5,8-3-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الأولى و الثانية

عنوان المحاضرة: مقدمة عن التحليل 5

مفردات المقرر:

1- مقدمة (مراجعة لبعض أفكار التحليل 1) و هذا ما سنتطرق إليه في هذه المحاضرة.

2-الفصل الأول: الدوال ذات التغير المحدود

a) مقدمة في التحليل 5
b) تعريف الدوال ذات التغير المحدود
c) خواص الدوال ذات التغير المحدود
d) معايير الدوال ذات التغير المحدود
e) تطبيقات الدوال ذات التغير المحدود

3-الفصل الثاني: تكامل استيلجس

4-الفصل الثالث: مقدمة في نظرية القياس

5-الفصل الرابع: تكامل لوبيغ

مراجع المقرر:

1- تحليل 5 للدكتور محي الدين بحبوح و الدكتور جمال مللي

2- تحليل 5 للدكتور ابراهيم ابراهيم

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1- تعريف دالة الحقيقية و بعض صفاتها
2- الدالة المطردة (نتائج و أمثلة)
3- الدالة المحدودة (نتائج)
4- نهاية دالة عند نقطة
5- استمرار الدالة عند نقطة ثم عند مجال
6- نقاط الانقطاع
7- القفزة (بعض المبرهنات)
8- الاشتقاق (بعض المبرهنات)
9- الدوال المركبة

بسم الله الرحمن الرحيم

1- تعريف دالة: علاقة تربط كل عنصر من المنطلق بعنصر واحد فقط من المستقر $f: X \to Y$

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y : f(x) = y$$

اذا كانت $y \subseteq \mathbb{R}$ فإنه تابع حقيقي

بعض صفات الدالة $f: X \to Y$:

- التباين: $\forall x_1, x_2 \in X: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

أو $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

- غامر: $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$

ملاحظة: اذا اخذنا المستقر الفعلي للدالة او للتابع تكون الدالة غامر

- التقابل: نقول عن الدلة f انها تقابل اذا كانت متباينة و غامر و بالتالي يوجد تقابل عكسي.

- دالة الزوجية: $f(-x) = f(x): x, -x \in X$

- دالة فردية: $f(-x) = -f(x): x, -x \in X$

و لكن الدالة بالحالة العامة ليس من الضروري أن تكون إما فردية أو زوجية

مثال: x^2 دالة زوجية , x دالة فردية , و لكن $2x + 1$ دالة ليست فردية او زوجية

2- الدوال المطردة على المجال X: (ضمن مجموعة التعريف X):

نقول عن الدالة f انها مطردة إذا كانت متزايدة أو متزايدة تماما أو متناقصة أو متناقصة تماما على X

نميز الحالات:

-1 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 f(x_1) \leq f(x_2)$ تكون متزايدة على X

-2 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 f(x_1) \geq f(x_2)$ تكوم متناقصة على X

-3 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 f(x_1) < f(x_2)$ تكون متزايدة تماما على X

-4 $\forall x_1, x_2 \in X: x_1 < x_2 f(x_1) > f(x_2)$ تكون متناقصة تماما على X

ملاحظة: - دالة f متزايدة على $X \Leftarrow -f$ متناقصة على X

- دالة f متناقصة على $X \Leftarrow X$ $-f$ متزايدة على X

مثال:

$f(x) = x^2$ متزايدة على $[0, +\infty[$ ومتناقصة على $]-\infty, 0]$

$f(x) = -x^2$ متناقصة على $[0, +\infty[$ ومتزايدة على $]-\infty, 0]$

$f(x) = x$ متزايدة على $\mathbb{R}$

$f(x) = -x$ متناقصة على $\mathbb{R}$

3- الدوال المحدودة:

نقول عن الدالة f انها محدودة على X اذا تحقق ما يلي: $\exists m > 0 : |f(x)| \leq m : \forall x \in X$

و هذا يعني انها محدودة من الأدنى و الأعلى و يمكن القول أنها محدودة من الأدنى اذا تحقق الشرط

$$\exists a \in \mathbb{R} : a \leq f(x), \forall x \in X$$

و يمكن القول أنها محدودة من الأعلى اذا تحقق الشرط:

$$\exists b \in \mathbb{R} : f(x) \leq b, \forall x \in X$$

مثلا: $\forall x \in \mathbb{R}$: $y = \sin(x)$ محدودة لأن:

$$\exists m = 1 > 0 : |\sin(x)| \leq 1 \quad : \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال أخر: $f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in]0, +\infty[$

نلاحظ أن f ليست محدودة على المجال $]0, +\infty[$ لأن $f(x)_{x \to 0} \to +\infty$

أما f محدودة على المجال $[2, +\infty[$ لأن:

$$\exists m = \frac{1}{2} > 0 : \left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{2} : \forall x \in [2, +\infty[$$

مثال: $f(x) = x^2$ متزايدة و محدودة على المجال $[0,5]$

مثال: $f(x) = -x^2$ متناقصة و محدودة على المجال $[0,5]$

-حالات خاصة:

- f معرفة على $[a,b]$ و متزايدة فإن: $f(x) \leq f(b): \forall x \in [a,b]$
- f معرفة على $[a,b]$ و متناقصة فإن: $f(x) \leq f(a): \forall x \in [a,b]$

4- نهاية دالة عند النقطة x_0:

نقول عن الدالة f إن لها نهاية عند x_0 اذا كانت معرفة في جوار x_0 أي معرفة في جوار x_0 و ليس بالضرورة ان تكون معرفة على x_0 و تحقق ما يلي:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = A : A \in \mathbb{R}$$

و يكتب هذا الشرط أيضا بالشكل $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A : A \in \mathbb{R}$

مثال: أوجد نهاية الدالة $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ عند $x = 1$ نلاحظ أن الدالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية فرق الصفر.

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 1 \\ >}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x \to 1 \\ >}} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = 2$$

5- استمرار f عند x_0:

نقول عن الدالة f انها مستمرة عند x_0 اذاكانت معرفة عند x_0 و معرفة في جوار ال x_0 و تحقق الشرط:

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0)$$

و يمكن أن تكتب بالشكل $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$

استمرار على مجال:

نقول عن الدالة f انها مستمرة على المجال $[a,b]$ اذا كانت:

1- مستمرة عند كل نقطة من $]a,b[$

2- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to a}} f(x)=f(a)$

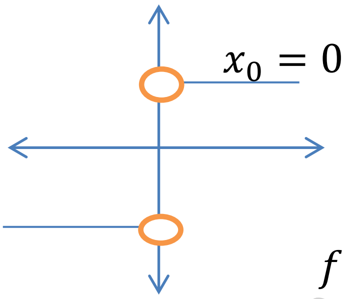
3- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to b}} f(x)=f(b)$

6- نقاط الانقطاع:

نقول عن النقطة x_0 انها نقطة انقطاع للدالة f اذا كانت f غير مستمرة عندها و هي 3 أنواع:

1- x_0 نقطة انقطاع من النوع الأول اذا تحقق:

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{\substack{> \\ x\to x_0}} f(x) \\ \lim\limits_{\substack{< \\ x\to x_0}} f(x)\end{matrix}\right\} \Rightarrow A\neq B: \quad A,B\in R$$



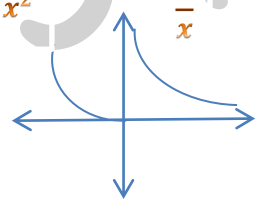
مثال: $f(x)=\frac{|x|}{x}$ إن $x_0=0$ نقطة انقطاع لأن الدالة غير معرفة عند $x_0=0$

فهي غير مستمرة عندها حسب الشرط الأول للاستمرار

$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ و منه $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{<} -1 \neq f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{>} 1$

2- النوع الثاني: نقول عن x_0 انها نقطة انقطاع من النوع الثاني اذا كانت احدى النهايات غير موجودة أو ∞

مثال: $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ x^2, & x\leq 0\end{cases}$ عند $x_0=0$ هي نقطة انقطاع من النوع الثاني، لأن:



$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{1}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} x^2=0$

و منه تتحقق شروط نقطة الانقطاع من النوع الثاني.

3- قابلة للإزالة:

نقول عن النقطة x_0 انها قابلة للإزالة اذا كانت......

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) \in R$$

مثال: $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ إن f غير معرفة على $x_0=2$ و منه إن x_0 نقطة انقطاع للدالة و هي من النوع الثالث لأن $\lim_{\substack{x\to 2\\ >\\ <}} \frac{x^2-4}{x-2}=4$ و في هذ الحالة يمكن تمديد هذه الدالة إلى دالة مستمرة $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2\\ 4 & x=2\end{cases}$ ومنه تصبح الدالة الممددة g معرفة على $x_0=2$

7- القفزة:

لتكن f دالة معرفة على $[a,b]$ $\quad x_0\in]a,b[$

القفزة عند x_0 تكون : $f(x_0+0)-f(x_0-0)$

القفزة من اليمين عند x_0 $\quad f(x_0+0)-f(x_0)$

القفزة من اليسار عند x_0 $\quad f(x_0)-f(x_0-0)$

القفزة عند a $\quad f(a+0)-f(a)$

القفزة عند b $\quad f(b)-f(b-0)$

مبرهنات بدون برهان:

a. اذا كانت f معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت f مطردة على نفس المجال فإن جميع نقاط الانقطاع من النوع الاول (إن وجدت)

b. مجموعة نقاط الانقطاع للدوال المطردة هي مجموعة منتهية أو عدودة و إذا كانت متزايدة فإن المتراجحة :

$$[f(a+0)-f(a)]+\sum_{k=1}^{\infty}[f(x_k+0)-f(x_k-0)] + [f(b)-f(b-0)] \le f(b)-f(a)$$

محققة.

8- الاشتقاق:

نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 اذا كانت معرفة في جوال ال x_0 حيث $x_0 \in]a,b[$ و عند النقطة x_0 و تحقق الشرط:

$$\exists A \in \mathbb{R}: \lim_{x \underset{<}{\overset{>}{\to}} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A$$

و نرمز ل A ب $f'(x_0)$

ملاحظة: كل دالة قابلة للاشتقاق عند x_0 تكون مستمرة عند x_0 و العكس ليس صحيح بالضرورة

مثال $f(x)=|x|$ إن f معرفة و مستمرة على مجموعة الأعداد الحقيقية و هي مستمرة عند الصفر ايضا لنرى هل هي قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ <\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <\\ >}} \frac{|x|-0}{x-0} = \begin{cases} 1 & : x>0 \\ -1 & : x<0 \end{cases} \neq A$$

النهايتان مختلفتان و منه إن f غير قابلة للاشتقاق عند الصفر

-الاشتقاق على المجال المغلق $[a, b]$:

1- نقول عن الدالة f انها قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ اذا كان:

-1 قابلة للاشتقاق عند كل نقطة $x_0 \in]a,b[$

-2 قابلة للاشتقاق عند a من اليمين أي

$$\exists A \in R: \lim_{\substack{> \\ x \to a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$$

-3 قابلة للاشتقاق عند b من اليسار أي

$$\exists B \in R: \lim_{\substack{< \\ x \to b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = B$$

مثال: $f(x) = x^2$ على المجال $[0,2]$ ادرس قابلية الاشتقاق. (وظيفة)

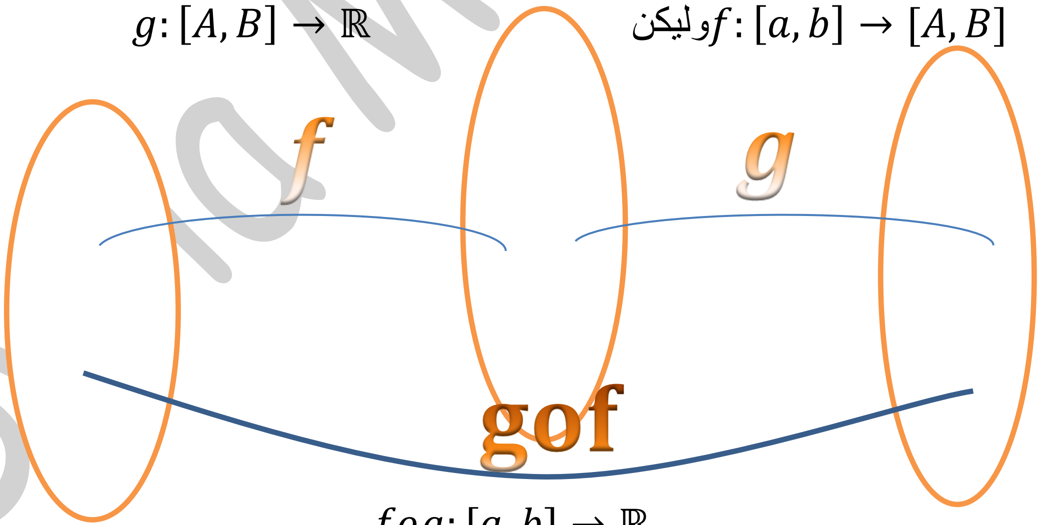
مبرهنات عن الاشتقاق:

-اذا كانت f مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ و كانت f قابلة للغشتقاق عند كل نقطة من $x_0 \in]a,b[$ عندئذ:

- الشرط الازم و الكافي لكي تكون f متزايدة هو أن تكون $f'(x) \geq 0$
- الشرط الازم و الكافي لكي تكون f متناقصة هو أن تكون $f'(x) \leq 0$

9- الدوال المركبة:

ليكن $f: [a,b] \to [A,B]$ وليكن $g: [A,B] \to \mathbb{R}$



$$fog: [a,b] \to \mathbb{R}$$

$$x \to (gof)(x) = g\big(f(x)\big)$$

مبرهنة: اذا كانت f متزايدة على $[a,b]$ و كانت g مطردة على $[A,B]$ فإن gof مطردة

حالات خاصة من المبرهنة:

- كانت g متزايدة على $[A,B]$ فإن gof تكون متزايدة على $[a,b]$
- كانت g متناقصة على $[A,B]$ فإن gof تكون متناقصة على $[a,b]$

تمارين وظيفة:

fمتزايدة على $[a,b]$ و g متزايدة على $[a,b]$ ايضا اوجد فيما اذا كان

$f+g\ ,f-g\ ,f.g\ ,\frac{f}{g}$ متزايدة أم لا؟؟

الحل: أولا $f+g$ حتى تكون متزايدة يجب ان يتحقق:

$$(f+g)(x_1) \le (f+g)(x_2) : x_1, x_2 \in [a,b]$$

1- إن f متزايدة ومنه $x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \le f(x_2)$

2- إن g متزايدة ومنه $x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \implies g(x_1) \le g(x_2)$

بجمع 1 و 2 نجد: $f(x_1) + g(x_1) \le f(x_2) + g(x_2)$

$$(f+g)(x_1) \le (f+g)(x_2)$$

ومنه فإن $f+g$ متزايدة.

الأن $f-g$ ليس بالضرورة ان يكون الطرح الدالتين متزايد على كل المجال $[a,b]$ وللتأكيد نأخذ مثال يثبت ما سبق:

$$f(x) = x^2 : x \in [0,2] \quad and \quad g(x) = x : x \in [0,2]$$

إن $f\ and\ g$ دوال متزايدة على المجال $[0,2]$ أي $f'(x) = 2x : x \in [0,2]$

$$g'(x) = 1 : x \in [0,2]$$

و منه $2x - 1 = 0 \to x = \frac{1}{2}$

x	0	1/2	2
$\mu'(x)$	----------------------0++++++++++++ يخالف (متناقص) (متزايد) يوافق		

نلاحظ أن طرح دالتين متزايدتين ليس متزايد دوما

بالنسبة ل $f.g$ جداء دالتين متزايدتين على $X=[a,b]$ ليس بالضرورة أن يكون متزايد على X لنأخذ مثال للتأكيد

$$f(x)=x\ ,x\in[0,2]\qquad ,\qquad g(x)=x-1,x\in[0,2]$$

معرفين على المجال $[0,2]$ ومنه بالشتقاق $f'(x)=1>0\ ,\ g'(x)=1>0$

$$\mu(x)=f(x).g(x)=x^2-x$$

$$\mu'(x)=2x-1$$

$$2x-1=0\ \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

x	0 1/2 2
$\mu'(x)$	----------------------0++++++++++++ يخالف (متناقص) (متزايد) يوافق

نلاحظ أن جداء دالتين متزايدتين ليس دالة متزايدة دوما......

$$\frac{f}{g}$$

القسمة ايضا بنفس الأسلوب و لكن بأخذ $f(x)=x\ \ and\ \ g(x)=x-1$ معرفين على المجال $I=[2,5]$

ينتج لدينا بقسمة الدلتين دالة جديدة $\mu(x)=\frac{x}{x-1}$ بالشتقاق $\mu'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

و هي دوما سالبة اي انا الدالة الناتجة متناقصة و منه يتم المطلوب.

الأن بفرض $f\ and\ g$ متناقصة على $[a,b]$ ايضا اوجد فيما اذا كان $f+g\ ,f-g\ ,f.g\ ,\frac{f}{g}$ متناقصة أم متزايدة ؟؟؟ حلها بنفس أسلوب التمرين السابق.

انتهت المحاضرة

إعداد: شهد الحايك البوشي *صفا ايوبي*ياسين الحلبي

إجبار نفسك على الابتسام لعدة ثواني حتى لو كنت لا ترغب في ذلك يقلل من مستويات التوتر لديك ويحسن مزاجك

ابتسم!

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الثالثة   عنوان المحاضرة: دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. التجزئة:- التجزئة - التجزئة الأدق - التجزئة المنتظمة – نظيم التجزئة
2. تعريف الدوال ذات التغير المحدود مع بعض الأمثلة
3. تعميم الدوال ذات التغير المحدود على $]-\infty,+\infty[\,,\,]-\infty,b]\,,\,[a,+\infty[$

1- التجزئة:

اذا كان لدينا المجال المغلق $[a,b]$ عندئذ ندعو كل مجموعة من الشكل

$p=\{a=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n=b : a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$ حيث

$$a<b\,,a,b\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}$$

تجزئة لـ$[a,b]$ و نرمز لمجموعة جميع التجزئات للمجال $[a,b]$ بـ $\mathbb{P}[a,b]$

مثال:

اذا كان $[0,1]$ مجال مغلق فإن هناك عدد لا نهائي من التجزيئيات منها

$$p_1=\left\{0\,,\frac{1}{2}\,,1\right\},p_2=\left\{0\,,\frac{1}{3}\,,1\right\},p_3=\left\{0\,,\frac{1}{4}\,,\frac{1}{2}\,,\frac{3}{4}\,,1\right\},p_4=\{0\,,1\},\dots\dots$$

- التجزئة الأدق:

نقول عن التجزئة p' أنها تجزئة أدق من التجزئة p اذا كانت $p\subseteq p'$

في المثال السابق $p_1\subseteq p_3$ ومنها p_3 تجزئة أدق من p_1

- التجزئة المنتظمة:

لنأخذ المسافة $\frac{b-a}{n}=p$

$$p=\left\{\begin{matrix} x_0=a, x_1=a+\frac{b-a}{n}, x_2=a+\frac{2(b-a)}{n}, \\ x_3=a+\frac{3(b-a)}{n}, \dots\dots, x_n=a+\frac{n(b-a)}{n}=b \end{matrix}\right\}$$

مثال:

تجزئة المجال $[0,1]$ إن $\Delta p=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$ و منه فإن التجزئة تكون :

$$p=\{x_0=0\ , x_1=\frac{1}{n}\ , x_2=\frac{2}{n}\ , \dots\dots, \frac{n}{n}=1\}$$

و بالتالي p_3 من المثال الأول تجزئة منتظمة حيث $n=4$

- نظيم التجزئة: (نرمز لها ب $\lambda p \equiv ||p|| \equiv \Box p$) حيث $\equiv$ تعني تكافئ

و نعرف نظيم التجزئة $k\in\mathbb{N}$: $\Delta p=\max_{0\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$

مثال: من المثال السابق نجد: $\Delta p_1=\frac{1}{2}\ , \Delta p_2=\frac{2}{3}\ , \Delta p_3=\frac{1}{4}$

2- تعريف الدالة ذات التغير المحدود: (نرمز لها ب (د , ت , م) للاختصار):

اذا كانت f دالة معرفة على المجال المغلق $[a,b]$ و كانت p تجزئة ما للمجال $[a,b]$ أي $p\in\mathbb{p}[a,b]$

و كان المجموع $V(f,p)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$ و ان $\mathrm{V}_a^b f=\sup_{p\in\mathbb{p}[a,b]}V(f,p)$

فإذا كان $\mathrm{V}_a^b f<+\infty$ فإن f د , ت , م

وإذا كانت $\mathrm{V}_a^b f=+\infty$ فإن f ليست د , ت , م

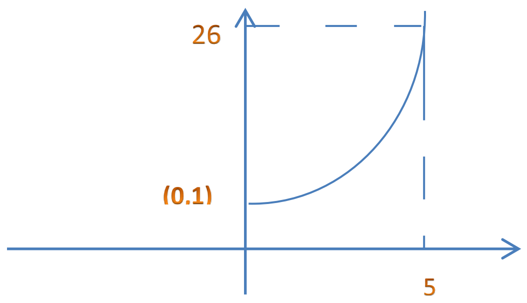
ندعو $\mathrm{V}_a^b f$ التغير الكلي للدالة f

مثال(1):

أوجد التغير الكلي للدال f ثم بين فيما اذا كانت د , ت , م أم لا (مع الرسم) علما أن f معرف كما يلي:

$$f(x)=x^2+1\quad :\quad x\in[0,5]$$

الحل:



لنأخذ التجزئة العشوائية $p=\{x_0=0<x_1<x_2<\cdots<x_n=5\}$

و لنحسب $V(f,p)$

$$V(f,p)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

$$=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_n)+f(x_{n-1})|$$
$$=|x_1^2+1-1|+|x_2^2+1-x_1^2-1|+\cdots+|x_n^2+1-x_{n-1}^2-1|$$

$$=x_1^2+x_2^2-x_1^2+x_3^2-x_2^2\ldots\ldots+x_n^2-x_{n-1}^2=x_n^2=25$$

و منه فإن $V(f,p)=25\ \Rightarrow \mathrm{V}_a^b f=sup_{p\in\mathbb{p}[0,5]}(25)=25<\infty$

و بالتالي f د , ت , م و تغيرها الكلي 25

مثال(2):

أوجد التغير الكلي للدالة f المعرفة على المجال $[0,1]$ ثم بين فيما اذا كانت f د,ت,م أم لا(مع الرسم)

علما أن f معرفة كما يلي
$$f(x)\begin{cases}0 & : \quad x=0\\ 1-x & : \quad 0<x<1\\ 5 & : \quad x=1\end{cases}$$

الحل:

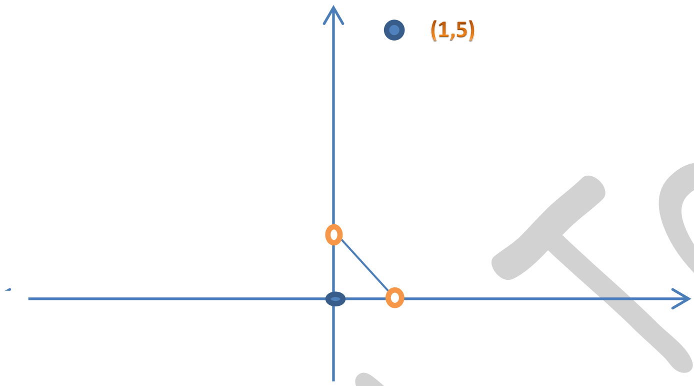
لنرسم الدالة أولا لدينا:

$$x = 0\ ;\ \ f(x) = 0$$

$$x = 1\ ;\ \ f(x) = 5$$

و أيضا $y = 1 - x$ معادة مستقيم لرسمه نضع $y = 0$ فإن $x = 1$ و عندما $y = 1$ فإن $x = 0$

ولكن المستقيم معرف فقط على المجال $]0,1[$ و بالتالي نفرغ المستقيم عند النقطتان $(1,0)$و$(0,1)$



لنأخذ التجزئة العشوائية$p = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1\}$ و لنحسب

$$V(f,p) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$V(f,p) = |1 - x_1 - 0| + |1 - x_2 - 1 + x_1| + |1 - x_3 - 1 + x_2| + \cdots + |1 - x_{n-1} - 1 + x_{n-2}| + |5 - 1 + x_{n-1}|$$

$$V(f,p) = |1 - x_1| + |-x_2 + x_1| + |-x_3 + x_2| + \ldots \ldots \ldots \ldots + |-x_{n-1} + x_{n-2}| + |4 + x_{n-1}|$$

و بما أن $x_k < x_{k+1}$ فإن $x_{k+1} - x_k > 0$ ومنه

$$V(f,p) = (1 - x_1) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots \ldots \ldots \ldots + (x_{n-2} - x_{n-3}) + (x_{n-1} - \mathrm{x}_{n-2}) + (4 + x_{n-1})$$

$$V(f,p) = 5 - 2x_1 + 2x_{n-1} = 5 + 2(x_{n-1} - x_1)$$

$$\Rightarrow \bigvee_0^1 f = \sup_{p\in\mathbb{p}[0,1]} \{5 + 2(x_{n-1} - x_1)\} = 7 < \infty$$

و نحصل على sup عندما $x_{n-1} - x_1 = 1$

و منه فإن f دالة ذات تغير محدود.

مثال(3):

إذا كانت f معرفة $[0,1]$ كما يلي: $f(x)=\begin{cases} x.\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right) & : x\neq 0 \\ 0 \quad : & x=0\end{cases}$ و المطلوب:

1. اثبت أن f مستمرة على $[0,1]$ (H.W)
2. اثبت أن f محدودة على $[0,1]$ (H.W)
3. اثبت أن f دالة ليست ذات متغير محدود

الحل:

1- تكون الدالة مستمرة على $[0,1]$ إذا تحققت الشروط التالية

-الدالة f مستمرة على المجال المفتوح $]0,1[$ اذا تحقق

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >\\ <}} f(x)=f(x_0) \quad , \quad x_0\in]0,1[$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >\\ <}} f(x)=x_0\cos\left(\frac{\pi}{2x_0}\right)=f(x_0)$$

- f مستمرة من اليمين عند $x_0=0$ يجب أن نبرهن أن

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=f(x_0)=0$$

و كون $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x.\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)=0 \Leftarrow$ f مستمرة من اليمين عند $x_0=0$

حيث x لا متناهي من الصغر و $cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ محدود ومنه فإن نهاية $=0$

- f مستمرة من اليسار عند $x_0=1$ لان

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} x.\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0=f(1)$$

و كون الشروط محققة فإننا نجد أن التابع f مستمر على المجال $[0,1]$

-2 لنبرهن أن f محدود أي $\exists M > 0 ; |f(x)| \leq M , \forall x \in [0,1]$

نلاحظ أن $|f(x)| \leq 1$ و ذلك $\forall x \in [0,1]$ لأن

$$\left|x.\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)\right| \leq 1 \quad , \qquad \forall x \in]0,1]$$

و $f(0) = 0 \leq 1$

و منه نجد أن f محددة على $[0,1]$

-3 لنأخذ التجزئة النونية

$$p_n = \left\{0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\right\}$$

$$V(f,p_n) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

$$V(f,p_n) = \left|f\left(\frac{1}{2n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right) - f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| + \cdots$$
$$+ \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right| + \left|f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

نلاحظ:

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}.cos(n\pi) = \frac{1}{2n}(-1)^n$$

$$f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2n-1}cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2n-1}\ (0)^n = 0$$

فإذا كان ما داخل التجيب عدد فردي مضروب ب π فيكون $f(x_n) = 0$ أي أن

$$V(f,p_n) = \left|\frac{1}{2n}.\cos(n\pi) - 0\right| + \left|\frac{1}{2n-1}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right) - \frac{1}{2n}.\cos(n\pi)\right|$$
$$+ \cdots + \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos(\pi)\right|$$

$$V(f,p_n)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

$$\Longrightarrow \bigvee_{0}^{1} f=\sup V(f,p_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

أي أن الدالة f ليست ذات تغير محدود

مثال(4):

اذ كانت f معطاة بالشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & 0\le x<1\\ 6 & x=1\\ x^2 & 1<x\le 2\end{cases}$$

أوجد $\bigvee_0^2 f$ (H.W)

نتائج عن د , ت , م:

إذا كانت f د , ت , م على $[a,b]$ فإن

1. $p\subseteq p' \Rightarrow \Delta p\ge \Delta p'$
2. $p\subseteq p' \Rightarrow V(f,p)\le V(f,p')$
3. $[a',b']\subseteq[a,b]\Rightarrow \bigvee_{a'}^{b'} f\le \bigvee_a^b f$
4. $V(f,p)\le \bigvee_a^b f\ ,\quad \forall p\in \mathbb{p}[a,b]$
5. اذا كانت f دالة ثابتة فإن $\bigvee_a^b f=0$ و منه الدالة الثابتة هي دالة ذات تغير محدود

3- تعميم تعريف الدالة ذات التغير المحدود على $]-\infty,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $[a,+\infty[$:

- نقول عن الدالة f د , ت , م على $[a,+\infty[$ اذا كانت الدالة f د , ت , م على أي مجال جزئي $[a,A]$ وكان $V_a^{\infty} f = \sup\{V_a^A f\} = \lim_{A\to+\infty} V_a^A f < \infty \;; p \in \mathbb{p}[a,A]$
- نقول عن الدالة f د , ت , م على $]-\infty,b]$ اذا كانت الدالة f د , ت , م على أي مجال جزئي $[B,b]$ وكان $V_{-\infty}^{b} f = \sup\{V_B^b f\} = \lim_{B\to-\infty} V_B^b f < \infty \;; p \in \mathbb{p}[B,b]$
- نقول عن الدالة f د , ت , م على $]-\infty,+\infty[$ اذا كانت الدالة f د , ت , م على أي مجال جزئي $[B,A]$ وكان $V_{-\infty}^{+\infty} f = \sup\{V_B^A f\} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} V_B^A f < \infty \;; p \in \mathbb{p}[B,A]$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي *ياسين الحلبي *شهد الحايك البوشي

to improve our mathematics

#ساعد غيرك

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :الرابعة عنوان المحاضرة:الدوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. خواص الدوال ذات التغير المحدود
2. بعض النتائج للخواص
3. معايير الدوال ذات التغير المحدود
4. بعض التمارين

خواص الدوال ذات التغير المحدود

1- اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن f دالة محدودة على المجال $[a,b]$ و لكن العكس ليس بالضرورة صحيح (أنظر الى المسألة 3 في المحاضرة السابقة السطر التاسع)

2- اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ولكن العكس ليس بالضرورة صحيح

3- اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[a,b]$ فإن:

a) αf دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

b) $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ بشرط أن تكون $\forall x \in [a,b] , |f(x)| \geq c > 0$

4- اذا كانت f , g دلتين كلا منهما ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ فإن:

a) $f+g$ د , ت , م على $[a,b]$
b) $f-g$ د , ت , م على $[a,b]$
c) $f.g$ د , ت , م على $[a,b]$
d) $\frac{f}{g}$ د , ت , م على $[a,b]$ بشرط $\forall x \in [a,b] \quad , \quad |g(x)| \geq c > 0$

5- لتكن f دالة ذات تغير محدود معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت $a<c<b$ فإن الشرط الازم و الكافي كي تكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن تكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,c]\ and\ \ [c,b]$

و تتحقق العلاقة $\mathrm{V}_a^b f = \mathrm{V}_a^c f + \mathrm{V}_c^b f$

نتائج

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود فإن:

a) f^n دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $n \in \mathbb{N}$

b) $1/f^n$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث $n \in \mathbb{N}$ بشرط أن $\forall x \in [a,b]\,, |f(x)| \geq c > 0$

c) $\mathrm{V}_a^b f = \mathrm{V}_a^{c_1} f + \mathrm{V}_{c_1}^{c_2} f + \cdots + \mathrm{V}_{c_n}^b f$ حيث $c_i \in]a,b[: i = 1,2,3,\dots,n$

معايير الدوال ذات التغير المحدود

1- اذا كانت f دالة معرفة و مطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و تتحقق العلاقة $\mathrm{V}_a^b f = |f(b) - f(a)|$

2- اذا كانت f دالة معرفة على المجال المغلق $[a,b]$ فإن الشرط الزام و الكافي لتكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن تكتب على شكل فرق لدالتين متزايدتين أي:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) : \forall x \in [a,b]$$

حيث f_1, f_2 دالتين متزايدتين على $[a,b]$

3- اذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ و تحقق شرط ليبشتز(من الدرجة الأولى) الذي ينص على

$$\exists\, L > 0 : |f(u) - f(v)| < L|u - v| : \forall u, v \in [a,b]$$

فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4- اذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ و المشتق موجود و محدود فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4^+- اذا كانت f قابلة للاشتاق على المجال المغلق $[a,b]$ و ربما باستثناء عدد منته من النقاط و كانت

$$\int_a^b |f'(x)|\ dx$$

موجوداً و محدوداً فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و تحقق:

$$\bigvee_a^b f=\int_a^b |f'(x)|\ dx$$

5- اذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$ فإن التغير الكلي $\mathrm{V}_a^b f=\lim_{\Delta p\to 0} V(f,p)$

حيث Δp: نظيم p و هو أكبر فرق يسعى الى الصفر أي أن كل الأبعاد تسعى للصفر

تمارين

1- بين مع الرسم أن الدالة f دالة ذات تغير محدود حيث $f(x)=x-x^2$ على المجال $[0,1]$

ثم أوجد $\mathrm{V}_0^5 f$

الحل:

$$f(x)=x-x^2$$

نلاحظ أن $f_1(x)=x$ متزايدة على المجال $[0,1]$ حيث $f_1{}'(x)=1\geq 0$

نلاحظ أن $f_2(x)=x^2$ متزايدة على المجال $[0,1]$ حيث $f_2'(x)=2x\geq 0$

حيث $x\in[0,1]$

ومنه f فرق لدالتين متزايدتين على $[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

((أو يمكننا القول $f_1(x)$ دالة معرفة و مطردة على المجال $[0,1]$ و منه فإنها دالة ذات تغير محدود

و $f_2(x)$ دالة معرفة و مطردة علة المجال $[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود و بما أن طرح دالتين ذات تغير محدود هو دالة ذات تغير محدود فإن $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ دالة ذات تغير محدود))

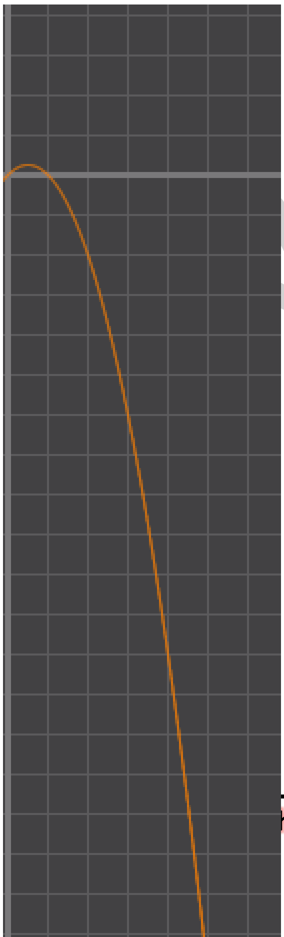
و الأن ندرس إطراد الدالة لتسهيل رسمها ثم نأخذ نقاط مساعدة

$$f(x)=x-x^2\to f'(x)=y'=1-2x$$

و بأخذ $y'=0$ و منه $x=\frac{1}{2}$

و بتعويض $x=\frac{1}{2}$ في $f(x)$ نجد أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

و لنأخذ $x=5$ نجد أن $f(5)=5-25=-20$



و عندما $x = 0$ نجد أن $f(0) = 1 \; and \; 0$

و لحساب $V_0^5 f$

x	0	1/2	5
y'	++++++++++++++++++	0	----------------------------
y	0	1/4	-20

$$\bigvee_0^5 f = \bigvee_0^{\frac{1}{2}} f + \bigvee_{\frac{1}{2}}^5 f$$

$$= \left|f\left(\tfrac{1}{2}\right) - f(0)\right| + \left|f(5) - f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right| = 20{,}5 = 41/2 < \infty.$$

و منه f دالة ذات تغير محدود على $[0,5]$

-2 بين أن الدالة $f(x) = x^2 - \frac{1}{x+1}$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ ثم أوجد $V_0^1 f$

الحل:

نلاحظ أن $f'(x) = 2x + \frac{1}{(x+1)^2}$ و أن المشتق f' موجود و محدود على المجال $[0,1]$
حيث $x \in [0,1]$ و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$
أو بطريقة ثانية:
نلاحظ أن $f_1(x) = x$ دالة معرفة و مطردة على $[0,1]$ و منه فإن f_1 دالة ذات تغير محدود
نلاحظ أن $f_2(x) = \frac{1}{x+1}$ و دالة معرفة و مطردة على المجال $[0,1]$ و منه فإن f_2 دالة ذات تغير محدود و تحقق شرط أن $|f_2(x)| > 0$
و منه فرق دالتين ذات تغير محدود هو دالة ذات تغير محدود أي أن f دالة ذات تغير محدود
طريقة ثالثة:

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

وبالتالي f دالة متزايدة على المجال$[0,1]$ فهي دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$

$$\bigvee_0^1 f = |f(1) - f(0)| = \left|\frac{1}{2} - (-1)\right| = \frac{3}{2}$$

3- اذا كانت f معرفة على $[2,+\infty[$ حيث $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ أوجد

$$\bigvee_{2}^{+\infty} f$$

هل f دالة ذات تغير محدود على $[2,+\infty[$

الحل:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \quad , \quad x \in [2,+\infty[$$

$$f'(x)=-\frac{2(x+1)}{(x+1)^4} \leq 0$$

إن f دالة معرفة و متناقصة على المجال $[2,+\infty[$ و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[2,+\infty[$

$$\bigvee_{2}^{+\infty} f = \lim_{b\to\infty} \bigvee_{2}^{b} f = \lim_{b\to\infty} |f(b)-f(2)|$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left|\frac{1}{(b+1)^2}-\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9} < \infty$$

4- f معرفة على المجال $[0,1]$ حيث :

$$f(x)\begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

المطلوب: بين أن f مستمرة على $[0,1]$

بين أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ (باستخدام المشتق)

5- اذا كانت f دالة معرفة على $[0,\frac{1}{2}]$ بالشكل التالي:

$$f(x)\begin{cases} -\frac{1}{\ln(x)} & , \quad x \neq 0 \\ 0 \quad , & x=0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
2. بين أن f متزايدة على $[0\,,\frac{1}{2}]$
3. بين أن f دالة ذات تغير محدود على $[0\,,\frac{1}{2}]$
4. بين أن f لا يحقق شرط ليبشتز

6- اذ كانت f معطاة بالشكل التالي:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 5 & x=1 \\ x+3 & 1<x\le 2 \end{cases}$$

أوجد $V_0^2 f$ (H.W) مع الرسم

سنورد حل الوظائف في المحاضرة القادمة.

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

to improve our mathematics

#ساعد غيرك

◄دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :الخامسة عنوان المحاضرة:خواص دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. برهين الخواص لدالة ذات تغير محدود

1- مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإنها محدودة على $[a,b]$ و لكن العكس ليس بالضرورة صحيح في الحالة العامة.

البرهان:

من الفرض لدينا أن fدالة ذات تغير محدود ومنه إن $\vee_a^b f < \infty$ و المطلوب إثبات f محدودة أي :

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M : \forall x \in [a,b]$$

الأن لنأخذ التجزئة التالية $P = \{a,x,b\}$ حيث $a < x < b$ إن $V(f,P) \leq \vee_a^b f$ كون f د,ت,م

$$V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \bigvee_a^b f$$

ومنه $$|f(x) - f(a)| \leq \bigvee_a^b f$$

و الأن لنأخذ $$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)|$$

$$\leq \bigvee_a^b f + |f(a)| = M$$

حيث $\vee_a^b f + |f(a)|$ عدد حقيق ومنه فإن $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M : \forall x \in [a,b]$

و منه الدالة f دالة محدودة على المجال $[a,b]$

و لإثبات العكس غير صحيح نكتفي بإعطاء مثال معاكس

أي نوجد f دالة محدودة و لكن ليست دالة ذات تغير محدود و قد درسنا في المحاضرة الثالثة دالة f و لكن f ليست دالة ذات تغير محدود (راجع التمرين الثالث من المحاضرة الثالثة) و منه العكس ليس صحيح بالضرورة

2-مبرهنة:

إذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغير محدود و منه إن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و لنثبت أن $\mathrm{V}_a^b |f| < \infty$

لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$ حيث $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ وليكن

$$V(|f|,P) = \sum_{k=1}^{n} \big|\,|f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\,\big|$$

و نعلم أن $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

و منه فإن $\sum_{k=1}^{n}\big||f(x_k)| - |f(x_{k-1})|\big| \leq \sum_{k=1}^{n}|f(x_k) - f(x_{k-1})|$

و منه $V(|f|,P) \leq V(f,P)$

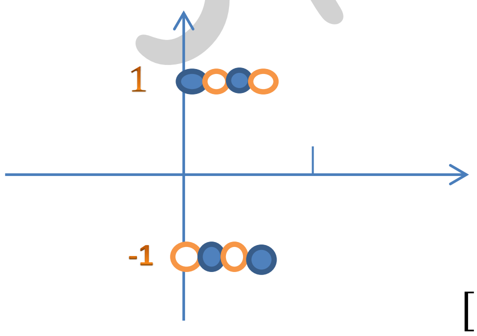
و بأخذ sup للطرفين نجد وكون f د , ت , م فإن $\mathrm{V}_a^b|f| \leq \mathrm{V}_a^b f < \infty$

ومنه فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

و لكن العكس غير صحيح و سنثبت ذلك بوضع مثال معاكس ينفي أن العكس صحيح بالحالة العامة أي:

لتكن f دالة معرفة بالشكل التالي

$$f:[0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} +1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



الرسم تقريبي لوجود عدد غير منته من الأعداد العادية في المجال $[0,1]$

و الأن سوف نثبت أن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$ وأن f ليست دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

إن $|f(x)| = 1$ و ذلك $\forall x \in [0,1]$ و منه فإن $\mathrm{V}_0^1 |f| = 0 < \infty$ منه فإن $|f|$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ أو يمكننا القول أنها دالة ثابتة و بالتالي فهي دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$

و الأن لإثبات أن f ليست دالة ذات تغير محدود نقوم أولا بأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[0,1]$

$$P = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

و ذلك بحيث $x_0, x_2, x_4, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ و $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{n-1} \notin \mathbb{Q}$:

ومنه فإن $V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$

$$= |-1-1| + |1-(-1)| + \cdots + |1-(-1)| = \underbrace{2+2+\cdots+2}_{\text{n مرة}} = 2n$$

$$\bigvee_0^1 f = \lim_{P\in\mathbb{P}[0,1]} V(f,P) = \lim_{n\to\infty}\{2n\} = +\infty$$

و منه فإن f ليست دالة ذات تغير محدود على $[0,1]$ و بذلك العكس ليس بالضرورة صحيح.

3- مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $\propto f$ دالة ذات تغير محدود $[a,b]$ حيث $\propto \in \mathbb{R}$

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغيير محدود و منه إن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و سنثبت أن $\mathrm{V}_a^b \propto f < \infty$ و ذلك بأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

و الأن $V(\propto f, P) = \sum_{k=1}^n |\propto f(x_k) - \propto f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n |\propto (f(x_k) - f(x_{k-1}))|$

$$= |\propto| \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| = |\propto|\, \mathrm{V(f,P)}$$

و منه فإن $$V(\propto f, P) = |\propto|\, V(f,P)$$

فبأخذ الـsup للطرفين نجد أن $$\mathrm{V}_a^b \propto f = |\propto|\, \mathrm{V}_a^b f < \infty$$

و منه فإن $f \propto$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$

4-مبرهنة:

اذا كانت f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ بشرط أن

$$\forall x \in [a,b]: |f(x)| \geq c > 0$$

البرهان:

من الفرض لدينا f دالة ذات تغير محدود أن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و سنثبت أن $\mathrm{V}_a^b \frac{1}{f} < \infty$ وذلك بإخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}:$$

من الفرض لدينا $|f(x)| \geq c > 0 : \forall x \in [a,b]$

إن $V\left(\frac{1}{f},P\right) = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_k)} - \frac{1}{f(x_{k-1})}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{f(x_k).f(x_{k-1})}\right|$

حيث $|f(x)| \geq c > 0 \rightarrow \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{c} \quad : \forall x \in [a,b]$

و من ما سبق نستنتج أن $(*)$ $\frac{1}{|f(x_k).f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{c^2}$ أي أن

حسب (*)

$$V\left(\frac{1}{f},P\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k)-f(x_{k-1})|}{|f(x_k).f(x_{k-1})|} \leq \frac{1}{c^2}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| = \frac{1}{c^2}V(f,P)$$

و بأخذ الsup للطرف الأول و الأخير نجد:

و منه فإن $\mathrm{V}_a^b \frac{1}{f} = \mathrm{V}_a^b f \,.\frac{1}{c^2} < \infty$ ومنه فإن $\frac{1}{f}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و منه يتم المطلوب.

5- مبرهنة:

اذا كانت f,g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن :

a) $\psi = \mathrm{f} + \mathrm{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$
b) $\vartheta = \mathrm{f} - \mathrm{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$
c) $\varphi = f.g$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$
d) $\phi = \frac{f}{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ بشرط $\forall x \in [a, b]: |g(x)| \geq c > 0$

البرهان:

a- لنفرض أن f, g دالتين كل منهما ذات تغير محدود على $[a, b]$ و لنثبت أن ψ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ و الأن لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a, b]$.

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

ومنه لنأخذ المجموع $V(\psi, P) = \sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k) - \psi(x_{k-1})|$

$$= \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(x_k) - (f+g)(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) + g(x_k) - f(x_{k-1}) - g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

من خواص القيمة المطلقة

$$\leq \sum_{k=1}^{n} [|f(x_k) - f(x_{k-1})| + |g(x_k) - g(x_{k-1})|] = V(f, P) + V(g, p)$$

و منه فإن $V(f+g, P) \leq V(f, P) + V(g, P)$

و بأخذ sup الطرفين نجد $V_a^b \psi \leq V_a^b f + V_a^b g < \infty$

ومنه فإن ψ دالة ذات تغير محدود على $[a, b]$ و منه يتم المطلوب

b- $\vartheta = f - g = f + ((-1)g)$ إن $((-1)g)$ دالة ذات تغير محدود حسب المبرهنة 3

و f من الفرض دالة ذات تغير محدود و حسب a نجد أن $\vartheta = f - g$ دالة ذات تغير محدود

c- لنثبت أن φ دالة ذات تغير محدود أي $V_a^b \varphi < \infty$ و لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

و منه فإن $V(\varphi, P) = \sum_{k=1}^{n} |(f.g)(x_k) - (f.g)(x_{k-1})|$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(x_k).g(x_k) + f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_k) - f(x_{k-1}).g(x_{k-1})|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| g(x_k)\big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) + f(x_{k-1})\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |g(x_k)| \; |f(x_k) - f(x_{k-1})| \; + \; |f(x_{k-1})| \; |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

و كون g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن g محدودة على $[a,b]$ أي أن:

$$\exists A > 0 : |g(x)| \leq A : \forall x \in [a,b]$$

و كون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن f محدودة على $[a,b]$ أي أن:

$$\exists B > 0 : |f(x)| \leq B : \forall x \in [a,b]$$

و منه بإكمال ما بدانا به نجد أن $V(f,P)$

$$\leq A \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + B \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})| = A\,V(f,P) + B\,V(g,P)$$

و منه فإن $V(\varphi,P) \leq A\,V(f,P) + B\,V(g,P)$

بأخذ sup للطرفين نجد أن $\mathrm{V}_a^b \varphi \leq A\,\mathrm{V}_a^b f + B\,\mathrm{V}_a^b g < \infty$

و منه فإن φ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و بذلك يتم المطلوب.

و d يتم بنفس الطريقة

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي *ياسين الحلبي *شهد حايك البوشي

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: السادسة   عنوان المحاضرة:خواص دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. حل بعض التمارين بالاستفادة من خواص و معايير الدالة ذات التغير المحدود
2. حل وظيفة المحاضرة الرابعة

قبل ان نبدأ بالتمرين الأول سنوضح $[x]$ تدعى دالة الجزء الصحيحة للعدد الحقيقي x و هي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x $n \in \mathbb{Z}$: $n \leq x < n+1$ فإن $[x]$ تاخذ قيمة n مثال: $0 \leq x < 1$ فإن $[x] = 0$ و $2 \leq x < 3$ فإن $[x] = 2$ و هكذا...

التمارين:

1- أثبت ان الدالة f دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ مستخدما خواص الدالة ذات التغير المحدود

$$f(x) = x - [x] + |x| + \frac{1}{x} - 8$$

الحل:

إن الحل بسيط لهذه الدالة و هنالك العديد م الطرق لإثبات أن f دالة ذات تغير محدود سنذكر منها:

إن $f_1(x) = x$ دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ كونها معرفة و متزايدة (مطردة)على نفس المجال

إن $f_2(x) = [x]$ د,ت,م على $[0,6]$ كونها معرفة و متزايدة (من التعريف) ايضا على نفس المجال

إن$f_3(x) = |x|$ د , ت , م على $[0,6]$ كون x د,ت,م على $[0,6]$ و القيمة المطلقة لها د,ت,م على$[0,6]$

إن $f_4(x) = \frac{1}{x}$ د,ت,م على $[0,6]$ كون x د,ت,م على $[0,6]$ و منه فإن مقلوبها د,ت,م على نفس المجال

$f_5(x) = -8$ دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ كونها دالة ثابتة

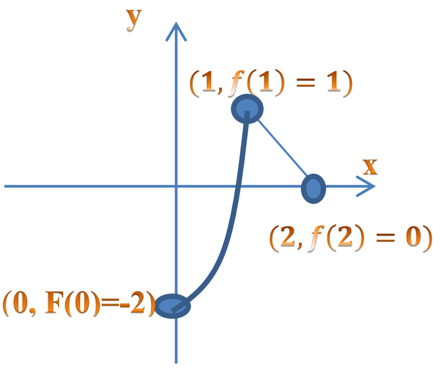
و منه فإن f دالة ذات تغير محدود على $[0,6]$ لأن جمع و طرح دوال ذات تغير محدود هو د,ت,م

2- أوجد التغير الكلي للدالة f مع الرسم علما أن $f(x) = x - 2|x-1| : x \in [0,2]$

اي علينا إيجاد التغير الكلي $V_0^2 f$

الحل:

نلاحظ هنا أن لدينا في الدالة $f(x) = x - 2|x-1| : x \in [0,2]$ أن هنالك القيمة المطلقة لذلك سنناقش حالات الدالة وفق المجال $[0,2]$ أي أن:



$$f(x) = x - 2\begin{cases} x-1 & : \quad x-1 \geq 0 \\ -x+1 & : \quad x-1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} x - 2x + 2 : & 2 \geq x \geq 1 \\ x + 2x - 2 : & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

ومنه
$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 : & 2 \geq x \geq 1 \\ 3x - 2 : & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

و منه الأن نستطيع حساب التغير الكلي للدالة f و ذلك بتجزئة الدالة لقسمين على المجال كوننا نلاحظ من الرسم أن الدالة غير مطردة و بتقسيمها يكون كل قسم مطرد (متزايد أو متناقص) حيث f متزايدة على المجال $[0,1]$ و f متناقصة على المجال $[1,2]$ ومنه

$$\bigvee_0^2 f = \bigvee_0^1 f + \bigvee_1^2 f = |f(1) - f(0)| + |f(2) - f(1)| = |1 - (-2)| + |0 - 1| = 3 + 1 = 4$$

و منه يتم المطلوب.

3- أوجد التغير الكلي للدالة g على المجال $[0,2]$ حيث $g(x) = x^2 - 2x : x \in [0,2]$

الحل:

في هذا التمرين غير مطلوب منا ايجاد أن الدلة g دالة ذات تغير محدود و لكن سنوردها للإفادة :

يمكننا استخدام أكثر من طريقة لمعرفة فيما إذا كانت الدلة دالة ذات تغير محدود ام لا من معيار المشتق مثلا أو اذا كانت معرفة و مطردة على المجال أو فرق دالتين متزايدتين و لكن الطلب هنا إيجاد التغير الكلي للدالة (تفقد معايير من المحاضرة الرابعة)

لنثبت أنها دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ ثم لنحاول إيجاد التغير الكلي للدالة g على نفس مجموعة التعريف

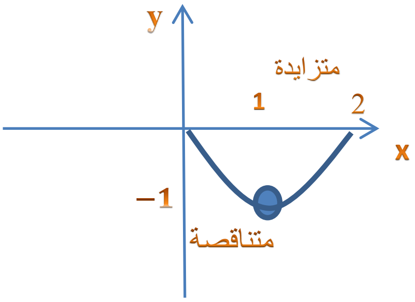
نلاحظ أن $g_1(x) = x^2$ دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ لأنها معرفة و متزايدة على المجال $[0,2]$

نلاحظ أن $g_2(x) = 2x$ دالة ذات تغير محدود على $[0,2]$ أيضا لأنها معرفة و متزايدة أيضا على المجال $[0,2]$ و منه g د,ت,م لأن طرح دوال ذات تغير محدود هي د,ت,م

و الان لنوجد $V_0^2 g$ نلاحظ ان $g'(x) = 2x - 2$ و بجعل $g'(x) = 0$ نجد أن $x = 1$

و منها $g(1) = 1 - 2 = -1$ و منه فإن

x	0	1	2
$g'(x)$	- - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +
$g(x)$	0 ↘	-1	↗ 0



و لإيجاد التغير الكلي للدال g على المجال $[0,2]$ نقوم بتجزئة المجال ل $[0,1], [1,2]$

أي أن: $V_0^2 g = V_0^1 g + V_1^2 g = |g(1) - g(0)| + |g(2) - g(1)|$

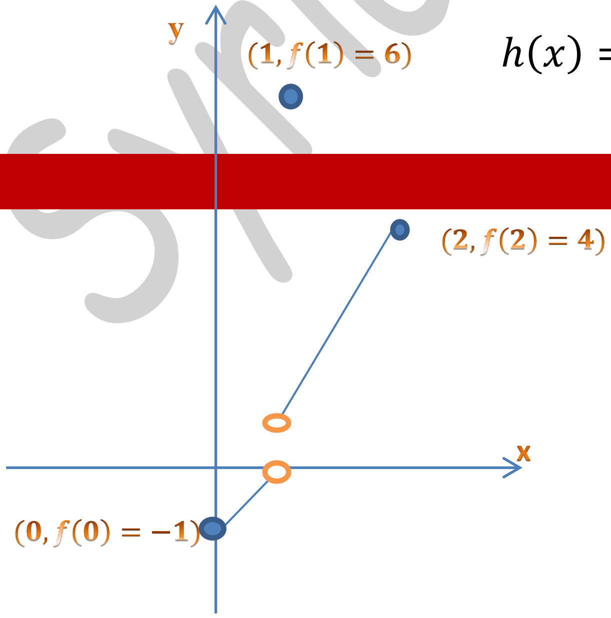
$$= |-1 - 0| + |0 - (-1)| = 2$$

و منه يتم المطلوب.

4- أوجد التغير الكلي للدالة h على المجال $[0,2]$ حيث:

$$h(x) = \begin{cases} x - 1 : 0 \le x < 1 \\ 6 : x = 1 \\ x^2 : 1 < x \le 2 \end{cases}$$

الحل:



لنحاول رسم الدالة اولا لمعرفة هل هي مطردة أم لا

نلاحظ أن h متزايدة على $[0,1]$

و نعلم أن $V_0^2 h = V_0^1 h + V_1^2 h$

و منه كون h متزايدة عند المجال $[0,1]$ فإن:

$$\bigvee_0^1 h = |h(1) - h(0)| = |6 - (-1)| = 7$$

نلاحظ أن h غير مطردة على المجال $[1,2]$ لذلك لا بد من العودة الى التعريف لإيجاد التغير الكلي للدالة h على $[1,2]$

و الأن لنوجد التغير الكلي للدالة h عند $[1,2]$ و لنأخذ التجزئة P حيث $P \in \mathbb{P}[1,2]$:

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2\}$$

و لنأخذ المجموع $V(h,P) = \sum_{k=1}^{n} |h(x_k) - h(x_{k-1})|$

$$V(h,P) = |h(x_1) - h(x_0)| + |h(x_2) - h(x_1)| + \cdots + |h(x_n) - h(x_{n-1})|$$

$$V(h,P) = |x_1^2 - 6| + |x_2^2 - x_1^2| + |x_3^2 - x_2^2| + \cdots + |4 - x_{n-1}^2|$$

نلاحظ أن $x_1 \in [1,2]$ ومنه $x_1^2 < 6 \Leftarrow |x_1^2 - 6| = 6 - x_1^2$

أما بالنسبة لباقي الحدود فإن فك القيمة المطلقة يبقى كما هو حسب التجزئة $x_2 < x_3 < \cdots$ و هكذا

$$V(h,P) = 6 - x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 + \cdots + 4 - x_{n-1}^2 = 10 - 2x_1^2$$

و منها فإن التغير الكلي يكون $\mathrm{V}_1^2 h = \sup_{P\in\mathbb{P}[1,2]}[10 - 2x_1^2] = 8$ حيث أصغر قيمة تأخذها x_1 في المجال $[1,2]$ هي 1 و منه فإننا نجد

$$\bigvee_0^2 h = \bigvee_0^1 h + \bigvee_1^2 h = 7 + 8 = 15$$

و منه يتم المطلوب.

حل الوظائف المحاضرة 4:

التمرين 4: f معرفة على المجال $[0,1]$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & : x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0,1]$
2. بين أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,1]$ (بإستخدام المشتق)

الحل:

1- لإثبات أن f مستمر على $[0,1]$ يجب تحقق الشروط التالية:

1- $x_0 \in]0,1[$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ و ذلك كلاتي:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ < \\ >}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = x_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{x_0}\right) = f(x_0)$$

2- $\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} f(x) = f(0)$ و ذلك

كون $\sin(\frac{\pi}{x})$ محدودة و x^2 لا متناهية من

$$\lim_{\substack{> \\ x\to 0}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 = f(0)$$

3- $\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = f(1)$ وذلك

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0 = f(1)$$

أي أن f مستمرة على المجال $[0,1]$ و الأن لحل الطلب الثاني يجب الاعتماد على المشتق كما ذكر في نص التمرين إذا لنشتق الدالة و منه

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) : x \in]0,1[$$

$$|f'(x)| = \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \le \left|2x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| + \left|\pi \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \le 2 + \pi$$

أي أن المشتق محدود على المجال $]0,1[$ و

$$x = 0 \Rightarrow f'(0+0) = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x} = 0$$ موجود و محدود

$$x = 1 \Rightarrow f'(1-0) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - 0}{x - 1} = \pi$$ موجود و محدود

(حسب أوبيتال)

و منه فإن f دالة ذات تغير محدود.

التمرين 5: اذا كانت f دالة معرفة على $[0,\frac{1}{2}]$بالشكل التالي:

$$f(x)\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln(x)} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x=0\end{cases}$$

المطلوب:

1. بين أن f مستمرة على $[0,\frac{1}{2}]$
2. بين أن f متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$
3. بين أن f دالة ذات تغير محدود على$[0,\frac{1}{2}]$
4. بين أن f لا يحقق شرط ليبشتز

الحل:

كي تكون f مستمرة على $[0,\frac{1}{2}]$ يجب أن تكون مستمرة عند كل نقطة من $]0,\frac{1}{2}[$ و مستمرة من اليمين عن الصفر و من اليسار عند$\frac{1}{2}$

أولاً: $x_0 \in]0,1/2[:\ \lim\limits_{x \overset{<}{\underset{>}{\to}} x_0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\underset{>}{\to}} x_0} -\dfrac{1}{\ln(x)} = -\dfrac{1}{\ln(x_0)} = f(x_0)$

ثانيا:$x_0 = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} -\dfrac{1}{\ln(x)} = 0 = f(0)$

ثالثا: $x_0 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} f(x) = -\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \frac{1}{2}} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = f\left(\frac{1}{2}\right)$

و منه فإن f مستمرة على المجال $[0,\frac{1}{2}]$

2- إن f متزايدة على $[0,\frac{1}{2}]$ لأن:

$$f'(x) = +\frac{1}{x.(\ln^2 x)} > 0 \ : x \in]0, \frac{1}{2}[$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $1/2$
f'	$++++++++++++++++++++++++$
f	0 $\nearrow$ $\frac{1}{ln2}$

3- بما أن f معرفة و متزايدة على $[0, \frac{1}{2}]$ فهي دالة ذات تغير محدود على نفس المجال و التغير الكلي هو

$$\bigvee_0^{\frac{1}{2}} f = \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\ln(2)} - 0 \right| = \frac{1}{\ln(2)}$$

4- إن f لا تحقق شرط ليبشتز لأن : حيث شرط ليبشتز

$$\exists L > 0 : |f(u) - f(v)| < L|u - v|, \forall u, v \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

سوف نبين أن هذا الشرط لا يصح أي لا يوجد L يحقق المتراجحة السابقة من أجل قيمتين u, v

و سنختار $v = 0 \ and \ u \overset{>}{\to} 0$

حسب أوبيتال نحسب النهاية كون هنا حالة عدم تعين $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{u \overset{>}{\to} 0} \frac{|f(u) - f(0)|}{|u - 0|} = \lim_{u \overset{>}{\to} 0} \frac{-\frac{1}{\ln(u)}}{u} = -\lim_{u \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{u}}{\ln(u)} = -\lim_{u \overset{>}{\to} 0} \frac{-\frac{1}{u^2}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{u} = +\infty$$

أي لا يوجد L بحيث يحقق $\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|} < L$ من أجل $u, v \in [0, \frac{1}{2}]$

التمرين 6:اذا كانت f معطاة بالشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ x + 3 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

أوجد $\bigvee_0^2 f$ مع الرسم بنفس طريقة التمرين (4) في الصفحة الثالثة من هذه المحاضرة.

انتهت المحاضرة

اعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد حايك البوشي

2-4-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: السابعة والثامنة

عنوان المحاضرة: معايير دوال ذات التغير المحدود

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. برهان المعايير لدالة ذات تغير محدود
2. بعض التمارين

المعايير مع برهانها

1- اذا كانت f دالة معرفة و مطردة على $[a,b]$ و فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة وتحقق العلاقة التالية $\mathrm{V}_a^b f = |f(a) - f(b)|$

البرهان:

لدينا من الفرض أن f معرفة و مطردة على $[a,b]$ و علينا إثبات أن $\mathrm{V}_a^b f < \infty$ و تحقق :

$$\bigvee_a^b f = |f(a) - f(b)|$$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{(a} \qquad \text{(إما } f \text{ متزايدة)}$$

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b]: x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{(b} \qquad \text{(أو } f \text{ متناقصة)}$$

لتكن P تجزئة للمجال $[a,b]$ بحيث

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

و الأن لنأخذ المجموع $V(f,P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}|$

$$V(f,P) = |f(x_1) - f(x_0)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(x_n) - f(x_{n-1})|$$

و هنا **نميز** حالتين:

اذا كانت f متزايدة فحسب a إن

نفك القيمة المطلقة أي

$$V(f,P) = f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots + f(x_n) - f(x_{n-1})$$
$$= f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a) \Longrightarrow$$
$$\bigvee_a^b f = \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} [f(b) - f(a)] = f(b) - f(a) < \infty$$

حيث $f(b) - f(a)$ عدد موجب

الحالة الثانية اذا كانت f متناقصة فحسب b فإن

$$V(f,P) = f(x_0) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_n)$$
$$= f(x_0) - f(x_n) = f(a) - f(b) \Longrightarrow$$
$$\bigvee_a^b f = \sup_{P\in\mathbb{P}[a,b]} [f(a) - f(b)] = f(a) - f(b) < \infty$$

حيث $f(a) - f(b)$ عدد موجب

ومنه نجد ان f دالة ذات تغير محدود سواء كانت متزايدة أو متناقصة(مطردة) على المجال $[a,b]$

و تحقق $\bigvee_a^b f = |f(a) - f(b)|$

و لكن العكس غير صحيح و ذلك بأخذ مثال بسيط $f(x) = x^2 - 2x : x \in [0,2]$ حيث f ليست مطردة ولكنها دالة ذات تغير محدود (راجع التمرين الثاني من المحاضرة السادسة أو حتى الثالث كلاهما يصلح كمثال معاكس)

تعريف: اذا كانت f معرفة على $[a,b]$ نقول أنها تحقق شرط ليبشتز من الدرجة k على المجال $[a,b]$

اذا تحقق الشرط:

$$\exists L > 0 : |f(u) - f(v)| \le L|u - v|^k, \forall u,v \in [a,b] : L \in \mathbb{R}$$

في الواقع يوجد 3 حالات نستطيع مناقشة هذا الشرط فيهم:

الحالة الأولى: $k=0 \Leftarrow f$ محدودة على $[a,b] \Leftrightarrow \exists L>0 : |f(u)-f(v)| \le L$

الحالة الثانية: $k=1 \Leftarrow \forall u,v \in [a,b]$, $\exists L>0 : |f(u)-f(v)| \le L|u-v|$

الحالة الثالثة: $k>1 \Leftarrow f$ دالة ثابتة أي $[a,b]$ $f(x)=c : \forall x \in [a,b]$

أي يتحقق $\forall x,y \in [a,b] \Rightarrow f(x)=f(y)=c$ حيث c ثابت

2- اذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ و تحقق شرط ليبشتز (من الدرجة الأولى) فإن f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ و لكن العكس ليس بالضرورة صحيح.

البرهان:

من الفرض لدينا f معرفة على المجال $[a,b]$ وتحقق شرط ليبشتز والأن علينا اثبات أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

لتكن P تجزئة للمجال $[a,b]$ حيث:

$$P:\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

نأخذ المجموع $V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$

إن f تحقق شرط ليبشتز أي علينا أن نستفيد من الشرط (كيف ذلك؟)

(شرط ليبشتز): $k=1 \Leftarrow \forall u,v \in [a,b]$, $\exists L>0 : |f(u)-f(v)| \le L|u-v|$

نجد من شرط ليبشتز أن فرق صور لأي عنصرين بالقيمة المطلقة أصغر تماما من فرق العنصرين بالقيمة المطلقة مضروبة ب العدد الموجب L

و بالاستفادة مما سبق نجد:

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})| \le \sum_{k=1}^{n} L\,|x_k-x_{k-1}|$$

$$V(f,P) \le L[|x_1-x_0|+|x_2-x_1|+\cdots+|x_n-x_{n-1}|]$$

$$V(f,P) \le L[x_1-a+x_2-x_1+x_3-x_2+\cdots+b-x_{n-1}]=L[b-a]$$

و منه بأخذ sup نجد أن $\quad \mathrm{V}_a^b f \le L[b-a] < \infty$ إذا f د,ت,م على $[a,b]$

اما عكس المبرهنة غير صحيح أنظر للتمرين الخامس من المحاضرة السادسة

3- اذا كانت f دالة معرفة على $[a,b]$ فإن الشرط الازم و الكافي لكي تكون f دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ هو أن يتحقق الشرط $f(x) = f_1(x) - f_2(x): \forall x \in [a,b]$

حيث f_1 , f_2 متزايدتين على المجال $[a,b]$.

لكن قبل البدا بالبرهان سنعرف دالة التغير الكلي لفهم فكرة و طريقة البرهان

تعريف: دالة التغير الكلي للدالة f على المجال $[a,b]$.

نفرض أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ و نعرف الدالة g بالشكل التالي:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x = a \\ \bigvee_a^x f & : \quad x \neq a \end{cases} : x \in]a,b]$$

و نسميها دالة التغير الكلي للدالة f على المجال $[a,b]$

نلاحظ أن الدالة $g(x)$ تكون :

1- $g(x)$ محدودة على المجال $[a,b]$ 2- $g(x)$ دالة متزايدة على المجال $[a,b]$

3- $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

برهان التعريف :

1- إن $\infty > V_a^b f \geq V_a^x f = |V_a^x f| = |g(x)|$ ذلك $\forall x \in]a,b]$

و أيضا إن $\infty > V_a^a f \geq 0 = |V_a^a f| = |g(x)|$ ذلك لأجل $x = a$

و منه فإن g دالة محدودة على $[a,b]$

2- الان لنثبت أن g متزايدة على المجال $[a,b]$ أي ان $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \leq g(x_2)$

حيث $x_1, x_2 \in [a,b]$

الأن كون f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ لنأخذ التجزئة $P \in \mathbb{P}[a,b]$

$$P = \{a < x_1 < x_2 < b\}$$

ومنه $\mathrm{V}_a^{x_2} f = \mathrm{V}_a^{x_1} f + \mathrm{V}_{x_1}^{x_2} f$ حيث كل منها أكبر من الصفر أي أن

$$\bigvee_{x_1}^{x_2} f = \bigvee_{a}^{x_2} f - \bigvee_{a}^{x_1} f \geq 0$$

أي أن $\mathrm{V}_a^{x_2} f \geq \mathrm{V}_a^{x_1} f \Leftarrow g(x_2) \geq g(x_1) \Leftarrow g$ متزايدة على المجال $[a,b]$

3- بما أن g متزايدة على $[a,b]$ فإن g دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

الان لنبدأ ببرهان المبرهنة مع الاستعانة بالتعريف .

البرهان:

نريد إثبات أن f د,ت,م على المجال $[a,b] \Leftrightarrow f = f_1 - f_2$ حيث f_1, f_2 متزايدتين على $[a,b]$

لزوم الشرط($\Leftarrow$): لنفرض أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

و الان لنختار $g(x)$ دالة التغير الكلي ل $f(x)$ و هي متزايدة (حسب تعريفها سابقا)

و لنختار الدالة $h(x)$ حيث $h(x) = g(x) - f(x)$

((نلاحظ أنه إذا أثبتنا أن $h(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ فإننا نحصل على

$$f(x) = g(x) - h(x) \ , \ \forall x \in [a,b]$$

وبذلك يتم المطلوب))

$h(x)$ تكون متزايدة عندما يتحقق الشرط التالي $x_1, x_2 \in [a,b]: x_1 < x_2 \Rightarrow h(x_1) \leq h(x_2)$

$$h(x_2) - h(x_1) = g(x_2) - f(x_2) - g(x_1) + f(x_1)$$

$$h(x_2) - h(x_1) = \left(g(x_2) - g(x_1)\right) - \left(f(x_2) - f(x_1)\right)$$

نلاحظ أن $\left(f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \mathrm{V}_{x_1}^{x_2} f = \mathrm{V}_a^{x_2} f - \mathrm{V}_a^{x_1} f\right.$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq g(x_2) - g(x_1)$$

$$\Rightarrow g(x_2) - g(x_1) - f(x_2) + f(x_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow h(x_2) - h(x_1) \geq 0 \rightarrow h(x_2) \geq h(x_1)$$

و بالتال h دالة متزايدة على المجال $[a,b]$

أي أن $f(x)=g(x)-h(x),\forall x\in[a,b]$ حيث كما وجدنا أن h,g متزايدتين على$[a,b]$

كفاية الشرط $(\Longrightarrow)$: لنفرض أن $f=f_1-f_2$ حيث f_1,f_2 دالتين متزايدتين على $[a,b]$ و لنثبت أن f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

لدينا: f_1 معرفة على المجال $[a,b]$ و متزايدة ايضا على المجال $[a,b]$و منه إنها د,ت,م على $[a,b]$

f_2 معرفة على المجال $[a,b]$ و متزايدة ايضا على المجال $[a,b]$و منه إنها د,ت,م على $[a,b]$

و منه فإن $f=f_1-f_2$ فرق دالتين متزايدتين كلا منهما دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

وبالتالي f دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$

تمارين:

قبل ان نبدأ بالتمرين الأول سنوضح $[x]$ تدعى دالة الجزء الصحيحة للعدد الحقيقي x و هي أكبر عدد صحيح لا يتجاوز x $n\in\mathbb{Z}$: $n\le x<n+1$ فإن $[x]$ تاخذ قيمة n مثال: $0\le x<1$ فإن $[x]=0$ و $2\le x<3$ فإن $[x]=2$ و هكذا...

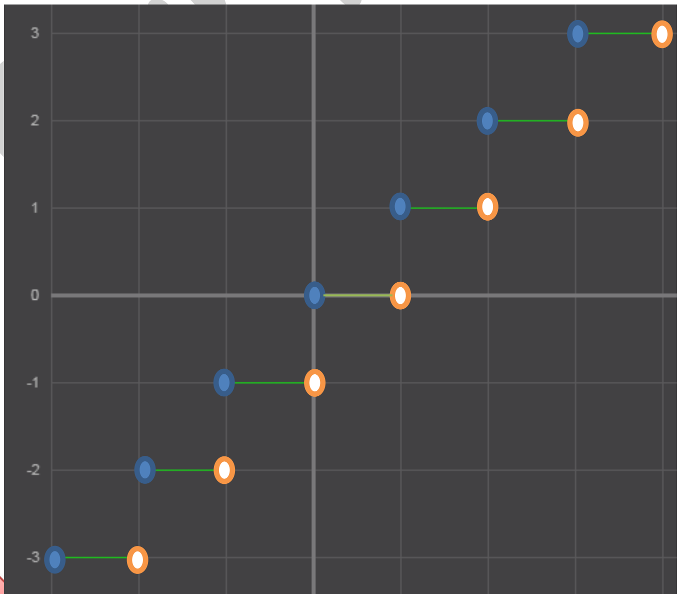
1- ارسم الدالة $y=[x]$ ثم أوجد التغيرالكلي للدالة على المجال $[-3,3]$

الحل:

$y=[x]$ اكبر عدد صحيح لا يتجاوز الx

سنقوم بتقسيم الدالة y الى مجالات لسهولة رسمها و ايجاد التغير الكي لها

$$y=[x]\begin{cases}-3 : -3\le x<-2\\ -2 : -2\le x<-1\\ -1 : -1\le x<0\\ 0 : 0\le x<1\\ 1 : 1\le x<2\\ 2 : 2\le x<3\\ 3 : x=3\end{cases}$$



نلاحظ من رسم الدالة أنها متزايدة

أي$x_1<x_2\rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

$$\bigvee_{-3}^{3} f = |f(3) - f(-3)| = 6$$

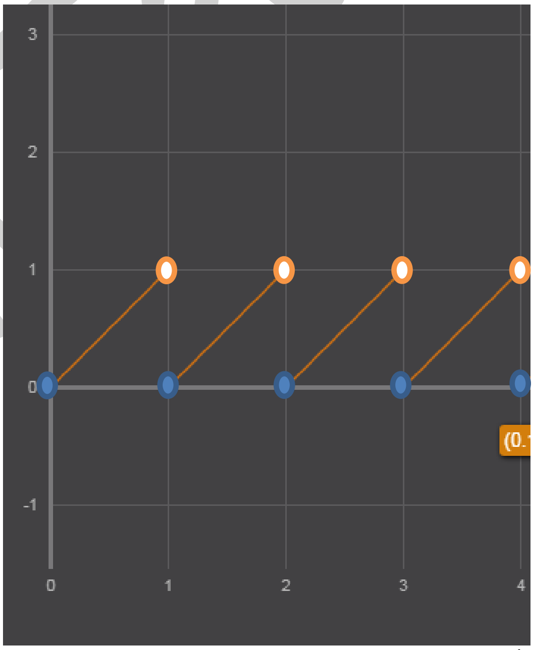
ومنه يتم المطلوب.

-2 ارسم الدالة $y = x - [x]$ في المجال $[0,4]$ ثم أوجد التغير الكلي للدالة ضمن ذلك المجال .

الحل:

لتكن $f(x) = x - [x]$ لنفرق الدلة f لمعرفة قيمة $[x]$ حسب مجال المعرفة عليه $[0,4]$

$$f(x) = \begin{cases} x & : 0 \le x < 1 \\ x-1 & : 1 \le x < 2 \\ x-2 & : 2 \le x < 3 \\ x-3 & : 3 \le x < 4 \\ x-4 & : x = 4 \end{cases}$$



الأن لنحسب $\bigvee_0^4 f$? نلاحظ من الرسم ان $\bigvee_0^4 f = 4 \bigvee_0^1 f$

الأن لنأخذ التجزئة النونية $\Delta P = \frac{1-0}{n}$ فتكون التجزئة

$$P = \left\{x_0 = 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < \cdots < \frac{n}{n} = 1\right\}$$

لنأخذ المجموع $V(f,P) = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0)\right| + \left|f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right| + \cdots + \left|f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right|$

إن $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ كون $0 < \frac{1}{n} < 1$ و هكذا أيضا لباقي عناصر التجزئة أما $f(1) = 1 - 1 = 0$ كون $1 \in [1,2[$ حسب تعريف $f(x)$

أي $V(f,P) = \left|\frac{1}{n} - 0\right| + \left|\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right| + \cdots + \left|0 - \frac{n-1}{n}\right|$

$$V(f,P) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n-1 \text{ مرة}} + \frac{n-1}{n} = \frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n} = 2\frac{n-1}{n} \Rightarrow$$

بأخذ sup نجد ان $\mathrm{V}_0^1 f = \sup\left(\frac{2n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-2}{n} = 2$ أي أن :

$$\bigvee_0^4 f = 4\bigvee_0^1 f = 8$$

و منه يتم المطلوب.

3- فرق الدوال على المجال $[0,2\pi]$ الى شكل فرق دالتين متزايدتين.

$y = \sin(x)$ (a

$y = \cos(x)$ (b

$y = |\cos(x)|$ (c

الحل:

لحل هذا التمرين قال الدكتور نايف الطلي أن هذا التمرين يحتاج الى فكرة و هو مبني على مبدأ التجربة أي لا يوجد قاعدة معينة لحله و قد أعطانا حل سهلا له و يترك للقارئ حله بطرائق أخرا (إذا أراد)

$y = sinx$ (a

يمكن كتابة هذه الدلة بشكل فرق دالتين متزايدتين من الشكل: $y = x - (x - \sin(x))$

بحيث x دالة معرفة و متزايدة على المجال $[0,2\pi]$

و $f_0 = x - \sin(x)$ اذا قمنا بإشتقاقها فينتج لدينا $f_0' = 1 - \cos(x)$ و كون $\cos(x)$ محدودة بين 0 و 1 فإن $f_0' \geq 0$ و منه فإن f_0 متزايدة

ومنه تم المطلوب

$y = cosx$ (b

يمكن كتابة هذه الدلة بشكل فرق دالتين متزايدتين من الشكل: $y = x - (x - \cos(\mathrm{x}))$

بحيث x دالة معرفة و متزايدة على المجال $[0,2\pi]$

و $f_0 = x - \cos(x)$ اذا قمنا بإشتقاقها فينتج لدينا $f_0' = 1 + \sin(x)$ و كون $\sin(x)$ محدودة بين 0 و 1 فإن $f_0' \geq 0$ و منه فإن f_0 متزايدة

ومنه تم المطلوب

$y = |\cos(x)|$ (c

لحل الدلة هذه نحتاج لتفريقها على المجال $[0,2\pi]$ و ذلك لكون ال $\cos(x)$ تكون إما سالبة أو موجبة وفق الربع الذي تمون موجودة فيه (أي وفق الزاوية)

نلاحظ أن $\cos(x)$ تكون موجبة في الربع الأول و الرابع أي عندما $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

وخلاف ذلك تكون سالبة و منه نفرق الدالة y

$$y = \begin{cases} \cos(x) & : \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos(x) & : \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

من ثم نقوم بالتفريق كما في b بالنسبة ل $\cos(x)$

أما بالنسبة ل $-\cos(x)$ يمكن كتابتها بالشكل $x - (x - \cos(x))$ و هي فرق دالتين متزايدتين

حيث x متزايدة على المجال $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

و باشتقاق $x - \cos(x)$ نجد أن المشتق يكون $1 + \sin(x)$ و هي موجبة حتما كون $\sin(x)$ قيمتها محدودة بين 1- و 1 ومنه فإن $x - \cos(x)$ متزايدة

و منه يتم المطلوب.

ملاحظة: يوجد أكثر من طريقة لحل التمرين الأخير وليس ما سبق فقط .

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا ايوبي * ياسين الحليبي * شهد الحايك البوشي

سعادتنا تعتمد على كيفية اختيارنا لرؤية ما حولنا

#ساعد غيرك

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :التاسعة   عنوان المحاضرة:تطبيقا د.ت.م و تكامل ريمان

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

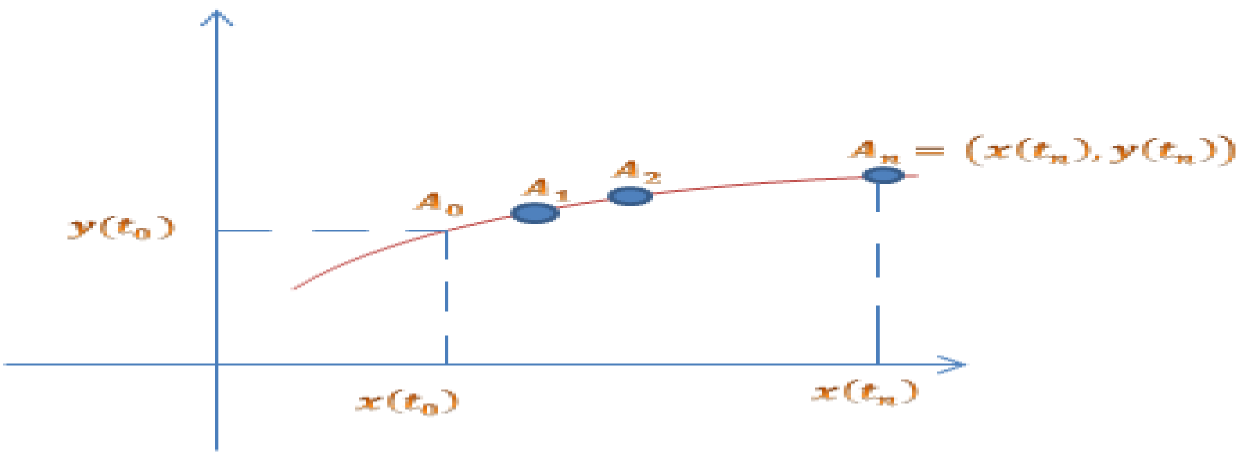
1. تطبيقات على الدوال ذات التغير المحدود
2. تكامل ريمان:
   a) تمهيد
   b) مجموع ريمان
   c) تعريف تكامل ريمان $(R)\int_a^b f\ d(x)$
   d) حساب تكامل ريمان من التعريف
   e) خواص تكامل ريمان
   f) شروط وجود تكامل ريمان

تعريف المنحني المجمع (القابل للتجميع):

1- في المستوي: اذا كان المحني c المعرف وسيطيا

$$x(t) = \upsilon(t) \qquad y(t) = \psi(t) \qquad : t \in [\alpha, \beta]$$

و كان المنحني لا يحوي نقاطا مضاعفة (مكررة)باستثناء البداية و النهاية اذا كان مغلقا



و الأن لنأخذ التجزئة $P=\{\alpha=t_0<t_1<t_2<t_3<\cdots<t_n=\beta\}$ و منه يتم تشكيل النقاط ونقاط التجزئة تقابلها نقاط على المنحني c و هي:

$$\begin{aligned}
&A_0, A_1, A_2, \dots, A_n\\
&A_0\big(x(t_0), y(t_0)\big)\\
&A_1\big(x(t_1), y(t_1)\big)\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots\\
&A_n\big(x(t_n), y(t_n)\big)
\end{aligned}$$

بالوصل بين هذه النقاط بقطع مستقيمة نحصل على خط مكسر طول هذه الخط من A_0 الى A_nيعطى بالقانون التالي:

تذكرة:

$$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

قانون بعد نقطتين

$$l(p)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big)^2+\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)^2}$$

$$L=\sup_{P\in\mathbb{P}\in[\alpha,\beta]} l(p)$$

ومنه فإن إذا كان $L<\infty$ عندئذ أقول أن المنحني c مجمعا أو قابل للتجميع.

2- في الفراغ: ليكن المنحني c المعرف وسيطيا

$$x(t)=\upsilon(t) \qquad : t\in[\alpha,\beta]$$

$$y(t)=\psi(t) \qquad : t\in[\alpha,\beta]$$

$$z(t)=\phi(t) \qquad : t\in[\alpha,\beta]$$

و بنفس الأسلوب السابق في المستوي مع مراعات البعد الثالث ستصبح الناقط عبارة عن ثلاثيات أي

$$\begin{aligned}
&A_0\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)\\
&A_1\big(x(t_1), y(t_1), z(t_1)\big)\\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

$$A_n\big(x(t_n), y(t_n), z(t_n)\big)$$

و منه قانون البعد سيكون بالشكل التالي كون النقاط أصبحت ثلاثيات:

$$l(p) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2 + \big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big)^2}$$

مبرهنة جوردان:

الشرط الازم و الكافي ليكون المنحني c مجمعا هو أن تكون كلا من الدالتين $x(t), y(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود على المجال $[\alpha, \beta]$ أي:

c منحني مجمع $\Leftrightarrow$ $x(t)$, $y(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود على المجال $[\alpha, \beta]$

البرهان:

$\Leftarrow$ من الفرض إن c منحني مجمع أي أن $L = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(p) < \infty$ حيث :

$$P = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n\}$$

يجب إثبات أن $V_\alpha^\beta x(t) < \infty \quad V_\alpha^\beta y(t) < \infty$

الأن سنبدأ ببعض المتراجحات التي ستسهل علينا حل و فهم البرهان

نعلم أن: $|a_k| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ و أيضا $|b_k| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

و منه بالاستفادة من المتراجحات السابقة إن :

$$l(P) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

نأخذ $\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 = a_k^2$ و $\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2 = b_k^2$

فإن حسب المتراجحات المساعدة

$$|x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

و منه بأخذ المجموع من $k = 1$ الى n أيضا لن تتغير صحة المتراجحة إذا:

$$\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

و منه فإن (1) $\quad V(x(t), P) \leq l(P)$

و نفس الشيء ل b_k^2

$$|y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

و بأخذ المجموع من $k = 1$ إلى n لن تتغير جهة المتراجحة أي أن:

$$\sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\big(x(t_k) - x(t_{k-1})\big)^2 + \big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2}$$

ومنه فإن (2) $\quad V(y(t), P) \leq l(P)$

فبأخذ ال sup ل 1 و 2 فنجد أن :

$\bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) \leq L < \infty$ ومنه فإن $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[\alpha, \beta]$

$\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) \leq L < \infty$ و منه فإن $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال المغلق $[\alpha, \beta]$

$\Longrightarrow$ بفرض أن $y(t)$, $x(t)$ دالتين كل منهما دالة ذات تغير محدود على المجال $[\alpha, \beta]$ و يجب إثبات

إذا كان
$$\begin{cases} \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t) < \infty \\ \bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty \end{cases} \Longrightarrow c \text{ منحني مجمع}$$

أي يجب إثبات أن $L = \sup_{P \in \mathbb{P}[\alpha,\beta]} l(p) < \infty$

لإثبات هذه الحالة ايضا سنقوم بإدراج متراجحة لتساعدنا في فهم و كيفية حل هذه الحالة و لتكن

$$\sqrt{a_k^2+b_k^2} \le |a_k|+|b_k|$$

ومنه إن $l(P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$

بأخذ $\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2=a_k^2$ و $\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2=b_k^2$

و بالاستفادة من المتراجحة المساعدة فإن :

$$\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le |x(t_k)-x(t_{k-1})|+|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

بأخذ المجموع فإن المتراجحة تبقى محققة

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le \sum_{k=1}^{n}|x(t_k)-x(t_{k-1})|+\sum_{k=1}^{n}|y(t_k)-y(t_{k-1})|$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2} \le V(x(t),P)+V(y(t),P)$$

بأخذ sup للطرفين نجد ان :

$$L \le \bigvee_{\alpha}^{\beta} x(t)+\bigvee_{\alpha}^{\beta} y(t) < \infty$$

و منه فإن c منحني مجمع (قابل للتجميع) على المجال المغلق $[\alpha,\beta]$

و لبرهان مبرهنة جوردن بالفراغ نقوم بمراعاة البعد الثالث و هو z اي أن $l(P)$ ستكون كالتالي:

$$l(p)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2+\left(z(t_k)-z(t_{k-1})\right)^2}$$

و أيضا كل متراجحة ذكرناها ستكون أيضا صحيحة بمراعاة البعد الثالث z و تبرهن بنفس الأسلوب تماما.

مثال(1): أثبت ان المنحني المعين بالمعادلات

$$x = t - \sin t \qquad y = 1 - \cos t \quad : t \in [0,2\pi]$$

هو منحني قابل للتجمع ثم احسب طوله.

الحل:

حسب مبرهنة جوردان إذا كانت $y(t), x(t)$ دالتين كل منهما ذات تغير محدود فيكون المنحني c قابل للتجميع

نلاحظ أن $x(t) = t - \sin t$ دالة ذات تغير محدود لأن باشتقاق $x(t)$ نجد أن $x'(t) = 1 - \cos t$

محدودة على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|x'(t)| = |1 - \cos t| \leq 1 + |\cos t| \leq 2$

ومنه $x(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$

و أيضا نلاحظ أن $y(t) = 1 - \cos t$ دالة ذات تغير محدود لأن باشتقاق $y(t)$ نجد $y'(t) = \sin t$

فإن المشتق محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|y'(t)| = |\sin t| \leq 1$ ومنه $y(t)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$

و منه فإن c منحني مجمع.

الأن لإيجاد طول المنحني من خلال قانون طول المنحني من التحليل 2 و الذي ينص على :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\; dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

تذكرة:

$$\sin^2 \frac{t}{2} = (1 - \cos t)\frac{1}{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin \frac{t}{2}\right|\; dt = \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2}\; dt$$

كون $\sin \frac{t}{2}$ موجبة على المجال $[0,2\pi]$

$$= -4\left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = -4[-1 - 1] = 8$$

مثال (2) :

أثبت ان المنحني المعين وسيطيا $t \in [0,2\pi]$: $y(t) = \sin t$ و $x(t) = \cos t$

هو منحني مجمع ثم أحسب طوله.

الحل:

إن $x(t) = \cos t$ دالة ذات تغير محدود لأن $x'(t) = -\sin t$ محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن

$$|x'(t)| = |-\sin t| \leq 1$$

و $y(t) = \sin t$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[0,2\pi]$ لأن $y'(t) = \cos t$ محدد على المجال $[0,2\pi]$ لأن $|y'(t)| = |\cos t| \leq 1$ و حسب مبرهنة جوردان نجد ان المنحني c مجمع.

و لإيجاد طول المنحني $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ dt$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\ dt = \int_0^{2\pi} 1\ dt = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$$

و هو المطلوب.

تكامل ريمان:

مجموع ريمان:

إذا كانت f معرفة و محدودة على المجال المغلق $[a,b]$ و إذا أخذنا التجزئة P على المجال $[a,b]$

$$P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

تكمن المسألة الأتية في حساب المساحة المحصورة بين منحني التابع $f(x)$ و محور الفواصل و المستقيمين $x = \alpha$ و $x = b$ ومن أجل ذلك سننشئ تجزئة ما للمجال $[a,b]$ فنقسمهذه التجزئة

فينتج لدينا سطوح صغيرة نقوم بحسابة مساحتها و هي نفسها مساحة السطح المطلوب حساب مساحته

فيمكن تقريب هذه السطوح الى مستطيلات ومنه نحسب مساحة كل المستطيلات بأسلوبين

<u>الأول:</u> و هو بأخذ الضلع الأقصر و وصله بقطعة مستقيمة مع المستقيم الأكبر و منه ينتج مستطيل مع بقاء مساحة صغيرة أعلى المستطيل (نتجاهلها) لنحصل على

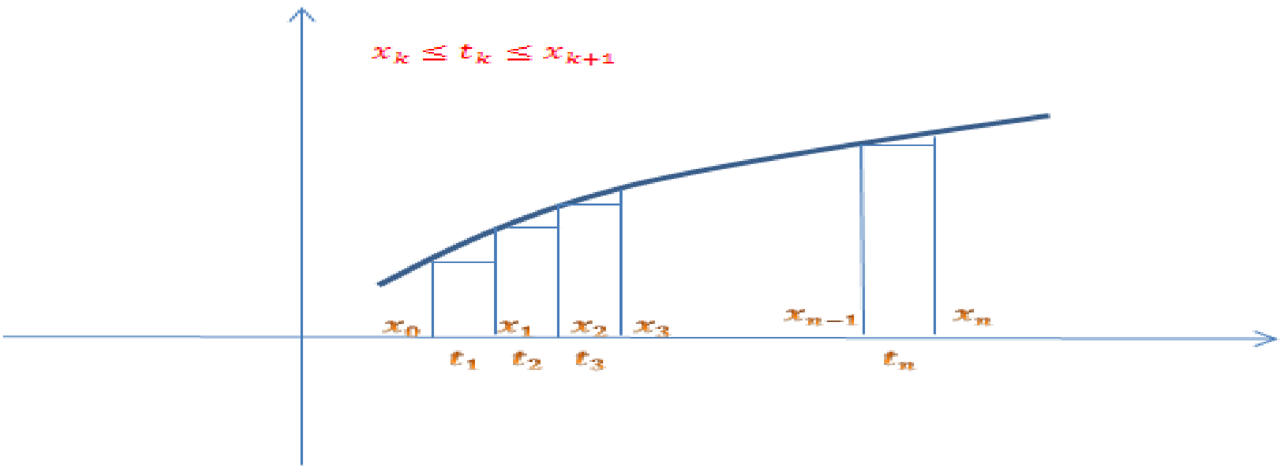
$$L(f,P) = f(x_0).(x_1 - x_0) + f(x_1).(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_{n-1}).(x_n - x_{n-1})$$

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).(x_k - x_{(k-1)})$$ المساحة الدنيا

الثاني: هو أن نحسب المساحة المستطيل باعتبار طول المستطيل هو الضلع الأطول للسطح أي نمدد الضلع الأقصر ليكون بطول المستقيم الأخر لكن نلاحظ أن المساحة ستكون أكبر بقليل من المساحة الفعلية للسطح فتكون العلاقة :

$$U(f,P) = f(x_1).(x_1 - x_0) + f(x_2).(x_2 - x_1) + \cdots + f(x_n).(x_n - x_{n-1})$$

$$U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k).(x_k - x_{k-1})$$ المساحة العليا



و باختيار t_k حيث $x_{k-1} \le t_k \le x_k$ ينتج لدينا .

$$S(f,P) = f(t_1).(x_1 - x_0) + f(t_2).(x_2 - x_1) + \cdots + f(t_n).(x_n - x_{n-1})$$

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k).(x_k - x_{k-1}) : \quad x_{k-1} \le t_k \le x_k$$

و هو مجموع ريمان الذي سنقوم باستخدامه و يكفي قول مجموع ريمان للإشارة إليه

و يحقق المتراجحة التالية : $L(f,P) \le S(f,P) \le U(f,P)$

- نقول عن f أنه كمول (قابل للمكاملة) اذا تحقق

$$\lim_{\Delta x\to 0}(U-L)=0\ :\ ||P||=\lambda P=\Delta x=\max_{1\le k\le n}(\Delta\, x_k)$$

ملاحظة إذا كانت التجزئة المأخوذة منتظمة تكون $\Delta x=\Delta x_k=\frac{b-a}{n}$

أي أن عندما تسعى Δx للصفر فإن n تسعى لل ∞ أي:

$$\Delta x\to 0\Longrightarrow n\to\infty$$

و عندها تؤول النهاية $\lim_{\Delta x\to 0}(U-L)=0$ الى النهاية $\lim_{n\to\infty}(U-L)=0$

- نقول عن f أنه كمول (قابل للمكاملة) إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\lim_{\Delta x\to o}\sum_{k=1}^{n}f(t_k).\Delta x_k=A$$

حيث $\Delta x=\max_{1\le k\le n}(x_k-x_{k-1})$ و يرمز لهذه النهاية $A=\int_a^b f(x)\ dx$

سنقوم بذكر بعض الملاحظات :

$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n\quad ,\quad \sum_{i=1}^{n}c=c+c+c+\cdots+c=n\,c\quad$ (n مرة)

$\sum_{i=1}^{n}c\,a_i=c\,\sum_{i=1}^{n}a_i\quad ,\quad \sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i)=\alpha\sum_{i=1}^{n}a_i+\beta\sum_{i=1}^{n}b_i$

$$\sum_{i=1}^{n}i=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة: العاشرة عنوان المحاضرة: تكامل ريمان

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. تكملة لتكامل ريمان
2. بعض تمارين
3. حل الوظائف لهذه المحاضرة

مراجعة لما أخذناه في المحاضرة السابقة:

مجموع ريمان:

اذا كانت f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ لنأخذ التجزئة على المجال $[a,b]$ و لتكن

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

و منه يكو مجموع ريمان هو:

$$S(f,P)=\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \ \ : \ \ \Delta \mathrm{x_k}=x_k-x_{k-1} \text{ و } x_{k-1}\leq t_k\leq x_k$$

تعريف التكامل:

اذا كانت f دالة معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ لنأخذ التجزئة على المجال $[a,b]$ و لتكن

$$P=\{x_0=a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b\}$$

نقول عن f انه كمول (قابل للتكامل) على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \ \ : \ \ \Delta \mathrm{x}=\max_{1\leq k\leq n}\Delta x_k$$

ملاحظة: اذا كانت التجزئة منتظمة أي أن $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ فإن:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x \quad \text{او} \quad A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x$$

و كلاهما يساوي $A = \int_a^b f(x)dx$

تعريف التكامل باستخدام ϵ (ابسيلن):

نقول عن f أنه قابل للمكاملة على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon \Longrightarrow |S(f,P) - A| < \epsilon$$

تعريف التكامل بالنسبة ل δ, ϵ:

نقول عن f أنها كمولة (قابلة للمكاملة) على المجال $[a,b]$ إذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث يحقق:

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists \delta_\epsilon > 0\,, \Delta P < \delta_\epsilon \Longrightarrow |S(f,P) - A| < \epsilon$$

حساب تكامل ريمان من التعريف:

مثال: $x \in [0,3]$: $I = \int_0^3 (x^2+1)\ dx : f(x) = x^2 + 1$

لنأخذ التجزئة أولا حتى نستطيع استخدام مجموع ريمان و لتكن التجزئة المنتظمة:

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 3\}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k).\Delta x_k$$

حيث نلاحظ: $x_0 = 0\,, x_1 = 0 + \Delta x = \frac{3}{n}\,, x_2 = 0 + x_1 + \Delta x = \frac{6}{n} \dots\dots\dots$

$$x_n = 0 + n\Delta x = n\frac{3}{n} = 3$$

ولنأخذ مجموع ريمان: $S(f,P) = [x_1^2 + 1 + x_2^2 + 1 + \cdots + x_n^2 + 1]\frac{3}{n}$

$$S(f,P) = \left[n + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + 2^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 + 3^2\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + n^2\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\frac{3}{n}$$

و بإدخال $\frac{3}{n}$ لداخل القوس و إخراج $\frac{3}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2$ عامل مشترك نجد أن :

$$S(f,P) = 3 + \frac{3}{n}.\left(\frac{3}{n}\right)^2[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2]$$

$$S(f,P) = 3 + \frac{27}{n^3}.\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$S(f,P) = 3 + \frac{9}{2n^2}(n+1)(2n+1) = 3 + \frac{9(2n^2+3n+1)}{2n^2}$$

و منه فإن A تكون $A = 3 + 9 = 12 \quad A = \lim_{n\to\infty} S(f,P) \Longrightarrow$

الوظائف:

1. $\int_1^3 (x+1)\,dx$
2. $\int_0^2 (x+1)\,dx$
3. $\int_0^3 x^2\,dx$

شروط وجود تكامل ريمان:

1- اذا كانت f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$ فإن f كمولة اذا و فقط اذا تحقق الشرط

$$\lim_{\Delta x\to 0}(U-L) = 0$$

كمولة$f \Leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}(U-L) = 0$ حيث f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$

2- إذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ فإن f قابلة للمكاملة على $[a,b]$

خواص تكامل ريمان:

لتكن f و g دوال قابلة للمكاملة على $[a,b]$ حيث $a<b$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن :

$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha[b-a]$ (1

2) $\int_a^b \alpha\, f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

3) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$

5) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ حيث f دالة زوجية أي $f(-x) = f(x)$

6) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ حيث f دالة فردية أي $f(-x) = -f(x)$

7) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \,:\, a < c < b$

8) $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \;:\; F'(x) = f(x)$

9) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

10) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

11) $f(x) \le g(x) : x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)dx$

12) $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

حيث $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \;, m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

13) نظرية القيمة الوسطى

$$\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x)\,dx = \mathrm{f}(\mathrm{c})[b-a]$$

14) نظرية القيمة الوسطى العامة:

ليكن $f\,, g$ دالتين مستمرتين على $[a,b]$ و $g(x)$ لا يغير إشارته على $[a,b]$

$$\exists c \in [a,b] : \int\limits_a^b f(x).\,g(x)dx \;= f(c)\int\limits_a^b g(x)dx$$

15) من 12 و 14 نجد:

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \le \int\limits_a^b f(x).\,g(x)dx \;\le M\int\limits_a^b g(x)dx$$

حيث $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) \;, m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

حل وظائف هذه المحاضرة:

1- $I = \int_1^3 (x+1)\,dx$ حيث $f(x) = x+1$ و $x \in [1,3]$

لنأخذ التجزئة النونية للمجال $[1,3]$ حيث $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$

$$P = \{x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 3\}$$

$$x_1 = 1 + \frac{2}{n}\ , x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right), \ldots\ , x_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right)$$

و منه لنأخذ مجموع ريمان $S(f,P) = [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].\frac{2}{n}$

$$S(f,P) = [x_1 + 1 + x_2 + 1 + \cdots + x_n + 1].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P) = [x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P) = \left[1 + \frac{2}{n} + 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) + n\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P) = \left[n + n + \frac{2}{n}(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n)\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P) = \left[2n + \frac{2}{n}\frac{n.(n+1)}{2}\right].\frac{2}{n}$$

$$S(f,P) = 4 + \frac{2(n+1)}{n} \to A = \lim_{n\to\infty} S(f.P) = 6$$

و نقوم بحل باقي الوظائف بنفس الطريقة تماما (تترك للقارئ).

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

0,1,2,4,6,9,12,16,?

أي رقم يجب أن يحل محل علامة الاستفهام ؟

الجواب سيكون في المحاضرة القادمة مع اختبار ذكاء أخر ☺

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الحادي عشر والثانية عشر عنوان المحاضرة: تكامل استيلجس

المحتوى العلمي: أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة:

1. مجموع استيلجس
2. تعريف تكامل استيلجس
3. شروط وجود تكامل استيلجس
4. خواص تكامل استيلجس
5. حساب تكامل استيلجس

تذكرة بتكامل ريمان:

$$A = (R)\int_a^b f(x)\,dx \;:\; R \ni A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k \;:\; \Delta x = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$$

عند كتابة (R) نقصد هنا تكامل ريمان كمان هو موضح أعلى و ليس قيمة عددية

وعند كاتبة (S) نقصد فيه تكامل استيلجس

مفهوم تكامل استيلجس (من خلال المفهوم نأخذ المجموع و التعريف)

اذا كانت g, f دالتين معرفتين و محدودتين على المجال $[a, b]$ نأخذ تجزئة ما P ل المجال $[a, b]$ بالشكل $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$

من ثمة نأخذ المجموع $x_{k-1} \le t_k \le x_k \;:\; S(f, g, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k$

حيث $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$

ندعو $S(f, g, P)$ مجموع استيلجس للدالة f على g (f وفق g)(f بالنسبة ل g)

ملاحظة: في التحليل 5 الدوال التي نتعامل معها حقيقية لا نتعامل مع العقدية

تكامل استيلجس:

نقول عن f انه قابل للمكاملة بالنسبة لg على المجال $[a,b]$ إذا وجد $A\in\mathbb{R}$ بحيث يحقق

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta g_k \quad : \Delta x=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$$

حيث $\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})$ و $t_k\in[x_{k-1},x_k]$

هذا المجموع يسمى تكامل استيلجس للدالة f بالنسبة ل g على المجال $[a,b]$ و يرمز له

$$A=(s)\int_a^b f\ dg$$

و هذا التعريف تعميم لتكامل ريمان و ستوضح الملاحظات التالية:

1- إذا أخذنا $g(x)=x$ عندها يصبح تكامل استيلجس من الشكل :

$$\int_a^b f(x)\,dg=\lim_{\Delta x\to 0}S(f,g,P)=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,(x_k-x_{k-1})=\lim_{\Delta x\to 0}S(f,x,P)=\int_a^b f(x)dx$$

حيث $\Delta x=\max_{1\le k\le n}\Delta x_k$ و $\Delta g_k=g(x_k)-g(x_{k-1})$ و $1\le k\le n$

و هكذا نحصل على تكامل ريمان عندما تكون الدالة $g(x)=x$ من تكامل استيلجس

2- لنأخذ $f(x)=1$ أي أن f دالة ثابتة ولكن ليس بالضرورة أن تكون g ثابتة ايضا و منه يكون

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,\Delta g_k=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n}1\,\Delta g_k=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)-g(x_{k-1})$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}[g(x_1)-g(x_0)+g(x_2)-g(x_1)+\cdots+g(x_n)-g(x_{n-1})]$$

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}[g(b)-g(a)]=g(b)-g(a):\ \ g(x_n)=g(b)\quad and\quad g(x_0)=g(a)$$

أي أن $\int_a^b 1\,dg=g(b)-g(a)$ فإذا كانت $g(x)=x$ يكون $\int_a^b 1\,dx=b-a$ (ريمان)

تعريف تكامل استيلجس بالنسبة ل ϵ (ابسيلن):

نقول عن f أنها قابلة للمكاملة بالنسبة ل g على المجال $[a,b]$ اذا وجد $A \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\forall \epsilon > 0, \exists P_\epsilon : P \supset P_\epsilon \Longrightarrow |S(f,g,P) - A| < \epsilon$$

شروط وجود تكامل استيلجس:

1- إذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على المجال $[a,b]$ فإن الشرط الازم و الكافي ليكون تكامل استيلجس موجودا هو أن يتحقق الشرط $\lim_{\Delta x \to 0}(U - L) = 0$

حيث $\Delta x = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ و P تجزئة للمجال $[a,b]$

حيث $x_{k-1} \le x \le x_k$ $M_k(f) = \sup f(x)$: $U(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f).\Delta g_k$

حيث $x_{k-1} \le x \le x_k$ $m_k(f) = \inf f(x)$: $L(f,g,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f).\Delta g_k$

2- اذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة على $[a,b]$ و كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a,b]$فإن تكامل استيلجس يكون موجودا للدالة f على g

3- اذا كانت $g(x)$ دالة ذات تغير محدود على المجال $[a,b]$ و كانت $f(x)$ دالة مستمرة على نفس المجال $[a,b]$ كان تكامل استيلجس موجودا

4- اذا كانت $g(x)$ دالة تحقق شرط ليبشتز على المجال $[a,b]$ و كان f مستمرا على $[a,b]$ فإن تكامل استيلجس موجود

5- اذا كانت f مستمرة على المجال $[a,b]$ و كانت g' موجودة و محدودا على المجال $[a,b]$ و كمول على نفس المجال فإن تكامل استيلجس يكون موجود و معينا بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)\ dg = (R)\int_a^b f\ .\ g' dx$$

خواص تكامل استيلجس:

1) $\int_a^b 1\ dg = g(b) - g(a)$

2) $(S)\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) dg = \int_a^b f_1(x) dg \pm \int_a^b f_2(x)\ dg$

3) $(S)\int_a^b \alpha f(x) d(\beta g) = \alpha\beta \int_a^b f(x)\ dg :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

4) $\int_a^b f(x).d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1 \pm \int_a^b f(x) dg_2$

5) إذا كانت $g(x)$ دالة متزايدة و كان $\int_a^b h\,dg$ موجودة و $\int_a^b f dg$ موجودة و

$$f(x) \le h(x)\,, \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f\,dg \le \int_a^b h\,dg$$

6) اذا كانت g دالة متزايدة على المجال $[a,b]$ و كان $\int_a^b f\,dg$ موجودا فإن

1- $\int_a^b |f(x)| dg$ يكون موجودا

2- $\int_a^b f^2\,dg$ يكون موجودا

3- $\left|\int_a^b f(x)\,dg\right| \le \int_a^b |f(x)|.dg$

7) اذا كانت الدالة $g(x)$ متزايدة على $[a,b]$ و كان التكامل $\int_a^b f\,dg$ موجودا فإن التكاملين

$$\int_a^c f\ \ dg \quad و \quad \int_c^b f\ \ dg \quad : \quad a < c < b$$

موجودين و يحققان ما يلي

$$\int_a^b f\ \ dg = \int_a^c f\ \ dg + \int_c^b f\ \ dg$$

في تكامل استيلجس إذا كان $\int_a^c f\,dg$ و $\int_c^b f\,dg$ موجودين فإنه ليس بالضرورة أن يكون $\int_a^b f\,dg$ موجودا أما في تكامل ريمان إذا كان $\int_c^b f\ \ dx + \int_a^c f\ \ dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\ \ dx$ يكون موجود و بالعكس.

8) هذه الخاصة توضح لنا متى يكون عكس الخاصة السابعة صحيح في تكامل استيلجس

اذا كانت التكاملات $\int_c^b f\ \ dg \quad : \quad a < c < b$ و $\int_a^c f\ \ dg$ موجودين

و كانت احدا التابعين g, f مستمرا عند c و الأخر محدودا في جوار c فإن تكامل $\int_a^b f\ \ dg$ يكون موجودا و يحقق :

$$\int_a^b f\ \ dg = \int_a^c f\ \ dg + \int_c^b f\ \ dg$$

9) نظرية التكامل بالتجزئة:

اذا كان احدا التكاملين $\int_a^b f\ \ dg$ و $\int_a^b g\ \ df$ موجودا فإن الأخر يكون موجودا و

يحقق: $\int_a^b f\ \ dg + \int_a^b g\ \ df = [f(x).g(x)]_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$

10) اذا كان f مستمرا على $[a,b]$ و كان g دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ فإن القيمة المطلقة

$$\left|\int_a^b f \quad dg\right| \leq \max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \bigvee_a^b g$$

حساب تكامل استيلجس:

نقول عن الدالة انها درجية اذا كان مجموع قيمها منتهية.

$f: X \subseteq \mathbb{R} \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ الدالة الدرجية أو البسيطة

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} 1 : x=1 \\ 3 : x\in]1,4[\\ 5 : x = 4 \\ 6 : x \in]4,6[\\ 7 : x = 6 \\ 9 : x \in]6,10[\\ 10 : x = 10 \end{cases}$$

تعريف الدالة الدرجية:

اذا كانت $g(x)$ دالة معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت تعاني من عدد من الإنقطاعات من النوع الأول في عدد منته من النقاط c_k حيث:

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n < b$$

فإذا كانت $g(x)$ ثابتة في كل مجال مفتوح

$$]a, c_1[,]c_1, c_2[, \dots \dots \;,]c_{n-1}, c_n[,]c_n, b[$$

فإننا ندعو الدالة $g(x)$ أنها درجية

أمثلة:

$[x]$ أصغر عدد صحيح أكبر أو يساوي x و $[x]$ او $[x]$أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي x

و الدوال المذكورة أعلى من أكثر الدوال استخداما في الدوال الدرجية

اذا كانت c_k نقطة انقطاع ندعو $\quad g_k = g(c_k+0) - g(c_k-0) \quad$ القفزة عند c_k أي

$$g_k = \lim_{x \to c_k}^{>} g(x) - \lim_{x \to c_k}^{<} g(x) \ (*)$$

أما القفزة عند أطراف المجال :

القفزة عند a: $g_a = g(a+0) - g(a)$ أي $g_a = \lim_{x \to a}^{>} g(x) - g(a)$

القفزة عند b: $g_b = g(b) - g(b-0)$ أي $g_b = g(b) - \lim_{x \to b}^{<} g(x) \ (@)$

مبرهنة:

اذا كانت $g(x)$ دالة درجية معرفة على المجال $[a,b]$ و كانت القفزات لـg_k عند c_k حيث

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$$

بحيث c_k حيث $1 \leq k \leq n$ نقاط انقطاع للدالة $g(x)$

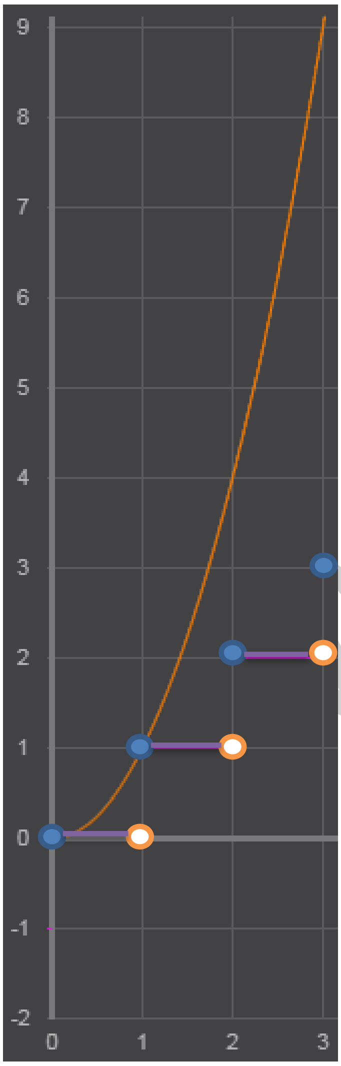
و كانت f معرفة و محدودة على المجال $[a,b]$بحيث لا تكون g و f غير مستمرتين معا من اليمين عند c_k او غير مستمرتين معا من اليسار عند c_k عندئذ تكامل استيلجس يكون موجودا او يعطى بالشكل

$$(S)\int_a^b f \ dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k$$

و في حالة كانت a,b نقاط انقطاع من النوع الأول ستكون بالشكل العام كالتالي:

$$(S)\int_a^b f \ dg = f(a).g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k + f(b).g_b$$

سوف نطبق هذه النظرية من خلال **المثال** التالي:



$$\int_0^3 x^2 \, d[x] \quad : \quad [x] = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & : \quad 1 \leq x < 2 \\ 2 & : \quad 2 \leq x < 3 \\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

بما أن f دالة مستمرة على المجال $[0,3]$ فيكون تطبيق المبرهنة السابقة كالتالي:

نلاحظ أن نقاط الانقطاع هنا هي : $c_1 = 1 \ , c_2 = 2 \ , \ c_3 = 3$

$$\int_0^3 x^2\, d[x] = f(1).g_1 + f(2).g_2 + f(3).g_3$$

$$= 1.1 + 4.1 + 9.1 = 14$$

طريقة حساب كل من g_1, g_2, g_3 نعوض في $(*)$

$$g_1 = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) - \lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x)$$

من الدالة التفرعية عندما تسعى x ل 1 بقيم أكبر فإن نهاية $g(x)$ تساوي 1

و ايضا عندما تسعى x ل 1 بقيم أصغر فإن النهاية $g(x)$ تساوي 0

أي أن $g_1 = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} g(x) - \lim_{x \overset{<}{\to} 1} g(x) = 1 - 0 = 1$

و بنفس الطريقة نحسب g_2 لتكون $g_2 = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} g(x) - \lim_{x \overset{<}{\to} 2} g(x) = 2 - 1 = 1$

ولكن لحساب g_3 فإننا نعوض ب $(@)$ كون 3 نهاية المجال أي أن

$$g_b = g(b) - g(b-0) = g(b) - \lim_{x \overset{<}{\to} b} g(x) = g(3) - \lim_{x \overset{<}{\to} 3} g(x) = 3 - 2 = 1$$

مبرهنة:

اذا كانت الدالة f مستمرة على $[a,b]$ و كانت $g(x)$ تعاني من عدد من نقاط الانقطاع من النوع الأول(مراجعة المحاضرة الأولى و الثانية) c_k حيث

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{n-1} < c_n < b$$

و كانت g' موجودة على المجالات المفتوحة

$$]a, c_1[,]c_1, c_2[, \dots\dots \ ,]c_{n-1}, c_n[,]c_n, b[$$

عندها يكون تكامل استيلجس موجودا و يعطى بالشكل:

$$\int_a^b f \ \ dg = \int_a^{c_1} f \ \ g'dx + \int_{c_1}^{c_2} f \ \ g'dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f \ \ g'dx + f(a).g_a$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} f(c_k) g_k + f(b).g_b$$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

جواب الاختبار من المحاضرة السابقة 20

بجمع 1+1 كون الفرق بين 0 و 1 هو 1 و الفرق بين 1 و 2 هو 1

و جمعهم ب2+2 ثم 3+3 ثم 4+4

يكون الجواب 20

الاختبار الثاني:

هنالك رجل لديه من الجوارب 53, 21 من الجوارب أزرق اللون , و 25 جوربا أسود اللون , و17 جوربا أحمر اللون.

فإذا كانت الكهرباء منقطعة و هو في ظلام دامس وهو لا يستطيع أن يميز أيا من هذه الجوارب.

ما عدد الجوارب التي يجب أن يأخذها لكي يضمن بنسبة 100% أنه سيحصل على زوج جوارب السوداء

☺☺☺☺

to improve our mathematics

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة: الثالثة عشر والرابع عشر

عنوان المحاضرة: تمارين على تكامل استيلجس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. تمارين على تكامل استيلجس
2. التأويل لتكامل استيلجس

التمارين:

-1 احسب التكامل التالي:

$$I = \int_{-2}^{2} x^2 \, dg \quad : \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & : \ -2 \le x \le -1 \\ 2 & : \ -1 < x < 0 \\ x^2+3 & : \ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

حيث $f(x) = x^2$ ثم استنتج $\int_{-2}^{2} g \, dx^2$

ملاحظة: نحن نعلم أن نقاط البداية و النهاية من المجال a, b حيث:

$$(S)\int_a^b f \ \ dg = f(a).g_a + \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k + f(b).g_b$$

و لكن اذا وجد استمرار عند a, b فإن تكامل استيلجس يكتب بالشكل التالي

$(S)\int_a^b f \ \ dg = \sum_{k=1}^{n} f(c_k).g_k$ و لا يؤثر في الحال الإستمرار ان وضع الأول ايضا يكون بالحساب جوابه صفر عند نقطة البداية و النهاية

الحل:

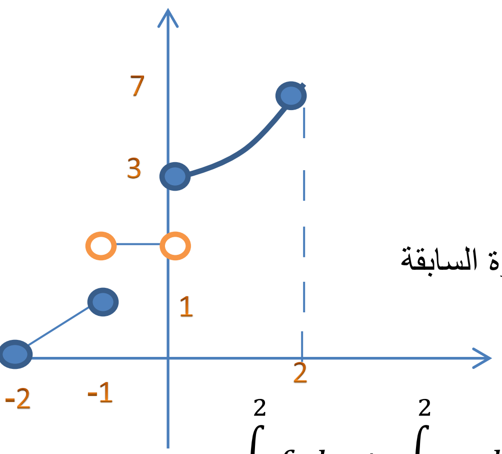
نلاحظ أن f دالة مستمرة على المجال $[-2,2]$ و أن $g(x)$ تعاني من عدد من الانقطاعات من النوع الأول $c_1 = -1$ و $c_2 = 0$ و g' موجودة على المجالات المفتوحة

$$]-2,-1[\quad,\quad]-1,0[\quad,\quad]0,2[$$

منه حسب مبرهنة (في المحاضرة السابقة الصفحة 7) فإن التكامل موجود و يمكن حسابه كالتالي من :

$$\int_{-2}^{2} f\ \ dg = \int_{-2}^{c_1=-1} f\ \ g'dx + \int_{-1}^{c_2=0} f\ \ g'dx + \int_{0}^{2} f\ \ g'dx + f(-2).g_{-2} + \sum_{k=1}^{2} f(c_k)g_k + f(2).g_2$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \int_{-2}^{-1} x^2\,(1)dx + \int_{-1}^{0} x^2\,(0)dx + \int_{0}^{2} x^2\,(2x)dx + f(-2)[g(-2+0)-g(-2)]$$
$$+ f(-1)[g(-1+0)-g(-1-0)] + f(0)[g(0+0)-g(0-0)]$$
$$+ f(2)[g(2)-g(2-0)]$$



$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \int_{-2}^{-1} x^2\, dx + \int_{0}^{2} 2x^3\, dx + (1)[2-1] + 0[3-2]$$

$$\int_{-2}^{2} x^2\, dg = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{-1} + \frac{1}{2}[x^4]_0^2 + 1 = \frac{34}{3}$$

و الأن لاستنتاج $\int_{-2}^{2} g\ dx^2$ حسب الخاصة التاسعة لتكامل استيلجس من المحاضرة السابقة

فإن كون $\int_{-2}^{2} f(x)dg$ موجود فإن $\int_{-2}^{2} g(x)\ df$ يكون موجود و تتحقق العلاقة

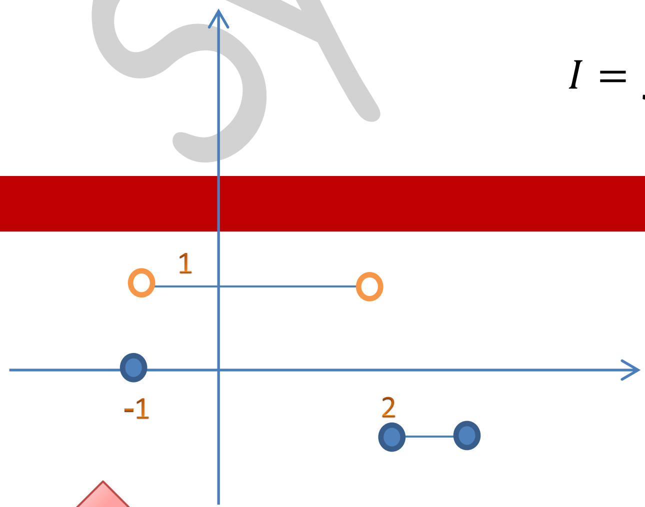
$$\int_{-2}^{2} f\ dg + \int_{-2}^{2} g\ \ df = [f(x).g(x)]_{-2}^{2} = f(2).g(2) - f(-2).g(-2) \Rightarrow$$

$$\frac{34}{3} + \int_{-2}^{2} g\ \ dx^2 = [4.7] - [4.0] \Rightarrow \int_{-2}^{2} g\ \ dx^2 = 28 - \frac{34}{3} = \frac{84}{3} - \frac{34}{3} = \frac{50}{3}$$

-2 احسب التكامل

$$I = \int_{-1}^{3}(x+1)dg \qquad : g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x=-1 \\ 1 & : \quad -1<x<2 \\ -1 & : \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

الحل:



نلاحظ أن نقاط الانقطاع هي $C_1 = -1$ و $C_2 = 2$

و بنفس طريقة التمرين السابق نقوم بحساب هذا التكامل.

$$\int_{-1}^{3}(x+1)dg = f(-1)[g(-1+0)-g(-1)] + f(2)[g(2+0)-g(2-0)] \quad 3$$

$$\int_{-1}^{3}(x+1)dg = 0[1-0]+3[-1-1] = -6$$

ملاحظة: التكامل يمكن أن يكون جوابه سالب ولكن المساحة دائما موجبة (مثل عند ايجاد تكامل لتابع المنحني البياني له يقع اسفل ox نقوم بضربه ب (-) ليكون الجواب موجب)بينما هنا نقوم بحساب التكامل

-3 أحسب التكاملين التاليين:

$$k_3 = \int_0^3 \lceil x \rceil \, d\lfloor x \rfloor \quad \text{و} \quad k_n = \int_0^n \lceil x \rceil \, d\lfloor x \rfloor$$

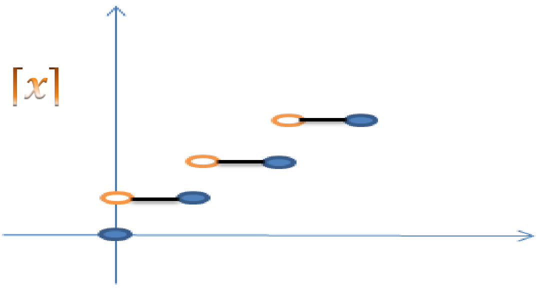
ثم برهن أن $\int_0^n f(x)d\lfloor x \rfloor = \sum_{k=1}^{n} a_k$

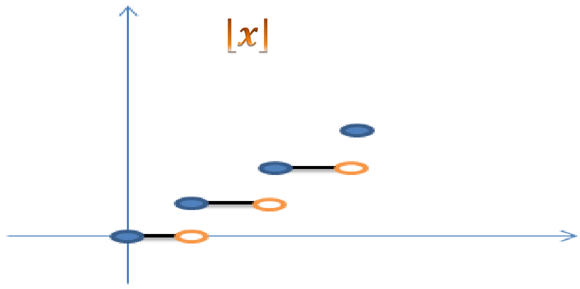
حيث
$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ a_1 & : 0 < x \le 1 \\ a_2 & : 1 < x \le 2 \\ a_n & : n-1 < x \le n \end{cases}$$

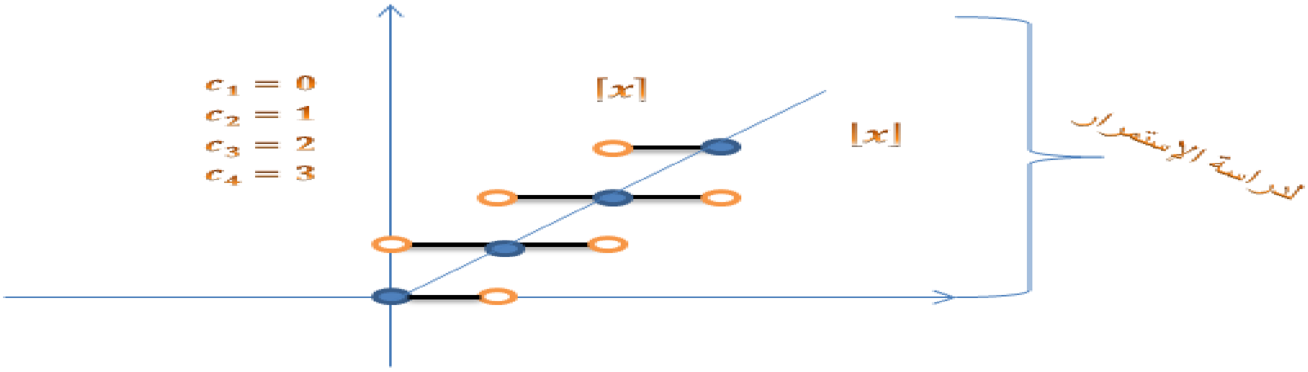
الحل:

$$\lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & : 0 \le x < 1 \\ 1 & : 1 \le x < 2 \\ 2 & : 2 \le x < 3 \\ 3 & : x = 3 \end{cases} \quad : \quad m \le x < m+1 : \lfloor x \rfloor = m$$

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ 1 & : 0 < x \le 1 \\ 2 & : 1 < x \le 2 \\ 3 & : 2 < x \le 3 \end{cases} \quad : m < x \le m+1 \ : \ \lceil x \rceil = m+1$$







$$\int_0^3 [x]\, d\lfloor x \rfloor = f(0).g_0 + f(1).g_1 + f(2).g_2 + f(3).g_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

تعميم: k_n حيث

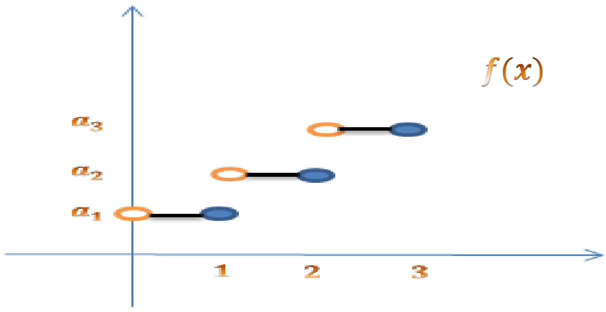
$$k_n = \int_0^n [x]\, d\lfloor x \rfloor = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

و الأن لنبرهن أن

$$\exists f(x) : \int_0^n f(x) d[x] = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

نلاحظ أن الدالة $[x]$ مستمرة من اليمين عند ... ... ,1,2,3 و غير مستمرة من اليسار عند نفس النقط

بينما الدالة $f(x)$ مستمرة من اليسار عند .. .. ,1,2,3 و غير مستمرة من اليمين عند نفس النقط



$$\int_0^n f(x)d[x] = f(1).1 + f(2).1 + f(3).1 + \cdots + f(n).1$$

$$\int_0^n f(x)d[x] = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

التأويل الهندسي لتكامل استيلجس:

الغاية منه هي تحويل تكامل استيلجس الى تكامل ريمان وفق شروط معينة:

نحن نعلم اذا كانت f مستمرة على المجال $[a, b]$ و كانت g قابلة للاشتقاق و g' موجودة و محدودا على المجال $[a, b]$ و كمول على نفس المجال فإن تكامل استيلجس يكون موجود و معينا بالعلاقة:

$$(S)\int_a^b f(x)\ dg = (R)\int_a^b f\ .\ g'dx$$

في هذه الحالة نستطيع تحويل تكامل استيلجس الى ريمان بسهولة

و لكن اذا لم يكن g قابل للاشتقاق سنقوم ببناء الدالة $\psi(t)$ التي تحقق

$$\int_a^b f\ dg = \int_a^b \psi(x)dx$$

أي أن خلاصة التأويل هي تحويل تكامل استيلجس لتكامل ريمان ليسهل علينا ايجاد السطح الذي نريد حساب مساحته أو المنحني الجديد $\psi(x)$ الذي نريد حساب تكامله

إن التابع المولد (التأويل) صعب الإيجاد كلما كانت الدلة أكثر تعقيدا و قد ذكر الدكتور نايف الطلي أن المثال الذي أورده هو من أبسط الأمثلة التي يمكننا تأويله (توليد تابع $\psi(x)$).

مثال: ليكن لدينا التابع المعرف وسيطيا

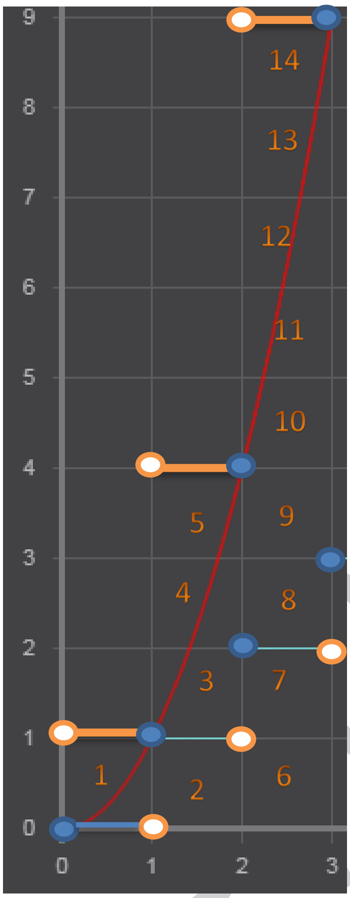
$$x = g(t)\,, \qquad y = f(t)$$

حيث $x = g(t) = [t]$ و $y = f(t) = t^2$ حيث $t \in [0,3]$

أحسب $\int_0^3 t^2\, d[t]$ ثم أوجد الدالة $\psi(t)$ التي تحقق:

$$\int_0^3 t^2\, d[t] = \int_0^3 \psi(t)dt$$

الحل:



نلاحظ أن $f(t)$ تابع مستمر على $[a,b]$ و g تابع متزايد على $[a,b]$ أي تكامل استيلجس موجود و منه

$$\int_0^3 t^2\, d[t] = f(1).g_1 + f(2).g_2 + f(3).g_3 = 1.1 + 4.1 + 9.1 = 14$$

الأن لنبني الدالة $\psi(t)$ (يهمنا نقاط الانقطاع و بداية و نهاية المجال)

$$t = 0 \begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

نقطة انقطاع $t = 1 \begin{cases} g(1-0) = 0\,, f(1) = 1 \to (0,1) \\ g(1+0) = 1\,, f(1) = 1 \to (1,1) \end{cases}$

نقطة انقطاع $t = 2 \begin{cases} g(2-0) = 1\,,\ f(2) = 4 \to (1,4) \\ g(2+0) = 2\,,\ f(2) = 4 \to (2,4) \end{cases}$

نقطة انقطاع $t = 3 \begin{cases} g(3-0) = 2\,, f(3) = 9 \to (2,9) \\ g(3) = 3\ ,\ \ f(3) = 9 \to (3,9) \end{cases}$

الأن نصل بين هذه النقاط الناتجة بقطع مستقيمة موازية ل ox و ذلك من أجل جميع القفزات للدالة فنحصل على الشكل المجاور و المساحة موضحة بعدد المربعات المرقمة ☺

حيث $\psi(\mathrm{t}) = \begin{cases} 0 : & t=0 \\ 1 : & 0<t\le 1 \\ 4 : & 1<t\le 2 \\ 9 : & 2<t\le 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 0 : & 0\le t<1 \\ 1 : & 1\le t<2 \\ 2 : & 2\le t<3 \\ 3 : & t=3 \end{cases}$

$$\int_0^3 \psi(x)dt = \int_0^1 1\, dt + \int_1^2 4\, dt + \int_2^3 9\, dt = [t]_0^1 + [4t]_1^2 + [9t]_2^3 = 14$$

نلاحظ أن هذه النتيجة تكافئ حساب مساحات المربعات الموضحة بالشكل و التي طول كل ضلع منها يساوي 1 ومنه كل مربع مساحته يساوي 1 و لدينا 14 مربع أي أن مساحة السطح $s = 14$ و أن $\psi(x)$

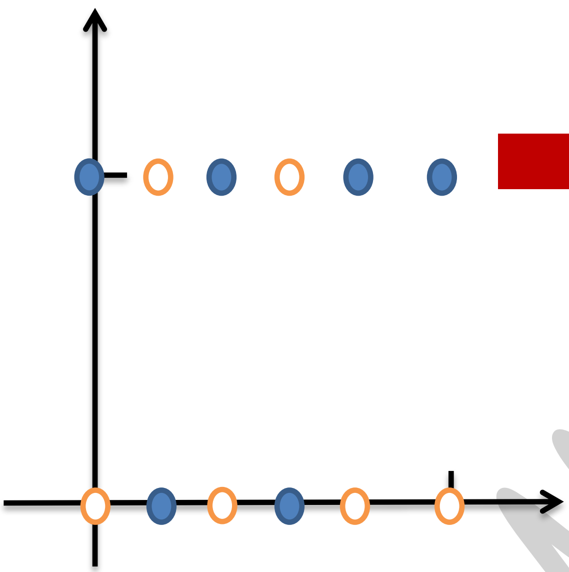
مثال:

برهن أن الدالة f المعرفة و المحدودة على $[0,1]$ كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

غير كمولة على $[0,1]$

الحل:



كون الدالة $f(x)$ محدودة فرضا فإنها تحقق:

$$|f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]$$

لنرسم الدالة طبعا الرسمة ستكون رسمة تقريبية لأنه يوجد عدد غير منته من الأعداد العادية و غير العادية داخل المجال $[0,1]$

نقول عن الدالة أنها كمولة اذا كانت معرفة و محدودة و استطيع ايجاد العدد الثابت $A \in \mathbb{R}$ الذي يحقق

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k = \int_0^1 f\, dx$$

حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ و $\Delta x = \max_{1\leq k\leq n} \Delta x_k$ و $x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$

تنويه: إذا كانت A لها قيمة وحيدة فإن الدالة تكون كمولة أما إذا وجدنا أكثر من قيمة ل A فتكون الدالة غير كمولة

الأن لنأخذ التجزئة P حيث

$$P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1\}$$

نميز حالتين:

الأولى: $t_k \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = 1 \Rightarrow A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} [x_k - x_{k-1}]$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \cdots + x_n - x_{n-1}]$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [x_n - x_0] = \lim_{\Delta x \to 0} [1 - 0] = 1$$

الثانية: $t_k \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(t_k) = 0 \Rightarrow A = 0$

نلاحظ من الحالة الأولى و الثانية أن ل A قيمتين و منه فإن f غير كمول على المجال $[0,1]$ بالنسبة لريمان

مثال:

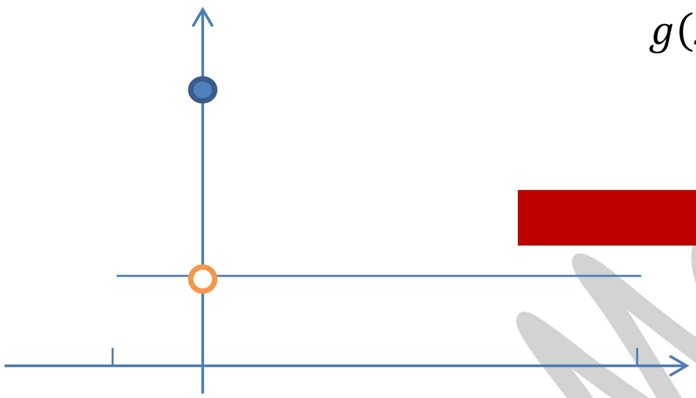
برهن أن تكامل استيلجس المعطى بالشكل $\int_{-1}^{5} f\, dg$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : x \neq 0 \\ 3 & : x = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ -2 & : x = 0 \end{cases}$$

غير كمول على المجال $[-1,5]$

الحل:

نرسم الدالة f



نرسم الدالة g

الأن لنحسب A حيث:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta g_k$$

حيث $\Delta g_k = [g(x_k) - g(x_{k-1})]$ و لنأخذ التجزئة P حيث

$$P = \{x_0 = -1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_i = 0 < x_{i+1} < \cdots < x_n = 5\}$$

و الأن لنحسب A

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} f(t_1).[g(x_1) - g(x_0)] + f(t_2)[g(x_2) - g(x_1)] + \cdots +$$
$$f(t_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] + f(t_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + \cdots +$$
$$f(t_n)[g(x_n) - g(x_{n-1})]$$

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} [-2f(t_i) + 2f(t_{i+1})]$$

نميز حالتين

$$1)\ t_i = 0 \Rightarrow A = [-2(3) + 2(1)] = -4$$

$$2)\quad t_i \neq 0 \Rightarrow A = [-2(1) + 2(1)] = 0$$

و إن $-4 \neq 0$ و منه فإن f غير كمولة

احسب التكاملين:

$$1)\ \int_0^3 [x]d[x]$$

$$2)\ \int_0^3 [x]d[x]$$

الحل:

لقد قمنا بحل مفصل ل (1) سابقا (في هذه المحاضرة الصفحة 3)

و بنفس الطريقة نحل (2) بالاستفادة من رسمة الدوال في الصفحة الثالثة

$$\int_0^3 [x]d[x] = f(0).g_0 + f(1).g_1 + f(2)g_2 + f(3).g_3$$

نقوم بحساب g_k حيث $0 \leq k \leq 3$

$$g_0 = g(0+0) - g(0) = 1 - 0 = 1$$
$$g_1 = g(1+0) - g(1-0) = 2 - 1 = 1$$
$$g_2 = g(2+0) - g(2-0) = 3 - 2 = 1$$
$$g_3 = g(3) - g(3-0) = 3 - 3 = 0$$

$$\int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil = 0.1 + 1.1 + 2.1 + 3.0 = 3$$

أو يمكن حساب هذا التكامل عن طريق الاستفادة من الخاصية التاسعة لتكامل استيلجس في المحاضرة سابقة

نظرية التكامل بالتجزئة:

اذا كان احدا التكاملين $\int_a^b f \ \ dg$ و $\int_a^b g \ \ df$ موجودا فإن الأخر يكون موجودا و يحقق: $\int_a^b f \ \ dg \ + \ \int_a^b g \ \ df = [f(x).g(x)]_a^b = f(b).g(b) - f(a).g(a)$

أي أن كون $\int_0^3 \lceil x \rceil d\lfloor x \rfloor$ فإن $\int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil$ موجود و يحقق

$$\int_0^3 \lceil x \rceil d\lfloor x \rfloor + \int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil = [\lceil x \rceil . \lfloor x \rfloor]_0^3$$

$$6 + \int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil = 9 \Longrightarrow \int_0^3 \lfloor x \rfloor d\lceil x \rceil = 9 - 6 = 3$$

تمرين وظيفة:

أوجد الدالة $\psi(t)$ التي تحقق : ((تأويل هندسي))

$$\int_0^3 t \ d\lfloor t \rfloor = \int_0^3 \psi(t) dt$$

الحل:

$$x(t) = g(t) = [t] = \lfloor t \rfloor$$

$$y(t) = f(t) = t \quad \text{حيث} \quad t \in [0,3]$$

الأن نقوم بإيجاد نقاط الجديدة ((المؤولة)):

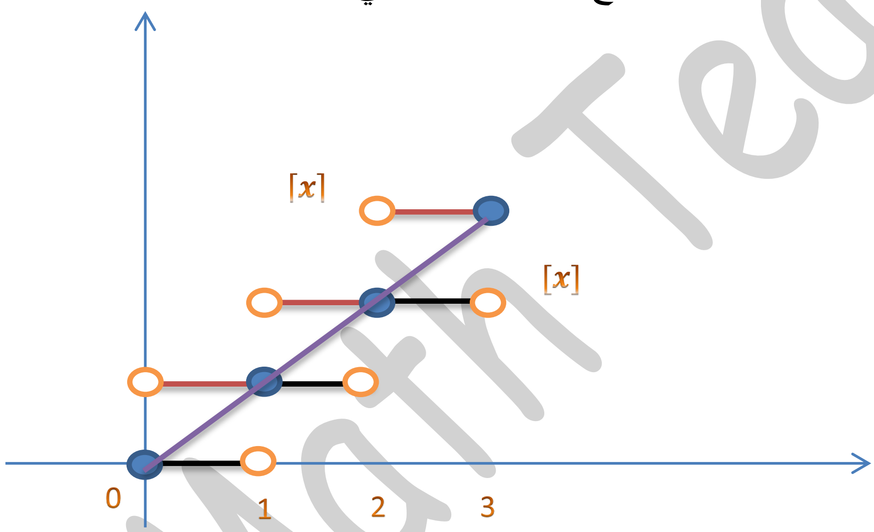
$$t = 0 \begin{cases} g(0) = 0 \, , & f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \\ g(0+0) = 0 \ , & f(0) = 0 \Rightarrow (0,0) \end{cases} \Longrightarrow (0,0)$$

$$t = 1 \begin{cases} g(1+0) = 1\,, & f(1) = 1 \Rightarrow (1,1) \\ g(1-0) = 0\,, & f(1) = 1 \Rightarrow (1,0) \end{cases}$$

$$t = 2 \begin{cases} g(2+0) = 2\,, & f(2) = 2 \Rightarrow (2,2) \\ g(2-0) = 1\,, & f(2) = 2 \Rightarrow (2,1) \end{cases}$$

$$t = 3 \begin{cases} g(3) = 3\,, & f(3) = 3 \Rightarrow (3,3) \\ g(3-0) = 2\,, & f(3) = 3 \Rightarrow (3,2) \end{cases}$$

نقوم بوصل النقاط الناتجة و منه ينتج لدينا الشكل الاتي:



نلاحظ أن $\psi(x) = [x]$ و أيضا أن $\int_0^3 [t]\,dt = \int_0^3 t\,d[t]$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا الأيوبي * ياسين الحلبي * شهد الحايك البوشي

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄ المحاضرة :الخامسة عشر

عنوان المحاضرة:المدخل الى نظرية القياس

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. مقدمة في نظرية المجموعات
2. مقدمة في الطوبولوجيا
3. مقدمة في اساسية في القياس

مقدمة في نظرية المجموعات:

1- المجموعة و أمثلة عنها : المجموعة كالوعاء الذي بداخله اشياء

2- تمثيل المجموعات:

1. طريقة القائمة : يتم عرض عناصر المجموعة بشكل كامل
2. طريقة القاعدة : يتم ذكر الصفة المميزة
3. طريقة المخططات : يتم رسم العناصر داخل شكل ما بيضوي أو مستطيل أو اية شكل

مثال:

ما هي قواسم العدد 10 مثلهم بالطرق الثلاثة:

1. $\{1,2,5,10\}$
2. $\{x: 10 \; mod \; x = 0 \; ; x \in \mathbb{N}\}$
3.

10	5	2	1

3- رمز المجموعة بأحرف الكبيرة $A\,, B, C, \ldots.$

4- العناصر التي تكون داخل المجموعة رموزها بأحرف الصغيرة $a, b, c, \ldots$

5- العلاقات الرئيسية بين المجموعات و العناصر

$$\in, \notin, \subset, \subseteq, \nsubseteq \not\subset, =$$

أمثلة:

$$a \in A\,, a \notin A\ \ , A \not\subset B, \dots \dots$$

مثال: ليكن لدينا $X = \{1,2,5,10\}$ فإن:

$$1 \in X, \{1,2\} \subset X, \{1,3\} \not\subset X$$

6- المجموعة الخالية: رمزها $\{\ \}, \emptyset$

1) محتواه في أي مجموعة
2) إن المجموعة الخالية وحيدة

7- قدرة مجموعة هي عدد عناصر المجموعة $|X| = 4$ من المثال السابق

8- مجموعة القوة لمجموعة: هي مجموعة جميع الأجزاء للمجموعة

مثال:

ما هي مجموعة القوى للمجموعة A حيث $A = \{1,2\}$

$|p(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$ حيث $p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

9- صف (اسرة , جماعة) من أجزاء المجموعة.

من المثال السابق $A = \{1,2\}$ و $p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ صف من A

$\tau = \{\{1\}, \{1,2\}\}$ ايضا صف من A و يكون $p(A)$ أكبر صف من أجزاء A

10- العمليات على المجموعات:

المتمم c , فرق تناظريΔ, فرق$\setminus$, تقاطع $\cap$, اجتماع $\cup$

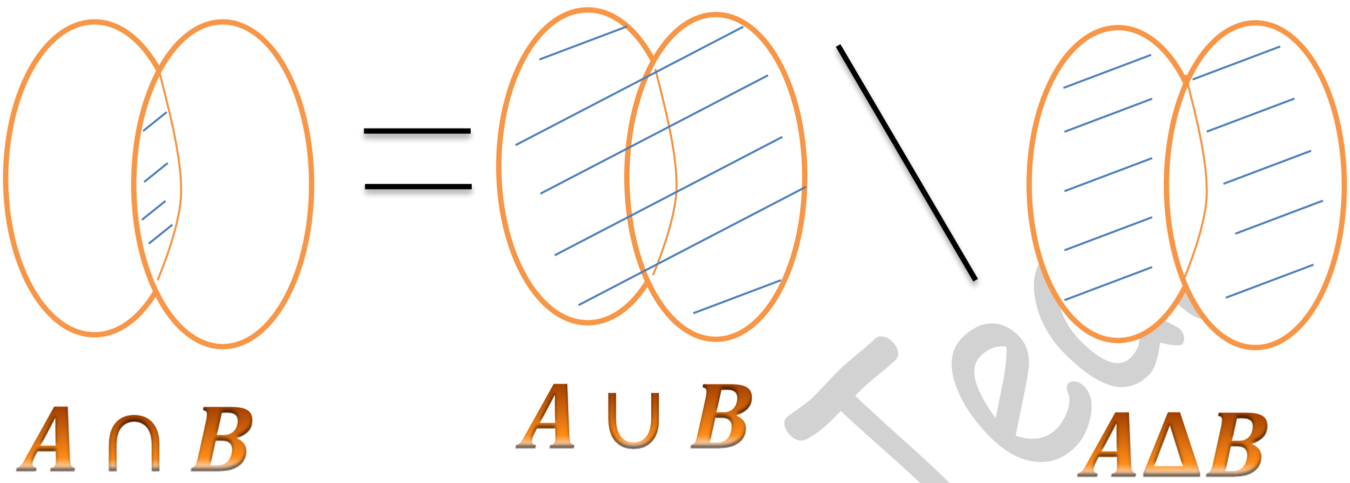
1) $\emptyset^c = X, X^c = \emptyset$

2) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

3) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c\ ,\ \ (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

4) $A \setminus B = A \cap B'\ \ : B' = X \setminus B\ ,\ \ A \setminus B = A\Delta(A \cap B)$

$$A \setminus B = (A \cup B)\Delta B$$
$$5)\ A \cap B = (A \cup B) \setminus (A\Delta B)$$



$$6) A \cup B = (A\Delta B)\Delta(A \cap B) = A\Delta(B \setminus A)$$
$$7) A \cup A^c = X\ , A \cap A^c = \emptyset$$

و هي بعض العمليات

مجموعة القوى لمجموعة: (مجموعة أجزاء مجموعة)

إن مجموعة القوى لمجموعة مغلقة لجميع العمليات $[\cup, \cap, \setminus, c, \Delta]$ على A

مثال:

$A = \{1,2\}$ أولا الإجتماع: $\qquad p(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

التقاطع

$\cap$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$

الفرق التناظري:

Δ	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1,2\}$	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

المتمم:

c	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
متممتها	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\emptyset$

نلاحظ أن جميع النتائج في كل جدول تنتمي ل $p(A)$ أي أن $p(A)$ مغلقة بالنسبة لجميع العمليات

مثال:

أذكر بعض صفوف المجموعة B حيث $B=\{1,2,3\}$

الصف الأول يمكن ان نكتب مجموعة القوى لمجموعة كصف ل B

$$p(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

$$\tau_1=\{\emptyset,\{1\},\{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2=\{\{1\},\{2\}\}$$

مقدمة في الطوبولوجيا:

تعريف: اذا كانت لدينا مجموعة X لا تساوي الخالية و كان τ صفا (غير خالي) من أجزاء X

نقول عن τ إنه يمثل طوبولوجيا على X اذا تحققت الشروط التالية:

$\emptyset, X \in \tau$ (1
$\forall A, B \in \tau \Rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau$ (2
$\forall A_{i\in I} \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ (3

مثال: اذا كان $X = \{1,2\}$ و كانت الصفوف

1) $\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_1 =$ تمثل طوبولوجيا على X كونها تحقق جميع الشروط
2) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ $\tau_2 =$ لا تمثل طوبولوجيا على X كونها غير مغلقة بالنسبة لعملية الاجتماع
3) $\tau_3 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,2\}\}$ تمثل طوبولوجيا
4) $\tau_4 = \{\emptyset, X\}$ تمثل طوبولوجيا على X و تدعى الطوبولوجيا التافهة
5) $\tau_5 = p(X)$ تمثل طوبولوجيا على X ((أوسع طوبولوجيا على X))

ملاحظات:

1- كل عنصر من عناصر τ يسمى مجموعة مفتوحة

2- كل عنصر متمم لعنصر من عناصر τ يسمى مجموعة مغلقة

نتيجة: اذا كانت A مجموعة مفتوحة $\Leftrightarrow$ A^c مجموعة مغلقة

3- $\emptyset, X$ مجموعتان مفتوحتان و مغلقتان في آن واحد في الطوبولوجيا

الجبر:

تعريف الجبر: اذا كانت $X \neq \emptyset$ و كان $\mathcal{A}$ صفا غير خال من أجزاء X

نقول على $\mathcal{A}$ انه يمثل جبرا على X اذا تحققت الشروط:

$\emptyset, X \in \mathcal{A}$ (1
$\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A} \;,\; A \cup B \in \mathcal{A}$ (2
$\mathcal{A}$ مغلق بالنسبة لعمليتي الفرق و الإجتماع

تنويه: نلاحظ أن الجبر مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات و الدليل:

و الأن نريد إثبات أن الجبر مغلق بالنسبة ل $\Delta, c, \cap$

$$A, B \in \mathcal{A}: A\Delta B = \underbrace{(A \setminus B)}_{\in\mathcal{A}} \cup \underbrace{(B \setminus A)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق لعملية الفرق التناظري

$$: A \cap B = \underbrace{(A \cup B)}_{\in\mathcal{A}} \setminus \underbrace{(A\Delta B)}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق بالنسبة لعملية التقاطع

$$A \in \mathcal{A}, \underbrace{X \in \mathcal{A}}_{\text{من تعريف}} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$$

و منه الجبر مغلق بالنسبية لعملية المتمم

تعريف أخر للجبر اعتمادا على ما سبق: اذا كانت $X \neq \emptyset$ و كان $\mathcal{A}$صفا (غير خال) من أجزاء X نقول عن $\mathcal{A}$إنه يمثل جبر على X اذا تحققت الشروط:

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$
2) $\forall A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
3) $\forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

تعريف الجبر التام: هو جبر مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع العدود أي :

$$\forall A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$$

إن $\bigcup_{i\in I} A_i$ غير عدودة أم عند كتابة $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ فإننا نقصد بذلك أن I مجموعة عدودة

نتيجة: الجبر التام مغلق بالنسبة للتقاطع العدود

ملاحظة: الجبر(الجبر التام) المولد بالصف τ من أجزاء X هو أصغر جبر يحوي τ

مثال:

ما هو أصغر جبر يحوي τ اذا علمت أن $X = \{1,2,3,4\}$ و $\tau = \{\{1,2\}, \{3\}\}$

طريقة الحل: لإيجاد أصغر جبر يحوي τ نتبع الخطوات

1- يجب أن يحوي على $\emptyset, X$

2- مغلق بالنسبة لعملية الاجتماع

3- مغلق بالنسبة لعملية المتمم

لنبدأ الحل سنورد الحل بنفس خطوات طريقة الحل ☺

الحل:

يجب أن يحتوي الجبر على $\emptyset$ و X ثم نطبق $\cup$ و المتمم

1- $\{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}\}$

2- $\{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

3- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, \{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\{1,2,4\}, \{1,2,3,4\}$

و 3 هو الجبر المطلوب.

يترك للقارئ تفصيل الحل كونها تدريب على استخدام العمليات و لسهولتها

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :السادسة عشر و السابعة عشر

عنوان المحاضرة:القياس و خواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. القياس

القياس:

a) تعريف القياس
b) خواص القياس
c) القياس الخارجي
d) مقارنة بين القياس و القياس الخارجي
e) المجموعة القيوسة
f) مبرهنات: بين القياس و القياس الخارجي
g) جبر بوريل
h) قياس لوبيغ
i) التوابع القيوسة
j) مثال عن التوابع القيوسة (التابع المميز(الدرجي))
k) خواص التابع المميز
l) التابع البسيط و خواصه \تابع القياس\
m) تكامل لوبيغ بالنسبة للتابع البسيط مع بعض الأمثلة

حيث سندرس ل g

تعريف القياس:

اذا كانت $X \neq \emptyset$ و ليكن $\mathcal{A}$ جبرا أو جبرا تاما على X نعرف التابع

$$\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$$

حيث $\overline{\mathbb{R}_+}$ تعني مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة الموسعة حيث $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$

نقول عن التابع μ أنه قياس أو يمثل قياسا اذا تحقق الشرطين

1) $\mu(\emptyset) = 0$ أي أن قياس الخالية يساوي الصفر

2) $A_i \cap A_j = \emptyset$: $\forall A_i \in \mathcal{A}$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و $i \neq j$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

ملاحظات:

1) نسمي الثلاثية $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء القياس

2) عناصر $\mathcal{A}$ تسمى مجموعات قيوسة

3) إذا كان $\forall A \in \mathcal{A}: \mu(A) < \infty$

فإننا نسمي μ قياسا منتهيا و الفضاء فضاء منتهي

4) إذا كان $\mu(X) = 1$ فإننا نسمي μ دالة احتمال $(X, \mathcal{A}, \mu = P)$

5) إن $\forall A \in \mathcal{A}: \mu(A) \geq 0$

خواص القياس:

1- الخاصية الفرقية:

$\forall A, B \in \mathcal{A}$

$$A \subseteq B \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

2- الخاصية الطردية:

$$\forall A, B \in \mathcal{A}: A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

3- الخاصية نصف الجمعية:

$$\forall A_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

4- خاصية الاستمرار من الأدنى (اجتماع):

لتكن $A_i \in \mathcal{A}$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و حيث

متتالية من المجموعات المتزايدة… $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$

و منه فإن $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$

ملاحظات:

1- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$

2- نسمي $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ الموجوعة الموسعة للأعداد الحقيقة

5- خاصية الاستمرار من الأعلى (التقاطع)

لتكن $A_i \in \mathcal{A}$ حيث $i \in \mathbb{N}$ و لتكن

متتالية من المجموعات المتناقصة $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \cdots$

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

أمثلة عن القياس:

1- قياس العد (المجموعات القابلة للعد): $X \neq \emptyset$

$$\mu: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \to \mu(A) = \begin{cases} |A| & \text{منتهية } A \\ +\infty & \text{غير منتهية } A \end{cases}$$

حيث $|A|$ عدد عناصر المجموعة A و نسم الثلاثية $(X, p(X), \mu)$ قياس العدد

و ذلك على حسب القياس $\mu(N) = +\infty \quad , \quad \mu(Z) = +\infty$

2- قياس ديراك: لتكن $X \neq \emptyset$ عندئذ من أجل كل عنصر $a \in X$ يمكن تعريف دالة قياس بالنسبة ل a

$$\mu_a: P(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$
$$A \to \mu_a(A) = \begin{cases} 1 & a \in A \\ 0 & a \notin A \end{cases}$$

تمارين:

1- اذا كان $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء قيوسا برهن أن:

$$\forall A,B\in\mathcal{A} : \mu(A\Delta B)=0 \Rightarrow \mu(A)=\mu(B)$$

الحل:

نعلم أن $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

بأخذ القياس للأطراف $\underbrace{\mu(A\Delta B)}_{\underbrace{=0}_{\text{من نص السؤال}}}=\underbrace{\mu(A\setminus B)}_{\geq 0}+\underbrace{\mu(B\setminus A)}_{\geq 0}$ و

$$\Rightarrow \begin{cases}\mu(A\setminus B)=0\\ \mu(B\setminus A)=0\end{cases}$$

$$\mu(A\setminus B)=\mu(A\setminus(A\cap B))=\overbrace{\mu(A)-\mu(A\cap B)}^{\text{الخاصة الفرقية}}=0$$

$B\setminus A=B\setminus(A\cap B)$

$$\mu(A)=\mu(A\cap B)\quad(1)$$

بنفس الطريقة بـ$\mu(B\setminus A)=0$ نجد أن

$$\mu(B\setminus A)=\mu(B\setminus(B\cap A)=\overbrace{\mu(B)-\mu(B\cap A)}^{\text{الخاصة الفرقية}}=0$$

$$\mu(B)=\mu(B\cap A)\quad(2)$$

من $(1) and (2)$ نجد أن $\mu(A)=\mu(B)$ و هو المطلوب

2- اذا كان الفضاء $(X,\mathcal{A},\mu)$ فضاء قيوسا بحيث:

$$B\subseteq X:\mu_B:\mathcal{A}\to\overline{\mathbb{R}}_+$$

$$\forall A\in\mathcal{A}\Longrightarrow\mu_B(A)=\mu(A\cap B)$$

برهن ان $\mu_B(A)$ يمثل قياسا على B

الحل:

لإثبات أن μ_B يمثل قياسا يجب علينا التحقق من شروط الواجب توفرها كي يكون قياسا وبذلك نبدأ

1) $\mu_B(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ كون التقاطع الخلية مع أي مجموعة يعطي الخالية

2) لنثبت أن $\mu_B(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$ حيث $A_i \cap A_j = \emptyset$ و $i \neq j$ و هذا محقق لأن

$$\mu_B(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(B \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (B \cap A_i))$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_B(A_i)$$

و هو المطلوب

ملاحظة: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

أما إذا كانت A, B مجموعتان منفصلتان أي $A \cap B = \emptyset$ فإن $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

3- إذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوسا أثبت ان:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

الحل:

إن $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

و منه $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$

نعلم أن $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu\big(B \setminus (A \cap B)\big)$$

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

و هو المطلوب.

القياس الخارجي:

لتكن لدينا المجموعة غير الخالية $X \neq \emptyset$ و ليكن $p(X)$ صف المجموعات على X لنعرف التابع:

$$\mu^* : p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

نقول عن μ^* أنها قياس خارجي على X اذا تحققت الشروط التالية:

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

3) $\forall_{i\in\mathbb{N}} A_i \in p(X) \Rightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$

نستنتج أن: كل قياس هو قياس خارجي و لكن العكس ليس صحيح بالضرورة.

مثال:

برهن أن التابع μ^* الذي يعرف كلاتي: $X \neq \emptyset$

$\mu^* : p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ المعرف كما لي $\forall A \in p(X): \mu^*(A) = \sqrt{|A|}$

حيث $|A|$ عدد عناصر A

برهن على أن μ^* قياسا خارجيا على X و لكن لا يمثل قياسا على X

الحل:

لكي نثبت أولا أن μ^* قياسا خارجيا علينا التحقق من الشروط أي:

1) لتكن $A = \emptyset$ و منه فإن $|A| = 0$ أي أن

$$\mu^*(\emptyset) = \sqrt{|A|} = \sqrt{0} = 0$$

و منه قد تحقق الشرط الأول للقياس الخارجي

2) $A \subseteq B \ \Rightarrow |A| \le |B| \Rightarrow \sqrt{|A|} \le \sqrt{|B|} \Rightarrow \mu^*(A) \le \mu^*(B)$

و منه الشرط الثاني محقق أيضا

3) لإثبات الشرط الثالث في القياس الخارجي أولا نثبت عندما $i = 1,2,3,\ldots\ldots,n$ ثم نقوم بجعل n تسعى ل ∞

$\forall_{i\in\mathbb{N}} A_i \in p(X): A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \le |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$ و منه فإن

$$\sqrt{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |A_i|}$$

و نعلم أن $\sqrt{|A| + |B|} \leq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$ و منه فإن

و هذا صحيح أيا كانت n، $\sqrt{|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|A_i|} \Longrightarrow \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i)$

و بجعل $n \to +\infty$ نجد أن (الحالة العامة)

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

ومنه فإن μ^* قياسا خارجيا و الأن لإثبات أن μ^* ليس قياسا سنأخذ مثال لا يحقق أن μ^*

و لنأخذ

$$A = \{1,2,3, \dots ,16\}$$
$$B = \{17, \dots ,25\}$$

إن $A \cap B = \emptyset$ و لكن

$$\mu^*(A \cup B) \neq \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

لأن $L_1: \mu^*(A \cup B) = \sqrt{|A \cup B|} = \sqrt{25} = 5$

$$L_2: \mu^*(A) + \mu^*(B) = \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|} = \sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$$

و منه فإن القياس الخارجي ليس بالضروري أن يكون قياسا.

تساؤل:

هل يمكن استنباط من $p(X)$ صف جديد بحيث يكون القياس الخارجي لهذا الصف يمثل قياسا؟

الجواب: نعم و هذا الصف هو $A = \{\emptyset, X\}$ و منه

$$\mu: \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}+$$

حيث $\mu = {}^{\mu^*}/_{\mathcal{A}}$ (μ هو مقصور μ^* على $\mathcal{A}$)

مجموعات القياس(في فضاء القياس الخارجي):

ليكن $(X, p(X), \mu^*)$ فضاء خارجي و ليكن $A \in p(X)$ $(A \subseteq X)$

نقول عن A أنها قيوسة اذا حققت الشرط:

$$\forall E \subseteq X \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

توضح للشرط:

$$E = E \cap X \Rightarrow E = E \cap (A \cup A^c)$$

$$E = (E \cap A) \cup (E \cap A^c)$$

و كون $(E \cap A^c)$ و $(E \cap A)$ مجموعتين منفصلتين فنستطيع أخذ القياس

و منه نستطيع أخذ القياس الخارجي و بالاستفادة من الشرط الثالث فإن

$$\mu^*(E) = \mu^*\big((E \cap A) \cup (E \cap A^c)\big) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

أي أن $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ دائما صحيحة

و ليتحقق الشرط يجب إثبات $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ (و هذا محقق) لا يجاد شرط المجموعة القيوسة و تحقق المساواة

نتيجة : $\emptyset, X$ مجموعتين قيوستين لأن

$$A = \emptyset \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(\emptyset) + \mu^*(E) = \mu^*(E)$$
$$A = X \Longrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(E) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(E)$$

مبرهنة (1):

اذا كان μ^* قياسا خارجيا على $p(X)$ بحيث

$$\mu^* : \ p(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

فإنه يوجد قياس μ على جبر تام من $p(X)$ و ليكن $\mathcal{A}$ بحيث يحقق :

$$\mu \; : \; \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

بحيث أن $\mu^* /_{\mathcal{A}} = \mu$) أي مقصور μ^* على $\mathcal{A}$)

مبرهنة (2):

اذا كانت m^* مجموعة جميع المجموعات القيوسة فإن

1) m^* تمثل جبرا تاما على X

2) مقصور القياس الخارجي μ^*على m^* يمثل قياسا أي أن $\mu^* /_{m^*} = \mu$) μ تمثل قياسيا بحيث ليس هنالك تابع معين (كون μ تابع))

جبر بوريل:

اذا كانت $X = \mathbb{R}$ و كانت τ (التبولوجيا المألوفة) حيث

$\tau = \{A : A \subseteq \mathbb{R}; \forall x \in A \,, \exists a, b \in \mathbb{R} : a < x < b \; ($أو $x \in]a, b[\subseteq A)\}$ مألوفة

فإن أصغر جبر تام يحتوي على τ يمثل جبر بوريل و نرمز له ب $B(X)$

مثال تبولوجي نستفيد منه لاحقا:

ليكن لدينا $X = \{1,2\}$ و $\tau = \{\{1\}\}$

هل تشكل τ تبولوجيا على X إذا كانت لا تشكل تبولوجيا فجعلها تشكل تبولوجيا على X؟

إن τ لا تحقق تبولوجيا على X و لجعلها تشكل

نضيف ل τ $(X, \emptyset)$ فتصبح $\tau = \{\emptyset, \{1\}, X\}$ تشكل تبولوجيا كون شرط الاجتماع و التقاطع محققان

و لكنها لا تمثل جبر لعدم وجود $X \setminus \{1\}$ لأن لكي تكون جبرا يجب أن تكون τ مغلقة بالنسبة ل $\{\cup, c, \Delta, \setminus\}$ و طبعا كون τ منتهية فيمكننا أن نولد جبرا منها و يكون ذلك بإضافة بعض المجموعات لكي تصبح جبر و منه فإن $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, X\}$ يكون جبرا

قياس لوبيغ:

هو تابع μ (قياس) معرف على جبر بوريل بالشكل

$$\mu : B(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$$

و يحقق:

$\mu(\emptyset) = 0$ (1

$\forall_{i\in\mathbb{N}} I_i \in B(X) : I_i \cap I_j = \emptyset \ : i \neq j$ (2 و منه فإن

$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ بحيث

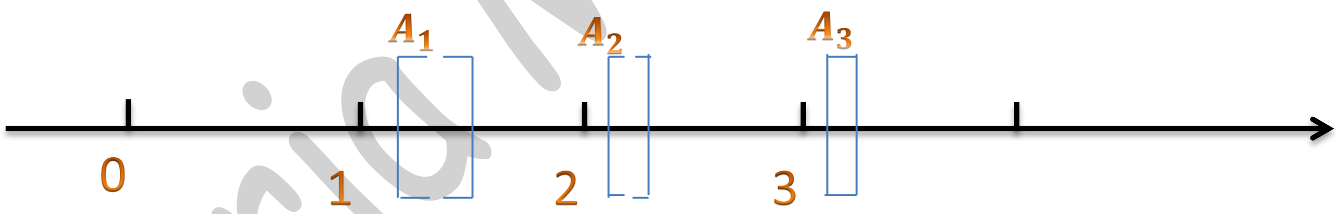
$$I = [a,b], [a,b[,]a,b],]a,b[\implies \mu(I) = b - a$$

مثال:

أحسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} [n + 4^{-n}, n + 2^{-n}]$$

مع توضيح المجموعات الجزئية الأولى على المحور $\mathbb{R}$ عندما $n = 1,2,3,$



$$n = 1 \implies A_1 = \left[1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2}\right]$$

$$n = 2 \implies A_2 = \left[2 + \frac{1}{16}, 2 + \frac{1}{4}\right]$$

$$n = 3 \implies A_3 = \left[3 + \frac{1}{64}, 3 + \frac{1}{8}\right]$$

من الواضح أن هذه المجموعات منفصلة مثنى مثنى أي A_n منفصلة مثنى مثنى

و بالتالي $\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[n + \frac{1}{2^n} - n - \frac{1}{4^n}\right]}_{\text{قياس المجال هو النهاية ناقص بدايه}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

و هي متسلسلة هندسية (كلا الحدين في طارف الأيمن)

$$\mu(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

فمعنى ذلك إن طول هذه المجموعة هو $\frac{2}{3}$ السبب أن المجموعات دائما في تضائل كل ما كبرت n.

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحليي*شهد الحايك البوشي

to improve our mathematics

#ساعد غيرك

10+14-5-2018

نظري

◄ دكتور المادة: نايف الطلي

◄المحاضرة :الثامنة عشر و التاسعة عشر (الأخيرة)

عنوان المحاضرة:القياس و خواصه

المحتوى العلمي : أهلاً بكم أصدقائي سندرس في هذه المحاضرة :

1. التوابع القيوسة
2. التابع القيوس المميز
3. خواص التابع المميز
4. التابع البسيط $f: X \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

تعريف التابع القيوس:

ليكن $(Y, \mathcal{B}, \mu_2)$ و $(X, \mathcal{A}, \mu_1)$ فضائيين قياس عندئذ

$$f: X \to Y$$

نقول عن التابع f أنه تابع قيوس اذا كانت الصورة العكسية للمجموعة القيوسة في Y هي مجموعة قيوسة X أي

$$\forall B \in \underbrace{\mathcal{B}}_{\text{مجموعة المجموعات قيوسة}} \Longrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$$

التابع القيوس (المميز) لتكن: $X \neq \emptyset$ عندئذ من أجل أي مجموعة $A \subseteq X$ تعرف الدالة:

$$\forall x \in X: \mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

حيث $\mathcal{X}$ غافا و ليست X المجموعة الشاملة

خواص التابع (الدرجي)(المميز)

1) $\mathcal{X}_X(x) = 1$ غافا x لـ X

$\mathcal{X}_{\emptyset}(x) = 0$ (2

$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x)$ (3 حيث $A \cap B = \emptyset$

$\mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$ (4

$A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{X}_A(x) \le \mathcal{X}_B(x)$ (5

$\mathcal{X}_{A\setminus B}(x) = \mathcal{X}_A(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$ (6

$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$ (7

$\mathcal{X}_{A\Delta B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - 2\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$ (8

التابع البسيط:

نقول عن f أنه بسيط اذا كانت مجموعة قيمه منتهية

$$f : X \to \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

مثال عن الدوال البسيطة (الدوال الدرجية):

$$\forall x \in A = [0,3] : \quad g(x) = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & : \quad 1 \le x < 2 \\ 2 & : \quad 2 \le x < 3 \\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

مجموعة قيم المنتهية هي $\{0,1,2,3\}$

مبرهنة:

كل تابع بسيط يكتب على شكل تركيب خطي لتوابع مميزة (درجية)

أي بالشكل

$$\forall x \in X \ : f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ \mathcal{X}_{A_i}(x)$$

حيث أن c_i قيم التابع f و A_i مجموعات تحقق أن

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \ ;\forall i,j \in \mathbb{N} : A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j$$

أي نلاحظ أن X تشكل تجزئة ل A_i)) مجموعات منفصلة مثنى مثنى))

$$\forall x \in X : f(x) = c_1\mathcal{X}_{A_1}(x) + c_2\mathcal{X}_{A_2}(x) + \cdots + c_n\mathcal{X}_{A_n}(x)$$

نتيجة: كل تابع بسيط هو تابع قيوس .

مثال:

لتكن الدالة f حيث

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [0,3[= A_1 \\ 3 & x \in [3,6[= A_2 \\ 7 & x \in [6,7] = A_3 \end{cases}$$

حيث $X = [0,7]$ فإنه يمكننا كتابة f بالشكل التالي :

$$f(x) = 2\mathcal{X}_{A_1}(x) + 3\mathcal{X}_{A_2}(x) + 7\mathcal{X}_{A_3}(x)$$

إذا اردنا حساب $f(6) = 2(0) + 3(0) + 7(1) = 7$

تكامل لوبيغ:

تعريف تكامل لوبيغ لتابع بسيط:

اذا كان $(X, \mathcal{A}, \mu)$ فضاء قيوسا و كان f تابعا بسيطا مجموعة قيمه c_i حيث $i \in \mathbb{N}$ نعرف تكامل لوبيغ للتابع f على X بالنسبة للقياس μ كما يلي (μ قياس لوبيغ)

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$$

$$\underbrace{A_i \cap A_j}_{i \neq j} = \emptyset \, , X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

c_i قيم التابع البسيط f

$$A_i = \{x \in X: f(x) = c_i,\} = f^{-1}(\{c_i\})$$

تمرين:

اكتب التابع البسيط التالي $f(x)$ على شكل تركيب خطي للتابع الدرجي

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1[\\ 1 & : \quad x \in [1,2[\\ 2 & : \quad x \in [2,3[\\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

الحل:

نلاحظ أن التابع f بسيط حيث

$$f: X \to \{c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 3\}$$

و منه يمكن كتابة الدالة f على شكل تركيب خطي كون f دالة بسيطة

$$f(x) = c_1\mathcal{X}_{[0,1[}(x) + c_2\mathcal{X}_{[1,2[}(x) + c_3\mathcal{X}_{[2,3[}(x) \ + c_4\mathcal{X}_{[3,3]}(x)$$

$$f(x) = 0\mathcal{X}_{[0,1[}(x) + 1\mathcal{X}_{[1,2[}(x) + 2\mathcal{X}_{[2,3[}(x) \ + 3\mathcal{X}_{[3,3]}(x)$$

و إذا أردنا حساب تكامل لوبيغ ل f على المجال $[0,3]$ فإن:

$$\int_{[0,3]} f\, d\mu = 0\mu([0,1]) + 1\mu([1,2[\ ) + 2\mu([2,3[\ ) + 3\mu([3,3])$$

$$= 0.1 + 1.1 + 2.1 + 3.0 = 3$$

و منه يتم المطلوب.

و لو ردنا حساب التكامل باستخدام تكامل ريمان نحصل على نفس النتيجة حيث

$$\int_0^3 [x]dx = \int_1^2 dx + 2\int_2^3 dx = [x]_1^2 + 2[x]_2^3 = 1 + 2 = 3$$

تمرين:

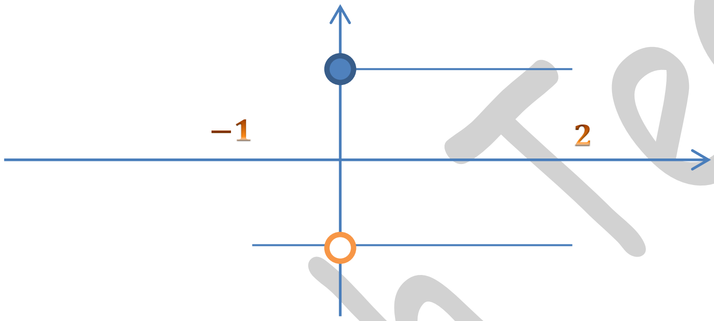
احسب تكامل لوبيغ للتابع

$$f(x)=\begin{cases}-1 & : \ -1\le x\le 0\\ 1 & : \ 0\le x\le 2\end{cases}$$

حيث $A_1=[-1,0[$ و $A_2=[0,2]$

أوجد $\int_{[-1,2]} f(x)d\mu$

الحل:



$$\int_{[-1,2]} f\,d\mu=-\mu(A_1)+\mu(A_2)=-1.1+1.2=1$$

حيث $\mu([-1,0[\,)=0-(-1)=1$ و $\mu([0,2])=2-0=2$

تمرين:

احسب التكامل

$$\int_{[0,1]} f(x)d\mu : f(x)\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

الحل:

$\mathbb{Q}=\cup_{i=1}^{\infty}[x_i]$ && $[x_i]=[x_i,x_i]$ فإن $\mu(\mathbb{Q})=\sum_{i=1}^{\infty}\mu[x_i,x_i]=0$

و الآن بحل التمرين

إن $X=[0,1]$ و إن $A_1=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ و $A_2=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$

و منه تكون A_1 هي نقاط العادية الموجودة داخل المجال $[0,1]$ و A_2 هي الأعداد غير العادية الموجودة داخل المجال $[0,1]$

نلاحظ $A_1 \cup A_2 = [0,1]$ و $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 1\mu(A_1) - 1\mu(A_2) = 1 . 0 - 1\, \mu([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = -1[\mu[0,1] - \mu(\mathbb{Q})]$$
$$= -1[1-0] = -1$$

$$((\mu(A_1) = \mu(\mathbb{Q}) = 0))$$

تمرين:

أوجد التكامل

$$\int_{[0,3]} f(x) d\mu : \quad f(x) = 3[x] + 1$$

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in [0,1[\\ 4 & : \quad x \in [1,2[\\ 7 & : \quad x \in [2,3[\\ 10 & : \quad x = 3 \end{cases} \qquad [x] = \begin{cases} 0 & : \quad x \in [0,1[\\ 1 & : \quad x \in [1,2[\\ 2 & : \quad x \in [2,3[\\ 3 & : \quad x = 3 \end{cases}$$

$$\int_{[0,3]} f \;\; d\mu = 1\mu([0,1[\,) + 4\mu([1,2[\,) + 7\mu([2,3[\,) + 10\, \mu([3,3])$$

$$= 1.1 + 4.1 + 7.1 + 10 \;.\; 0 = 12$$

حيث قياس المجال هو البداية ناقص النهاية.

تمرين:

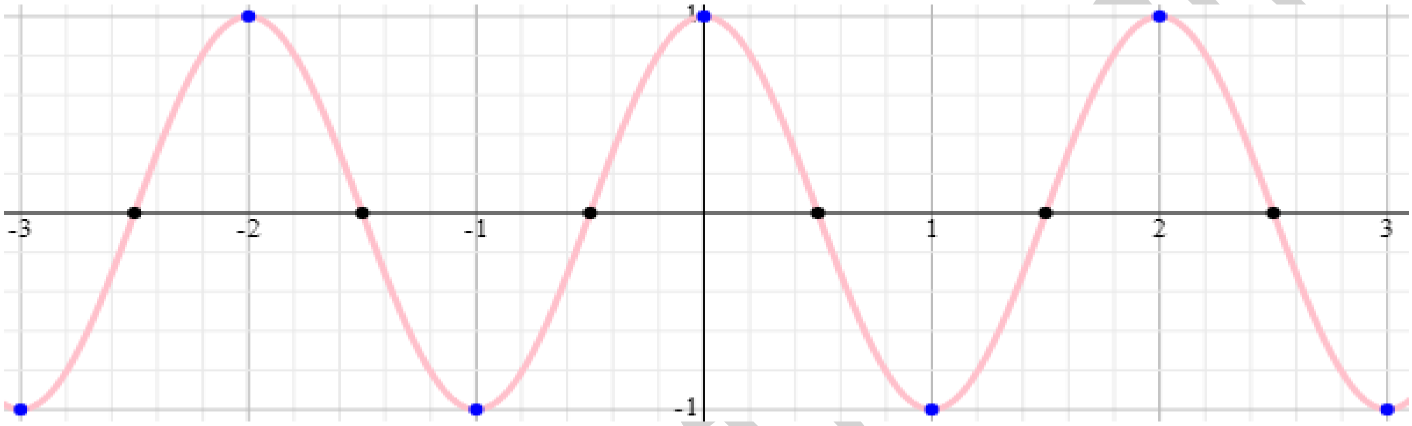
احسب تكامل تابع الإشارة التالي

$$\int_{[-3,3]} sign(\cos \pi x) d\mu \quad : \quad sign(w) = \begin{cases} 1 & : \; w > 0 \\ 0 & : \; w = 0 \\ -1 & : \; w < 0 \end{cases}$$

الحل:

الأن لحل هذا التمرين نقوم بتجزئة المجال و سيكون كالتالي

$$A_1 : \cos \pi x > 0 \; , \; A_2 : \cos \pi x = 0 \; , \quad A_3 : \cos \pi x < 0$$



لحساب A_2 عن طريق $\cos \pi x = 0$

$$\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k \; : \quad \text{نقسم على } \pi \rightarrow x = \frac{1}{2} + k$$

و منه فإن $k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \; , \; k = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \; , \; k = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \; , \quad k = -2 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \; , \quad k = -3 \Rightarrow x = -2{,}5$$

نلاحظ أن عند أخذ $k = 3$ تكون x خارج المجال $[-3,3]$ و لذلك فإن $k = 0,1,2,-1,-2-3$

و منه فإن $A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\}$

قياس لوبيغ ل A_2 هو $\mu(A_2) = 0$ لأن A_2 هي اجتماع مجموعات (مجالات) وحيدة العنصر

و الأن لحساب A_1, A_3 نستفيد من الرسمة السابقة

فتكون $\cos \pi x > 0 \; : \; A_1$ أي أن A_1 هي القسم الأعلى لox في المنحني أي أن

$$A_1 =]-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\cup]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}[$$

كون A_1 مكونة من اجتماع مجالات منفصلة مثنى مثنى فإن قياس لوبيغ لها هو

$$\mu(A_1) = \mu(]-\frac{5}{2},-\frac{3}{2}[) + \mu(]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[) + \mu(]\frac{3}{2},\frac{5}{2}[)$$

و منه فإن قياس المجال A_1 هو $\mu(A_1) = 1 + 1 + 1 = 3$

و يكون $\cos \pi x < 0$: A_3 هو القسم السفلي ox للمنحني أي أن

$$A_3 = [-3,-2.5[\cup]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[\cup]\frac{5}{2},3]$$

كون A_3 مكونة من اجتماع مجالات منفصلة مثنى مثنى فإن قياس لوبيغ لها هو

$$\mu(A_3) = \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3$$

نجد أن

$$x \in A_1 \Rightarrow \cos \pi x > 0 \Rightarrow sign(w) = 1$$

$$x \in A_2 \Rightarrow \cos \pi x = 0 \Rightarrow sign(w) = 0$$

$$x \in A_3 \Rightarrow \cos \pi x < 0 \Rightarrow sign(w) = -1$$

بما أن A_1, A_2, A_3 تشكل تجزئة ل X فإنه حسب التعريف

$$I = \int_{[-3,3]} sign(\cos \pi x) d\mu = c_1\mu(A_1) + c_2\mu(A_2) + c_3\mu(A_3)$$

$$= 1.3 + 0.0 + (-1).3 = 0$$

تمارين الوظيفة:

1- أحسب قياس المجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ علما أن

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + 3^{-n}, n + 2^{-n}]$$

وضح ذلك بالرسم من أجل $n = 1,2,3$

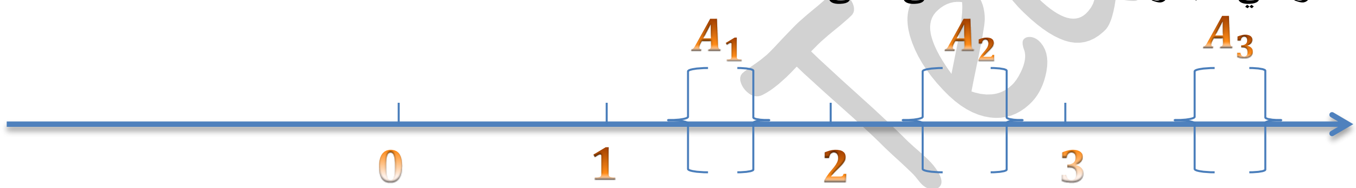
الحل:

$$A_1 = \left[1+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}\right]$$

$$A_2 = [2+\frac{1}{3^2}, 2+\frac{1}{2^2}]$$

$$A_3 = [3+\frac{1}{3^3}, 3+\frac{1}{2^3}]$$

و هي مجموعات منفصلة مثنى مثنى



$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1}{3^n}, n+\frac{1}{2^n}\right]\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left[n+\frac{1}{3^n}, n+\frac{1}{2^n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[n+\frac{1}{2^n}-n-\frac{1}{3^n}\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

برهن خواص التوابع الدرجية :

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A \end{cases}$$

$$1) \quad \mathcal{X}_{A\cap B}(x) = \mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية

$$1-\quad x\in A\cap B\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow\mathcal{X}_A(x)=1\\x\in B\Rightarrow\mathcal{X}_B(x)=1\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x)=1=\mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

$$2-\quad x\notin A\cap B\Rightarrow\begin{cases}x\notin A\\x\notin B\end{cases}\Rightarrow\mathcal{X}_A(x)=\mathcal{X}_B(x)=0\Longrightarrow$$

$$\mathcal{X}_{A\cap B}(x)=0=\mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)$$

$$3-\quad x\notin A\cap B\,,x\in A\cup B\Rightarrow\begin{cases}x\notin A\,,x\in B\Rightarrow\mathcal{X}_B(x)=1,\mathcal{X}_A(x)=0\\x\notin B\,,x\in A\ \Rightarrow\mathcal{X}_B(x)=0,\mathcal{X}_A(x)=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathcal{X}_{A\cap B}(x)=0=0.1=\mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)\\\mathcal{X}_{A\cap B}(x)=0=1.0=\mathcal{X}_A(x).\mathcal{X}_B(x)\end{cases}$$

و منه فإن العلاقة محققة في جميع الحالات فهي صحيحة.

$$2)\mathcal{X}_{A\cup B}(x)=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)\ :\ A\cap B=\emptyset$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية:

$$1-\ x\notin A\cup B\Rightarrow\begin{cases}x\notin A\\x\notin B\end{cases}\Rightarrow\mathcal{X}_A(x)=\mathcal{X}_B(x)=0$$

$$\Rightarrow\mathcal{X}_{A\cup B}(x)=0=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)$$

$$2-x\in A\cup B\,,A\cap B=\emptyset\Rightarrow\begin{cases}x\in A\,,x\notin B\\x\in B\ ,x\notin A\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\mathcal{X}_{A\cup B}(x)=1=1+0=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)\\\mathcal{X}_{A\cup B}(x)=1=0+1=\mathcal{X}_A(x)+\mathcal{X}_B(x)\end{cases}$$

علاقة محققة في جميع الحالات فهي صحيحة

$$3)\ A\subseteq B\Rightarrow\mathcal{X}_A(x)\leq\mathcal{X}_B(x)$$

الإثبات:

نميز الحالات التالية:

$$1 -\quad x \in A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 1\,; x \in B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 \Longrightarrow 1 \le 1$$ محققة

$$2 -\quad x \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 0\,; x \in B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 1 \Longrightarrow 0 \le 1$$ محققة

$$3 -\quad x \notin A \Rightarrow \mathcal{X}_A(x) = 0\,; x \notin B \Rightarrow \mathcal{X}_B(x) = 0 \Longrightarrow 0 \le 0$$ محققة

و منه العلاقة صحيحة في جميع الحالات.

$$4)\mathcal{X}_{B\setminus A}(x) = \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_A(x) \quad : \quad A \subseteq B$$

الإثبات:

$$B = A \cup (B \setminus A)$$

$A, B \setminus A$ منفصلتان أي

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$

حسب خاصة سابقة إن

$$\mathcal{X}_B(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_{B\setminus A}(x) \Rightarrow \mathcal{X}_{B\setminus A}(x) = \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_A(x)$$

الخاصتان التاليتان تتركان للقارئ☺

$$\mathcal{X}_{A\cup B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - \mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$
$$\mathcal{X}_{A\Delta B}(x) = \mathcal{X}_A(x) + \mathcal{X}_B(x) - 2\mathcal{X}_{A\cap B}(x)$$

عرف القياس ثم برهن ما يلي:

$$1)\ A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$$
$$2)\ \mu(A\Delta B) \Rightarrow \mu(A) + \mu(B) - 2\mu(A \cap B)$$
$$3)\ \mu(A \cup B) \Rightarrow \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$
$$4)\ if\ A\Delta B = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$$

يترك للقارئ

- عرف القياس الخارجي ثم بين بمثال أنه ليس كل قياس خارجي هو قياس(محلول بالمحاضرة 17)
- عرف الجبر ثم بين أنه مغلق بالنسبة لجميع العمليات على المجموعات (محلول بالمحاضرة15)

الأخطاء و التصحيح

المحاضرة	الخطأ	الصواب
المحاضرة (1) الصفحة (4)	الدالة معرفة على مجموعة أعداد الحقيقية فرق الصفر	الدالة معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية فرق الواحد
المحاضرة(3) الصفحة (1)	لنأخذ المسافة $p = \frac{(b-a)}{n}$	لنأخذ المسافة $\Delta p = \frac{b-a}{n}$
المحاضرة (4) الصفحة(4)	و تحقق الشرط أن $\lvert f_2(x)\rvert > 0$	و تحقق الشرط أن $\lvert x+1\rvert > 0$
المحاضرة (6) الصفحة (3)	تصحيح رسمة التمرين الرابع	حيث يكون المنحني على المجال $[1,2]$ بشكل قطع مكافئ
المحاضرة (11) الصفحة (4)	تكامل ريمان إذا كان $\int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\ dx$ موجود و بالعكس	تكامل ريمان إذا كان $\int_a^c f dx$ و $\int_c^b f dx$ موجودين فإن $\int_a^b f\ dx$ موجود و بالعكس
المحاضرة (14) الصفحة(11)	$g(1-0)=0, f(1)=1 \Rightarrow (1,0)$ $g(2-0)=1, f(2)=2 \Rightarrow (2,1)$ $g(3-0)=2, f(3)=3 \Rightarrow (3,2)$	$g(1-0)=0, f(1)=1 \Rightarrow (0,1)$ $g(2-0)=1, f(2)=2 \Rightarrow (1,2)$ $g(3-0)=2, f(3)=3 \Rightarrow (2,3)$

انتهت المحاضرة

إعداد: صفا أيوبي*ياسين الحلبي*شهد الحايك البوشي

حلمنا نهار...نهارنا عمل
نملك الخيار...وخيارنا الأمل و تهدينا الحياة أضواء في أخر النفق تدعونا كي ننسى ألما
عشناه نستسلم لكن لا ما دمنا أحياء نرزق
ما دام الأمل طريقا فسنحياه
بالتوفيق للجميع