتج أن* *.*

*(*2*)* *مما تقدم ينتج أن كل  جبر هو صف دنكين، لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة، كما سنبين لاحقاً في مثال (*4-5-1*)/(*2*) أدناه. لكن المبرهنة الآتية تبين متى يكون صف دنكين  جبر.*

**(3-5-1)** *مبرهنة:*

*يكون صف دنكين   جبر إذا وفقط إذا كان مغلقاً بالنسبة لعملية التقاطع المنتهي (أي إذا كان  فإن  ).*

*الإثبات:*

*رأينا فيما سبق أن كل  جبر هو صف دنكين.*

*نعتبر الآن أن  صف دنكين ومغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي ونبين أنه  جبر.*

*وجدنا فيما سبق أيضاً أن ، وكذلك  من أجل .*

*الآن: لتكن  ، وعلينا إثبات أن .*

*بما أن:*



*فيكون .*

*بالتدريج نجد أن  عندما ، حيث*  *عدد طبيعي.*

*نضع الآن( انظر (*18-1-1*)/(ج) ):*



*فنجد أن . وبذلك يتم المطلوب.*

**(4-5-1)** *أمثلة عن صف دنكين:*

***(*1*)*** *.*

***(*2*)*** *كل  جبر هو صف دنكين.*

***(*3*)*** *لتكن المجموعة ، وليكن:*

**

*إن  صف دنكين لكنه ليس  جبر على X ، حيث يكفي ملاحظة أن*

**

***(*4*)*** *لتكن المجموعة ، وليكن:*

**

*إن  صف دنكين.*

 *قبل المتابعة يفضل الإطلاع على (*13-1-1*) وخاصة ما يتعلق بالمتتالية المتزايدة والمتتالية المتناقصة.*

**(5-5-1)** *تعريف***:**

*نقول عن الصف  إنه صف مطرد على*  *إذا حقق الشرطين الآتيين:*

***(ص م* 1*)*** *من أجل أية متتالية متزايدة  و  فإن .*

***(ص م* 2*)*** *من أجل أية متتالية متناقصة  و  فإن.*

**(6-5-1)** *ملاحظة:*

***(*1*)*** *من الواضح أن كل جبر هو صف مطرد لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة. أكثر من ذلك: كل حلقة هي صف مطرد.*

*(***2***) من التعريف السابق و (*13-1-1*) ينتج أن  صف مطرد إذا وفقط إذا كان من أجل أية متتالية مطردة فإن .*

**(7-5-1)** *أمثلة عن الصف المطرد:*

***(*1*)****.*

***(*2*)*** *لتكن المجموعة ، وليكن الصف:*

**

*إن*  *صف مطرد لكنه ليس صف دنكين.*

 *فيما يأتي نوجد العلاقات بين الجبر و الجبر و الحلقة والصف المطرد.*

**(8-5-1)** *مبرهنة:*

*ليكن  جبراً على* *. عندئذٍ:*

*يكون  جبر إذا وفقط إذا كان  صفاً مطرداً.*

*الإثبات:*

*إذا كان  جبر على* *فإنه من أجل أية متتالية  بحيث  يكون  وكذلك  (سواء كانت المتتالية مطردة أو لم تكن).*

*والآن نعتبر أن  صف مطرد على*  *ونبين أن  جبر على*  *(طبعاً مع الأخذ بعين الاعتبار أن  جبر بالفرض).*

*من الفرض لدينا: .*

*وبما أن  حلقة فإن  من أجل .*

*لتكن الآن  ولنضع:*

**

*فنجد أن المتتالية  متزايدة. لذلك يكون*

**

*ولكن . بذلك يكون  حلقة و  .*

*لذلك فإن  جبر. وهو المطلوب.*

**(9-5-1)** *مبرهنة:*

*لتكن  حلقة على* *. عندئذٍ:*

*تكون  حلقة إذا وفقط إذا كانت  صفاً مطرداً.*

*الإثبات:*

*إذا كانت  حلقة فإنه من أجل أية متتالية  بحيث  يكون لدينا بحسب (*1-4-1*) و (*3-4-1*):  وكذلك .*

*والآن نعتبر أن  صف مطرد على*  *ونبين أن  حلقة على* *.*

*هنا علينا فقط إثبات أنه إذا كان  فإن .*

*بما أن  حلقة بالفرض فإن  من أجل كل عدد منته* *.*

*لنضع الآن:*

**

*فنجد أن المتتالية  متزايدة ، ويكون:*

**

*وبذلك يتم المطلوب.*

**(10-5-1)** *مبرهنة:*

*كل  جبر (حلقة) هو صف مطرد.*

*الإثبات:*

*ينتج مباشرة من كون الجبر مغلق بالنسبة للاجتماع العدود والتقاطع العدود.*

**(6-1)** *الحلقة المولَّدة والجبر المولَّد:*

 *في هذه الفقرة سنوجد حلقة أو جبراً وذلك انطلاقاً من صف مفروض (قد يكون من نفس النوع أو مختلف عنه).*

*الصف الذي ننطلق منه نسميه الصف المولِّد، أمّا الصف الذي نحصل عليه فنسميه الصف المولَّد.*

 *فيما يأتي ترمز*  *لمجموعة غير خالية و  لصف المجموعات الجزئية في*  *، كما ترمز  لمجموعة أدلة (كيفية : منتهية أو عدودة أو غير عدودة).*

**(1-6-1) مبرهنة:**

*تقاطع أية أسرة من الحلقات  (من الجبور ) على*  *هو حلقة (جبر) على* *.*

*الإثبات:*

*لتكن . عندئذٍ (من كون كل  حلقة) يكون:*

**

*لذلك فإن و  ، ومن ثم  حلقة على X.*

*لإثبات أن  جبر على*  *يكفي إثبات أن . وهذا واضح لأن  من أجل كل . وبذلك يتم المطلوب.*

**(2-6-1) ملاحظة:**

*تقاطع نصفي حلقة (نصفي جبر) ليس بالضرورة أن يكون نصف حلقة (نصف جبر). فلو أخذنا مثلاً المجموعة  والصفين :*

**



*فنجد أن كلاً من*  *و*  *نصف حلقة على*  *، ويكون:*

**

*من الواضح أن تقاطع أي عنصرين من*  *هو من جديد عنصر في**، أي إن الشرط (ن ح* 1*) محقق، بينما الشرط (ن ح* 2*) غير محقق؛ لأنه:*

*لو أخذنا العنصرين*  *و  من*  *لوجدنا:*

**

*وبملاحظة أن  ينتج أنه لا يمكن كتابة الفرق  كاجتماع منته لمجموعات منفصلة من* *، علماً أنه:*

*من أجل*  *فإن .*

*من أجل*  *فإن .*

**(3-6-1) ملاحظة:**

*من أجل كل صف  يوجد حلقة ويوجد جبر يحويان ، على الأقل الصف* *. ولكن ربما توجد حلقات وجبور أخرى تحوي .*

*أصغر هذه الحلقات (الجبور) الحاوية على الصف  تسمى الحلقة الأصغرية (الجبر الأصغري) المولَّدة بالصف . لذلك نقدم التعريف الآتي:*

**(4-6-1) تعريف:**

*ليكن  صفاً جزئياً من* *. عندئذٍ :*

*(1) نضع:*  ،

ونسمي  *الحلقة المولَّدة بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد لها.*

*(2) نضع:*  ،

ونسمي  *الجبر المولَّد بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد له.*

*( لاحظ أن*  تتألف من تقاطع جميع الحلقات التي تحوي الصف ، كما أن  يتالف من تقاطع جميع الجبور التي تحوي الصف . *إ*ضافة لذلك ف*إن  حلقة فعلاً و  جبر فعلاً بحسب المبرهنة (*1-6-1*) .*

*من الواضح هنا أن*  *و  ).*

**(5-6-1) مبرهنة مساعدة:**

*ليكن*  *و  صفين غير خاليين من* *. عندئذ:*

**(1)** *إذا كان  فإن .*

**(2)** *إذا كان  فإن .*

*الإثبات:*

**(1)** *بما أن فيكون .*

*من ناحية ثانية لدينا .*

*من ثم يكون .*

*لذلك يكون .*

**(2)** *يتم إثباته بشكل مشابه لما تقدم.*

 *لدينا الآن المبرهنة المهمة الآتية:*

**(6-6-1) مبرهنة:**

*الحلقة المولَّدة بنصف حلقة*  *تتألف من كل الاجتماعات المنتهية لمجموعات منفصلة من*  *، أي:*

**

*الإثبات:*

*بحسب (*4-3-1*) فإن الحلقة  تحوي كل الاجتماعات المنتهية:*

**

*وبشكل خاص يكون:*

**

*ولنعرف الآن الصف  بالشكل:*

**

*وهو صف المجموعات المولَّدة بالاجتماعات المنتهية المنفصلة لعناصر* *. لذلك يكون .*

*للحصول على المطلوب يكفي إثبات أن. وهنا يكفي إثبات . من أجل ذلك يكفي أثبات أن  حلقة.*

*في الواقع: إذا كانت  فيكون لدينا:*

*(\*) *

*بما أن  فتوجد في*  *مجموعات منفصلة مثنى مثنى:*

**

*بحيث إن:*

**

*لدينا الآن:*



*لذلك يكون .*

*ليكن الآن  ولنفرض أن لهما تمثيلاً من الشكل (\*).*

*وبما أن  فيمكن أن نكتب:*

**

*لدينا الآن:*

**

*بذلك تكون  حلقة. ولنبين الآن أن .*

*في الواقع لدينا ، من ثم .*

*من ناحية ثانية لدينا ، من ثم .*

*لذلك يكون . وبذلك يتم المطلوب.*

**(7-6-1) ملاحظة:**

*إضافة لما ورد في المبرهنة (*5-6-1*) نذكر الآتي:*

*إذا كان  وكان  فيمكن أن تصح المساواة . مثال ذلك: لنأخذ الصفين*  *و  فنجد أن:*

**

 *نقبل الآن المبرهنة الآتية من دون إثبات:*

**(8-6-1) مبرهنة:**

*ليكن الصف  ، حيث ، وليكن  الصف المؤلف من كل الصفوف الجزئية المنتهية من ، حيث:*



*عندئذٍ يكون .*

***(*1-7*)* الحلقة المولَّدة و الجبر المولَّد:**

*كما فعلنا في الفقرة السابقة سنوجد في هذه الفقرة حلقة أو جبر وذلك انطلاقاً من صف مفروض.*

 *فيما يأتي ترمز*  *لمجموعة غير خالية و  صف المجموعات الجزئية في*  *، كما ترمز  لمجموعة أدلة (كيفية : منتهية أو عدودة أو غير عدودة).*

**(1-7-1) مبرهنة:**

*تقاطع أية أسرة من الحلقات (من الجبور ) على*  *هو حلقة (جبر) على* *.*

*الإثبات:*

*لتكن . عندئذٍ (من كون كل  حلقة):*

**

*لذلك فإن  . ومن أجل  فإن:*

**

*لذلك يكون  ، ومن ثم  حلقة على* *.*

*لإثبات أن  جبر على*  *يكفي إثبات أن*  *تنتمي إلى هذا التقاطع. لكن هذا محقق، حيث  من أجل كل  على اعتبار أن  جبر على* *. وبذلك يتم المطلوب.*

**(2-7-1) ملاحظة:**

*من أجل كل صف  توجد حلقة ويوجد جبر يحويان ، على الأقل الصف . ولكن ربما توجد صفوف أخرى تحوي .*

*أصغر حلقة (أصغر جبر) يحوي الصف المفروض  . تسمى الحلقة المولَّدة (الجبر المولَّد) بالصف . لذلك نقدم التعريف الآتي:*

**(3-7-1) تعريف:**

*ليكن  صفاً جزئياً من . عندئذٍ:*

*(1) نضع:*  ،

ونسمي  *الحلقة المولَّدة بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد لها.*

*(2) نضع:*  ،

ونسمي  *الجبر المولَّد بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد له.*

*( لاحظ أن*  تتألف من تقاطع جميع الحلقات التي تحوي الصف، كما أن  يتالف من تقاطع جميع الجبور التي تحوي الصف .

*إ*ضافة لذلك ف*إن* *حلقة فعلاً و* *جبر فعلاً، وذلك بحسب المبرهنة (*1-7-1*) . من الواضح هنا أنه من أجل* *الحلقة*  *و* *الجبر*  *يكون*  *و*  *).*

**(4-7-1) ملاحظة:**

*بشكل مشابه لإثبات المبرهنة (*5-6-1*) يمكننا إثبات الآتي:*

**(1)** *إذا كان ؛ فإن .*

**(2)** *إذا كان ؛ فإن .*

**(3)** *إذا كان ؛ فإن:*

*. و .*

*لدينا الآن المبرهنة الآتية التي نقبلها من دون إثبات:*

**(5-7-1) مبرهنة:**

*ليكن الصف ، حيث ، وليكن  الصف المؤلف من كل الصفوف الجزئية من  العدودة على الأكثر، حيث:*

**

*عندئذٍ يكون:*

**

*لدينا الآن المبرهنة الآتية التي نقبلها من دون إثبات:*

**(6-7-1) أمثلة:**

*لنأخذ المجموعة*  *والصفوف التالية من مجموعاتها الجزئية:*



*فنجد أن:*





**(8-1)** *صف دنكين المولَّد والصف المطرد المولَّد:*

*درسنا صف دنكين والصف المطرد في الفقرة (*5-1*). وكما فعلنا في الفقرتين السابقتين سنوجد في هذه الفقرة صف دنكين وصف مطرد وذلك انطلاقاً من صف مفروض* *.*

 *فيما يأتي ترمز X لمجموعة غير خالية و  لصف المجموعات الجزئية في X ، كما ترمز  لمجموعة أدلة (كيفية : منتهية أو عدودة أو غير عدودة).*

**(1-8-1) مبرهنة:**

*تقاطع أية أسرة من صفوف دنكين  (من الصفوف المطردة ) على*  *هو صف دنكين (صف مطرد) على* *.*

*الإثبات:*

**(د 1)** *بما أن  من أجل أي  فإن .*

**(د 2)** *لتكن  بحيث إن . عندئذٍ:*

*من أجل كل  يكون ، كما أن .*

*لذلك فإن  .*

**(د 3)** *لتكن  ، بحيث إن  عندما . عندئذٍ من أجل كل  يكون  ومن ثم .*

*لذلك فإن  .*

**(ص م 1)** *لتكن  متتالية متزايدة بحيث إن . عندئذٍ:*

*من أجل كل  يكون  ومن ثم . لذلك فإن:*

*.*

**(ص م 2)** *لتكن  متتالية متناقصة بحيث إن . عندئذٍ:*

*من أجل كل  فإن  ومن ثم . لذلك فإن:*

**

*بذلك يتم المطلوب.*

**(2-8-1) ملاحظة:**

*من أجل كل صف  يوجد صف دنكين ويوجد صف مطرد يحويان*  *، على الأقل* *. ولكن ربما توجد صفوف أخرى تحوي .*

*أصغر صف دنكين (أصغر صف مطرد) يحوي الصف  ، يسمى صف دنكين المولَّد (الصف المطرد المولَّد) بالصف . ونسمي  الصف المولِّد.*

**(3-8-1) تعريف:**

*ليكن  صفاً جزئياً من . عندئذٍ:*

*(1) نضع:*  ،

ونسمي  *صف دنكين المولَّد بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد له.*

*(2) نضع:*  ،

ونسمي *الصف المطرد المولَّد بالصف ، كما نسمي  الصف المولِّد له.*

*( لاحظ أن* يتألف من تقاطع جميع صفوف دنكين التي تحوي الصف، كما أن  يتالف من تقاطع جميع الصفوف المطردة التي تحوي الصف .

*إ*ضافة لذلك ف*إن* صف دنكين *فعلاً و* صف مطرد *فعلاً، وذلك بحسب المبرهنة (*1-8*-1). من الواضح هنا أنه من أجل صف دنكين*  *والصف المطرد*  *يكون*  *و*  *).*

**(4-8-1) مبرهنة:**

*ليكن  صفاً جزئياً من*  *ومغلقاً بالنسبة للتقاطع. عندئذٍ يكون:*

*.*

*الإثبات:*

*بحسب* (2)/(4-5-1) *فإن  صف دنكين . لذلك يكون  (لأن  هو أصغر صف دنكين يحوي ).*

*لإثبات أن  يكفي إثبات أن  جبر. وبحسب* (3-5-1) *يكفي إثبات أن  مغلق بالنسبة للتقاطع المنتهي، أي إذا كان  فإن .*

*لتكن ، ولنعرف الصف  بالشكل:*

*, *

*ثم لنبين أن  صف دنكين على* *.*

**(د 1)** *إن  لأن .*

**(د 2)** *لتكن  بحيث . عندئذٍ:*

**

*من ثم .*

**(د 3)** *لتكن  منفصلة مثنى مثنى. عندئذٍ:*

**

*من ثم . أي إن  صف دنكين.*

*من الواضح أن  كما أنه (باعتبار  مغلق بالنسبة للتقاطع فرضاً):*

**

*من هذا ينتج أن .*

*من أجل  و  فإن  ومن ثم فإن من أجل أي . من ذلك ينتج أن  من ثم  وذلك من أجل أي .*

*وبما أن  كانت كيفية فإن  مغلق بالنسبة للتقاطع. وبحسب* (3-5-1) *فإن  جبر . بذلك يتم المطلوب.*

 *المبرهنة الآتية تعطينا العلاقة ما بين الصف المطرد و  الحلقة المولَّدين من حلقة.*

**(5-8-1) مبرهنة:**

*لتكن  حلقة على* *. عندئذٍ: .*

*الإثبات:*

*بحسب* (10-5-1) *فإن كل حلقة هي صف مطرد، وبما أن  تحوي الحلقة  فيكون .*

*إذا كانت  حلقة فيكون  (ينتج ذلك من خواص الحلقة ، من ثم تصح المساواة .*

*والآن نبين أن  حلقة، من ثم بحسب* (9-5-1) *تكون حلقة. من أجل ذلك نأخذ مجموعة (مثبتة)  ونشكل الصف:*

**

*ولهذا الصف الخواص الآتية:*

1. *.*
2. *من أجل  يكون ، لأنه:*

*إذا كان  فإن:*

**

*أي إن  وكذلك .*

*بما أن هذا صحيح من أجل أي  فيكون *

*من ثم  حيث إن  هو أصغر صف مطرد يحوي .*

1. * صف مطرد لأنه:*

*إذا كانت  متتالية متزايدة و  وكان . فان:*

**

*من هذا ينتج أن .*

*وإذا كانت  متتالية متناقصة و وكان . فنجد بشكل مشابه لما تقدم أن .*

*الآن : إذا كان  و، عندئذٍ  ومن ثم . وبما أن هذا صحيح من أجل أي  فيكون ، من ثم .*

*بما أن هذا صحيح من أجل أي  فإن الصف المطرد  حلقة ومن ثم فهو  حلقة بحسب* (9-5-1) *. بذلك يكون . ومنه نحصل على المساواة المطلوبة.*

**(6-8-1) نتيجة:**

*إذا حوى الصف المطرد  حلقة  فيكون كذلك الحلقة المولَّدة به.*

**(7-8-1) نتيجة:**

*من أجل الجبر*  *يكون .*

*ويتم الإثبات بشكل مشابه لما تقدم.*

*لذلك: إذا حوى الصف المطرد  جبراً*  *فإنه يحوي .*

  *في نهاية هذه الفقرة نذكر المثال الآتي:*

**(8-8-1) مثال:**

*لتكن المجموعة*  *والصف*  *من مجموعاتها الجزئية. عندئذ يكون:*

**

**(9-1)** *جبر بوريل في  :*

*نتعرف في هذه الفقرة على نوع خاص من  الجبور المولَّدة بصف (بصفوف) من المجموعات الجزئية في الفضاء الإقليدي ، حيث إن نقاط (عناصر) هذا الفضاء لها الشكل**.*

 *من المعلوم أن  فضاء متري مع المسافة الإقليدية المعروفة:*

1. **

*كما أن  فضاء متري مع كل من المسافات:*

1. **
2. **

*وهذه المسافات متكافئة فيما بينها بالمعنى الآتي:*

*يوجد عددان ثابتان موجبان  (تابعان لـ*  *) بحيث إن:*

**

*بشكل خاص فإن  ، حيث*  *كما هو في (*1*) و  كما هو في (*2*).*

 *فيما يلي ، وللاختصار، سنكتب فقط*  *بدلاً من  .*

**(1-9-1) تعريف:**

*جبر بوريل في*  *، ونرمز له بـ*  *، هوالجبر المولَّد بصف المجموعات المفتوحة في* *.*

*كل مجموعة من*  *نسميها مجموعة بوريلية.*

*( إذا رمزنا بـ*  *لصف المجموعات المفتوحة في*  *فيكون  ).*

**(2-9-1) ملاحظة:**

*في أي فضاء متري  يعرف جبر بوريل على أنه الجبر المولَّد بصف المجموعات المفتوحة في ، ويرمز له بـ* *.*

*نشير هنا أنه ما يرد في المبرهنة الآتية عن*  *يصح أيضاً على* *.*

**(3-9-1) مبرهنة:**

*كل من: صف المجموعات المغلقة  وصف المجموعات المتراصة*  *في*  *يولِّد جبر بوريل* *، أي إن:*

1. 

*الإثبات:*

*معلوم أن كل مجموعة متراصة تكون مغلقة. لذلك يكون  ، ومن ثم :*

1. **

*لتكن  نقطة مثبتة ولتكن* :

**

*الكرة المغلقة التي مركزها  ونصف قطرها .*

*إن  مجموعة متراصة في*  *من أجل كل* *.*

*لتكن الآن*  *مجموعة مغلقة في* *، أي . عندئذٍ تكون  مجموعة متراصة من أجل كل* *، كما أن المتتالية  متزايدة ونهايتها:*

**

*من ذلك ينتج أن ، من ثم ، لذلك يكون:*

1. **

*من (*5*) و (*6*) ينتج أن:*

1. **

*بما أن كل مجموعة مغلقة هي متممة مجموعة مفتوحة وبالعكس:*

**

*فيكــون:*

1. **

*من (*7*) و (*8*) نحصل على (*4*). وبذلك يتم المطلوب.*

**(4-9-1) نتيجة:**

**(1)** *كل من المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة والمجموعات المتراصة هي مجموعات بوريلية (مع التنويه أنه يوجد مجموعات بوريلية أخرى غير هذه الأنواع، انظر الملاحظة التالية (2-4-5) ).*

**(2)** *كل مجموعة وحيدة العنصر  هي مجموعة بوريلية لأنها مغلقة.*

**(3)** *كل مجموعة عدودة  هي مجموعة بوريلية لأن:*

**

**(4)** *كل مجموعة عدودة على الأكثر هي مجموعة بوريلية.*

**(5-9-1) ملاحظة:**

*وجدنا في الأمثلة* (4), (3)/(1-2-1) *أن صفوف المجالات نصف المفتوحة في* *:*

**

**

*تشكل أنصاف حلقات في*  *. ويمكن إثبات أن:*

1. **

*نترك ذلك بمثابة تمرين.*

*من (*9*) نجد مباشرة أن كل مجال من  وكل مجال من هو مجموعة بوريلية.*

*إضافة إلى ذلك فإن كل من الصفوف الآتية تولِّد جبر بوريل* *:*

**

**

**

**

*ويصح ذلك عند استبدال*  *بـ  (مجموعة الأعداد العادية).*

*مما تقدم نلاحظ أن صفوفاً مختلفة عن بعضها يمكن أن تولد نفس الجبر* *.*

**(6-9-1) ملاحظة:**

*من أجل*  *يمكن إثبات أن كل من صفوف المجالات الآتية تولد جبر بوريل* *:*

*........................................................................................................*

**

*مسائل وتتمات (***1 *)***

**(1-1)** *أثبت صحة المقولات (*12-1-1*) و(*13-1-1*)، وكذلك ما ورد في (*14-1-1*) بأن:  ، (*18-1-1*) و (*19-1-1*) و (*20-1-1*).*

**(2-1)**  *أثبت المجموعة  غير عدودة، واستنتج أن كل مجال  له قدرة المجال  (ومن ثم له قدرة المستمر).*

**(3-1)** *أثبت صحة ما ورد في (1-2-3)* (2)*/و(3) و* (4)*.*

**(4-1)** *هل تشكل الصفوف الآتية نصف حلقة أو نصف جبر على* *:*

**

*اعتبر أن:  كما أن .*

*قارن مع* (3)/(6-2-1)*.*

**(5-1)** *إذا كان كل من* *و  نصف حلقة على المجموعة*  *و على الترتيب، فهل يشكل الصف:*

**

*نصف حلقة على المجموعة  ؟.*

***(1-6)*** *أثبت أن كل حلقة هي نصف حلقة وأن كل جبر هو نصف جبر على المجموعة المفروضة نفسها، لكن العكس غير صحيح بالضرورة.*

**(7-1)** *ليكن الصف . أثبت أن  حلقة على*  *، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:*

***(*1*)*** * نصف حلقة على* *.*

***(*2*)*** *من أجل  فإن .*

**(8-1)** *ليكن  صف مجموعات جزئية من مجموعة*  *وعناصره منفصلة مثنى مثنى:*

**

*ولنعرف الصف  بالشكل:*

**

*أثبت أن  حلقة على* *.*

**(9-1)** *ليكن الصف . أثبت أن  جبر على*  *إذا وفقط إذا تحققت الثلاث شروط الآتية:*

***(*1*)*** *.*

***(*2*)*** *من أجل  فإن .*

***(*3*)*** *من أجل  فإن .*

**(10-1)** *ليكن  جبراً على*  *وليكن الصف :*

**

*أثبت أن  جبر على* *.*

**(11-1)** *لتكن  مجموعة مثبتة وليكن الصف ، ولنعرف الصف :*

**

*إذا كان  ، على الترتيب ، نصف حلقة ، نصف جبر، حلقة ، جبر ، حلقة ، جبر فهل  صف من النوع نفسه ؟.*

**(12-1)** *ليكن الفضاء الإقليدي الحقيقي ذو* *بعداً ولتكن المجموعة . نقول إن المجموعة*  *متناظرة (بالنسبة إلى المبدأ O) إذا كان:*

**

*لنرمز بـ*  *لصف المجموعات المتناظرة في*  *(لاحظ أن ).*

***(*1*)*** *أثبت أن  يشكل  جبر على* *.*

*- في حالة*  *نعتبر  (= الأعداد الحقيقية) ونرمز لعناصرها بـ x. .*

*- في حالة*  *فإن عناصر  عبارة عن ثنائيات سنرمز لها بـ* *.*

*- في حالة*  *فإن عناصر  عبارة عن ثلاثيات سنرمز لها بـ* *.*

***(*2*)*** *هل تنتمي المجموعات الآتية إلى :*



***(*3*)*** *هل تنتمي المجموعات الآتية إلى :*

*= A مجموعة الدوائر من الشكل  ، حيث .*

*= B مجموعة القطوع الناقصة .*

*= C مجموعة القطوع الزائدة .*

*= D مجموعة القطوع الزائدة .*

*= E مجموعة المنحنيات المستوية التي معادلاتها .*

*= F مجموعة المنحنيات المستوية التي معادلاتها .*

*= G مجموعة المنحنيات المستوية التي معادلاتها .*

*= H مجموعة الدوائر .*

*= K مجموعة القطوع .*

***(*4*)*** *هل تنتمي المجموعات الآتية إلى :*

*= A مجموعة الكرات التي مركزها في المبدأ .*

*= B مجموعة االسطوح .*

*= C مجموعة السطوح .*

*= D مجموعة المستويات ، حيث a عدد ثابت.*

***(5)*** *هل تنتمي المجموعات الآتية إلى* *:*

*= A المجموعة .*

*= B المجموعة .*

*= C المجموعة* .

*= D المجموعة*  *حيث*  *.*

**(13-1)*****(*1*)*** *أوجد النهاية العليا والنهاية الدنيا والنهاية إن وجدت لكل من المتتاليات:*

**

**

**

**

**

**

**

**

**

**

***(*2*)*** *أثبت أن الصف  لا يشكل صفاً مطرداً على*  *، بينما الصف  صفاً مطرداً على* *.*

*(***3***) أعد السؤال في (2) من أجل  و .*

*(***4***) هل يشكل الصف  صفاً مطرداً ؟.*

*(***5***) هل الصفان  و  مطردان ؟.*

**(14-1)** *أثبت تكافؤ المسافات المذكورة في بداية الفقرة (*9-1*).*

**(15-1)** *أثبت صحة ما جاء في الملاحظة (1-9-6).*

**(16-1)** *أثبت صحة المبرهنة (1-6-8).*

**(17-1)** *أثبت صحة المبرهنة (1-7-5).*

**(18-1)** *ليكن   جبر على*  *ولتكن*  *مجموعة جزئية من*  *ولنضع:*

*.*

1. *أثبت أن  جبر على*  *(يسمى أثر الجبر على* *).*
2. *هل يصح هذا إذا استبدلنا  بحلقة  أو بجبر  أو بصف مطرد ؟*

**(19-1)**  *ليكن  صفاً جزئياً من  ولتكن المجموعة  مثبتة ولنضع:*

**

1. *أثبت أن .*
2. *هل يصح هذا عند استبدال  بحلقة  أو جبر  أو صف مطرد ؟*

**(20-1)** *ليكن الصف المنتهي ، حيث .*

1. *أثبت أن  يحوي على الأكثر  من المجموعات الجزئية من* *.*
2. *أثبت أن .*

**(21-1)**  *ليكن*  *و*  *صف الكرات المفتوحة والمغلقة في*  *على الترتيب.*

*أثبت أن* *.*

**(22-1)**  *لتكن*  *مجموعة غير خالية، وليكن الصف*  المؤلف من المجموعات الجزئية في  المنتهية أو متمماتها منتهية، أي *:*

*.*

1. *أثبت أن  جبر على* *.*
2. *هل   جبر على*  *؟.*

**(23-1)** *لتكن*  *مجموعة غير خالية ، وليكن  صف المجموعات الجزئية المنتهية (في* *).*

1. *أثبت أن  حلقة على*  *. هل  جبر؟*
2. *هل  حلقة أو جبر ؟.*

**(24-1)** *أثبت أن:*

**

**(25-1)** *لتكن المجموعتان  بحيث ، وليكن ، كما أن   الجبر المولَّد بالصف .*

*أثبت أن الصف *

*يولِّد الصف *

*كما أن .*

**(26-1)** *ليكن  نصف جبر على* *. أثبت أن:*

**

**(27-1)** *ليكن  جبر على*  *وليكن التطبيق:*

**

1. *أثبت أن الصف* 

*يشكل جبر على* *.*

(2) *إذا كان   حلقة على* *، هل   حلقة على*  *؟.*

**(28-1)** *ليكن  صفاً مطرداً على*  *ولنعرف الصف*  *بالشكل:*



*أثبت أن*  صف دنكين.

*...........................................................................................................*

***مراجع الفصل الأول:***

[ 1 ] , [ 2 ] , [ 4 ] , [ 6 ] , [12] , [16].