الفصل الثامن / المجال الكهربائي
Electric Field

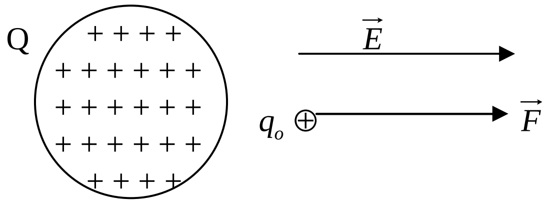
(8-1) المجـــال الكهربـــائي

نبدأ دراستنا في التعرف على مفهوم المجال الكهربائي بنظرة إلى الموقف الأكثر شيوعاً لمجال نيوتن في الجاذبية، فلطالما شبهت الذرة بالمجموعة الشمـــسية، إذ أن دوران الالكترونات حول النواة يشبه دوران الكواكب حول الشمس، كما أن المـــسافة بـــين الالكترونات والنواة تماثل من حيث الحجم المسافة بين الكواكـــب والـــشمس. فقـــوة التجاذب بين جسمين كما افترضها نيوتن في قانونه للجذب الكتلي تـــؤثر في حركـــة الأرض أثناء دورانها حول الشمس على الرغم من المسافة الشاسعة بينهما والفراغ الذي يفصلها وهذا مايعرف بالتأثير عن بعد Action at a Distance.هذه الحقيقة العمليـــة التي تقّبلها الناس دون تفسير لم يعرف سببها الكثير من العلماء والمفكرين آنذاك حـــتى العقود الأولى من القرن التاسع عشر عندما جاء الفيزيائي الإنكليزي ميـــشيل فـــاراداي (1791-1867) بمفهوم المجال الكهربائي الذي يصف القوى الكهربائية التي تـــؤثر بهـــا الأجسام المشحونة* على بعضها البعض والتي تكمن بطريقة ما في الحيز الذي يفصل بين الجسمين.

نستدل مما سبق بان الأجسام المشحونة تغير من حالة الفضاء حولها، لذا فالحالة تختلف بشكل ما عن وضعها عندما لا تكون هذه الأجسام المشحونة موجـــودة وعليـــه يمكن القول إنّ المجال الكهربائي موجود في الفضاء المحيط بالجسم المشحون. وبإمكاننـــا الحصول على قدر كبير من اليقين في هذه المسألة بفحص تأثير المجال الكهربـــائي علـــى جسم مشحون داخله، فإذا ما وضع جسم مشحون بسيط (سنتفق أن يكـــون شـــحنة اختبارية موجبة مقدارها q_o) في نقطة داخل خريطة للمجال الكهربائي مصدره الجسم

* المقصود بالأجسام المشحونة هي تلك الأجسام التي تمتلك شحنة فائضة ناتجة أما عن فائض في عدد الالكترونات (سالبة الشحنة) أو عن فائض في عدد البروتونات (موجبة الشحنة).

الكروي المشحون كما في الشكل (8-1)، فان قوة كهربائية ستؤثر على q_o يكـــون اتجاهها اتجاه المجال الكهربائي. وإذا ما ابتغينا الدقة في طرح هكذا موضوع فان شـــحنة الاختبار تؤثر هي الأخرى بقوى على كل الشحنات الموجودة بجوارها، وللتغلب علـــى هذه الصعوبة توجَبَ أن تكون شحنة الاختبار ضئيلة للغاية بحيث لا تؤثر على الشحنات المجاورة إلا بقدر مهمل تماماً.



الشكل (8-1): شحنة اختبارية موجبة q_o موضوعة قرب جسم كروي يحمل شحنة موجبة فائضة Q ويظهر اتجاه المجال الكهربائي $\vec{E}$ بنفس اتجاه القوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على الشحنة q_o.

إن ما تقدم يصف طريقة عملية لإيجاد شدة المجال الكهربائي $\vec{E}$ في نقطة ما من الفضاء الكهربائي وذلك من خلال حساب نسبة القوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة على شحنة اختبارية موجبة q_o موضوعة في النقطة المراد إيجاد المجال عندها إلى تلك الـــشحنة ،أي أن :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1-8)}$$

وهنا يجب أن ننبه إلى ضرورة اعتماد غاية النسبة في تعريف المجال الكهربائي لغرض جعل الشحنة الاختبارية غير مؤثرة على التوزيع ألشحني المولِد للمجال الكهربائي، وذلك عند اقتراب قيمتها من الصفر، وبذلك يأخذ المجال الكهربائي الصيغة الاتجاهية الآتية :

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_o} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2-8)}$$

حيث $\vec{E}$ كمية متجه واتجاهها نفس اتجاه القوة الكهربائية $\vec{F}$ المؤثرة علـــى شحنة الاختبار الموجبة q_o، ووحداتها في نظام SI هي NC^{-1} أو بالوحدات الأساسية $mkgs^{-2}C^{-1}$.

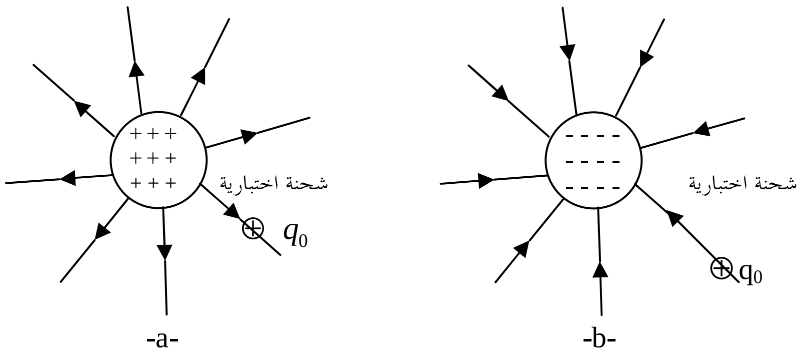
(2-8) خطوط القوة الكهربائية Lines of the Electric Force

لم تكن فكرة استحداث مفهوم خطوط المجال الكهربائي من قبل الإنكليـــزي ميشيل فاراداي إلا محاولة لرؤية تركيب المجال الكهربائي الناشئ عن توزيع معـــين مـــن الشحنات. إن تأثير شحنة الاختبار الموضوعة عند نقطة ما في مجال كهربائي وتحركهـــا باتجاه محصلة القوى الكهربائية المؤثرة عليها وفق المعادلة $\overrightarrow{F} = q_0 \overrightarrow{E}$ يعطي طريقـــة في كيفية رسم خط القوة الكهربائية الذي يعرف بأنه المسار الذي تسلكه شحنة اختباريـــة موجبة موضوعة في نقطة ما في المجال الكهربائي.

إن خطوط القوة الكهربائية في المجال الكهربائي هي خطوط وهمية تنفذ خلال المجال الكهربائي، تنبع وتتجه بعيداً عن الشحنات الموجبة وتصب وتتجه نحو الـــشحنات السالب ، بحيث يكون اتجاهها في أي نقطة (نعني باتجاه مماسها) هو اتجاه المجال من تلك النقطة. إلا انه ليس من الضروري أن تكون كذلك دائماً، فقد تكون خطوط القوة مغلقة على نفسها كما في حالة المجال الكهربائي المتولد عن المجال المغناطيسي المتغير.

وفي بعض الأحيان عندما يكون الكلام عن شحنة معزولة أو كرة مـــشحونة موجبة كانت أم سالبة فان مجالها يمثل بهيئة خطوط (مستقيمة) حيث تتجه بالقرب مـــن الكرة الموجبة قطرياً إلى الخارج بعيداً عنها وعلى المسارات المبينة في الـــشكل (2a-8) ، وتتجه بالقرب من الكرة السالبة قطرياً إلى الداخل نحو الكرة المشحونة على المـــسارات المبينة في الشكل (2b-8) ، وهذا ما يدلل علية اتجاه حركة الشحنة الاختيارية q_0 داخل مجال الشحنتين. وفي كل الأحوال فان ما ذكر يوضح خاصية مهمـــة لخطـــوط المجـــال الكهربائي وهي إن هذه الخطوط لابد أن تنتهي عنـــد الـــشحنات المولـــدة للمجـــال الكهربائي.

إن خطوط القوة الكهربائية لا تتقاطع مع بعضها مطلقاً لان تقاطعهـــا في أي نقطة في المجال يعني إن هناك أكثر من اتجاه للمجال الكهربائي وهذا غـــير وارد، الأمـــر الذي يجعلنا أن نفترض صفة التنافر فيما بينها وهذا ما سنأتي إلى تأكيـــده في مواضـــيع لاحقة.

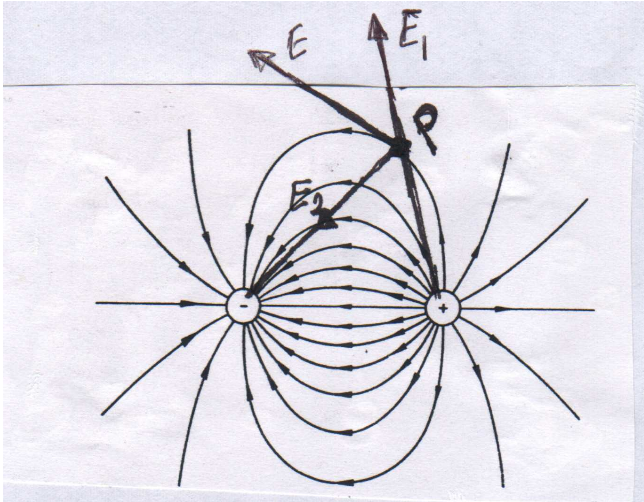


الشكل (8–2): خطوط القوة الكهربائية a– تتجه قطرياً إلى الخارج بعيداً عن سطح الكرة الموجبة.
b– تتجه قطرياً إلى الداخل نحو سطح الكرة السالبة.

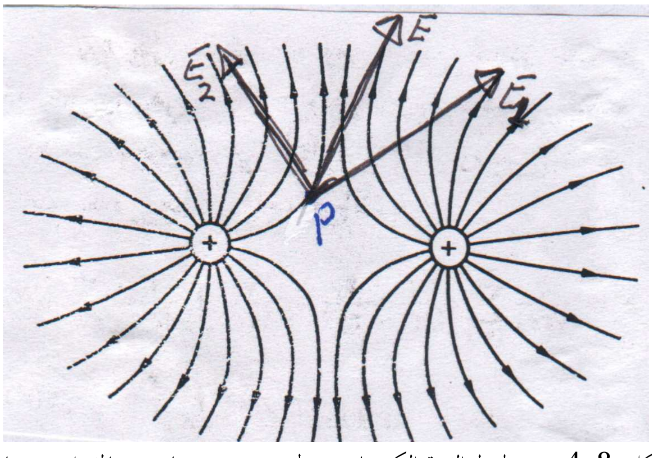
يرينا الشكل (8-3) خطوط القوة لمجال كهربائي حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة تفصلهما مسافة صغيرة كما في بروتون وإلكترون ذرة الهيدروجين الوحيدين، وهذا ما يدعى بثنائي القطب الكهربائي Electric Dipole. ويبدو واضحاً من الشكل أن المماس لخط القوة في نقطة ما مثل p يمثل متجه شدة المجال الكهربائي E.

أما الشكل (8–4) فيوضح خريطة المجال القائم بجوار شحنتين متساويتين بالمقدار ومتشابهتين بالإشارة كما في بروتوني جزيئة الهيدروجين. ولابد أن يكون الطالب قادراً على إدراك أن المجال الكهربائي يساوي صفراً عند نقطة منتصف المسافة بين الشحنتين.

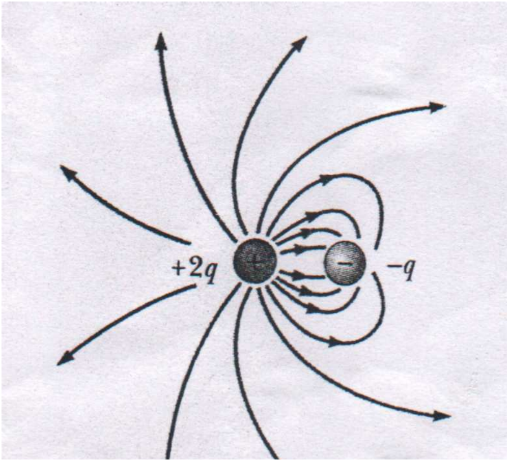
أن خريطة المجال القائم بجوار شحنتين مختلفتين في المقدار والإشارة الأولى $+2q$ والثانية $-q$ يوضحها الشكل (8-5)، إذ يبدو من الشكل أن عدد الخطوط الخارجة من الشحنة $+2q$ تساوي ضعف الخطوط الداخلة إلى الشحنة $-q$. هنا نصف الخطوط الخارجة من الشحنة الموجبة تدخل الشحنة السالبة، أما النصف الباقي من الخطوط يفترض أن تنتهي في شحنة سالبة موجودة على مسافة اكبر بكثير من المسافة الفاصلة بين الشحنتين $+2q$ و $-q$ وان عددها يكافئ عدد الخطوط الصادرة من شحنة $+q$.



الشكل (8-3): خطوط القوة الكهربائية حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومختلفتين بالإشارة .



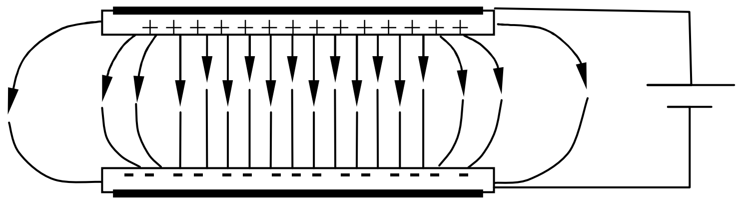
الشكل (8-4) : خطوط القوة الكهربائية حول شحنتين متساويتين بالمقدار ومتشابهتين بالإشارة.



مما سبق يتبين أن خطوط المجال لا تمثل اتجاه القوة الكهربائية فحسب ولكنها تعتبر مؤشراً على المقدار النسبي لها مثلما هو مؤشرٌ على الشدة النسبية للمجال الكهربائي. فحيثما تكون الخطوط محتشدة تكون القوة كبيرة ومقدار شدة المجال الكهربائي كبيرٌ وهذا يلاحظ في المناطق القريبة من الشحنة (انظر الأشكال أعلاه)، وكلما تباعدت الخطوط كما في الوضع عند المناطق البعيدة من الشحنة تكون القوة اضعف ومقدار شدة المجال الكهربائي اقل. وهكذا يمكن اعتبار كثافة خطوط القوة الكهربائية بمثابة قياس لمقدار شدة المجال الكهربائي، وعليه فان عدد خطوط القوة لوحدة المساحة التي تقطع مساحة صغيرة عمودية على المجال عند نقطة معينة تمثل مقدار شدة المجال الكهربائي عند تلك النقطة.

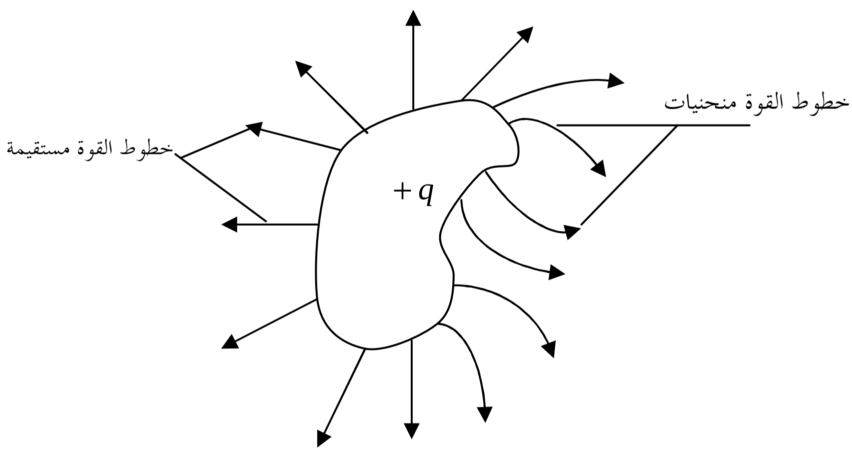
من ناحية أخرى فان خطوط القوة الكهربائية تعطي للقارئ صورة عن طبيعة المجال الكهربائي، فمن ملاحظة الشكل (8-6) الذي يمثل لوحين موصلين متوازيين مشحونين بصورة متعاكسة بنفس المقدار، نجد أن المجال الكهربائي الناشئ عنها يكون

منتظماً وثابتاً في الفسحة بين اللوحين، حيث خطوط القوة تصطف بـــصورة موازيـــة لبعضها البعض وتفصل فيما بينها مسافات متساوية، فيما يكون المجال غـــير منـــتظمٍ في المناطق القريبة من حافتي اللوحين لوجود التقوس في خطوط القوة الكهربائية.



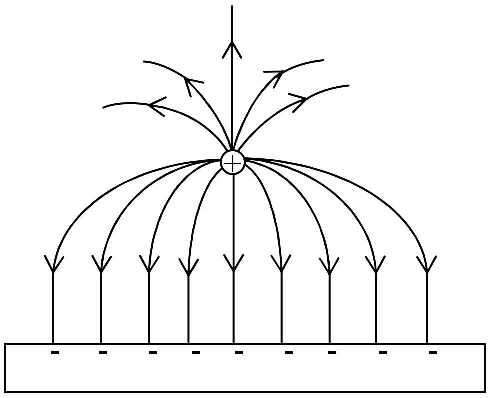
الشكل (8-6) : المجال الكهربائي المتكون بين لوحين متوازيين مشحونين بصورة متعاكسة.

لنقم الآن بإلقاء نظرة على شكل خطوط القوة الكهربائية لثلاث تـــشكيلات مبينة في الأشكال (8-7) و (8-8) و (8-9). إن خطوط القوة الكهربائية حول جـــسم فلزي مشحون مبيّن بالمقطع المستعرض في الشكل (8-7) تنبثق من مناطق الجسم المختلفة على نوعين، فهي مستقيمة تتجه شعاعياً بعيداً عن الجسم المشحون وفي مناطق أخـــرى وبسبب شكل الجسم نجدها مقوسة تحكمها صفة التنافر التي تمتلكهـــا خطـــوط القـــوة الكهربائية كما أسلفنا . والشكل (8-8) يبين خطوط القوة الكهربائية حول جسم على

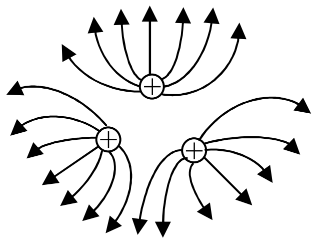


الشكل (8-7): خطوط القوة الكهربائية حول جسم فلزي مشحون.

شكل قضيب سالب الشحنة محدود الطول. نلاحظ أن خطوط القوة تـــدخل الجـــسم بصورة عمودية من مختلف مناطق الجسم (لماذا؟). أما الشكل (8-9) فيمثـــل خريطـــة خطوط القوة الكهربائية بجوار ثلاث شحنات موجبة متكافئة في المقدار موضعها رؤوس مثلّث متساوي الأضلاع وان مقدار المجال الكهربائي في مركز الشحنات يساوي صفراً (لماذا؟).



الشكل (8-8) : خطوط القوة الكهربائية حول قضيب سالب الشحنة وفيه الشحنات السالبة متجمعة قرب السطح بسبب انجذابها بالشحنة الموجبة.



الشكل (8-9) : خطوط القوة الكهربائية حول ثلاث شحنات موجبة متكافئة المقدار.

(8-3) حساب شدة المجال الكهربائي
Calculation of Electric Field Strength

في أي منطقة عندما تعاني شحنة كهربائية من تأثير قوة كهربائية فان ذلك يدل على وجود المجال الكهربائي. إن هذه القوة تعزى إلى شحنات كهربائية أخرى موجودة في المنطقة ذاتها، فعلى سبيل المثال لو كان هناك عدد من الشحنات النقطيـــة المعزولـــة

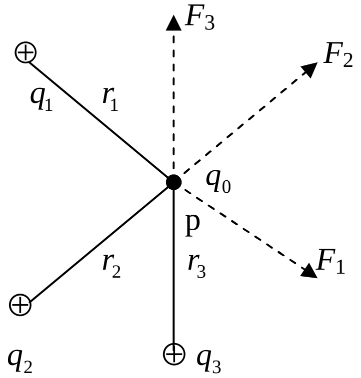
$q_1, q_2, q_3,$.............الخ، تقع على أبعاد $r_1, r_2, r_3,$................الخ على التتالي من شحنة اختبارية q_0 موضوعة عند النقطة p كما مبين في الـــشكل (8-10)، فـــيمكن استعمال قانون كولوم (المعادلة 7-3) في حساب شدة المجال الكهربائي في تلك النقطـــة بتطبيق مبدأ التراكيب، أي حساب شدة المجال الناشئ عند كل شحنة نقطية على حـــده كما لو كانت هي الشحنة الوحيدة الموجودة ، ثم بجمع الإسهامات المنفردة اتجاهياً نحصل على :

$$\overrightarrow{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r_1^2}\hat{r}_1 \ , \ \overrightarrow{F_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_0}{r_2^2}\hat{r}_2 \ , \ \overrightarrow{F_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_0}{r_3^2}\hat{r}_3$$

$$\therefore \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_0}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_0}{r_3^2}\hat{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3 + \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\right)$$



الشكل (8-10): إسهامات القوى الكهربائية المؤثرة على الشحنة الاختبارية q_0 في النقطة p الناتجة عن مجموعة من الشحنات النقطية q_1 و q_2 و q_3 .

وحيث أن :

$$\overrightarrow{E} = \frac{\overrightarrow{F}}{q_0}$$

$$\therefore \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{r}_3 + \dots\dots\dots\dots\right)$$

أو

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\hat{r}_i \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3\text{-}8)$$

حيث المعامل i يشير إلى الشحنات النقطية المؤثرة على النقطة p و $\hat{r}_i$ هي وحدة المتجه بالاتجاه من الشحنات q_i إلى النقطة p.

ويمكن جعل العلاقة(8-3) تمتد لتشمل موقفاً مهماً آخر للمجال الكهربـــائي

(4-8) مجال ثنائي القطب الكهربائي The Electric Dipole

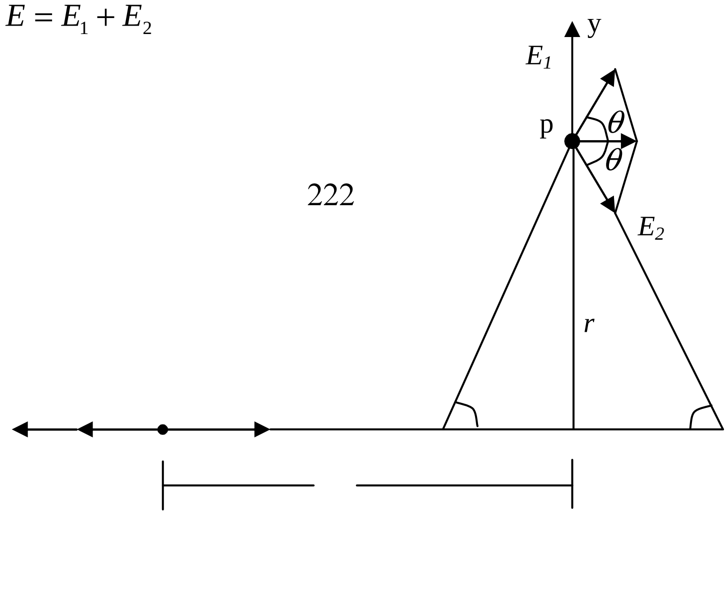
شحنة نقطية، وبهذا يكون المجال الناشئ عن كرة مشحونة بشكل منتظم شبيهاً بـــذلك المجال الناشئ عن شحنة نقطية.

يتكون ثنائي القطب الكهربائي من شحنة موجبة $+q$ وأخـــرى ســـالبة $-q$ تفصلهما مسافة صغيرةكما مبين في الشكل (8-11) . والآن بالإمكان إيجـــاد المجـــال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين $+q$و $-q$ عند النقطة p الواقعة على العمود المنـــصف لمحور ثنائي القطب والنقطة Q على امتداد محور ثنائي القطب. عند النقطـــة p المجـــال الكهربائي E_1 يساوي E_2 بسبب أن p تقع على نفس المسافة من الشحنتين حيث:

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + a^2} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(4\text{-}8)$$

ولأجل إيجاد محصلة المجال الكهربائي لابد من تحليل كل مـــن E_1و E_2 إلى مـــركبتين أحداهما عمودية على محور ثنائي القطب والأخرى موازية له ومن تماثل الشكل نجـــد إن المركبتين العموديتين على المحور يمحو أحداهما الأخرى أما المركبتين المـــوازيتين تـــضاف أحداهما إلى الأخرى لكونهما باتجاه محور ثنائي القطب نحو الـــيمين. وبـــإجراء الجمـــع ألاتجاهي لكلتا المركبتين، أي :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



يكون مقدار المجال المحصّل E هو :

$$E = E_1 \cos\theta + E_2 \cos\theta = 2E_1 \cos\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.....(5\text{-}8)$$

وبالتعويض عن E_1 من المعادلة (8-4) في المعادلة (8-5) ينتج:

$$E = 2.\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + a^2}.\frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

حيث

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

وبما أن $r>>a$ فان:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qa}{r^3}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.....(6\text{-}8)$$

حيث أن $p=2qa$ تعني العزم الكهربائي لثنائي القطب وهو كمية متجهة، اتجاهها من الشحنة السالبة إلى الشحنة الموجبة.

أما شدة المجال الكهربائي عند النقطة Q فيمكن إيجادها من إيجاد E_1 و E_2 حيث أن :

$$\overrightarrow{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-a)^2}\hat{r}$$

و

$$\overrightarrow{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{(r+a)^2}\hat{r}$$

وكما هو واضح من الشكل (8-11) فإن اتجاه المجال الكهربائي E_1 الناشـــئ عن الشحنة $+q$ هو بعكس اتجاه المجال الكهربائي E_2 الناشئ عن الشحنة $-q$ ، وبهذا فان شدة المجال الناشئ عن ثنائي القطب E يساوي المجموع ألاتجاهي لكلتـــا المعـــادلتين أعلاه، أي أن :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$$

أما مقدار محصلة المجال الكهربائي فتساوي:

$$E = E_1 - E_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-a)^2} - \frac{q}{(r+a)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4ra}{(r^2-a^2)^2}\right] \ldots\text{. (7-8)}$$

الإشارة الموجبة لناتج المحصلة E تدل على أن اتجاه E عند النقطة Q يكون على امتـــداد محور ثنائي القطب باتجاه E_1 أي نحو اليسار وعند $r >> a$ يمكننا إهمال a^2 بالنـــسبة للمقدار r^2 عندئذ تأخذ المعادلة (8-7) الصيغة الآتية :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4aq}{r^3}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{r^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(8-8)}$$

مثال (8-1)

أوجد مقدار واتجاه المجال الكهربائي عند مسافة قدرها $1m$ من إلكترون. اعد المسألة بالنسبة لبروتون.

الحل:

1- بالنسبة لإلكترون:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}=9\times10^9\frac{1.6\times10^{-19}}{1^2}=1.44\times10^{-9}\quad NC^{-1}$$

بالاتجاه نحو الإلكترون

2- بالنسبة لبروتون:

$$E=9\times10^9\frac{1.6\times10^{-19}}{1^2}=1.44\times10^{-9}\quad NC^{-1}$$

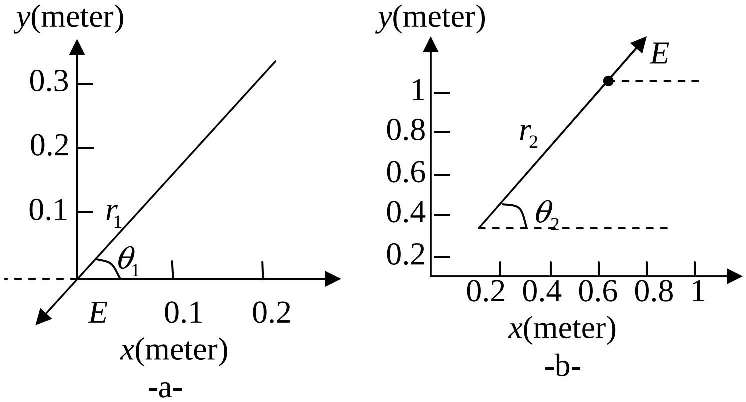
بالاتجاه بعيداً عن البروتون (لماذا ؟).

مثال (8-2)

شحنة نقطية مقدارها $5000nC$ وضعت عند نقطة في مستوي xy إحداثيها (0.3، 0.2). جد قيمة المجال الكهربائي واتجاهه الناشئ عنها عند

a- نقطة أصل الإحداثيات (0).

b- نقطة إحداثيها (1،1).



الشكل (8-12) : التخطيط البياني للحالتين a وb.

الحل :

-a

$$r_1 = \sqrt{0.2^2 + 0.3^2} = 0.36m$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = 9\times10^9 \frac{5000\times10^{-9}}{0.36^2} = 34.7\times10^4\,NC^{-1}$$

أما الزاوية التي يصنعها المجال مع محور x السالب فيمكن إيجادها من :

$$\tan\theta_1 = \frac{0.3}{0.2} = 1.5$$

$$\therefore \theta_1 = \tan^{-1}1.5 = 56.3^o$$

-b

$$r_2 = \sqrt{0.8^2 + 0.7^2} = 1.06m$$

$$E = 9\times10^9 \frac{5000\times10^{-9}}{1.06^2} = 4\times10^4\,NC^{-1}$$

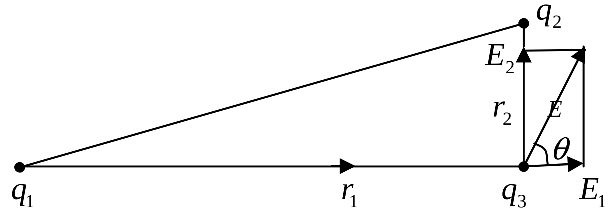
أما الزاوية التي يصنعها المجال مع محور x الموجب فيمكن إيجادها من

$$\tan\theta_2 = \frac{0.7}{0.8} = 0.875$$

$$\therefore \theta_2 = \tan^{-1}0.875 = 41.2^o$$

مثال (3-8)

أوجد مقدار واتجاه المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنتين q_1 و q_2 عند النقطة حيث موقع الشحنة q_3 كما مبين في الشكل (8-13)، إذا علمت أن $q_1 = 1.5\times10^{-3}C$ و $q_2 = -0.5\times10^{-3}C$ و $q_3 = 0.2\times10^{-3}C$ ، $r_1 = 1.2m$ و $r_2 = 0.5m$.



الشكل (8-13)

الحل:

هناك خياران للحل:

الخيار الأول:

تحسب شدة المجال الكهربائي الناشئ عن كل من الشحنتين q_1 و q_2 على انفراد وكما يأتي:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2} = 9\times10^9 \frac{1.5\times10^{-3}}{(1.2)^2} = 0.9375\times10^7\, NC^{-1}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2} = 9\times10^9 \frac{0.5\times10^{-3}}{(0.5)^2} = 1.8\times10^7\, NC^{-1}$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلّث قائم الزاوية نجد مقدار محصلة شدة المجال الكهربائي، أي أن :

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{(0.9375\times10^7)^2 + (1.8\times10^7)^2}$$

$$= 2.03\times10^7\, NC^{-1}$$

وتحسب الزاوية θ المبينة في الشكل (8-13) لمعرفة اتجاه المجال الكهربائي بعد حساب ظلها وكما يأتي:

$$\tan\theta = \frac{1.8}{0.9375} = 1.9$$

$$\therefore \theta = 62^o$$

الخيار الثاني :

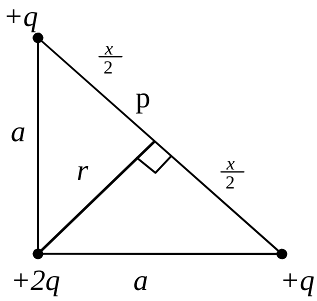
في المثال (7-6) من الفصل السابع كانت قيمة القوة المؤثرة على الشحنة q_3 $4.1\times10^3\, N$. وبتعويض هذه النتيجة في المعادلة (8-1) نجد أن:

$$E = \frac{F}{q_1} = \frac{4.1\times10^3}{0.2\times10^{-3}} = 2.03\times10^7\, NC^{-1}$$

مثال (8-4)

أوجد مقدار واتجاه شدة المجال الكهربائي عند النقطة p كما في الشكل (8-14).

الحل :



الشكل (8-14)

من ملاحظة الشكل نجـــد أن مقدار شدة المجال الكهربـــائي الناشـــئ عـــن الشحنتين $q+$ عند النقطة p يســـــاوي صفـــراً، وذلـــك لان المجـــــالين متعاكسين في الاتجاه.

أما مقدار شدة المجال الناشئ عن الشحنة $2q+$ فيمكن إيجاده بتطبيق المعادلة:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

وتستعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد البعد r :

$$x=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a \quad , \quad \frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

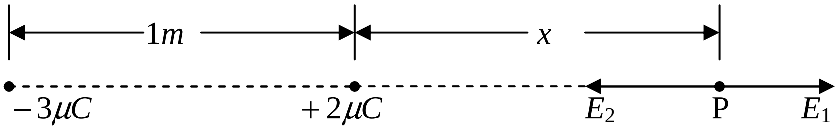
$$a^2=r^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=r^2+\frac{a^2}{2}$$

$$r^2=a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}$$

$$\therefore E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{\frac{a^2}{2}}=\frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}$$

مثال (8-5)

شحنتان نقطيتان قيمتهما $+2\mu C$ و$-3\mu C$ تفصلهما مسافة قدرها $1m$ في الهواء كما في الشكل (8-15). جد موقع النقطة الواقعة على امتداد الخط المستقيم الواصل بين الشحنتين التي عندها تصبح شدة المجال الكهربائي صفراً.



الشكل (8-15)

الحل:

إن احتمال وقوع نقطة التعادل في المنطقة بينهما غير ممكن، وذلك لان المجال الناشئ عن الشحنة الأولى يكون بنفس اتجاه المجال الناشئ عن الشحنة الثانية ، وهذا يعني أن موقع النقطة التي عندها تكون شدة المجال الكهربائي صفراً يجب أن يكون خارج المنطقة المحصورة بين الشحنتين. ووفقاً للمعادلة $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ حيث مقدار الشحنة q يتناسب طردياً مع E والبعد r عكسياً معها، فان نقطة التعادل بين مجالي الشحنتين الموجبة والسالبة يجب أن تقع اقرب إلى الشحنة الموجبة منه إلى الشحنة الكبيرة السالبة. فإذا كان E_1 المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنة الصغيرة الموجبة q_1 و E_2 المجال الكهربائي الناشئ عن الشحنة الكبيرة السالبة q_2، وبما أن المجالين متعاكسان في الاتجاه فان الشرط اللازم توفره لكي تكون محصلة المجال صفراً هو:

$$E_1=E_2$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(x+1)^2}$$

$$9\times10^9\frac{2\times10^{-6}}{x^2}=9\times10^9\frac{3\times10^{-6}}{(x+1)^2}$$

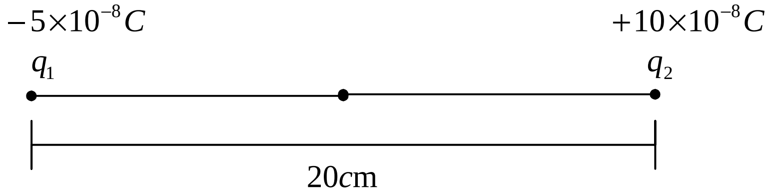
$$\frac{\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{3}}{x+1}$$

$$\therefore x=4.45m$$

وهذا يعني أن النقطة التي عندها تكون محصلة المجال الكهربائي صفراً تقع على مسافة $4.45m$ من الشحنة الموجبة و $5.45m$ من الشحنة السالبة.

مثال (8-6)

شحنتان نقطيتان مقدارهما $+10\times10^{-8}C$ و $-5\times10^{-8}C$ تفصلهما مسافة مقدارها $20cm$ كما في الشكل (8-16) .1- أوجد مقدار شدة المجال الكهربائي واتجاهه عند منتصف المسافة بينهما ، 2- لو وضع إلكترون في هذه النقطة فما مقدار القوة الكهربائية واتجاهها المؤثرة عليه.



الشكل (8-16)

الحل :

1- تحسب شدتي المجال الكهربائي E_1 و E_2 للشحنتين q_1و q_2 على انفراد في منتصف المسافة بين الشحنتين كما يأتي :

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}=9\times10^9\frac{5\times10^{-8}}{(0.1)^2}=4.5\times10^4\,NC^{-1}$$

$$E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r^2}=9\times10^9\frac{10\times10^{-8}}{(0.1)^2}=9\times10^4\,NC^{-1}$$

وبما أن المجال الناشئ عن الشحنة q_1 يكون بنفس اتجاه المجال الناشئ عن الشحنة q_2 أي باتجاه اليسار، فأن :

وأن

$$\vec{E}=\vec{E_1}+\vec{E_2}$$

$$E=4.5\times10^4+9\times10^4=13.5\times10^4\,NC^{-1}$$

2- هناك خياران للحل:

الخيار الأول: تُستعمل المعادلة (8-1) لإيجاد القوة المؤثرة على الإلكترون (e) الموضوع في منتصف المسافة بين الشحنتين

$$F=13.5\times10^4\times1.6\times10^{-19}=2.16\times10^{-14}N$$

الخيار الثاني : يُستعمل قانون كولـــوم $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$ للـــشحنتين q_1 و q_2 لغرض إيجاد القوة المؤثرة على الإلكترون وعلى انفراد، أي أن :

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\times10^9\,\frac{5\times10^{-8}\times1.6\times10^{-19}}{(0.1)^2} = 1.4400\times10^{-14}\,N$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\times10^9\,\frac{10\times10^{-8}\times1.6\times10^{-19}}{(0.1)^2} = 0.7200\times10^{-14}\,N$$

وبما أن تأثير القوتين F_1 و F_2 على شحنة الإلكترون في منتـــصف المـــسافة بـــين الشحنتين q_1 و q_2 يكون باتجاه واحد ونحو اليمين، إذن:

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

وان

$$F = 1.4400\times10^{-14} + 0.7200\times10^{-14} = 2.16\times10^{-14}\,N$$

(5-8) المجال الكهربائي الناشئ عن توزيع متصل للشحنة
Electric Field of a Continuous Charge Distribution

كثيراً ما تكون المسافات بين الشحنات في مجموعة الشحنات الموزعـــة علـــى سطح جسم موصل اصغر بكثير من المسافة بين هذه الشحنات وبعض النقاط المطلـــوب إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها. في مثل هذه الحالة يكون نظام الـــشحنات مـــستمراً (متصلاً). ولغرض حساب شدة المجال الكهربائي الناشئ عن شحنة موزعة بشكل متصل تُتبَعْ الإجراءات الآتية :

1- تقسَّم الشحنة إلى عدد كبير من العناصر الصغيرة، كل منها يحوي مقدار Δq من الشحنة كما مبين في الشكل (8-17).

2- تحسب شدة المجال الكهربائي ΔE الناشئ عن احد عناصر الـــشحنة Δq في النقطة p وفق المعادلة:

$$\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r} \qquad \text{.....................(9-8)}$$

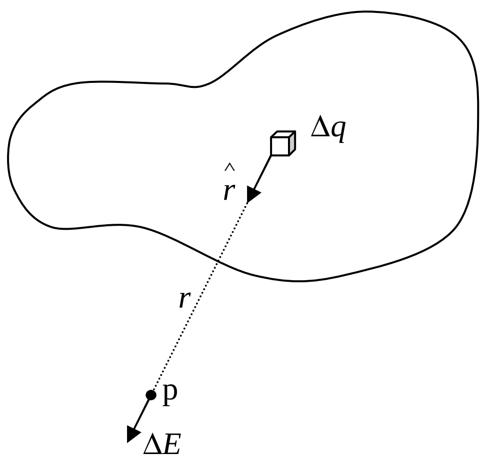
حيث r تمثل المسافة من عنصر الشحنة إلى النقطة p و $\hat{r}$ تمثل وحدة الـــشحنة بالاتجاه من عنصر الشحنة إلى النقطة p.

3- تحسب شدة المجال الكهربائي الكلية عند النقطة p الناشئ عن جميـــع عناصـــر الشحنة ذات التوزيع المستمر وذلك بجمع إسهامات كل هذه العناصر علـــى الجسم الموصل حيث:

$$\vec{E} \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i \qquad \text{..................}(10\text{-}8)$$

إذ أن المعامل i يشير إلى عناصر الشحنة في التوزيع. فإذا كانت هذه العناصـــر Δq_i متناهية الصغر بحيث $\Delta q_i \to 0$ عندئذ يتحول الجمع إلى تكامل وعليه تكتب المعادلة (8-10) بالصيغة الآتية :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r} \qquad \text{............}(11\text{-}8)$$



الشكل (8-17) : المجال الكهربائي في النقطة p الناشئ عن توزيع متصل للشحنة الذي يمثل المجموع الاتجاهي للمجالات ΔE الناشئة عن جميع عناصر الشحنة Δq .

وقبل أن نورد بعض الأمثلة التطبيقية على كيفية حساب هذا النوع من التكامل على حالات تكون فيها الشحنة موزعة على طول خط مستقيم أو على سطح أوعلى حجم، يكون من الملائم أن تعّرف كثافة الشحنة الموزعة وفق الحالات الآتية :

1- إذا كانت الشحنة q موزعة بشكل منتظم على طول خط مستقيم L، فان كثافة الشحنة الخطية λ تعرف كالآتي :

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

حيث λ لها وحدات الكولوم على وحدة الطول، أي $C\,m^{-1}$

2- إذا كانت الشحنة q موزعة بشكل منتظم على سطح مساحته A، فان كثافة الشحنة السطحية σ تعرف كالآتي :

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

حيث σلها وحدات الكولوم على وحدة المساحة ،أي $C\,m^{-2}$

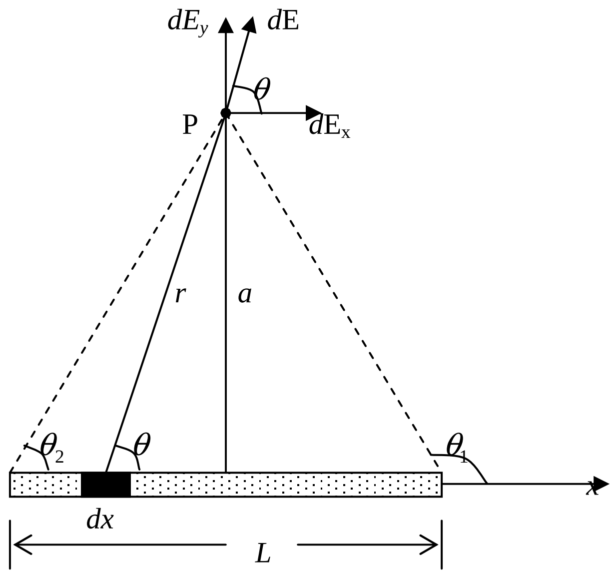
3- إذا كانت الشحنة q مثلاً موزعة بشكل منتظم خلال حجم V فان كثافة الشحنة الحجمية ρ تعرف كالآتي:

$$\rho = \frac{q}{V}$$

حيث ρ لها وحدات الكولوم على وحدة الحجم، أي $C\,m^{-3}$

مثال (8-7)

يبين الشكل (8-18) سلك عازل طوله L يحمل شحنة موجبة مقدارها q موزعة بصورة متجانسة على طول محور x بكثافة خطية قدرها λ. احسب شدة المجال الكهربائي في نقطة مثل p تقع على العمود المنصف لهذا السلك وتبعد عنه مسافة قدرها a.



الشكل (18-8)

الحل :

نفرض أن الشحنة q مقسمة إلى عناصر صغيرة طول كل منها dx، وان dq هي مقدار شحنة العنصر. وبما إن السلك يحمل شحنة ذات كثافة خطية λ فان مقدار الشحنة dq على كل عنصر هي $dq = \lambda dx$. إن شدة المجال الكهربائي dE الناشئ عن عنصر الطول dx عند النقطة p هو باتجاه محور y الموجب وذلك لان لكل عنصر شحنة في جهة اليسار هناك عنصرٌ يقابله في جهة اليمين وهذا ما يؤدي إلى تعادل مركبتي مجاليهما dE_x في اتجاه المحور x. في حين نرى مركبتيهما dE_y في اتجاه محور y الموجب دائماً. وكما يتضح ذلك من الشكل فان مقدار المركبة dE_y للعنصر هو:

$$dE_y = dE \cos\theta$$

وبالاستفادة من المعادلة

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

أو

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\hat{r}$$

فان شدة المجال في النقطة p تكون :

$$dE = dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^2}\sin\theta$$

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^2}dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12\text{-}8)$$

يلاحظ من هذه المعادلة أن المتغيرات هي r و θ و x ولأجل حلها يجب الإبقاء على متغير واحد وليكن θ. من الشكل (8-18) نجد أن :

$$x = -a\cot\theta$$

$$r = a\csc\theta$$

وبإجراء التفاضل للمعادلة نحصل على :

$$dx = a\csc^2\theta d\theta$$

وبالتعويض عن قيمة dx و r في المعادلة (8-12) نحصل على:

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{a^2\csc^2\theta}a\csc^2\theta d\theta$$

الآن يصبح بالإمكان إيجاد محصلة شدة المجال الكهربائي E في النقطة p بإجراء، عملية التكامل مع ملاحظة حدود التكامل كما يوضحها الشكل (8-18).

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{L}{\left(\frac{L^2+4a^2}{4}\right)^{½}}\right]$$

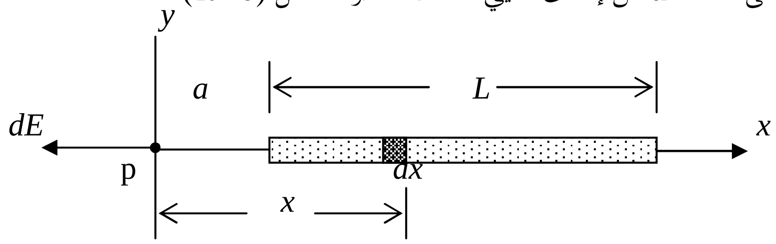
$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{L^2+4a^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13\text{-}8)$$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها السلك ممتداً على جهتي محور x ولمسافة طويلة جداً عندئذ تصبح $a \cong 0$ ، وان:

$$E = \frac{2q/L}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14\text{-}8)$$

مثال (8-8)

حل المثال السابق إذا كانت النقطة p المراد إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها واقعة على مسافة a من إحدى نهايتي السلك، انظر الشكل (8-19).



الحل :

الشكل (8-19)

المجال الكهربائي dE الناشئ عن عنصر الطول dx عند النقطة p هو باتجـــاه محور x السالب وذلك لان مصدر المجال هي حاملات الشحنة الموجبة q، ويعطى مقداره من المعادلة :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2}\hat{r}$$

أو

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{x^2}\hat{r}$$

وبسبب أن المجال الناشئ عن جميع عناصر السلك الأخرى هو باتجاه محور x السالب فان جمع إسهامات كل العناصر التي على أبعاد مختلفة من p يعطى بالمعادلة (8-11)، أي:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\lambda dx}{x^2}\hat{r}$$

ووفقاً للحالة المطروحة تؤخذ حدود التكامل في المعادلة أعلاه بين a و $L+a$ فيكون:

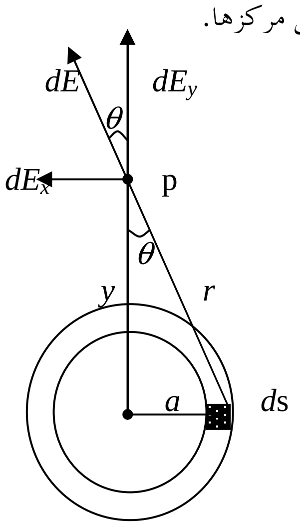
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left[-\frac{1}{x}\right]_a^{L+a}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{L+a}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\left(\frac{L+a-a}{a(L+a)}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\frac{L}{a(L+a)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a(L+a)} \qquad \text{...........(15-8)}$$

مثال (8-9)

يبين الشكل (8-20) حلقة نصف قطرها a تحمل شحنة موجبة مقـــدارها q موزعة بصورة متجانسة. والمطلوب حساب شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الحلقة عند النقطة p الواقعة على محور الحلقة وعلى مسافة y من مركزها.



الشكل (8-20)

الحل :

نـــــفرض أن الشحنة q مقسّمة إلـــى عنـــاصر صغيرة طول كل منـــها ds، وان dq هي مقدار الشحنة التي يحملها الطول ds وتساوي:

$$dq = \frac{q}{2\pi a} ds$$

ولنفس السبب الذي ذكر في المثال(8-7) فان شـــــدة المـــجال dE النـــاشئ عن عنصر الطول ds عند النقطة p يكون باتجاه محـــور y الموجب، وان مقدار شدة المجال E الناشئ عن جميع عناصر الشحنة يمكن حسابه بتكامل المجالات الصغيرة الناشئة من كل العناصر المكونة لشحنة الحلقة، أي :

$$E = E_y = dE_y = \int dE \cos\theta \qquad \text{......................(16-8)}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q ds}{2\pi a r^2}$$

وان

$$\cos\theta = \frac{y}{r}$$

وبالتعويض عن هاتين المقدارين في المعادلة (8-16) نحصل على :

$$E = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q ds}{2\pi a r^2} \frac{y}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qy}{2\pi a r^3} \int ds \qquad \text{.............(17-8)}$$

وباستعمال نظرية فيثاغورس للمثلّث القائم الزاوية نجد أن :

$$r = (y^2 + a^2)^{1/2}$$

ومنها

$$r^3 = (y^2 + a^2)^{3/2}$$

$$\int ds = s = 2\pi a$$

وبالتعويض عن r^3 وناتج تكامل المعادلة (8-17) وبعد الترتيب نجد أن:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \qquad \text{.........................(18-8)}$$

هذه النتيجة تبين أن شدة المجال الكهربائي في مركز الحلقة يساوي صفراً (لماذا؟).

وفي الحالات الخاصة عندما تكون النقطة p بعيدة جداً عن مركز الحلقـــة أي $y>>a$ يمكن إهمال a^2 مقارنةً بـــ y^2 وتصبح شدة المجال الكهربائي:

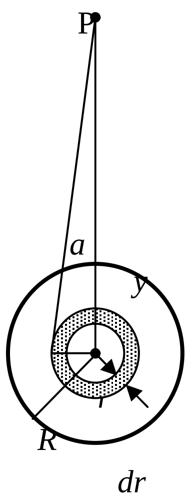
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{y^2} \qquad \text{................................(19-8)}$$

أن هذه المعادلة تظهر وكأنها ناتجة عن شحنة نقطية.

مثال (8-10)

يبين الشكل (8-21) قرصاً دائرياً نصف قطره R يحمل شحنة موجبة q موزعة بصورة متجانسة كثافتها السطحية δ. احسب شدة المجال الكهربائي عند النقطة p .

الحل :



يمكننا بسهولة حل هذه المسألة باستعمال نتيجة المثال السابق الذي يعطي مقـــدار شدة المجـــال الكهربائي الناشئ عن حلقة مشحونة نصف قطرها (r) . لهذا نقسّـــم القرص إلى عناصر تفاضلية على شكل حلقات بنصف قطر r وسمك dr. إن مساحة الحلقة تساوي $2\pi rdr$ ، أما شحنة الحلقة dq فيمكن حسابها مـــن ضرب مساحة الحلقة في كثافة الشحنة السطحية، اي:

$$dq = 2\pi rdr\,\sigma$$

وبإحلال dq محل q و r محل a في المعادلة (8-18) نحصل على:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ydq}{(r^2+y^2)^{3/2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20\text{-}8)$$

وبالتعويض عن شحنة العنصر التفاضلي dq نجد :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y(2\pi r dr\sigma)}{(r^2+y^2)^{3/2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21\text{-}8)$$

وبعكس الحالات التي درست في الأمثلة السابقة فان المجالات الناشئة عن الحلقات الدائرية في مثالنا هذا تكون جميعاً بنفس الاتجاه، لذا تجيز لنا هذه الحالة إجراء التكامل للمعادلة (8-21) مباشرةً على اعتبار إن التكامل عملية جمع جبرية وليست اتجاهية. وبهذا فان محصلة شدة المجال الكهربائي عند النقطة p يمكن إيجادها من تكامل المعادلة مباشرةً وان حدود التكامل يجب أن تمتد من $r=0$ إلى $r=R$ لكي يعطي شحنة القرص جميعها، أذن :

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R \frac{2rdr}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_0}\int_0^R (y^2+r^2)^{-3/2}\,2rdr$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(y^2+r^2)^{-1/2}}{-1/2}\right]_0^R$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(y^2+R^2)^{-1/2}}{-1/2} - \frac{y^{-1}}{-1/2}\right]$$

$$E = \frac{y\sigma}{4\varepsilon_0}\left[-\frac{2}{(y^2+R^2)^{1/2}} + \frac{2}{y}\right]$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{y}{(y^2+R^2)^{1/2}}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22\text{-}8)$$

ومن الحالات الخاصة التي تعطينا نتائج ابسط هي عندما يراد حساب شدة المجال الكهربائي في نقطة قريبة من مركز القرص أي في الحالة $R>>y$ عندئذ:

$$E \cong \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{.........................(23-8)}$$

والآن أصبح بمقدور الطالب حل السؤال الآتي:إذا كان القرص الدائري بنصف قطر $10cm$ ويحمل شحنة قدرها q كولوم. فكم تكون شدة المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على محور القرص وتبعد عنه $20cm$؟

(6–8) فيض المجال الكهربائي Flux of the Electric Field

عادةً. عندما نتكلم عن شدة المجال الكهربائي E في أية نقطة فإننا نقصد عدد خطوط القوة الكهربائية في وحدة المساحة التي تعبر سطحاً عمودياً على المجال الكهربائي القريب من تلك النقطة. وسوف نطلق على العدد الكلي لخطوط القوة التي تعبر السطح بفيض المجال الكهربائي ϕ. وعليه يمكن التعبير عن العلاقة بين فيض المجال الكهربائي وشدته على النحو الآتي:

$$\phi = EA \quad \text{...................................... (24-8)}$$

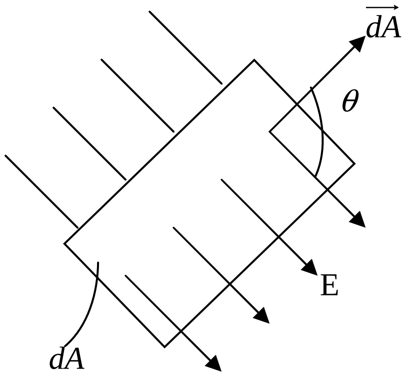
حيث تمثل A مساحة السطح.

غير أن هذه العلاقة التي تجمع شدة المجال والفيض تعد علاقة خاصة تنطبق عليها الحالة التي يكون فيها المجال الكهربائي منتظماً وبالاتجاه العمودي على السطح. أما إذا كان المجال الكهربائي غير منتظم أو غير عمودي على السطح، فان عدد الخطوط المخترقة للسطح (الفيض الكهربائي) يمكن إيجادها بتعبير رياضي يشمل موقفاً مهماً آخر غير المشار إليه في العلاقة (8–24).

في الشكل (8–22) يمثل العنصر التفاضلي dA مساحة متناهية في الصغر من السطح، بحيث أن العمود على جزء السطح dA يصنع زاوية θ مع اتجاه المجال الكهربائي. إن عدد خطوط القوة الكهربائية التي يمثلها عنصر الفيض $d\phi$ خلال السطح تكون :

$$d\phi = E(\cos\theta dA) \quad \text{......................(25-8)}$$

حيث $dA\cos\theta$ مسقط المساحة dA العمودية على المجال الكهربائي، و E شدة المجال الكهربائي عند النقطة التي تقع فيها dA.



الشكل (8-22)

وبصيغة المتجهات يمكن كتابة المعادلة (8-25) كما يأتي:

$$\overrightarrow{d\phi} = \vec{E}.\overrightarrow{dA}$$

وبإجراء التكامل السطحي للمعادلة (8-25) نحصل على الفيض الكلي خلال السطح:

$$\phi = \oint_A E\cos\theta dA \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(26\text{-}8)$$

هنا حدود التكامل تدل على شمول السطح بأجمعه، وان وضع الدائرة في وسط علامة التكامل تشير إلى الحالة التي يكون فيها السطح مغلقاً.

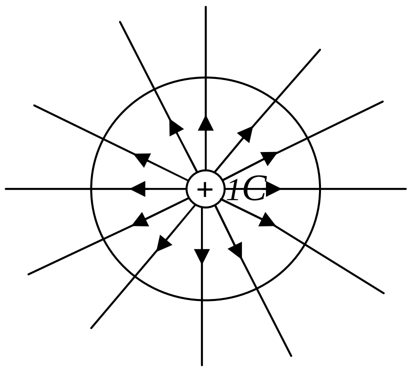
مثال (8-11)

يبين الشكل (8-23) شحنة موجبة قدرها $1C$ وضعت في مركز سطح كروي نصف قطره r. احسب عدد خطوط القوة الكهربائية التي تنفذ خلال هذا السطح.

الحل :

لدينا $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9$

وان $\dfrac{1}{\varepsilon_0} = 36\pi\times10^9$



الشكل (8-23)

وبما أن خطوط المجال الكهربائي المنبعثة عن الشحنة الموجبة $1C$ في حالتنا هذه بالاتجـــاه ألشعاعي، فان السطح الكروي يكون عمودياً عليها، وبذلك يصبح بالإمكان اســـتعمال المعادلة (8-24) لحساب عدد خطوط القوة الكهربائية المخترقة للسطح ϕ، أي :

$$\phi = EA$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.4\pi r^2$$

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{.........................(27-8)}$$

وبالتعويض عن قيمة $\frac{1}{\varepsilon_0}$ في المعادلة (8-27) نحصل على:

$$\phi = 36\pi \times 10^9$$

يمكن أن نستنتج إن فيض المجال الكهربائي خلال السطح الكروي المفترض يعتمد علـــى مقـــدار الشحنة في داخله ولا يعتمـــد على نصف قطره، كما هـــو واضح في المعادلة (8-27).

(8-7) قانون كاوس Gauss's Law

في هذا البند سوف نناقش علاقة مهمة تربط فيض المجال الكهربـــائي خـــلال سطح افتراضي مغلق (يسمى سطح كاوس) قد يكون منتظماً أو غير منتظم والـــشحنة الكلية التي يحتضنها السطح. هذه العلاقة هي تعبير لقانون شهير صاغه العلامة الرياضـــي البارع كارل فردريك كاوس (1777–1855)، وتتجلى أهميته بصورة رئيسية في إرساء أسلوب بسيط لحساب المجالات الكهربائية في الحالات التي يكون فيها المجال بقدرٍ كافٍ من التماثل. أي في الحالات التي يكون توزيع الشحنات فيها ذا هندسة بـــسيطة بحيـــث يسمح لنا باختيار أسطح افتراضية بسيطة مثل التماثل الكروي، التماثـــل الاســـطواني، والتماثل الاستوائي التي سيتم تناولها فيما بعد.

لنعُدْ ونستقرأ ما ورد في البند (8-6). المعادلة (8-27) كان قد اسند اشتقاقها على أساس مجال الشحنة الموجبة q، ولكن السطح الافتراضي المغلق قد يحتـــوي علـــى

شحنة خالصة*، وعليه فمن المنطق تعميم هذه النتيجة لتشمل القيمة الإجمالية للشحنة المحتمل وجودها داخل السطح المغلق ويرمز لها بـ q_{tot} بدلاً من q. وبعد التعويض عن قيمة ϕ من المعادلة (8-26) في المعادلة (8-27) نحصل على:

$$\oint_A E\cos\theta dA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} \qquad \text{.......................(28-8)}$$

حيث

$$q_{tot} = q_1 + q_2 + q_3 + \text{.................} = \sum_i q_i$$

تعرف المعادلة (8-28) وكذلك المعادلة (8-27) باسم قانون كاوس الذي ينص على أن: **التكامل السطحي للمركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي على سطح مفترض مغلق يساوي القيمة الإجمالية للشحنة المحتواة داخل السطح المغلق q_{tot} مقسوماً على سماحية الفضاء الحر أو سماحية الفراغ ε_0**.

ولو نظرنا إلى المعادلة (8-28) واستقرأنا جيداً نص قانون كاوس لأمكن وضع النقاط الآتية:

1- الشحنة q_{tot} تمثل حصرياً الشحنة الموجودة داخل السطح المفترض المغلق (سطح كاوس) بنوعيها سواء كانت موجبة أم سالبة.

2- إذا كانت الشحنة ذات توزيع متصل فينبغي أن يؤخذ ذلك الجزء من الشحنة الواقع داخل سطح كاوس فقط ويهمل الجزء الآخر لعدم إسهامه في تغيير فيض المجال الكهربائي المخترق للسطح.

3- إذا كانت الشحنة الخالصة داخل السطح مزيجاً متكافئاً من الشحنات السالبة والموجبة فان قيمة الفيض خلال السطح المغلق تكون صفراً.

4- في الحالة التي تكون فيها الشحنة الكلية داخل سطح كاوس المفترض تساوي صفراً ، فان قيمة الفيض الكهربائي خلال السطح تساوي صفراً أيضا.

* نقصد بالشحنة الخالصة مجموعة من الشحنات النقطية سواء كانت موجبة أم سالبة (بدلاً من شحنة نقطية واحدة q كالتي تظهر في المعادلة 8-27).

(8-8) تطبيقات على قانون كاوس
Applications of Gauss's Law

يستعمل قانون كاوس في حساب شدة المجال الكهربائي في الحالات التي يكون فيها توزيع الشحنات ذا تماثل بسيط مثل شحنة خطية منتظمة أو شحنة كروية منتظمة أو صفيحة مستوية منتظمة الشحنة أو قرص دائري منتظم الشحنة بحيث يسمح لنا اختيار سطح كاوس ملائم ينسجم مع تناظر المجال. ومن اعتبارات التناظر هذه يكون لشدة المجال قيمة ثابتة مما يجيز إخراج E خارج علامة التكامل لقانون كاوس المتمثل بالمعادلة :

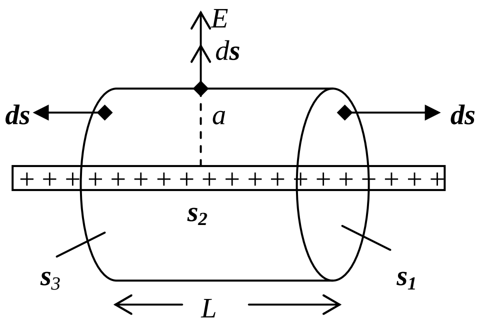
$$\oint_A E\cos\theta dA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

إن حساب الطرف الأيسر من هذه المعادلة ، يتطلب تجزئة سطح كاوس المغلق إلى عدد من السطوح التفاضلية، ومن خلال التعرُّف على الزاوية θ المحصورة بين اتجاه المجال الكهربائي وقيمة تلك السطوح التفاضلية يمكن إيجاد ناتج التكامل السطحي دون الخوض في عمليات التكامل المعقدة. وهذا يعني أن اعتماد أسلوب كاوس في حل المسائل المتعلقة بحساب شدة المجال الكهربائي هي ابسط بكثير من طريقة التكامل السطحي المعقدة التي اعتمدت في البند (8-5) كما سيتضح عند حساب شدة المجال في عدد من الحالات، حيث يكون توزيع الشحنات الكهربائية بأشكال مختلفة كما في الأمثلة الآتية:

مثال (8-12)

يبين الشكل (8-24) جزءاً من سلك عازل طوله غير محدود يحمل شحنة q موزعة بصورة متجانسة بكثافة خطية λ. احسب E عند نقطة تبعد a عن الشحنة.

الحل:



الشكل (8-24)

نختار سطحاً كاوسياً مناسباً لهذه الحالة عبارة عن سطح اسطواني دائـــري مغلـــق نصف قطره a وطوله L وضع بحيث كان محوره منطبق على السلك.ثم نقسّمهُ إلى ثلاثة أقسام وهي s_1 و s_2 وs_3 وتطبق معادلة كاوس على كل الأسطح لحساب E فيكون :

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos\theta ds + \int_{s_2} E\cos\theta ds + \int_{s_3} E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos 0 ds + \int_{s_2} E\cos 90 ds + \int_{s_3} E\cos 90 ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

وحيث $\cos 0 = 1$ ، $\cos 90 = 0$

وبإخراج E خارج علامة التكامل لثبوت قيمتها على السطح الذي يقع على بعد ثابت قدره a من الشحنة الخطية q_{tot} يكون :

$$E\int_{s_1} ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

ولكن

$$\int_{s_1} ds = 2\pi aL$$

لذا فان :

$$E 2\pi aL = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

حيث q_{tot} تمثل صافي الشحنة الواقعة داخل سطح كاوس الاسطواني، وبمـــا أن كثافـــة الشحنة الخطية ضمن الطول L الذي يقع داخل سطح كاوس λ لذا ينتج :

$$q_{tot} = \lambda L$$

$$2\pi aLE = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi a\varepsilon_0} \qquad \text{.....................(29-8)}$$

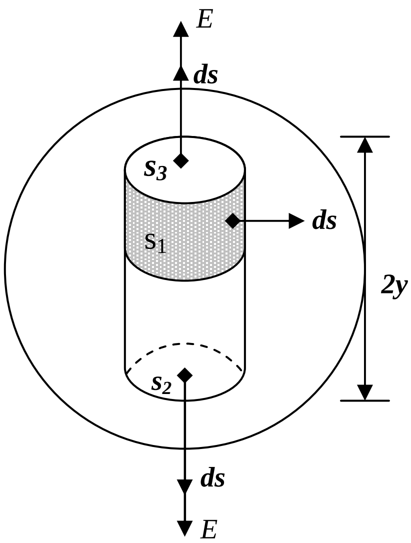
وهي نفس النتيجة التي حصل عليها في المثال (8-7) بطريقة التكامل ، حيث يلاحظ أن حل هذه المسألة بتطبيق قانون كاوس هو ابسط بكثير من طريقة التكامل.

مثال (8-13)

يبين الشكل (8-25) جزءاً من قرص دائري لانهائي يحمل شحنة موجبة موضوعة بصورة متجانسة بكثافة سطحية قدرها σ. والمطلوب حساب شدة المجال الكهربائي عند نقطة واقعة على محور القرص وتبعد مسافة y عن مركزه.

الحل:

إن أفضل سطح كاوسي نختاره لهذه المسألة هو اسطوانة شبيهة بعلبة أقراص مساحة مقطعها s وارتفاعها $2y$، توضع بحيث يكون محورها عمودياً على مستوي القرص. نقسّم سطح الاسطوانة (سطح كاوس) إلى ثلاثة أقسام هي s_1 وs_2 و s_3 ثم نطبّق معادلة كاوس على كل من هذه الأسطح لغرض حساب E فيكون:



الشكل (8-25)

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos 90 ds + \int_{s_2} E\cos 0 ds + \int_{s_3} E\cos 0 ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$0 + \int_{s_2} E ds + \int_{s_3} E ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

وبنفس الطريقة المعتمدة في حل المثال السابق، تكون E خارج علامة التكامل لثبوت قيمتها على السطح الذي يقع على بعد ثابت قدره y من الشحنة السطحية q_{tot} فيكون:

$$ES + ES = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

ومنها

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

حيث σS هي مقدار الشحنة السطحية الكلية الموجودة ضمن سطح كاوس وبهـذا نحصل على مقدار شدة المجال الكهربائي.

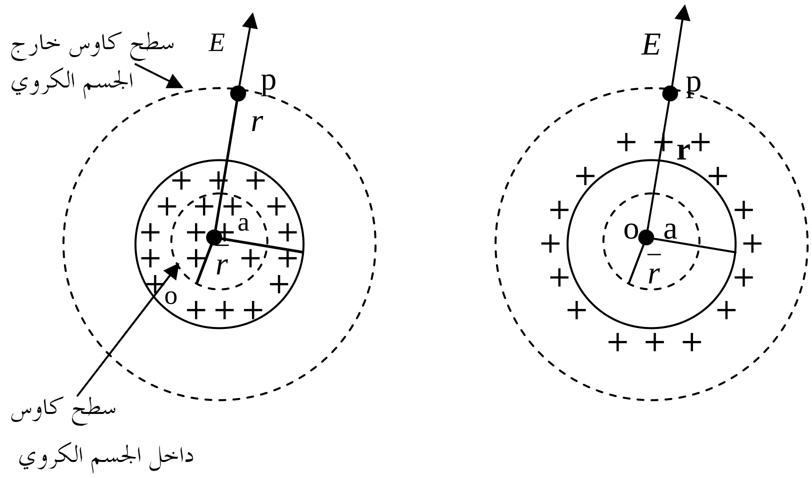
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad \text{.........................(30-8)}$$

وهي نفس النتيجة التي حصل عليها في المثال (8–10) ، ولكن بطريقة ابسط.

مثال (8–14)

يبين الشكل (8–26a) جسماً كروياً غير موصل نصف قطره a ويحمل شحنة موجبة موزعة بصورة متجانسة. والشكل (8–26b) جسم كروي موصل نصف قطره a ويحمل شحنة موجبة مستقرة على سطحه الخارجي. والمطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الجسمين الكرويين في نقطة p تقع على مسافة r خارج الكرتين.

الحل:



حالة كرة غير موصلة
(a)

حالة كرة موصلة
(b)

الشكل (8–26)

إن أفضل سطح كاوسي نختاره لهذه المسألة ولكلتا الكرتين هو عبارة عن كرة نصف قطرها r بحيث تكون نقطة p المراد إيجاد شدة المجال الكهربائي عندها واقعة على هـذا السطح.

1- في حالة الكرة غير الموصلة :

يطبق قانون كاوس المتمثل في المعادلة :

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

واضح من التناظر ألشعاعي لشدة المجال الكهربائي إن E عمودية على كل نقطة من نقاط سطح كاوس وتكون لها نفس القيمة، ولهذا فان الزاوية θ وهي الزاوية المحصورة بين اتجاه E وعنصر المساحة ds تساوي صفراً. عندئذ تصبح المعادلة أعلاه كالآتي :

$$E\oint_s ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$ES = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} \quad ; \quad S = 4\pi r^2$$ (مساحة السطح الكروي لكاوس)

إذن

$$E4\pi r^2 = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

أو

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_{tot}}{r^2} \qquad \text{.....................(31-8)}$$

وهي نفس النتيجة التي حصل عليها لشدة المجال الناشئ عن شحنة نقطية المعادلة (3-8) ومنها نستنتج أن شدة المجال الكهربائي في نقاط تقع خارج كرة مشحونة (غير موصلة) هي ذاتها كما لو كانت الشحنة متجمعة في مركز الكرة.

2- في حالة الكرة الموصلة:

المجال خارج كرة موصلة مشحونة يعطى بالمعادلة (31-8) طالما إن الشحنة باجمعها تبقى داخل سطح كاوس أيضاً وان E عمودي على كل نقطة من نقاط سطح كاوس بسبب التناظر ألشعاعي للمجال الذي يجعل θ تساوي صفراً .

مثال (8-15)

في المثال السابق، ما شدة المجال الكهربائي الناشئ عن الجسمين الكرويين في نقطة o مثلاً، تقع على مسافة r^1 داخل الكرتين؟

الحل :

نختار سطح كاوس بشكل كرة نصف قطرها r' بحيث تكون نقطة o واقعة على هذا السطح (انظر الشكل 8-26).

1- في حالة الكرة غير الموصلة :

بتطبيق قانون كاوس نجد .

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

حيث q_{tot} تمثل ذلك الجزء من الشحنة الموجودة داخل سطح كاوس. عندئذ فان باقي الشحنة q الواقع خارج سطح كاوس لا يؤثر على شدة المجال الكهربائي عند نقاط هذا السطح، وعليه فان:

$$q_{tot} = \left(\frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r'^3\right) = q\left(\frac{r'^3}{a^3}\right)$$

بالتعويض عن q_{tot} في معادلة كاوس ينتج:

$$ES = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(\frac{r'^3}{a^3}\right)$$

$$E(4\pi r'^2) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r'^3}{a^3}$$

ومنها

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr'}{a^3} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(32\text{-}8)$$

نستنتج من هذه المعادلة أن مقدار E في مركز الشحنة الكروية (الحالة $r'=0$) يساوي صفراً. أما مقدار E على سطح الشحنة الكروية (الحالة $r'=a$)هي

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}$$

2- في حالة الكرة الموصلة :

إن شدة المجال الكهربائي E في نقطة واقعة داخل الكرة تساوي صفراً.

مثال (8–16)

استعمل قانون كاوس لإثبات أن شدة المجال الكهربائي في أية نقطة مثل p (الشكل 8-27) بين لوحين متوازيين مشحونين بشحنتين متساويتين في المقـــدار ومختلفـــتين في الإشارة المسافة بينهما صغيرة بالمقارنة مع بعديهما تساوي $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

الحل :

طالما المسافة بين اللوحين صغيرة بالمقارنة مع بعديهما فـــيمكن إهمـــال تـــأثير الحافتين واعتبار المجال الكهربائي كلياً منتظماً بين اللوحين.إن أفضل سطح كاوسى نختاره لهذه المسألة هو شكل متوازي المستطيلات بحيث تكون أحدى قاعدتيه داخـــل اللـــوح الموجب والأخرى في الفراغ بين اللوحين. نقسّم متوازي المستطيلات إلى أربعة أقـــسام وهي s_1 و s_2 و s_3 و s_4 ثم نطبِّق علاقة كاوس على كل هذه الأســطح لحـــساب E فيكون:

$$\oint_s E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} E\cos\theta ds + \int_{s_2} E\cos\theta ds + \int_{s_3} E\cos\theta ds + \int_{s_4} E\cos\theta ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_{s_1} (0)\cos 0 ds + \int_{s_2} E\cos 90 ds + \int_{s_3} E\cos 90 ds + \int_{s_4} E\cos 0 ds = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

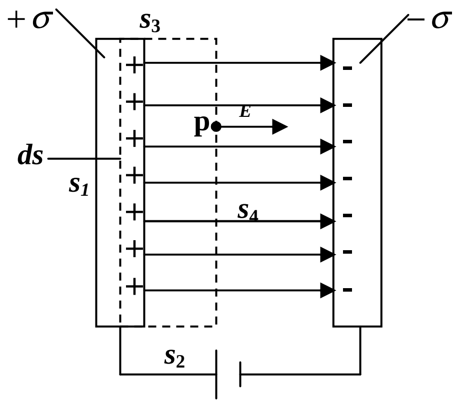
$$0+0+0+EA = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

الشحنة الكلية داخل سطح كاوس (متوازي المستطيلات) q_{tot} تساوي σA

$$\therefore EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

ومنها

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \text{.........................(33-8)}$$



الشكل (8-27)

والسؤال الذي يتبادر إلى الأذهان هو لماذا طبق سطح كاوس علــى اللــوح الموجب الشحنة وعدم الأخذ بنظر الاعتبار الشحنات السالبة على اللوح الأخــر عنــد حساب E. ذلك أن هذه الشحنات سوف تؤثر على الشحنات الموجبة في اللوح الأخر وتجعلها تتجمع على سطح واحد فقط وهو السطح المقابل. وهنا لابد أن نذكر بأنه لــو اخترنا سطح كاوس بحيث يقطع اللوح السالب بدل اللوح الموجب لحصلنا على النتائج نفسها.

مثال (8–17)

إذا علمت أن ثلاثين خطا من خطوط القوة تخرج من سطح مغلق وتدخل فيه خمسة خطوط كما يرى في الشكل (8–28). فإذا كان كل خط يمثــل $36\pi\times10^9$ خط يدخل أو يخرج من السطح. فما مقدار الشحنة الكلية التي يجب إن يحتضنها هــذا السطح؟ حدّد نوعها.

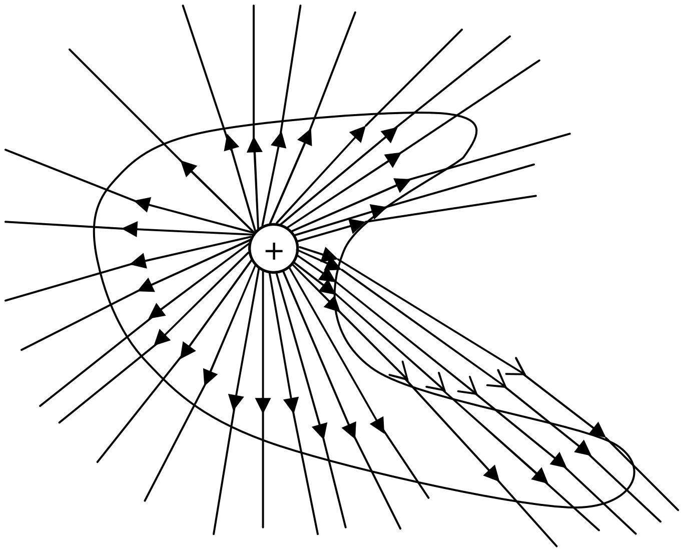
الحل :

$$\phi = \phi_{ext} + \phi_{\text{int}} = 30 - 5 = 25Nm^2C^{-1}$$

وبهــــذا تكـــــون محـــــصلة عــــدد الخطـــــوط الخارجــــة مـــــن الـــــسطح ($25\times36\pi\times10^9 = 2827.4\times10^9$) خط، وبذا فإن مقدار الشحنة الكلية يساوي:

$$q = \phi\varepsilon_0$$
$$= 2827.4\times10^{9}\times8.85\times10^{-12}$$
$$= 25.022C$$

وهي موجبة الشحنة.



الشكل (8-28).

مثال (8-18)

إذا علمت أن شدة المجال الكهربائي الناشئ عن كرة موصلة مشحونة عند نقطة قريبة من السطح تساوي $10^4\,NC^{-1}$. احسب الكثافة السطحية لشحنة الكرة.

الحل :

لدينا

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \sigma = E\varepsilon_0 = 10^4\times8.85\times10^{-12} = 8.85\times10^{-8}\,C/m^2$$

التمارين Exercises

(8-1) : جدْ شدة المجال الكهربائي عند مسافة $0.1m$ من شحنة قدرها $2nC$.

(8-2) : كيف يمكنك التأكد من وجود مجال كهربائي في منطقة ما تجريبياً؟ ثم اثبت ان شدة المجال تكون دائماً في اتجاه عمودي على سطح الجسم الموصل.

(8-3) : انطلق إلكترون في منطقة يمتد المجال الكهربائي فيها باتجاه المحور x الموجب وشدته $3600NC^{-1}$. جدْ مقدار واتجاه تسارع الإلكترون، مع العلم ان كتلة الإلكترون $m_e = 9.1\times10^{-31}kg$.

(8-4) : تتأثر كرة صغيرة تحمل شحنة مقدارها $-4\times10^{-13}C$ بقوة نحو الشرق مقدارها $10^{-9}N$ بسبب شحنتها عندما تعلق من نقطة معينة في الفضاء. ما مقدار المجال الكهربائي E واتجاهه في تلك النقطة؟

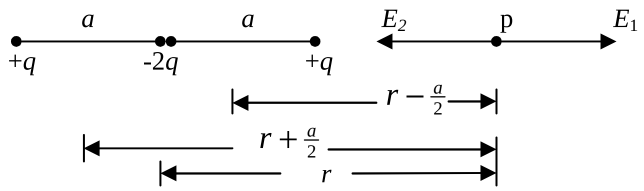
(8-5) : تحمل قشرة كروية رقيقة عازلة نصف قطرها R شحنة مقدارها Q موزعة بانتظام على سطح القشرة. ما المجال الكهربائي E عند مركز القشرة.

(8-6) : وضعت شحنتان متساويتان في المقدار وبإشارتين متعاكستين على امتداد المحور x عند $x=b$ و $x=-b$. اثبت ان المجال الكهربائي الناشئ عن هاتين الشحنتين عند نقطة على المحور y سيكون في اتجاه موازٍ لمحور x ومقدارها يعطى بالمعادلة.

$$E = 2kqb/(y^2+b^2)^{3/2}$$

(8-7) : لو أن الشحنتين في المسألة السابقة كانت لهما نفس الإشارة فماذا قد يكون اتجاه المجال الكهربائي ومقداره؟

(8-8): لو وضع اثنان من ثنائية الأقطاب كما في الشكل (8-29) ، لتكوِّن ما يسمى رباعي القطب. والمطلوب إيجاد شدة المجال الكهربائي في النقطة p الواقعة على محوره ، وعلى بعد قدره r عن مركزه بحيث ان قيمة r اكبر بكثير من قيمة a.



الشكل (8-29)

(8-9) : استنتج قانون كولوم من قانون كاوس.

(8-10) : احسب شدة المجال الكهربائي في نقطة تبعد مسافة d عن محور سلك رفيع مستقيم طويل جداً، يحمل شحنة موزعة بصورة منتظمة على طوله كثافتها تساوي $\lambda \frac{C}{m}$ مستعملا .1- قانون كولوم، 2- قانون كاوس.

(8-11) : لوحان معدنيان يحملان شحنتين متساويتين بالمقدار ومتعاكستين بالإشارة المسافة بينهما $1cm$. فإذا كان المجال الكهربائي المتكون في المنطقة بين اللوحين $50NC^{-1}$ ومسافة كل من اللوحين تساوي $100cm^2$. جد شحنة كل من اللوحين.

(8-12) : جد فيض المجال الكهربائي خلال السطح الاسطواني المشار إليه في المثال (8-12) عندما يكون محوره عمودياً على المجال.

(8-13) : شحنة موجبة موزعة بشكل كرة نصف قطرها $3m$ بحيث ان كثافتها الحجمية عند أية نقطة داخل الكرة تعتمد على البعد r من مركزها حسب المعادلة : $\rho = 10^{-7} r \frac{C}{m^3}$. ما قيمة:1- الشحنة، 2- E عند نقطة تبعد $4m$ عن المركز، 3- ما مقدار E عند نقطة تبعد $2m$ عن المركز.

(8-14) : إذا وضع سطح خيالي بشكل نصف كرة في مجال كهربائي منتظم بحيث كان محوره موازياً للمجال. جدْ الفيض الكهربائي خلال هذا السطح، إذا علم ان نصف قطره R وان شدة المجال E.

(8-15) : كرة صغيرة كتلتها $10^{-3}gm$ وتحمل شحنة مقدارها $2 \times 10^{-8}C$ ، معلقة بسلك حريري يصنع زاوية 30^o مع صفيحة مستوية موصلة كبيرة احسب كثافة الشحنة السطحية للصفيحة.

(8-16) : كرة صغيرة كتلتها $1gm$ تحمل شحنة $3 \times 10^{-9}C$، ربطت بإحدى نهايتي خيط عازل وثبتت النهاية الأخرى للخيط إلى صفيحة موصلة كبيرة وعمودية تحمل شحنة بكثافة سطحية تساوي $25 \times 10^{-7}C/m^2$. جد الزاوية التي يصنعها الخيط مع العمود.