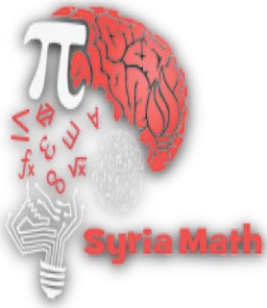


نظري

◄ دكتور المادة: وائل أبو ريشة

◄المحاضرة : الثالثة ◄ عنوان المحاضرة: المحددات

المستوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

١ـ لمحة عن المحددات .
٢ـ الجداء الخارجي وخواصه .
٣ـ الجداء المختلط وخواصه .
٤ـ تمارين .

المحددات

المحدد: هو قيمة للمصفوفة المصفوفة عبارة عن سطور وأعمدة.

أنواع المحددات

إن a,b,c,d عبارة عن قيم عددية

١-محدد الدرجة الثانية من الشكل:(وهو مصفوفة مربعة)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

مثال:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - (-2)(-5) = -9 - 1 - 19$$

٢-محدد الدرجة الثالثة :(مصفوفة مربعة)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

ننشر وفق السطر الاول نأخذ أول عنصر بأول سطر a_1 ونحذف سطره وعاموده فنجد محدد من الدرجة

Syria Math Team

الثانية $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ونأخذ ثاني عنصر من السطر الاول a_2 ونحذف سطره وعاموده فنجد المحدد

ونأخذ السطر الثالث a_3 ونحذف سطره وعاموده فنجد المحدد $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ من الدرجة $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ الثانية

٣-محدد الدرجة الرابعة (مصفوفة مربعة)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$$

(نوه الدكتور أن المحددات ستؤخذ بشكل موسع بالجبر الخطي (١) وما يهمنا في الدراسة في الهندسة هو محدد درجة الثالثة والثانية)

◄مثال :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -7 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -7 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -12 + 10 + 15 = -13$$

*الجداء الخارجي الشعاعي من الفضاء ثلاثي البعد:

سنسرد التعريف للفهم :

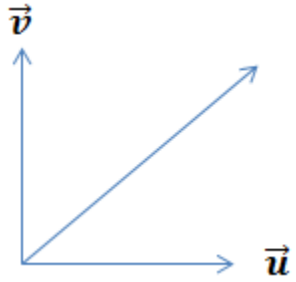
الجداء الخارجي للشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ والذي يرمز له ب $\vec{v}$ ^ $\vec{u}$ أو $\vec{u} * \vec{v}$

تمرين:

ليكن لدينا الشعاعين $\vec{u}(x_1, x_2, x_3)$ و$\vec{v}(y_1, y_2, y_3)$ نعرف الجداء الخارجي بأنه:

$$\vec{n} = \vec{u} \ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$



◄ملاحظة: الجداء الخارجي هو الشعاع العمودي على $\vec{u}, \vec{v}$

Syria Math Team

◄**ملاحظة** الجداء الخارجي ناتجه شعاع وليس قيمة والجداء الخارجي فقط معرف في الفضاء ثلاثي البعد .

الجداء السلمي (الداخلي)ناتجه عدد (قيمة)والجداء الداخلي معرف بأنه فضاء شعاعي أياً كان بعده سواء كان ثلاثي أو رباعي البعد أو.....

خواص الجداء الخارجي : $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$

فهذا يكافئ $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v}$ يعني مرتبطان خطيا $\vec{u}, \vec{v}$ غير صفريان

$$* \vec{u} \wedge \vec{v} = (-\vec{v}) \wedge \vec{u} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

◄**مثال :**

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$-(\vec{u} \wedge \vec{v}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$$

$$*(\vec{u} + \vec{v})\, \vec{w} = \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{w} : \vec{w} \in R^2$$

$$*\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$$

طويلة الجداء الخارجي تساوي مساحة متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$

تعطى بالعلاقة: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| * \|\vec{v}\| * \sin\theta$

$\theta = \vec{u}, \vec{v}$ الزاويا ; $0 \le \theta \le \pi$

وظيفة: لماذا طويلة الجداء الخارجي تساوي مساحة متوازي أضلاع.

◄**مثال :** لدينا$\vec{u}(3,4,0)$ و$\vec{v}(2,3,\sqrt{2})$ ينتميان الى فضاء ثلاثي R^3احسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$ وجيب الزاوية $\sin\theta$بينهما

الحل :

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= (0 - 4\sqrt{2})\vec{i} - (0 - 3\sqrt{2})\vec{j} + (8 - 9)\vec{k}$$

$$-4\sqrt{2}\vec{i}+3\sqrt{2}\vec{j}-\vec{k}$$

طويلة جداء

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{32+18+1}=\sqrt{51}$$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5$$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{4+9+2}=\sqrt{15}$$

لحساب $\sin\theta$:

$$\sin\theta=\frac{\|\vec{n}\|}{\|\vec{v}\|*\|\vec{u}\|}=\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|*\|\vec{u}\|}=\frac{\sqrt{51}}{\sqrt{15}*5}=\frac{\sqrt{51}}{5\sqrt{15}}$$

---

*الجداء المختلط :

تعريف: لتكن $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ ثلاث أشعة من الفراغ الثلاثي R^3 نعرف الجداء المختلط لها ونرمز له بالرمز $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ بالعلاقة:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v})*\vec{w}=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\rightarrow \text{عدد ناتج(قيمة)}$$

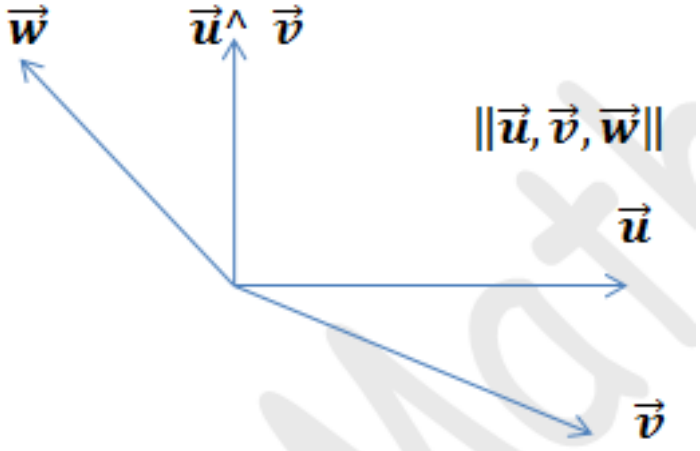
$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|*\|\vec{w}\|*\cos\theta \quad ;\theta=(\vec{w},\vec{u}\wedge\vec{v})$$

خواص الجداء المختلط:

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{w},\vec{u},\vec{v})=(\vec{v},\vec{w},\vec{u})$$

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$$

اذا كان الجداء المختلط يساوي الصفر فأن الأشعة الثلاث $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ تقع على مستوي واحد فأن $\vec{w}=\alpha\vec{u}+\gamma\vec{v}$ (فهم مرتبطان خطيا)



المعنى الهندسي للجداء المختلط: هو عبارة عن حجم مجسم متوازي أضلاع المنشأ على الاشعة: $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

تمرين:

ليكن لدينا $\vec{u}=(3,1,5)$, $\vec{v}=(0,2,4)$ $\vec{w}=(1,-1,-1)$ ثلاث أشعة تنتمي الى الفضاء الثلاثي $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^3$

المطلوب :

١ـ أثبت أن $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ واقعة على مستوي واحد ثم عين $\alpha\beta\in R$

$$\vec{u}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}$$

٢ـ ليكن لدينا $\vec{X}=(1,1,-1)$ احسب حجم متوازي الاضلاع المنشأ على $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$

الحل :

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}3 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=3(-2+4)-1(0-4)+5(0-2)$$
$$=6+4-10=0$$

اذا $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطيا وهي على استقامة واحدة وعلى مستوي واحد .

٢- $\alpha,\gamma\in R$

$$\vec{u}=\alpha\vec{v}+\gamma\vec{w}$$
$$(3,1,5)=\alpha(0,2,4)+\beta(1,-1,-1)$$
$$=(0,2\alpha,4\alpha)+(\beta,-\beta,-\beta)$$
$$(3,1,5)=(0+\beta,2\alpha-\beta,4\alpha-\beta)$$
$$\beta=3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$2\alpha-\beta=1 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$4\alpha-\beta=5 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Syria Math Team

من المعادلة (١) نستنتج أن $\beta = 3$ نعوضها في ٢ فنحصل على $\alpha = 2$

لتأكد نعوض β وα في٣فنجد:

$$5 = 4 * 2 - 3$$

$$5 = 5$$

وظيفة : تمرين الاول من الوحدة الاولى رقم (٥)

١-أرسم شكلا يوضع النقطة $A(1,2,3)$ بالنسبة للمحاور الاحداثية في جملة متعامدة منظمة وأحسب بعد هذه النقطة عن محاور الاحداثية.

٢-عين قياس الزوايا الثلاث A,B,C ومحيطه واحسب مساحته بطريقتين $A(2,1,2)$ و $B(1,0,2)$ و $C(1,2,4)$

٣-أوجد معادلة المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ التي نسبة بعدها عن نقطتين $A\ (-2,2,-2)$ و$B(3,-3,3)$ تساوي $\frac{2}{3}$

٤-عين α لكي تقع النقاط $A(\alpha,-1,-5)$ و$B(3,9,4)$ و$C\ (-52,4,4)$ و$D(4,5,10)$ في مستوي

انتهت المحاضرة

إعداد : رغد السويد* مؤمنة أندورا *مرزان عثمان

تنسيق: محمد أنس القزاز

Syria Math Team