جامعة قاصدي مرباح_ ورقلة

كلية العلوم والتكنولوجيا وعلوم المادة

قسم علوم المادة

محاضرات في الفيزياء 1

ميكانيك النقطة المادية

موجهة لنظام ل.م.د علوم وتقنيات

د. شهرة ثورية

2012/2011

الفصل الأول

التحليل البعدي وحساب الارتياب

من الضروري التحكم في مفاهيم أبعاد ووحدات المقادير الفيزيائية، يكون ذلك باستخدام التحليل البعدي (*Analyse dimensionnelle*)، إذ يسمح لنا بإيجاد العلاقات التي تربط بين المقادير الفيزيائية، أي وضع العلاقات والقوانين، كذا تدارك الأخطاء المرتكبة في المعادلات، من خلال دراسة تجانسها. سنرى في هذا الفصل كيفية تحديد بعد مقدار فيزيائي و معادلة أبعاد العلاقات بين المقادير الفيزيائية، وسنذكر استعمالات التحليل البعدي كأداة لدراسة تجانس المعادلات والبحث عن أشكال المعادلات الرياضية، و كما سنتطرق إلى أنظمة الوحدات الدولية الأكثر استعمالا، وطريقة التحول من نظام إلى آخر. سنعطي في نهاية الفصل مفاهيم الارتياب والطرق الرياضية لحسابها.

1.1 معادلة الأبعاد

لنعرف أولا المقدار الفيزيائي (*grandeur physique*)، فهو كل مقدار قابل للقياس، أي يمكن مقارنته بمقدار آخر من نفس الطبيعة واعتبار هذا الأخير كوحدة مثل: الطول، الحرارة، القوة...

و من بين المقادير القابلة للقياس مقادير عرفها الإنسان لاستخداماته، ومقادير أخرى حسية تنبع من تعوده عليها و إحساسه بها دون إعطائها تعريفا (غير قابلة للتعريف) وهي مقادير متفق عليها، وعدد هذه المقادير محدد، وهي سبع تدعى بالمقادير الأساسية: الطول، الكتلة، الزمن، شدة التيار، الحرارة، كمية المادة و الشدة الضوئية، حيث تسمح هذه المقادير الأساسية بكتابة كل المقادير الأخرى على شكل علاقات رياضية مثلا: القوة التي هي مقدار غير أساسي، يمكن كتابته بدلالة المقادير الأساسية الكتلة، الطول والزمن.

تتميز المقادير الواصفة للظاهرة الفيزيائية بـ' البعد(dimension)'، فبعد مقدار يشرح الطبيعة الفيزيائية لهذا المقدار.

معادلة الأبعاد (équation aux dimensions) هي التعبير الرمزي عن العلاقات بين المقادير الفيزيائية المختلفة. فالبعد أو معادلة الأبعاد للمقدار الفيزيائي G تكتب على الشكل $[G]$.

ولفهمها نتبع الملاحظات التالية:

- ✓ عدم طرح نظام الوحدات عند كتابة معادلة أبعاد المقدار.
- ✓ إذا كان $[G] = 1$ فان المقدار الفيزيائي G ثابت ، في الواقع قد يكون للمقدار الفيزيائي الثابت بدون بعد وحدة مثلا: $[2\pi] = 1$ وحدتها قد تكون الراديان أو الدرجات، و $\left[\frac{1}{2}\right] = 1$ والمقدار $\frac{1}{2}$ بدون وحدة.
- ✓ تكون المعادلة الفيزيائية متجانسة إذا كان لطرفيها نفس البعد.
- ✓ كل المقادير الفيزيائية مشتقة في الأصل من سبعة مقادير أساسية، سنعطي لكل منها رمزا كبعد خاص له، و باقي أبعاد المقادير الأخرى تعطى بدلالتها:

المقدار الأساسي	الرمز الخاص للبعد
الطول (*Longueur*)	$L = [\text{الطول}]$
الكتلة (*Mass*)	$M = [\text{الكتلة}]$
الزمن (*Temps*)	$T = [\text{الزمن}]$
شدة التيار(*Intensité du courant électrique*)	$L = [\text{شدة التيار}]$
درجة الحرارة (*Température*)	$\theta = [\text{درجة الحرارة}]$
كمية المادة (*Quantité de matière*)	$N = [\text{كمية المادة}]$
الشدة الضوئية (*Intensité lumineuse*)	$J = [\text{الشدة الضوئية}]$

- ✓ بعد جداء مقدارين هو جداء بعديهما:

$$[AB] = [A][B]$$

مثال: بعد السرعة v:

$$v = {}^{t}/_{x} \Longrightarrow [v] = [t][x]^{-1} = TL^{-1}$$

✓ بعد المقدار A^n هو $[A]^n = [A^n]$ حيث n عدد بدون بعد ولا وحدة.

مثال: بعد السطح S:

$$S = l^2 \Longrightarrow [S] = [l^2] = [l]^2 = L^2$$

✓ للدوال المثلثية و اللوغاريتمية والآسية: $\cos u$ و $\sin u$ و $\ln u$ ... يكون المقدار u بدون بعد.

✓ معادلة أبعاد أي مقدار فيزيائي G يمكن وضعها على الشكل التالي:

$$[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$$

ملاحظة: في الميكانيكا نحتاج فقط إلى ثلاثة مقادير فيزيائية هي الطول، الكتلة والزمن.

2.1 استعمال التحليل البعدي: التحقق من تجانس المعادلات

عند وضع العبارات الرياضية (القوانين)، يسمح لنا التحليل البعدي بالتحقق من تجانسها وتصحيح التناقضات فيها إذا وجدت، فأية علاقة غير متجانسة بين المقادير الفيزيائية هي علاقة خاطئة.

تمرين 1:

التحقق من تجانس عبارة الدور النواس البسيط:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$$

حيث l طول النواس و g الجاذبية الأرضية.

لكي تكون المعادلة متجانسة يجب أن يكون بُعد الطرف الأول للمعادلة يساوي بعد الطرف الثاني.

بُعد الطرف الأول: $[T_0]$

بُعد الطرف الثاني: $\left[2\pi\sqrt{l/g}\right] = [l]^{1/2}[g]^{-1/2}$

لدينا أن:

$[l] = L$ و $[g] = LT^{-2}$.

فيكون:

$$[l]^{1/2}[g]^{-1/2} = L^{1/2}L^{-1/2}(T^{-2})^{-1/2} = T$$

ومنه بُعد الطرف الأول يساوي بُعد الطرف الثاني أي أن المعادلة متجانسة.

ملاحظة : معادلة متجانسة $\Longleftarrow$ فليست بالضرورة صحيحة

3.1 استعمال التحليل البعدي: إيجاد شكل علاقة المقدار $G = f(A, B, C, \dots)$

نفرض أن المقدار الفيزيائي G يعبر عنه بدلالة مقادير فيزيائية أخرى A و B و C...، من أجل تحديد الدالة $f(A, B, C, \dots)$:

- ✓ نبحث عن أبعاد المقادير الفيزيائية A و B و C....
- ✓ ثم نبحث عن المعاملات α و β و γ... بمقارنة بعد طرفي المعادلة التالية:

$$G = kA^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma} \dots$$

حيث k ثابت بدون وحدة يتعين بطريقة أخرى.

تمرين 2:

لنحاول الوصول إلى علاقة دور النواس البسيط في المثال السابق، الذي يتعلق بطول النواس l و الجاذبية الأرضية g. سنبحث عن علاقة من الشكل التالي:

$$T_0 = f(l, g)$$

نضع T_0 على الشكل التالي:

$$\mathrm{T}_0 = kl^{\alpha}g^{\beta}$$

أبعاد المقادير المتعلقة بدور النواس:

$$[T_0] = T \qquad (1)$$

$$[l] = L, \quad [g] = LT^{-2}$$

البحث عن α و β :

$$\left[kl^{\alpha}g^{\beta}\right] = [l]^{\alpha}[g]^{\beta} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta} \qquad (2)$$

نقارن بين المعادلة (1) و(2) نجد:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \alpha = -\beta = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow T_0 = kl^{\frac{1}{2}}\mathrm{g}^{-\frac{1}{2}} = k\sqrt{l/g}$$

أما الثابت k فيعين بالتجربة، ولقد وجد مساويا 2π.

4.1 أنظمة الوحدات

لقد اتفق عالميا بعد الثورة الفرنسية على نظام أو جملة الوحدات (*système d'unités*) للمقادير الأساسية، كي تكون اللغة المشترك. قد تتغير الوحدة للمقادير بتغير النظام المستعمل، في حين تبقى أبعادها ثابتة. ولقد شاع استخدام جملتي وحدات هي:

جملة الوحدات الدولية (*système international d'unités*): يوضح الجدول التالي وحدات قياس المقادير الأساسية لهذا النظام:

المقدار(*Grandeur*)	**الوحدة (*Unité*)**	**الرمز(*Symbole*)**
الطول (*Longueur*)	المتر (*mètre*)	*m*
الكتلة (*Mass*)	الكيلوغرام (*kilogramme*)	*kg*
الزمن (*Temps*)	الثانية (*seconde*)	*S*
التيار الكهربائي (*Courant électrique*)	أمبير (*ampère*)	*A*
درجة الحرارة (*Température*)	الكلفن(*kelvin*)	*K*
كمية المادة (*Quantité de matière*)	مول (*mol*)	*mol*
الشدة الضوئية (*Intensité lumineuse*)	الشمعة (*candela*)[1]	*cd*

تضاف إلى هذه الوحدات وحدتين مكملتين تستخدمان لقياس الزوايا المستوية و الزوايا المجسمة[2]:

المقدار(*Grandeur*)	**الوحدة (*Unité*)**	**الرمز(*Symbole*)**
الزاوية المستوية (*Angle plane*)	راديان (*radian*)	*rad*
الزاوية المجسمة (*Angle solide*)	ستراديان (*stéradian*)	*sr*

و هناك أيضا وحدات وضعت للاختصار، مثل:

وحدة القوة وهي النيوتن (*Newton*): $kgm\ s^{-2} = N$

---

[1] الشمعة هي وحدة قياس الشدة الضوئية وهي تساوي $(1/60)$ من شدة إضاءة إشعاع جسم أسود مساحته $(1cm^2)$ عند درجة الحرارة $(2045K)$، وهي درجة حرارة تجمد البلاتين.

[2] الزاوية المجسمة هي مساحة السطح العمودي على نصف القطر الكرة مقسوما على مربع نصف القطر.

وحدة الطاقة وهي الجول (*Joule*): $kgm^2\ s^{-2} = J$

وحدة الشحنة الكهربائية وهي كولوم (*Coulomb*): $SA = C$.

الجملة الوحدات CGS (*système de Gauss*): وهي نظام تحت النظام الدولي SI :

المقدار(*Grandeur*)	الوحدة (*Unité*)	الرمز(*Symbole*)
الطول(*Longueur*)	السنتمتر(*centimètre*)	cm
الكتلة(*Mass*)	الغرام(*gramme*)	g
الزمن(*Temps*)	الثانية (*seconde*)	s

وباقي المقادير الأساسية تحمل نفس الوحدة في النظام الدولي. و بالمثل هناك وحدات وضعت للاختصار، مثل:

وحدة القوة وهي داين (*dyne*): $gcms^{-1} = dyn$.

وحدة الطاقة وهي أرغ (*erg*): $gcm^{-2}s^{-2} = erg$.

وحدة اللزوجة وهي بواز(*poise*): $gcm^{-1}s^{-1} = P$.

تمرين3 :

إيجاد معادلة أبعاد العمل ؟ ووحدته في النظام الدولي SI و النظام CGS؟

$$W = F.l$$
$$\Longrightarrow [W] = [F].[l] = MLT^{-2}L = ML^2T^{-2}$$

في النظام SI: $joul = kg\, m^2s^{-2}$.

في النظام CGS : $erg = g\, cm^2s^{-2}$.

5.1 التحول من وحدات نظام إلى آخر

كما رأينا سابقا، معادلة الأبعاد لا تربط فقط المقادير فيما بينها، لكن تعطي الوحدات المكافئة للنظام المستعمل، وتعطي قيمة ووحدة الثوابت الفيزيائية تبعا لذلك النظام المتبع، قد تجبرنا

الظروف إلى أن تتواجد هذه الثوابت في نظام غير نظامنا المعمول به، لذلك فإن التحليل البعدي يسمح لنا أيضا بتحويل تلك الثوابت من نظام إلى نظام، فكيف يتم ذلك؟

ليكن المقدار G يساوي القيمة العددية g ووحدته هي $U_G(S_1)$ في النظام S_1 و قيمته g' ذات الوحدة $U_G(S_2)$ في النظام S_2 فيكون لدينا:

$$G = gU_G(S_1) = g'U_G(S_2)$$

$$\frac{g'}{g} = \frac{U_G(S_1)}{U_G(S_2)} \qquad (1)$$

فإذا علمت إحدى القيمتين g أو g'، و الوحدات المستعملة في كل النظامين أمكننا إيجاد القيمة الأخرى في النظام الثاني.

تمرين 4:

تحويل جول في النظام الدولي SI (S_1) إلى النظام CGS (S_2):

لدينا:

$$1\, joul = g'erg$$

حسب العلاقة (1) نجد ان :

$$g' = 1\frac{joul}{erg} = \frac{\text{kg}\, m^2 s^{-2}}{\text{g}\, cm^2 s^{-2}} = \frac{kg\, m^2 s^{-2}}{10^{-3}k\text{g}10^{-4}m^2 s^{-2}} = 10^7$$

$$1\text{joul} = 10^7 erg$$

6.1 حساب الارتياب في القياس

قسم كبير من علم الفيزياء تجريبي كمي يقوم على القياس، وقد يكون هذا القياس مباشرا باستعمال الآلات مثل: قياس الزمن بواسطة كرونومتر، أو عن طريق قياس مقادير أخرى ترتبط بمعادلة مع المقدار المراد قياسه بطريقة غير مباشرة مثل: تعيين السرعة بعد القياس المباشر للزمن و المسافة.

تعتمد دراسة الظواهر على القياسات التي تتميز بعدم التعيين الدقيق، الناتج عن الأخطاء التي تنجم عن: المجرب، جهاز القياس، طريقة القياس ...، تقسم الأخطاء إلى نوعين:

الخطأ المطلق (*Erreur absolue*): الخطأ المطلق δG للمقدار G هو الفرق بين القيمة المقاسة[3] (*Valeur exacte*) G_M والقيمة الحقيقية (*Valeur mesurée*) وهو مقدار جبري متبوع بوحدة.

الخطأ النسبي (*Erreur relative*): هو النسبة بين الخطأ المطلق والقيمة المقاسة $\frac{\delta G}{G_M}$.

ملاحظة: يتعذر معرفة الخطأ المطلق وبالتالي الخطأ النسبي لأنه لا يمكن معرفة القيمة الحقيقة للمقدار، لذلك ندخل مفهوم الارتياب.

الارتياب المطلق (*Incertitude absolue*): الارتياب المطلق ΔG للمقدار G هو الحد الأعلى للخطأ المطلق $|\delta G| \leq \Delta G$ ، و هو عدد موجب يأخذ وحدة المقدار G حيث:

$$G = G_M \pm \Delta G$$

الارتياب النسبي (*Incertitude relative*): هو الحد الأعلى للخطأ النسبي $\frac{\Delta G}{G_M}$ وهو النسبة بين الارتياب المطلق والقيمة المقاسة، وهو عدد حسابي بدون وحدة، ويستعمل لتمييز دقة القياس.

الطرق الرياضية لحساب الارتياب في القياس غير المباشر: هناك طريقتان لحساب الارتياب:

1. طريقة التفاضل التام (*Différentielles totales*):

ليكن المقدار G مقاس بطريقة غير مباشرة عن طريق قياس المقادير x و y و z المقاسة بطريقة مباشرة، حيث Δx و Δy و Δz الارتيابات المطلقة للمقادير السابقة على الترتيب. نريد حساب الارتياب المطلق والنسبي للمقدار G حيث: $G = f(x, y, z)$.

التفاضل التام للمقدار G يعطى:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz$$

لحساب الارتياب المطلق نأخذ القيمة المطلقة لمعاملات الأخطاء، ونحول d إلى Δ في المعادلة السابقة:

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial G}{\partial z}\right|\Delta z$$

الارتياب النسبي:

[3] القيمة المقاسة هي القيمة التي نحصل عليها عند القياس.

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{x}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\right|\frac{\Delta x}{x} + \left|\frac{y}{G}\frac{\partial G}{\partial y}\right|\frac{\Delta y}{y} + \left|\frac{z}{G}\frac{\partial G}{\partial z}\right|\frac{\Delta z}{z}$$

2. **طريقة التفاضل اللوغاريتمي** (***Différentielles logarithmiques***):

نأخذ الدالة السابقة نفسها: $G = f(x,y,z)$، ندخل اللوغاريتم على الدالة ونفاضل:

$$log G = log f(x,y,z) \Rightarrow d(log G) = d\big(log f(x,y,z)\big)$$

وبنفس الخطوات السابقة نكمل حساب الارتياب النسبي و المطلق.

تمرين5:

أحسب بطريقة التفاضل التام و التفاضل اللوغاريتمي الارتياب النسبي للمقدار G حيث:

$$G(a,b) = \frac{a}{a-b}$$

طريقة التفاضل التام:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial a}da + \frac{\partial G}{\partial b}db = \frac{-b}{(a-b)^2}da + \frac{a}{(a-b)^2}db$$

نقسم أطراف المعادلة على G فنحصل:

$$\frac{dG}{G} = \frac{-b}{(a-b)}\frac{da}{a} + \frac{b}{(a-b)}\frac{db}{b}$$

و منه الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{-b}{a-b}\right|\frac{\Delta a}{a} + \left|\frac{b}{a-b}\right|\frac{\Delta b}{b} = \left|\frac{b}{a-b}\right|\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

طريقة التفاضل اللوغاريتمي:

$$log G(a,b) = log\left(\frac{a}{a-b}\right) \Rightarrow log G = \log a - \log(a-b)$$

$$\Rightarrow dlog G = dlog\, a - dlog(a-b)$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{da}{a} - \frac{da}{a-b} + \frac{db}{a-b} = \frac{-b}{a-b}\frac{da}{a} + \frac{b}{a-b}\frac{db}{b}$$

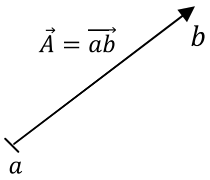
و منه الارتياب النسبي:

$$\frac{\Delta G}{G} = \left|\frac{-b}{a-b}\right|\frac{\Delta a}{a} + \left|\frac{b}{a-b}\right|\frac{\Delta b}{b} = \left|\frac{b}{a-b}\right|\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

الفصل الثاني

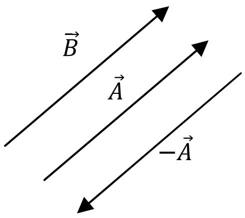
الحساب الشعاعي

تقسم القيم الفيزيائية إلى مجموعتين أساسيتين سلمية و شعاعيه. حيث تتميز الأولى بمقدار فقط (*grandeur*) مثل: الكتلة، الزمن، الحرارة... في حين تتميز الثانية بمقدار (*module*) و اتجاه (*direction*) مثال: السرعة، القوة... ويرمز للشعاع بـ $\vec{A}$ ويدعى مقداره بالطويلة و يرمز لها بـ $|\vec{A}|$ (المسافة بين بداية الشعاع ونهايته) وهي مقدار موجب.



$$|\vec{A}| = ab = A$$

1.2 خواص الأشعة



- ✓ $\vec{A} = \vec{B} \Leftarrow$ لهما نفس المقدار (الطويلة) و الاتجاه.
- ✓ لكل شعاع $\vec{A}$ شعاع معكوس (*opposée*) يساوي $(-\vec{A})$.
- ✓ **ضرب شعاع بقيمة سلمية**: جداء الشعاع $\vec{A}$ بالعدد السلمي a هو الشعاع $a\vec{A}$ حيث $\vec{A} // a\vec{A}$:
  - إذا كان $a > 0 \Leftarrow$ له نفس اتجاه $\vec{A}$ وطويلته هي $a\,|\vec{A}|$.
  - إذا كان $a = 0 \Leftarrow a\vec{A} = \vec{0}$.
  - إذا كان $a < 0 \Leftarrow$ له عكس اتجاه $\vec{A}$ و طويلته هي $-a|\vec{A}|$.
  - إذا كان $|\vec{A}| > 1 \Leftarrow$ فإن الشعاع $\vec{A}$ يتمدد ويتقلص إذا كان $|a| < 1$.
  - $1.\vec{A} = \vec{A}$ ، $0.\vec{A} = \vec{0}$ و $a.\vec{0} = \vec{0}$

    1: عنصر سلمي حيادي (*neutre*).

    0: عنصر سلمي ماص (*absorbant*).
  - جداء شعاع بسلمي هو توزيعي على المجموع السلمي:

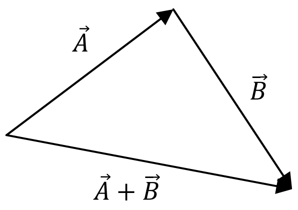
$$(a + b).\vec{A} = a.\vec{A} + b.\vec{A}$$

ملاحظة: الكتابة $\vec{u}.a$ ليس لها معنى، و الصحيح: $a.\vec{u}$.

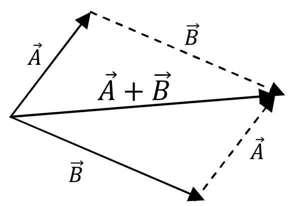
- يكون **شعاعان متوازيين** إذا وفقط إذا كانا مرتبطين خطيا:

$\vec{A}//\vec{B} \Leftarrow$ يوجد $a \in \mathcal{R}$ حيث $a\vec{B} = \vec{A}$

✓ **مجموع شعاعين** (***somme de deux vecteurs***): مجموع الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو شعاع يرمز له بـ $\vec{A} + \vec{B}$ ، ينشأ هندسيا بإحدى الطريقتين التاليتين:



ط1: نضع بداية الشعاع الثاني عند نهاية الأول ويكون المجموع الشعاع الذي يربط بداية الأول بنهاية الثاني يصنع الضلع الثالث للمثلث المشكل من $\vec{A}$ و $\vec{B}$ (*triangle*).



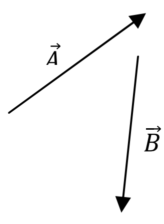
ط2: نضع بدايتي الشعاعين عند النقطة نفسها ونرسم متوازي الأضلاع (*parallélogramme*) حيث يكون الشعاعان ضلعيه. المجموع إذن هو قطر متوازي الأضلاع وبدايته هي نفسها بداية الشعاعين.

- **علاقة شال** (***relation de Chasles***): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
- $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$ ، $\vec{0}$ هو شعاع حيادي (*neutre*) في الجمع الشعاعي.
- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ، الجمع الشعاعي تبديلي (*commutativité*).
- $\vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C}$ ، الجمع الشعاعي تجميعي (*associativité*).
- $a\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = a\vec{A} + a\vec{B}$، الجمع الشعاعي توزيعي (*distributivité*).

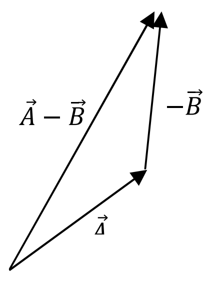
ملاحظة: في حالة مجموع أشعة يفوق اثنين يتم أيضا بالطرق نفسها.

✓ **الفرق بين شعاعين**(***différence de deux vecteurs***): الفرق بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو شعاع يرمزله بـ $\vec{A} - \vec{B}$، وعملية الفرق بين شعاعين تشبه عملية الجمع حيث:

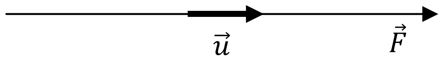
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + \left(-\vec{B}\right)$$



$\Rightarrow$

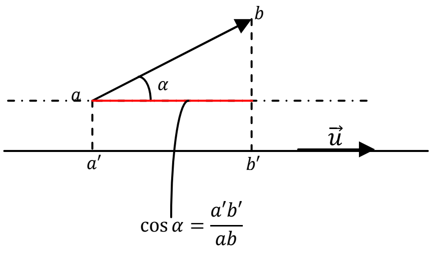


✓ **شعاع الوحدة** (*vecteur unitaire*): هي أشعة طويلتها تساوي الواحد. فشعاع وحدة الشعاع $\vec{F}$ هو شعاع $\vec{u}$ حيث:



$$\vec{u} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} \Leftarrow \vec{F} = |\vec{F}|\vec{u}$$

مسقط شعاع على محور (*Projection d'un vecteur*):

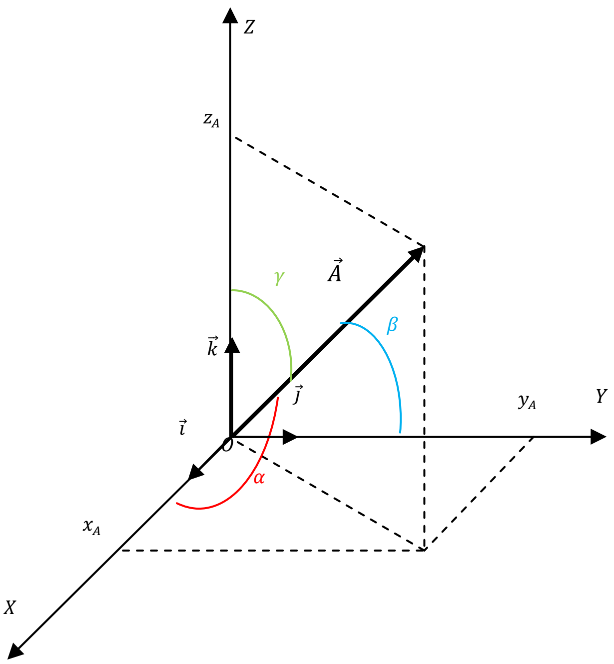


يساوي مسقط الشعاع $\overrightarrow{ab}$ على المحور المعرف بالشعاع $\vec{u}$ طول القطعة المستقيمة $a'b'$ حيث:

$$a'b' = P_{\overrightarrow{ab}/\vec{u}} = |\overrightarrow{ab}|\cos\alpha = ab\cos\alpha$$

2.2 جملة الإسناد (المعلم المتعامد و المتجانس): المعلم الديكارتي

التمثيل الهندسي للأشعة يعتمد على الإحداثيات أي على جملة الإسناد، مثلا: الإحداثيات الديكارتية (*coordonnées cartésiennes*) الممثلة في الشكل بثلاثة محاور متعامدة $OXYZ$[4] وثلاث أشعة وحدة $\vec{\imath}$، $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$. يمثل الشعاع $\vec{A}$ في هذه الجملة بثلاث إحداثيات: A_x، A_y و A_z وهي عبارة عن مسقط الشعاع $\vec{A}$ على المحاور OX، OY و OZ حيث:



$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$$

فيكون لدينا:

$$A_x = |\vec{A}|\cos\alpha$$
$$A_y = |\vec{A}|\cos\beta$$
$$A_z = |\vec{A}|\cos\gamma$$

حيث α ، β و γ زوايا التوجيه التي يشكلها $\vec{A}$ مع الجهة الموجبة للمحاور OX و OY و OZ على الترتيب، ونسمي $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$ جيوب تمام توجيه الشعاع $\vec{A}$.

[4] يرمز غالبا للمعلم بـ $OXYZ$ تعبيرا على المبدأ $'O'$ والمحاور الثلاثة المتعامدة OX، OY و OZ، وقد يختلف الرمز في بعض المراجع فنجده مثلا $(,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ تعبيرا على أشعة الوحدة الموازية للمحاور الثلاثة السابقة.

✓ إذا علمنا أن إحداثيات نقطة النهاية $b(x_b, y_b, z_b)$ والبداية $a(x_a, y_a, z_a)$ للشعاع $\vec{A}$ يكون لدينا:

$$\vec{A} = \overrightarrow{ab}\begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{pmatrix}, \qquad \vec{A} = (x_b - x_a)\vec{\imath} + (y_b - y_a)\vec{\jmath} + (z_b - z_a)\vec{k}$$

✓ مركبات محصلة جمع الشعاعين $\vec{A} + \vec{B}$ حيث $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$ هي مجموع المركبات:

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{\imath} + \left(A_y + B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

✓ مركبات حاصل طرح الشعاعين $\vec{A} - \vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x - B_x \\ A_y - B_y \\ A_z - B_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{\imath} + \left(A_y - B_y\right)\vec{\jmath} + (A_z - B_z)\vec{k}$$

✓ طويلة الشعاع $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ هي:

$$\left|\vec{A}\right| = A = \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ملاحظة: جيوب تمام التوجيه تحقق:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

برهان:

$$\begin{aligned} A &= \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (A^2\cos\alpha^2 + A^2\cos\beta^2 + A^2\cos\gamma^2)^{1/2} \\ &= A(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2) \end{aligned}$$

و منه:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

يمكن كتابة جيوب تمام التوجيه للشعاع $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{A_x}{\left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A}, \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

تمرين1:

أوجد جيوب تمام التوجيه وشعاع الوحدة للشعاع: $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

جيوب تمام التوجيه:

$$|\vec{A}| = A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} = A = \sqrt{16 + 4 + 9} = \sqrt{29}$$

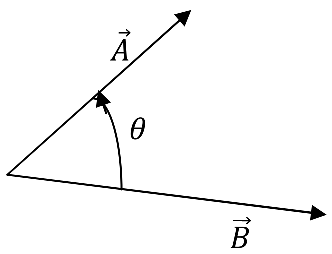
$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{4}{\sqrt{29}} \ , \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{29}} \ , \cos\gamma = \frac{-3}{\sqrt{29}}$$

شعاع الوحدة:

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{4\vec{i}}{\sqrt{29}} - \frac{2\vec{j}}{\sqrt{29}} - \frac{3\vec{k}}{\sqrt{29}}$$

3.2 الجداء السلمي لشعاعين

إذا كان $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$ شعاعين يشكلان مع بعض الزاوية θ، نسمي الجداء السلمي للشعاعين (*produit scalaire de deux vecteurs*)، ونرمز له بـ $\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B}$، العدد الحقيقي حيث:



$$\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} = |\vec{A}||\overrightarrow{B}|\cos\left(\widehat{\vec{A}\,,\overrightarrow{B}}\right) = AB\cos\theta$$

$\left(\widehat{\vec{A}\,,\overrightarrow{B}}\right)$: الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$.

4.2 خصائص الجداء السلمي

1. التوزيعية: $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} + \vec{C}\right) = \vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} + \vec{A}.\,\vec{C}$
2. التبديلية: $\vec{A}\,.\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B}.\vec{A}$

3. $(\vec{A}\lambda).\vec{B} = \vec{A}.(\lambda\vec{B}) = \lambda\vec{A}.\vec{B}$ حيث $\lambda \in R$.

4. $\vec{A}.\vec{0} = \vec{0}.\vec{A} = 0$، $\vec{0}$ عنصر ماص في الجداء السلمي.

5. $\vec{A}\,.\,\vec{A}$ يدعى المربع السلمي للشعاع $\vec{A}$ وهو $A^2 = A^2 \geq 0$ ، والمساواة غير محققة إلا إذا كان $\vec{A} = \vec{0}$.

6. $\vec{A} \perp \vec{B} \Longleftarrow \vec{A}\,.\,\vec{B} = 0$ (لان : $\cos\left(\widehat{\vec{A}\,,\vec{B}}\right) = 0$)

7. في المعلم الديكارتي المتعامد $OXYZ$ نجد أن:

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$$
$$\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

8. يكتب الجداء السلمي $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ بدلالة مركبات الشعاعين $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$

(نستعمل خاصية التوزيع(1) والخاصية السابقة(7)) :

$$\begin{aligned}\vec{A}\,.\,\vec{B} &= \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)\\ &= A_xB_x\vec{i}\cdot\vec{i} + A_yB_y\vec{j}\cdot\vec{j} + A_zB_z\cdot\vec{k} + A_xB_y\vec{i}\,\cdot\vec{j} + \cdots\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z\end{aligned}$$

9. يمكن إيجاد الزاوية المحصورة بين شعاعين $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$ و $\vec{B}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$:

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{|\vec{A}\,|.\,|\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

المربع السلمي:

$$\vec{A}^2 = A^2 = \vec{A}\,.\vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$$

يمكن كتابة مسقط شعاع $\vec{A}\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}$ على الشعاع $\vec{B}\begin{pmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{pmatrix}$ بدلالة الجداء السلمي بينهما:

$$P_{\vec{A}/\vec{B}} = |\vec{A}\,|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = |\vec{A}\,|\frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{|\vec{A}\,|.\,|\vec{B}|} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{B}$$

تمرين2:

لتكن الأشعة:

$$\vec{A} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad ; \qquad \vec{B} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\,; \quad \vec{C} = x\vec{i} + \vec{j} - y\vec{k}$$

1. أحسب: $\vec{A} + \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot \vec{B}$ ، $\vec{A} \cdot (\vec{A} + \vec{B})$.
2. أحسب مسقط الشعاع $\vec{A}$ على الشعاع $\vec{B}$.
3. أحسب الزاوية المحصورة بين الشعاع $\vec{A}$ و $\vec{A} + \vec{B}$.
4. أوجد x و y حتى يكون $\vec{C}$ متعامد مع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد .

الحل:

.1

$$\vec{A} + \vec{B} = (-2+2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (3+1)\vec{k} = 4\vec{k}$$
$$\vec{A}.\vec{B} = (-2)(2) + (1)(-1) + (3)(1) = -2$$
$$\vec{A}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = (4)(3) = 12$$

.2

$$|\vec{A}| = \sqrt{14}\ ,|\vec{B}| = \sqrt{6}\ ,|\vec{A} + \vec{B}| = 4$$
$$P_{\vec{A}/\vec{B}} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}}$$

.3

$$\cos\left(\widehat{\vec{A},\vec{A} + \vec{B}}\right) = \frac{\vec{A}.\left(\vec{A} + \vec{B}\right)}{|\vec{A}||\left(\vec{A} + \vec{B}\right)|} = \frac{12}{\sqrt{144}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

.4

$$\vec{C} \perp \vec{A} \Rightarrow \vec{A}.\vec{C} = 0 \Longrightarrow \vec{A}.\vec{C} = -2x + 1 - 3y = 0$$
$$\vec{C} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{B}.\vec{C} = 0 \Rightarrow \vec{B}.\vec{C} = 2x - 1 - y = 0$$

بحل جملة المعادلة نجد:

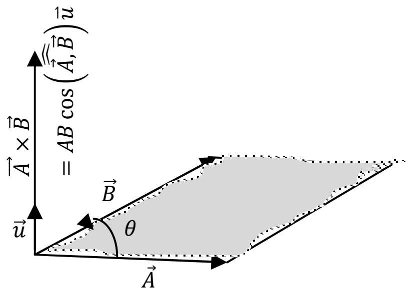
$$x = \frac{1}{2} \text{ و } y = 0$$

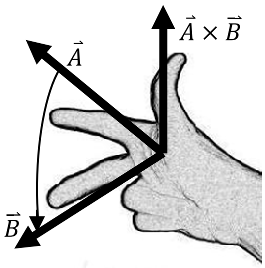
5.2 الجداء الشعاعي

نعرف الجداء الشعاعي للشعاعين (*produit vectoriel*) $\vec{A}$ و $\vec{B}$، ويرمز له $\vec{A}\times\vec{B}$ ، أنه الشعاع العمودي على $\vec{A}$ و $\vec{B}$ في آن واحد وطويلته تساوي:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\sin\left(\widehat{\vec{A},\vec{B}}\right)$$

يعين اتجاه $\vec{A}\times\vec{B}$ بقاعدة اليد اليمنى .

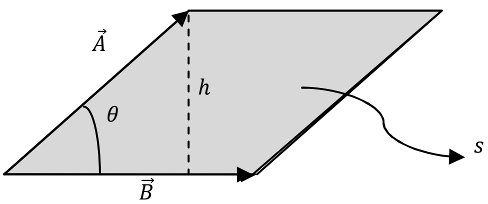




✓ المقدار $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ يساوي مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

برهان:

مساحة متوازي الأضلاع المشكل من الشعاعين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ يساوي:



$$S = \left|\vec{B}\right|h$$

$$h = \left|\vec{A}\right|\sin\theta \Longrightarrow S = BA\sin\theta = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

6.2 خصائص الجداء الشعاعي

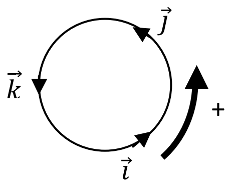
1. $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$
2. الجداء الشعاعي توزيعي على الجمع: $\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$
3. $\boldsymbol{\lambda}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\times\left(\lambda\vec{B}\right) = \left(\lambda\vec{A}\right)\times\vec{B}$ حيث $\lambda \in R$.
4. $\vec{A}//\vec{B} \Longrightarrow \vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$.

✓ **تطبيق لجداء الشعاعي: شرط انتماء نقطة إلى مستقيم.**

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء، كي تنتمي هذه النقطة إلى المستقيم (Δ) المار بالنقطتين a و b يجب أن تشكل مع أي نقطة من المستقيم (Δ) كالنقطة a مثلا شعاعا موازيا للشعاع $\overrightarrow{ab}$ ، وبما أن توازي شعاعين يعني انعدام الجداء الشعاعي، فإن معادلة المستقيم (Δ) المتمثلة أيضا في شرط انتماء النقطة M إلى المستقيم تكون:

$$\overrightarrow{aM} \times \overrightarrow{ab} = \vec{0}$$

5. في المعلم الديكارتي $OXYZ$ المتعامد والمتجانس لدينا:



$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}\ , \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

6. يكتب الجداء الشعاعي $\vec{A} \times \overrightarrow{B}$ بدلالة المركبات $\vec{A}\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ و باستخدام الخاصية (2) و(5) للجداء الشعاعي:

$$\vec{A} \times \overrightarrow{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}\right) \times \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right)$$
$$= A_xB_x\vec{\imath} \times \vec{\imath} + A_yB_y\vec{\jmath} \times \vec{\jmath} + A_zB_z\vec{k} \times \vec{k} + A_xB_y\vec{\imath} \times \vec{\jmath} \ldots$$
$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{A} \times \overrightarrow{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

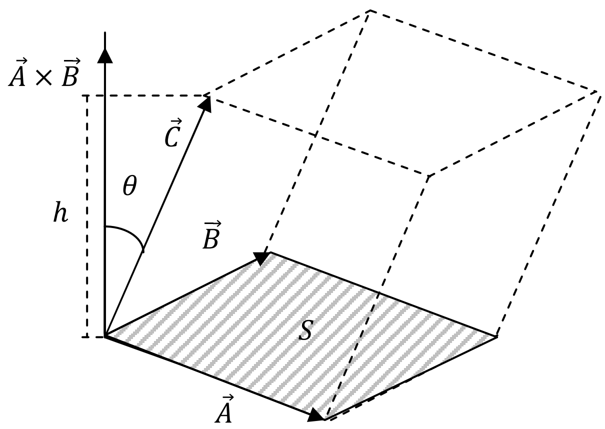
7. **الجداء المختلط**: نسمي الجداء المختلط للأشعة $\vec{A}$ و $\overrightarrow{B}$ و $\vec{C}$، والذي نرمز له $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right)$، المقدار السلمي المعرف بـ:

$$\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

- ✓ $\vec{A}.\left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right) = \overrightarrow{B}.\left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right) = -\vec{A}.\left(\vec{C} \times \overrightarrow{B}\right)$

ملاحظة: إذا كان شعاعان من الأشعة الثلاثة متساويين أو متوازيين فإن الجداء المختلط بين الأشعة الثلاثة معدوم.

✓ **تطبيق 1 للجداء المختلط**: القيمة المطلقة للجداء المختلط يمثل حجم متوازي الوجوه المعرف بأضلعه الثلاث $\vec{A}$، $\vec{C}$ و $\overrightarrow{B}$:



$$V = S.h$$
$$S = \left|\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right| \Longrightarrow V = \left|\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right|.h$$
$$h = \left|\vec{C}\right| \cos\theta$$
$$V = \left|\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right|\left|\vec{C}\right| \cos\theta$$
$$= \left|\vec{C}.\left(\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right)\right|$$

✓ **تطبيق 2 للجداء المختلط**: ليكن (P) المستوي الذي تنتمي إليه النقاط الثلاث a، b و c وكذلك الأشعة $\overrightarrow{ab}$ ، $\overrightarrow{\mathrm{ac}}$ و $\overrightarrow{\mathrm{bc}}$، وليكن $\vec{N}$ شعاع حيث: $\vec{N} = \overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}$. بما أن $\vec{N}$ عمودي على $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{\mathrm{ac}}$ معا فهو عمودي على المستوي (P)، وبهذا شرط انتماء أية نقطة M الى هذا المستوي (P) هو أن يشكل مع أية نقطة من المستوي، مثلا النقطة a شعاعا عموديا على $\vec{N}$ اي $\overrightarrow{aM} \cdot \vec{N} = 0$ ، فيصبح شرط انتماء أية نقطة M الى هذا المستوي (P) :

$$\overrightarrow{aM} \cdot \left(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}\right) = 0$$

ملاحظات:

✓ يعرف المستوي إما بثلاث نقاط تنتمي إليه أو بشعاعين أو نقطة وشعاع.

✓ يمكن إيجاد معادلة المستوي بتحقيق نفس الشرط: نفرض أن نقطة M تنتمي إلى المستوي المعرف بثلاث نقاط a، b و c حيث :0 $\overrightarrow{aM} \cdot \left(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}\right) = 0$.

8. **الجداء الثلاثي الشعاعي**: يعرف الجداء الثلاثي للأشعة $\vec{A}$، $\vec{C}$ و $\overrightarrow{B}$، نرمز له ب $\vec{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right)$ ، الشعاع $\vec{D}$ حيث:

$$\vec{D} = \vec{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right)$$

✓ $\vec{A} \times \left(\overrightarrow{B} \times \vec{C}\right) = \overrightarrow{B}\left(\vec{A}.\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}.\overrightarrow{B}\right)$

✓ $\left(\vec{A} \times \overrightarrow{B}\right) \times \vec{C} = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\overrightarrow{B} - \left(\overrightarrow{B}.\vec{C}\right)\vec{A}$

تمرين3:

1. ليكن في معلم متعامد ومتجانس$OXYZ$:

$$\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}\ ,\ \overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}=3\vec{\imath}+\vec{k}\ ,\ \overrightarrow{Oc}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

1. أوجد الشعاعين $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Ob}$.
2. أحسب الزوايا المحصورة بين الشعاعين: $\overrightarrow{Oa}$ و $\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}$ و الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و$\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
3. أحسب مسقط الشعاع $\overrightarrow{Oa}$ على الشعاع $\overrightarrow{Ob}$.
4. أحسب زوايا التوجيه (جيوب تمام التوجيه) لـ $\overrightarrow{Oa}$ و$\overrightarrow{Ob}$.
5. أحسب مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من الشعاعين $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
6. أحسب حجم متوازي الوجوه المتشكل من الأشعة $\overrightarrow{Oa}$، $\overrightarrow{Ob}$ و $\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}$.
7. أوجد شرط انتماء الأشعة $\overrightarrow{Oa}$، $\overrightarrow{Ob}$ و$\overrightarrow{Oc}$ إلى مستو واحد.
8. أوجد معادلة المستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطتين a وb.

الحل:

.1

$$\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}=-\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right|=\sqrt{6}$$
$$\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}=3\vec{\imath}+\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right|=\sqrt{10}$$

بجمع المعادلتين:

$$2\overrightarrow{Oa}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}\Rightarrow\overrightarrow{Oa}=\vec{\imath}+\vec{\jmath} \qquad \left|\overrightarrow{Oa}\right|=\sqrt{2}$$

بطرح المعادلتين:

$$2\overrightarrow{Ob}=4\vec{\imath}-2\vec{\jmath}+2\vec{k}\Rightarrow\overrightarrow{Ob}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k} \qquad \left|\overrightarrow{Ob}\right|=\sqrt{6}$$

.2

$$\cos\left(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Oa}\cdot\left(\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right)}{\left|\overrightarrow{Oa}\right|\left|\overrightarrow{Oa}-\overrightarrow{Ob}\right|}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$
$$\cos\left(\overrightarrow{Ob},\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)=\frac{\overrightarrow{Ob}\cdot\left(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right)}{\left|\overrightarrow{Ob}\right|\left|\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}\right|}=\frac{7}{2\sqrt{15}}$$

.3

$$P_{\overrightarrow{Oa}/\overrightarrow{Ob}} = |\overrightarrow{Oa}|\cos(\overrightarrow{Oa},\overrightarrow{Ob}) = \frac{\overrightarrow{Oa}\cdot\overrightarrow{Ob}}{|\overrightarrow{Ob}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

.4

من أجل $\overrightarrow{Oa}$: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\gamma = 0$

من اجل $\overrightarrow{Ob}$: $\cos \propto \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{6}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$

.5

$$S = |\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob})|$$

$$\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob}) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k} \Rightarrow S = \sqrt{11}$$ وحدة دولية

.6

$$V = |\overrightarrow{Oa}\cdot[\overrightarrow{Ob}\times(\overrightarrow{Oa}+\overrightarrow{Ob})]| = 0$$

.7

$$\overrightarrow{Oc}\cdot(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}) = 0$$

$$\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}-3\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Oc}\cdot(\overrightarrow{Oa}\times\overrightarrow{Ob}) = x-y-3z = 0$$

شرط انتماء الأشعة $\overrightarrow{Oa}$، $\overrightarrow{Ob}$ و$\overrightarrow{Oc}$ إلى مستوي واحد هو: $x-y-3z=0$

.8

نفرض $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي إلى المستقيم (Δ):

$$\overrightarrow{aM}\times\overrightarrow{ab} = \vec{0}$$

حيث: $\overrightarrow{aM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-1\\ z\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{ab}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{aM} \times \overrightarrow{ab} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (y+2z-1)\vec{i} - (x-z-1)\vec{j} + (-2x-y+3)\vec{k} = \vec{0}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x-z-1=0 \\ -2x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x-1 \\ y = 3-2x \end{cases}$$
معادلة مستقيم [5]

7.2 اشتقاق الأشعة

تعريف الاشتقاق لشعاع (*dérivée d'un vecteur*) نفسه بالنسبة للمقدار السلمي، ليكن φ دالة سلمية بدلالة x فان:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

بالنسبة الى $\vec{A}$ شعاع يتعلق بـ x فيكون:

$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x) - \vec{A}(x)}{\Delta x}$$

اشتقاق الأشعة له نفس خواص اشتقاق المقادير السلمية:

$$\vec{A} = |\vec{A}|\vec{u} = A\vec{u}$$
$$\frac{d\vec{A}}{dx} = \frac{dA\vec{u}}{dx} = \frac{dA}{dx}\vec{u} + A\frac{d\vec{u}}{dx}$$

سوف نهتم بالأشعة المتعلقة بالزمن، والتي لها دور مهم في ميكانيكا النقطة المادية. ليكن الشعاع في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

فيكون:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k}$$

---

[5] يعرف المستقيم في المستوي بمعادلة واحدة، أما في الفضاء يعرف بدلالة معادلتين يكون فيها احد المجاهيل وسيطا والمجهولين المتبقين يعطيان بدلالة الوسيط.

في الإحداثيات الديكارتية تعتبر أشعة الوحدة $\vec{\imath}$ و$\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ ثابتة مقدارا واتجاها، وعليه فإن:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{0}$$

و لكننا قد نفقد هذه الخاصية في إحداثيات آخر.

خواص:

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B}+\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}+\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}+\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda\vec{A})=\frac{d\lambda}{dt}\vec{A}+\lambda\frac{d\vec{B}}{dt}$$

ملاحظات:

1. إذا كان الشعاع $\vec{A}(t)$ موازيا للمستوي (P) فإن مشتقه الزمني $\frac{d\vec{A}}{dt}$ يكون موازيا لنفس المستوي (P). البرهان:

$\vec{A}$ شعاع موازي للمستوي (P) و $\vec{n}$ شعاع الوحدة العمودي على المستوي(P).

$$\vec{A}\perp\vec{n}\Rightarrow\vec{A}\cdot\vec{n}=0$$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{n})}{dt}=\frac{d(\vec{A})}{dt}\cdot\vec{n}+\vec{A}\cdot\frac{d(\vec{n})}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{n}\quad\left(\frac{d\vec{n}}{dt}=\vec{0}\ \text{ثابت قيمة واتجاها}\ \vec{n}\right)$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{n}=0\Longrightarrow\frac{d\vec{A}}{dt}\perp\vec{n}$$

أي أن $\frac{d\vec{A}}{d}$ مواز لنفس المستوي (P).

2. إذا كان $\vec{A}$ شعاع حيث $|\vec{A}|$ قيمة ثابتة فان: $\vec{A}\perp\frac{d\vec{A}}{dt}$

البرهان :

$$\vec{A}.\vec{A}=(\vec{A})^2=A^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{A}})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\vec{\mathrm{A}})^2=2\vec{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{A}^2=0\longrightarrow\vec{\mathrm{A}}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}=0\longrightarrow\vec{\mathrm{A}}\perp\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}}}{\mathrm{dt}}$$

تمرين4:

ليكن الشعاع:

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} - (t^2 + 2)\vec{j} + (t^2 - 6t + 9)\vec{k}$$

أحسب $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و$\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$، ثم عينهما في النقطة $t = 1$.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = -2t\vec{j} + (2t - 6)\vec{k}, \qquad \frac{d^2\vec{A}}{dt^2} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{t=1} = -2\vec{j} - 4\vec{k}, \qquad \left.\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}\right)_{t=1} = -2\vec{j} + 2\vec{k}$$

8.2 المشتقات الجزئية

لنأخذ تابعا سلميا φ وآخر شعاعيا $\vec{A}$ لمجموعة الإحداثيات المتعلقة بالزمن:

$$\varphi(x, y, z, t) \quad و \quad \vec{A}(x, y, z, t)$$

يكتب المشتق الجزئي للتابع السلمي أو الشعاعي بالنسبة لأحد هذه المتحولات x مثلا على النحو: $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}$ ، ويحسب كالمشتقة العادية تماما بالنسبة لهذا المتغير، وكأن بقية المتغيرات ثابتة، ويحدد التفاضل الكلي للتابعين φ و $\vec{A}$ كالتالي:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}dt$$

يمكن تعريف المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x^2}$$

و ايضا المشتقات المختلطة التي لا تتعلق بترتيب المتغيرات:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial y\,\partial x}$$

9.2 تدرج دالة سلمية

ليكن التابع سلمي $\varphi(x, y, z)$، يسمى تدرج (*Gradient*) الدالة السلميةφ ، ونرمز له $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi$، الشعاع المعرف في الإحداثيات الديكارتية:

$$\vec{\nabla}\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

حيث يدعى $\vec{\nabla}$ مؤثر نابلا (*opérateur nabla*):

$$\vec{\nabla}\square = \frac{\partial\square}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\square}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\square}{\partial z}\vec{k}$$

1. $\overrightarrow{\text{grad}}\,\alpha = 0 \quad (\alpha = \text{ثابت})$
2. $\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha\varphi) = \alpha\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ ، $(\alpha = \text{ثابت})$
3. $\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi_1\varphi_2) = \varphi_2\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 + \varphi_1\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2$ ، حيث φ_1 و φ_2 تابعان سلميان.
4. $\overrightarrow{\text{grad}}\varphi(\psi) = \left|\frac{\partial\varphi(\psi)}{\partial\psi}\right|\overrightarrow{\text{grad}}\psi$ ، حيث φ و ψ تابعان سلميان.
5. $d\varphi = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi . d\vec{r}$ ، حيث $d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$.

10.2 تفرق شعاع

تفرق (*Divergence*) الشعاع $\vec{A}$ ، ويرمز له بـ : $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A}$ [6] ، هو مقدار سلمي يساوي في الإحداثيات الديكارتية:

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

حيث: $\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}$.

1. $\text{div}\,\vec{C} = 0$، حيث $\vec{C}$ شعاع ثابت.
2. $\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div}\vec{A} + \text{div}\vec{B}$
3. $\text{div}(\alpha\vec{A}) = \alpha\text{div}\vec{A}$، حيث α ثابت.
4. $div(\varphi\vec{A}) = \varphi div\vec{A} + \vec{A}.\overrightarrow{grad}\varphi$، حيث φ تابع سلمي.

---

[6] تفرق شعاع $\vec{A}$ هو الجداء السلمي بين مؤثر نابلا و $\vec{A}$.

11.2 دوران شعاع

يحسب دوران (*Rotationnel*) الشعاع $\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}$ في جملة الإحداثيات الديكارتية، و نرمز له بـ: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ كالتالي:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

1. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}+\vec{B})=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}+\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$
2. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\alpha\vec{A})=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$ ، حيث α ثابت.
3. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\varphi\vec{A})=\varphi\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}+(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi)\times\vec{A}$ ، حيث φ تابع سلمي.
4. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\times\vec{B})=(\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}+\vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B}-\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}$

12.2 مؤثر لابلاسيان الدالة السلمية

نعرف لابلاسيان (*Laplacien*) الدالة السلمي $\varphi(x,y,z)$:

$$\nabla^2\varphi=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\varphi)=\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi)=\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

يسمى Δ مؤثر لابلاسيان معرف بـ:

$$\nabla^2\square=\Delta\square=\frac{\partial^2\square}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\square}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\square}{\partial z^2}$$

تمرين 5:

ليكن في المعلم الديكارتي الاشعة:

$$\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$$

حيث: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

حساب: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,r$ و $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\frac{1}{r}$ و $\mathrm{div}\,\vec{r}$ و $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{r}$ و $\nabla^2 r$.

الحل:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k} \qquad (1)$$

حيث:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

نعوض قيمة المشتقات الجزئية في المعادلة (1) فنحصل على :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, r = \frac{x}{r}\vec{\imath} + \frac{y}{r}\vec{\jmath} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r}$$

لدينا:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) = \frac{-1}{2}2x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{y}{r^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{z}{r^3}$$

و منه:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{k} = -\left(\frac{x}{r^3}\vec{\imath} + \frac{y}{r^3}\vec{\jmath} + \frac{z}{r^3}\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div}\,\vec{r} = \frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dy} + \frac{dz}{dz} = 3$$

باستعمال تعريف دوران شعاع نحسب:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

بالنسبة الى $\nabla^2 r$:

$$\nabla^2 r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

نعوض المشتقات في المعادلة (2) فنحصل على:

$$\nabla^2 r = \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$