حركة المجموعات المادية المتماسكة و الأجسام الصلبة

لقد بينا سابقاً أن الجسم الصلب هو مجموعة مادية متماسكة, مما يعني أن البعد بين أي نقطتين من نقاطه يبقى ثابتاً دائماً. إلا أن الجسم الصلب يمتاز على المجموعة المتماسكة في أنه يشكل وسطاً مستمراً و متصلاً, أي أنه يمكن وصل أي نقطتين من نقاط الجسم الصلب بمنحني يقع بأكمله داخل هذا الجسم.

تعيين مجموعة مادية متماسكة و جسم صلب في الفراغ:

تتعين المجموعة المادية في الحالة العامة بتعيين جميع نقاط هذه المجموعة, و بالتالي فإن الوسطاء المستخدمة لتعيين نقاط المجموعة هي ذاتها الوسطاء المستخدمة في تعيين المجموعة المادية. أما في حال كانت المجموعة المادية متماسكة (أو جسماً صلباً) فإن هذا يفرض قيوداً على هذه الوسطاء تتمثل في كون البعد بين أي نقطتين من نقاط المجموعة (أو الجسم) ثابتاً دائماً.

مبرهنة: تتعين المجموعة المادية المتماسكة (أو الجسم الصلب) في الحالة العامة بتعيين موضع ثلاث نقاط من المجموعة (أو الجسم) لا تقع على استقامة واحدة.

الإثبات: لنفرض أن S مجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب) منسوبة إلى جملة إحداثية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$ في الفراغ, و لنفرض أننا نعلم مواضع ثلاث نقاط $A\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $B\left(x_2,y_2,z_2\right)$ و $C\left(x_3,y_3,z_3\right)$ من هذه المجموعة (أو الجسم) لا تقع على استقامة واحدة. و لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة ما من هذه المجموعة (أو الجسم) يطلب تعيين موضعها.

بما أن المجموعة المادية متماسكة فإن بعد النقطة $M\left(x,y,z\right)$ عن كل نقطة من النقاط A,B,C هو مقدار ثابت, أي أن

$$\left\|\overrightarrow{AM}\right\|=d_1 \quad , \quad \left\|\overrightarrow{BM}\right\|=d_2 \quad , \quad \left\|\overrightarrow{CM}\right\|=d_3$$

إن جملة المعادلات السابقة هي جملة ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل x,y,z, يمكن كتابتها بالشكل

$$\begin{cases}\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2+\left(z-z_1\right)^2=d_1^2\\ \left(x-x_2\right)^2+\left(y-y_2\right)^2+\left(z-z_2\right)^2=d_2^2\\ \left(x-x_3\right)^2+\left(y-y_3\right)^2+\left(z-z_3\right)^2=d_3^2\end{cases}$$

و بما أن النقاط A,B,C لا تقع على استقامة واحدة, فإن المعادلات السابقة مستقلة و تكفي لتعيين قيم الوسطاء المجهولة x,y,z. و بالتالي نستنتج أنه يكفي لتعيين موضع أي نقطة من نقاط مجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب) تعيين مواضع ثلاث نقاط من هذه المجموعة (أو الجسم) لا تقع على استقامة واحدة.

نتيجة: بما أن كل نقطة في الفراغ تتعين بثلاثة وسطاء في الحالة العامة, فإننا نستنتج حسب المبرهنة السابقة أنه يلزم لتعيين المجموعة المادية المتماسكة (أو الجسم الصلب) في الحالة العامة معرفة تسعة وسطاء هي الوسطاء التي تعين النقاط الثلاثة A,B,C من المجموعة (أو الجسم) التي لا تقع على استقامة واحدة. إلا أن هذه الوسطاء التسعة ليست مستقلة و إنما ترتبط مع بعضها بثلاث علاقات تمثل البعد الثابت بين أي نقطتين منها, أي أن

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=l_1 \quad , \quad \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=l_2 \quad , \quad \left\|\overrightarrow{CA}\right\|=l_3$$

و بالتالي نستنتج أن عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين المجموعة المادية المتماسكة (أو الجسم الصلب) في الحالة العامة هو ستة وسطاء ($9-3=6$), أي أن الجسم الطليق في الفراغ يملك ست درجات من الحرية في الحالة العامة.

حالات خاصة: يمكن بسهولة بنفس الأسلوب السابق إثبات صحة القضايا التالية

1. في حال علمنا موضع نقطة واحدة من الجسم الصلب فإنه يكفي لتعيين هذا الجسم في الفراغ معرفة ثلاث وسطاء مستقلة في الحالة العامة.
2. في حال علمنا موضع نقطتين من نقاط الجسم الصلب فإنه يكفي لتعيين هذا الجسم في الفراغ معرفة وسيط مستقل واحد فقط في الحالة العامة.

النظرية الأساسية في حركة المجموعات المادية المتماسكة:

الشرط اللازم و الكافي لكي تتحرك مجموعة مادية كمجموعة مادية متماسكة هو أن يتساوى مسقطا متجهي السرعة لأي نقطتين من هذه المجموعة على المستقيم الواصل بينهما.

الإثبات:

<u>لزوم الشرط:</u> لنفرض أن S هي مجموعة مادية متماسكة منسوبة إلى جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و نظامية $OXYZ$ ثابتة في الفراغ, و لتكن A,B أي نقطتين مختلفتين من نقاط هذه المجموعة. بما أن المجموعة متماسكة فإن البعد بين النقطتين A,B ثابت, و بالتالي فإن

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=Const \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}^2=Const \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}^2=0 \quad \Rightarrow \quad 2\overrightarrow{AB}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\frac{d}{dt}\left(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}-\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right)=0$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{V_B}-\overrightarrow{V_A}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_B}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_A}=0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_B}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{V_A} \quad \Rightarrow$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_B}\right)=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_A}\right) \quad \Rightarrow$$

$$pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_B}\right)=pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_A}\right) \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\neq 0$$

حيث أن $pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_B}\right)$ هو مسقط المتجه $\overrightarrow{V_B}$ على المتجه $\overrightarrow{AB}$ وكذلك $pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_A}\right)$ هو مسقط المتجه $\overrightarrow{V_A}$ على المتجه $\overrightarrow{AB}$, و نلاحظ أنهما متساويان كما هو مطلوب.

<u>كفاية الشرط:</u> بفرض أن مسقطي متجهي السرعة لأي نقطتين من المجموعة المادية S على المستقيم الواصل بينهما متساويان, فإن المطلوب إثبات أن المجموعة المادية S متماسكة.

لإثبات ذلك نأخذ أي نقطتين مختلفتين A,B من المجموعة المادية S, فيكون حسب الفرض

$$pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_B}\right)=pro_{\overline{AB}}\left(\overrightarrow{V_A}\right) \quad ; \quad \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\neq 0$$

و بالرجوع عكسياً في العلاقات الموجودة في لزوم الشرط سنجد أن $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=Const$, مما يعني أن البعد بين النقطتين A,B هو مقدار ثابت دائماً. و بالتالي نستنتج أن المجموعة المادية S هي مجموعة مادية متماسكة.

الدراسة التحليلية لحركة مجموعة متماسكة أو جسم في الفراغ:

لتكن S مجموعة متماسكة (أو جسماً) منسوباً إلى جملة إحداثية ديكارتية ثابتة $R:OXYZ$ متعامدة و مباشرة و نظامية في الفراغ. لدراسة حركة هذه المجموعة (أو الجسم) تحليلياً نعتبر جملة إحداثية ديكارتية متماسكة مع هذه المجموعة (أو الجسم) متعامدة ومباشر و نظامية $R_S:O_SX_SY_SZ_S$ تتحرك مع المجموعة (أو الجسم) كيفما تحركت في الفراغ و كأنها قطعة من المجموعة (أو الجسم). و بالتالي تؤول دراسة حركة المجموعة (أو الجسم) إلى دراسة حركة الجملة الإحداثية المتماسكة R_S بالنسبة للجملة الثابتة R.

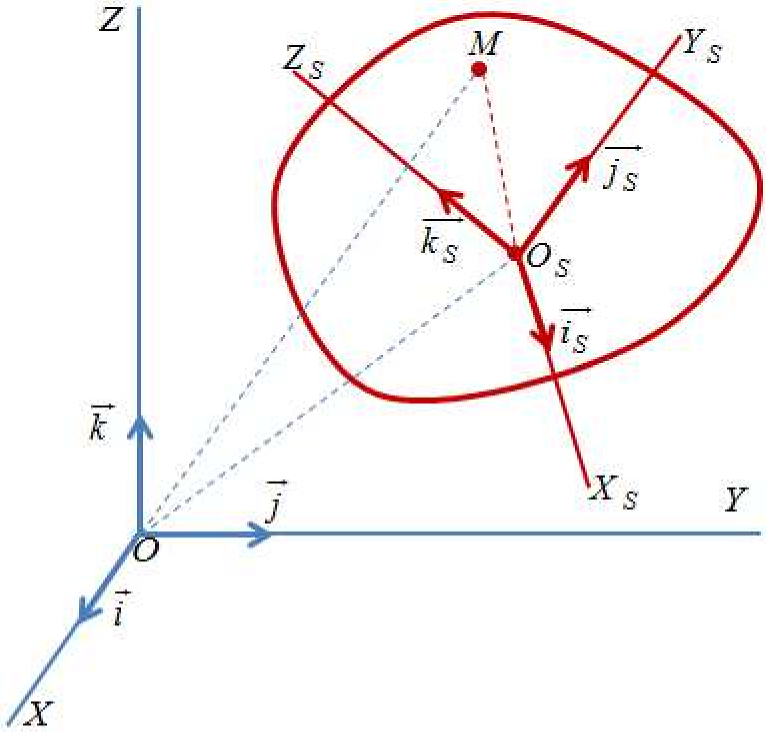
لنرمز لمتجهات الواحدة الموافقة لمحاور الجملة الثابتة R بالرموز $\vec{k}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{i}$, ولنرمز لمتجهات الواحدة الموافقة لمحاور الجملة المتماسكة R_S بالرموز $\overrightarrow{k_S}\ ,\ \overrightarrow{j_S}\ ,\ \overrightarrow{i_S}$. و لنضع

$$\overrightarrow{OO_S}=x\left(O_S\right)\vec{i}+y\left(O_S\right)\vec{j}+z\left(O_S\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{i_S}=\alpha_1\vec{i}+\beta_1\vec{j}+\gamma_1\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{j_S}=\alpha_2\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\gamma_2\vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{k_S}=\alpha_3\vec{i}+\beta_3\vec{j}+\gamma_3\vec{k}$$

لتكن M نقطة ما من المجموعة (أو الجسم), و لنضع

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k} \quad , \quad \overrightarrow{O_S M} = x_s\ \overrightarrow{i_S} + y_S\ \overrightarrow{j_S} + z_S\ \overrightarrow{k_S}$$



نعلم حسب علاقة شال أن

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M} \qquad (1)$$

و بإسقاط العلاقة السابقة على محاور الجملة الثابتة $OXYZ$ نجد أن

$$\begin{cases} OX \ : \ x = x(O_S) + \alpha_1 x_S + \alpha_2 y_S + \alpha_3 z_S \\ OY \ : \ y = y(O_S) + \beta_1 x_S + \beta_2 y_S + \beta_3 z_S \\ OZ \ : \ z = z(O_S) + \gamma_1 x_S + \gamma_2 y_S + \gamma_3 z_S \end{cases}$$

مع ملاحظة أن x_S, y_S, z_S تمثل إحداثيات النقطة M في الجملة المتماسكة R_S و هي قيم ثابتة, يتضح من المعادلات السابقة أنه لتعيين النقطة M يلزم تعيين إثني عشر وسيطاً هي

$$x(O_S), y(O_S), z(O_S) \quad \& \quad \alpha_i \ , \ \beta_i \ , \ \gamma_i \quad ; \quad i = 1,2,3$$

إلا أن هذه الوسطاء ليست مستقلة لكون جيوب تمام توجيه محاور الجملة المتماسكة R_S ترتبط فيما بينها بالعلاقات الستة التالية

$$\left(\overrightarrow{i_S}\right)^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \quad , \quad \overrightarrow{i_S} \cdot \overrightarrow{j_S} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

$$\left(\overrightarrow{j_S}\right)^2=\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \quad , \quad \overrightarrow{j_S}\cdot\overrightarrow{k_S}=\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0$$

$$\left(\overrightarrow{k_S}\right)^2=\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \quad , \quad \overrightarrow{i_S}\cdot\overrightarrow{k_S}=\alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3=0$$

و بالتالي يبقى لدينا ستة وسطاء مستقلة فقط $(12-6=6)$ لدراسة الحركة, كما هو متوقع حسب مناقشة سابقة.

<u>**حقل السرع:**</u> باشتقاق طرفي العلاقة (1) بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO_S}+\overrightarrow{O_SM}\right)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S}+\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM} \qquad (*)$$

بملاحظة أن $\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}$ هو متجه سرعة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة R, لذلك سنضع

$$\vec{V}(M/R)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\frac{dx}{dt}\,\vec{i}+\frac{dy}{dt}\,\vec{j}+\frac{dz}{dt}\,\vec{k}=x^{\bullet}\,\vec{i}+y^{\bullet}\,\vec{j}+z^{\bullet}\,\vec{k} \qquad (2)$$

و بملاحظة أن $\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S}$ هو متجه سرعة النقطة O_S بالنسبة للجملة الثابتة R, لذلك سنضع

$$\vec{V}(O_S/R)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S}=x^{\bullet}(O_S)\,\vec{i}+y^{\bullet}(O_S)\,\vec{j}+z^{\bullet}(O_S)\,\vec{k} \qquad (3)$$

و لحساب $\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM}$ و الذي يمثل مشتق متجه متماسك مع المجموعة المتماسكة أو الجسم, نلاحظ أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM}=\frac{d}{dt}\left(x_s\,\overrightarrow{i_S}+y_S\,\overrightarrow{j_S}+z_S\,\overrightarrow{k_S}\right)=x_s\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}+y_S\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}+z_S\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S} \qquad (4)$$

بما أن المتجه $\overrightarrow{i_S}$ هو متجه واحدة (ثابت الطول) فإن المشتق الزمني لهذا المتجه يعامده, و بالتالي يمكن أن نكتب

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{j_S}+\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{k_S}$$

و بما أن $\overrightarrow{k_S}=\overrightarrow{i_S}\times\overrightarrow{j_S}$ و $\overrightarrow{J_S}=\overrightarrow{k_S}\times\overrightarrow{i_S}$, تصبح العلاقة السابقة بالشكل

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{k_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)+\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{i_S}\times\overrightarrow{j_S}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{k_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)-\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{j_S}\times\overrightarrow{i_S}\right) \qquad (5)$$

بما أن $\overrightarrow{k_S}\cdot\overrightarrow{i_S}=0$ و باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\cdot\overrightarrow{i_S}+\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=-\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\cdot\overrightarrow{i_S} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=-\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}$$

و بالتالي تصبح العلاقة (5) بالشكل

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{k_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\right)\left(\overrightarrow{j_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)$$

يمكن إضافة المقدار المعدوم $\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}\right)\left(\overrightarrow{i_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)=\vec{0}$ إلى الطرف الأيمن من العلاقة السابقة, لتصبح بالشكل

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}\right)\left(\overrightarrow{i_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\right)\left(\overrightarrow{j_S}\times\overrightarrow{i_S}\right)+\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\left(\overrightarrow{k_S}\times\overrightarrow{i_S}\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\left[\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}\right)\overrightarrow{i_S}+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\right)\overrightarrow{j_S}+\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{k_S}\right]\times\overrightarrow{i_S}$$

فإذا عرفنا المتجه

$$\vec{\omega}=\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}\right)\overrightarrow{i_S}+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\right)\overrightarrow{j_S}+\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{k_S} \qquad (6)$$

تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{i_S}$$

بنفس الأسلوب السابق يمكن أن نثبت أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{j_S} \quad , \quad \frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{k_S}$$

و تصبح العلاقة (4) بالشكل

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_S M}=x_s\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{i_S}\right)+y_S\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{i_S}\right)+z_S\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{i_S}\right)=\vec{\omega}\times\left(x_s\,\overrightarrow{i_S}+y_S\,\overrightarrow{j_S}+z_S\,\overrightarrow{k_S}\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_S M} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_S M} \qquad (7)$$

و بتعويض العلاقات (2) و (3) و (7) في العلاقة ($*$), نجد القانون الأساسي لسرع المجموعات المادية المتماسكة و الأجسام الصلبة الذي يكتب بالشكل

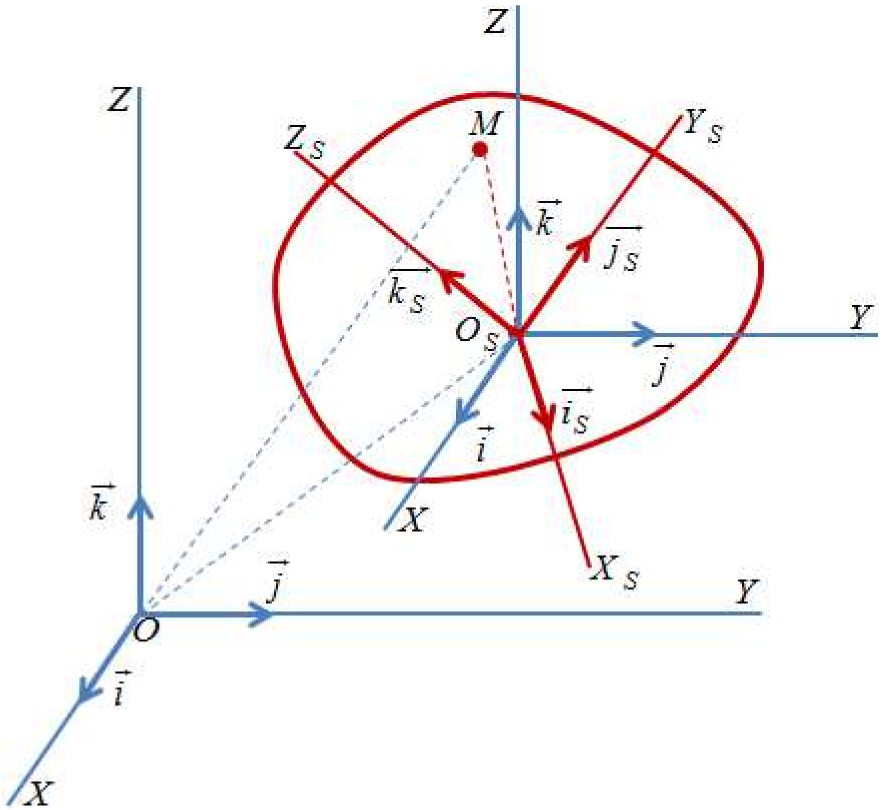
$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \vec{V}(O_S/R) + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_S M}}$$

نسمي المتجه $\vec{\omega}$ المعرف في العلاقة (6) متجه دوران المجموعة المادية المتماسكة أو الجسم الصلب حول نقطة O_S منه, و نرمز لمركبات متجه الدوران في الجملتين الثابتة و المتحركة بالشكل

$$\vec{\omega} = p\,\vec{i} + q\,\vec{j} + r\,\vec{k} \quad , \quad \vec{\omega} = p_S\,\vec{i_S} + q_S\,\vec{j_S} + r_S\,\vec{k_S}$$

ملاحظة (1): تبين علاقة السرعة الأخيرة التي حصلنا عليها أنه يمكن حساب متجه سرعة أي نقطة M من المجموعة المادية المتماسكة أو الجسم الصلب في حال علمنا متجه سرعة نقطة أخرى O_S من المجموعة المتماسكة أو الجسم إضافة إلى متجه دوران المجموعة أو الجسم حول النقطة O_S.

ملاحظة (2): باتخاذ جملة إحداثية $R_{O_S}: O_S XYZ$ مركزها النقطة O_S و تتحرك مع هذه النقطة بحيث تبقى محاور الجملة R_{O_S} بشكلٍ دائم موازية لمحاور الجملة الثابتة R (كما هو مبين في الشكل المجاور), فإن المقدار $\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_S M}$ المعرف بالعلاقة (7) يمثل السرعة النسبية للنقطة M بالنسبة للجملة الإحداثية R_{O_S}, لذلك سنكتب دائماً



$$\vec{V}\left(M/R_{O_S}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_S M} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_S M}$$

ملاحظة (3): من أجل أي متجه $\vec{A}$ متماسك مع المجموعة المادية المتماسكة أو الجسم الصلب يكون

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{A}$$

حقل التسارعات: إذا رمزنا لمتجه التسارع بالرمز $\vec{\Gamma}$, فإننا نعلم أن

$$\vec{\Gamma}(M/R)=\frac{d}{dt}\vec{V}(M/R)=\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(O_S/R)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\vec{V}(O_S/R)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM}$$

$$=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)$$

فإذا عرفنا متجه التسارع الدوراني للمجموعة المتماسكة أو الجسم بالعلاقة

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

يصبح القانون الأساسي لتسارعات نقاط المجموعات المادية المتماسكة و الأجسام الصلبة بالشكل التالي

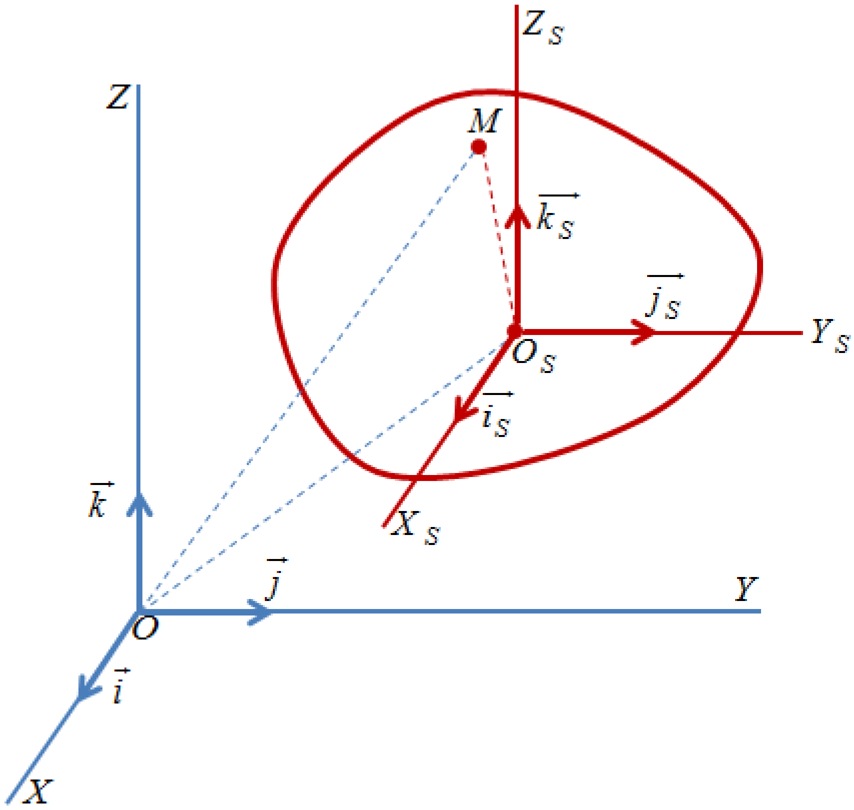
$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/R)=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)}$$

بعض الحركات البسيطة للمجموعات المادية المتماسكة و الأجسام الصلبة:

1. **الحركة الإنسحابية:** نقول عن حركة مجموعة مادية متماسكة أو جسم صلب S أنها حركة إنسحابية إذا و فقط إذا بقي كل متجه متماسك مع المجموعة أو الجسم مسايراً لمتجهٍ ثابت في الفراغ طيلة الحركة.

في هذه الحالة وبما أن متجهات الواحدة $\overrightarrow{i_S}$, $\overrightarrow{j_S}$, $\overrightarrow{k_S}$ لمحاور الجملة الإحداثية $O_SX_SY_SZ_S$ المتماسكة مع المجموعة أو الجسم ستبقى مسايرة لمتجهات ثابتة في الفراغ, فيمكن اعتبار متجهات الواحدة الثابتة في الفراغ هي متجهات الواحدة $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ للجملة الثابتة $OXYZ$. و تصبح الجملة المتماسكة مع الجسم في هذه الحالة هي الجملة O_SXYZ و يكون

$$\overrightarrow{i_S}=\vec{i}\quad,\quad\overrightarrow{j_S}=\vec{j}\quad,\quad\overrightarrow{k_S}=\vec{k}$$



و بما أن موضع أي نقطة M من نقاط المجموعة أو الجسم بالنسبة للجملة المتماسكة $O_S X_S Y_S Z_S$ معلوم من خلال المتجه الثابت $\overrightarrow{O_S M}$ المتماسك مع المجموعة أو الجسم, فإن موضع النقطة يتعين و بشكل وحيد من خلال متجه الموضع $\overrightarrow{OO_S}$ للنقطة O_S في الجملة الثابتة $OXYZ$ و ذلك لأن

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M}$$

و بالتالي نستنتج أن موضع المجموعة المادية المتماسكة أو الجسم في الحركة الإنسحابية يتعين بتعيين موضع نقطة واحدة منه فقط, مما يعني أن وسطاء حركة النقطة O_S هي ذاتها وسطاء حركة المجموعة المادية المتماسكة أو الجسم الصلب S.

حقل السرع: بما أن $\overrightarrow{O_S M} = Const$ و باشتقاق طرفي العلاقة $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M}$ بالنسبة للزمن نجد أن

$$\vec{V}(M) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_S M}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_S M} = \vec{V}(O_S) + \vec{0} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O_S) \quad ; \quad \forall M \in S$$

تبين العلاقة السابقة أن متجهات سرع المجموعة المتماسكة أو الجسم تبقى متسايرة فيما بينها و تساير متجه سرعة النقطة O_S في أي لحظة زمنية. و تعتبر هذه الخاصة خاصة مميزة للحركة الإنسحابية لمجموعة مادية أو جسم

صلب, أي أنه في حال وجدت مجموعة مادية (ليست بالضرورة متماسكة) أو جسم صلب بحيث تبقى متجهات سرع جميع نقاطها متسايرة في أي لحظة زمنية فإن هذه الجملة بالضرورة تكون متماسكة و تتحرك حركة إنسحابية.

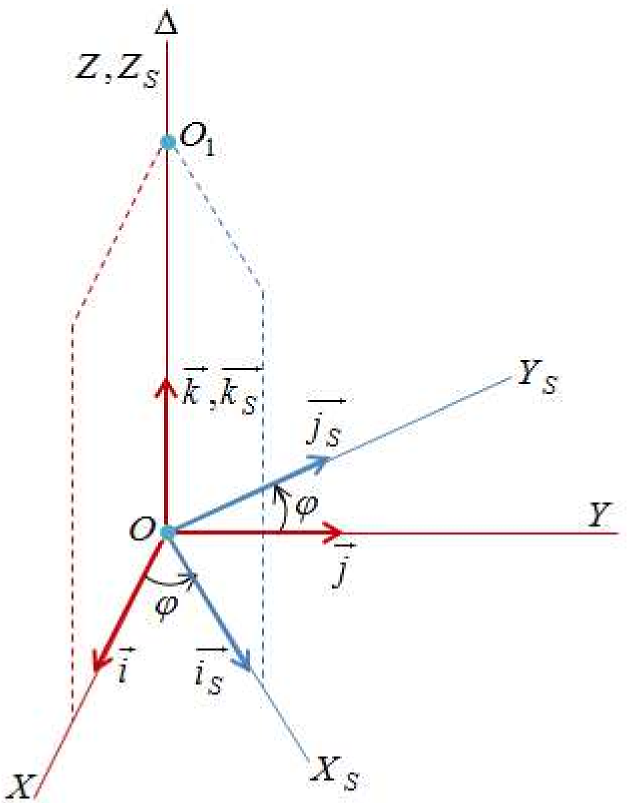
حقل التسارعات: باشتقاق طرفي عبارة السرعة السابقة نجد أن

$$\vec{\Gamma}(M)=\frac{d}{dt}\vec{V}(M)=\frac{d}{dt}\vec{V}(O_S)=\vec{\Gamma}(O_S) \quad ; \quad \forall M \in S$$

تبين هذه العلاقة أن متجهات تسارعات نقاط المجموعة المتماسكة أو الجسم تبقى متسايرة فيما بينها و تساير متجه تسارع النقطة O_S في أي لحظة زمنية. لا تعتبر هذه الخاصة مميزة للحركة الانسحابية لمجموعة مادية في حال كانت غير متماسكة إلا أنها تعتبر صفة مميزة للحركة الانسحابية لمجموعة مادية متماسكة أو جسم صلب.

ملاحظة: لاحظ أن متجه دوران المجموعة المتماسكة أو الجسم يكون معدوماً في الحركة الانسحابية (أثبت ذلك), و أن دراسة حركة المجموعة أو الجسم تؤول إلى دراسة حركة نقطة واحدة من المجموعة أو الجسم.

2. **الحركة الدورانية حول محور ثابت:** نقول عن مجموعة مادية متماسكة أو جسم صلب أنها تتحرك حركة دورانية حول محور ثابت إذا تحركت المجموعة أو الجسم بحيث تبقى نقطتان متماسكتان مع المجموعة أو الجسم ثابتتين طيلة الحركة, و نسمي المحور الثابت المار من النقطتين الثابتتين محور دوران المجموعة المتماسكة أو الجسم.



لنعتبر و بدون المساس بعمومية المسألة أن إحدى النقطتين الثابتتين من الجسم هي النقطة O المنطبقة على النقطة O_S و هي مبدأ الإحداثيات في الجملتين الثابتة $OXYZ$ و المتماسكة $OX_SY_SZ_S$ و أن محور الدوران الثابت Δ هو المحور OZ المنطبق على المحور OZ_S في هذه الحالة, و بالتالي فإن النقطة الثابتة الثانية O_1 من الجسم تقع على المحور OZ (كما هو مبين في الشكل المجاور).

نلاحظ أنه يكفي لتعيين وضع الجملة المتماسكة مع الجسم بالنسبة للجملة الثابتة في أي لحظة زمنية تعيين زاوية الدوران φ المبينة في الشكل و الكائنة بين المستوي OX_SZ المتماسك مع الجسم و المستوي OXZ الثابت, و بالتالي فإن الجسم يملك درجة حرية واحدة.

بملاحظة أن

$$\vec{i_S}=Cos\varphi\ \vec{i}+Sin\varphi\ \vec{j} \quad , \quad \vec{j_S}=-Sin\ \vec{i}+Cos\varphi\ \vec{j} \quad , \quad \vec{k_S}=\vec{k}$$

فإننا نستنتج أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}=-Sin\varphi\ \varphi^{\bullet}\ \vec{i}+Cos\varphi\ \varphi^{\bullet}\ \vec{j}=\varphi^{\bullet}\left(-Sin\varphi\ \vec{i}+Cos\varphi\ \vec{j}\right)=\varphi^{\bullet}\ \overrightarrow{j_S}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}=-Cos\varphi\ \varphi^{\bullet}\ \vec{i}-Sin\varphi\ \varphi^{\bullet}\ \vec{j}=-\varphi^{\bullet}\left(Cos\varphi\ \vec{i}+Sin\varphi\ \vec{j}\right)=-\varphi^{\bullet}\ \overrightarrow{i_S}$$

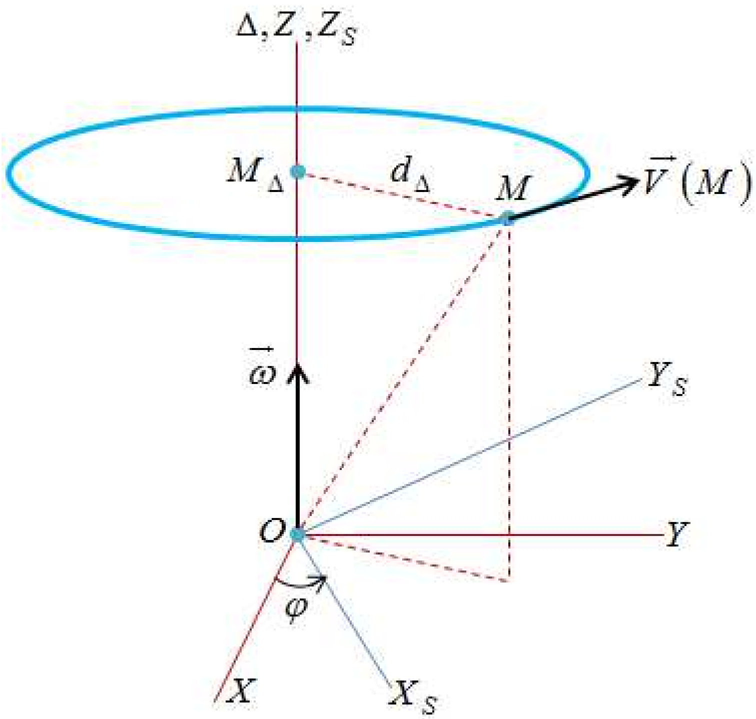
$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}=\vec{0}$$

و بالتالي يصبح متجه دوران الجسم في هذه الحالة بالشكل

$$\vec{\omega}=\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}\right)\overrightarrow{i_S}+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}\right)\overrightarrow{j_S}+\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{k_S}$$

$$=-\varphi^{\bullet}\left(\overrightarrow{k_S}\cdot\overrightarrow{i_S}\right)\overrightarrow{i_S}+\left(\overrightarrow{i_S}\cdot\vec{0}\right)\overrightarrow{j_S}+\varphi^{\bullet}\left(\overrightarrow{j_S}\cdot\overrightarrow{j_S}\right)\overrightarrow{k_S}=\varphi^{\bullet}\ \overrightarrow{k_S}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\vec{\omega}=\varphi^{\bullet}\ \overrightarrow{k_S}=\varphi^{\bullet}\ \vec{k}}$$

أي أن متجه دوران الجسم هو متجه ثابت المنحى منحاه هو منحى محور الدوران الثابت, أما اتجاهه فيتحدد حسب قاعدة اليد اليمنى حيث نجعل أصابع اليد تلتف مع زاوية الدوران φ فيكون اتجاه متجه الدوران في اتجاه إبهام اليد, أما طويلة متجه الدوران فتساوي المشتق الزمني لزاوية الدوران φ.



حقل السرع: لتكن M نقطة من الجسم و لنرمز لمسقط هذه النقطة على محور الدوران Δ بالرمز M_Δ, و بملاحظة أن المتجه $\overrightarrow{OM}$ هو متجه متماسك مع الجسم يكون

$$\vec{V}(M)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}$$

$$=\vec{\omega}\times\left(\overrightarrow{OM_\Delta}+\overrightarrow{M_\Delta M}\right)$$

$$=\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM_\Delta}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_\Delta M}\quad\Rightarrow$$

وبما أن $\vec{\omega}\ //\ \overrightarrow{OM_\Delta}$, فإن $\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM_\Delta}=\vec{0}$ و يكون

$$\vec{V}(M)=\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_\Delta M}$$

و بملاحظة أن $\vec{\omega}\perp\overrightarrow{M_\Delta M}$, فإننا نستنتج أن

$$V\left(M\right)=\left\|\vec{V}\left(M\right)\right\|=\left\|\vec{\omega}\right\|\ \left\|\overrightarrow{M_{\Delta}M}\right\|\ Sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\omega\ d_{M}$$

حيث أن d_{Δ} هو بعد النقطة M عن محور الدوران Δ. و تبين العلاقات السابقة أن حركة أي نقطة M من الجسم هي حركة دائرية في المستوي الذي يعامد محور الدوران Δ و يمر من تلك النقطة و أن سرعة النقطة في أي لحظة زمنية تتناسب طرداً مع بعد النقطة عن محور الدوران, و بالتالي نستنتج أن سرع نقاط الجسم الواقعة على محور الدوران تكون معدومة.

حقل التسارعات: باشتقاق عبارة السرعة التي حصلنا عليها سابقاً نجد أن

$$\vec{\Gamma}\left(M\right)=\frac{d}{dt}\vec{V}\left(M\right)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}\right)=\frac{d}{dt}\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{M_{\Delta}M}$$

فإذا عرفنا متجه التسارع الدوراني $\vec{\varepsilon}$ بالعلاقة

$$\vec{\varepsilon}=\frac{d}{dt}\vec{\omega}=\frac{d}{dt}\left(\varphi^{\bullet}\ \vec{k}\right)=\varphi^{\bullet\bullet}\ \vec{k}=\varphi^{\bullet\bullet}\ \overrightarrow{k_{S}}$$

نلاحظ أن متجه التسارع الدوراني $\vec{\varepsilon}$ للجسم هو متجه ثابت المنحى و محمول على محور الدوران الثابت.

و بملاحظة أن المتجه $\overrightarrow{M_{\Delta}M}$ هو متجه متماسك مع الجسم فإن $\frac{d}{dt}\overrightarrow{M_{\Delta}M}=\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}$, و بالتعويض و تطبيق علاقة جيبس في الطرف الأيمن من العلاقة السابقة نجد أن

$$\vec{\Gamma}\left(M\right)=\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}\right)=\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}+\left(\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{M_{\Delta}M}\right)\vec{\omega}-\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right)\overrightarrow{M_{\Delta}M}$$

و بما أن $\vec{\omega}\perp\overrightarrow{M_{\Delta}M}$, فإن $\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{M_{\Delta}M}=0$ و تصبح العلاقة السابقة بالشكل

$$\vec{\Gamma}\left(M\right)=\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}-\omega^{2}\ \overrightarrow{M_{\Delta}M}$$

تبين العلاقة السابقة أن متجه التسارع $\vec{\Gamma}\left(M\right)$ لأي نقطة M من الجسم هو محصلة متجهين, الأول هو المتجه $\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_{\Delta}M}$ و هو متجه محمول على مماس المسار الدائري للنقطة M و يسمى التسارع المماسي $\overrightarrow{\Gamma_{\tau}}$ و الثاني هو المتجه $-\omega^{2}\ \overrightarrow{M_{\Delta}M}$ و هو متجه محمول ناظم المسار الدائري للنقطة M و يسمى التسارع الناظمي $\overrightarrow{\Gamma_{n}}$.

كما نلاحظ هنا أيضاً أن

$$\Gamma(M)=\sqrt{\left(\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_\Delta M}\right)^2+\omega^4\ \overrightarrow{M_\Delta M}^2}=\sqrt{\varepsilon^2\ d_\Delta^2+\omega^4\ d_\Delta^2}=\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\ d_\Delta$$

أي أن تسارع النقطة M في أي لحظة زمنية يتناسب طرداً مع بعد هذه النقطة عن محور الدوران.

الحركة الدورانية الآنية لجسم صلب (الدوران حول محور آني للدوران):

وجدنا أنه في حال تحرك الجسم خلال فترة زمنية محددة بحركة دورانية حول محور ما Δ متماسك مع الجسم فإن سرع نقاط هذا المحور تكون معدومة ضمن هذه الفترة الزمنية, و تتحدد سرع و تسارعات نقاط الجسم الأخرى ضمن هذه الفترة بالعلاقات

$$\vec{V}(M)=\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_\Delta M}\quad,\quad\vec{\Gamma}(M)=\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{M_\Delta M}-\omega^2\ \overrightarrow{M_\Delta M}$$

حيث أن M_Δ هي مسقط النقطة M على محور الدوران Δ.

إن انعدام سرع نقاط محور الدوران في الحركة الدورانية لجسم حول محور تعتبر صفة مميزة للحركة الدورانية للجسم حول هذا المحور. وبالتالي فإنه في حال انعدمت سرع نقاط محور ما Δ متماسك مع الجسم في لحظة زمنية معينة فإننا نقول أن حركة الجسم في هذه اللحظة الزمنية هي حركة مماسية لحركة دورانية آنية حول المحور Δ و نسمي هذا المحور في هذه الحالة المحور الآني للدوران. إن متجه الدوران الآني للجسم $\vec{\omega}$ في هذه اللحظة يكون محمولاً على المحور الآني للدوران Δ, و بالتالي فإن متجه سرعة أي نقطة من الجسم يعطى بالعلاقة

$$\vec{V}(M)=\vec{\omega}\times\overrightarrow{M_\Delta M}$$

و بما أن محور الدوران هو محور آني (غير ثابت) فإن منحى متجه الدوران سيكون متغيراً أيضاً, أي أن المتجه $\vec{\omega}$ هو متجه متغير الطول و المنحى. و بالتالي فإن مشتق المتجه $\vec{\omega}$ و الذي هو متجه التسارع الدوراني الآني $\vec{\varepsilon}$ لن يكون موازياً للمتجه $\vec{\omega}$, أي أن المتجه $\vec{\varepsilon}$ لن يكون محمولاً على المحور الآني للدوران في الحالة العامة. و بالتالي فإنه لا يمكن استخدام علاقة التسارع التي تم استنتاجها سابقاً لحساب تسارع نقطة من الجسم في هذه اللحظة, و لا بد من اشتقاق علاقة السرعة من جديد مع مراعاة كون المتجه $\vec{\varepsilon}$ لا يوازي المتجه $\vec{\omega}$.