معادلات فريدهولم التكاملية

مقدمة:

سنهتم خلال هذا الفصل بدراسة معادلات فريدهولم التكاملية غير المتجانسة من النوع الثاني التالية

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad ; \quad a\leq x\leq b \tag{1}$$

و سنركز دراستنا على المعادلات ذات النواة المتردية (Degenerate) أو القابلة للفصل (Separable), حيث أننا نقول عن النواة $K(x,t)$ أنها متردية أو قابلة للفصل إذا و فقط إذا أمكن كتابتها بالشكل

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t) \tag{2}$$

و تجدر الإشارة هنا إلى أنه يمكن دائماً تحويل أي نواة غير متردية إلى نواة متردية باستخدام منشور تايلور.

نقول عن النواة $K(x,t)$ أنها كمولة تربيعياً بالنسبة للمتحولين x و t في الساحة المربعة $a\leq x,t\leq b$ إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي

$$\int_{t=a}^{b}\int_{x=a}^{b} K(x,t)dx\,dt<\infty \tag{3}$$

مبرهنة فريدهولم البديلة: تملك معادلة فريدهولم التكاملية غير المتجانسة (1) حلاً واحداً و واحداً فقط إذا كان الحل الوحيد لمعادلة فريدهولم التكاملية المتجانسة التالية

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{4}$$

هو الحل الصفري $u(x)=0$.

مبرهنة (الشرط الكافي لوجود الحل): إذا كانت النواة $K(x,t)$ متردية و حقيقية و مستمرة و محدودة ضمن المربع $a\leq x,t\leq b$, أي أن

$$|K(x,t)|\leq M \quad ; \quad \forall x,t\in[a,b] \tag{5}$$

و إذا كانت $f(x) \neq 0$ هي دالة مستمرة على المجال $a \le x \le b$, فإن الشرط الكافي لكي تملك المعادلة التكاملية (1) حلاً وحيداً ضمن مجال الدراسة هو أن يكون

$$|\lambda| M \ (b-a) < 1 \tag{6}$$

ملاحظة: من الضروري ملاحظة أن وجود حل مستمر لمعادلة فريدهولم التكاملية لا يرتبط بتحقق الشرط (6) لكون هذا الشرط كافٍ و ليس لازماً.

مثال: لنأخذ المعادلة

$$u(x) = -4 + \int_0^1 (2x + 3t) u(t) dt \tag{7}$$

لاحظ أن $\lambda = 1$ و $|K(x,t)| \le 5 \ ; \ \forall x, t \in [0,1]$ و $b-a=1$, وبالتالي فإن

$$|\lambda| M \ (b-a) = 5 > 1 \tag{8}$$

أي أن الشرط (6) غير محقق مع أن المعادلة (7) تملك الحل التام

$$u(x) = 4x \tag{9}$$

طريقة منشور أدوميان لحل معادلة فريدهولم التكاملية:

تعتمد هذه الطريقة على نشر الحل $u(x)$ للمعادلة التكاملية بمتسلسلة من الشكل

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{10}$$

بالتعويض في طرفي المعادلة (1), نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \tag{11}$$

أو بشكل مكافئ

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt +$$

$$+\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt+\lambda\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt+\cdots \quad (12)$$

و بالتالي يمكن تعيين مركبات التابع المجهول بالطريقة التتابعية التالية

$$u_0(x)=f(x) \quad (13)$$

$$u_1(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \quad (14)$$

$$u_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt \quad (15)$$

$$u_3(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt \quad (16)$$

و هكذا بنفس الأسلوب. و بهذه الطريقة يمكن أن نضع الصيغة العامة التتابعية التالية

$$u_0(x)=f(x) \quad (17)$$

$$u_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_n(t)dt \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots \quad (18)$$

لقد أثبتت هذه الطريقة فعاليتها حتى في حال تطبيقها على معادلات فريدهولم التكاملية غير الخطية.

مثال: باعتبار المعادلة التكاملية

$$u(x)=\frac{9}{10}x^2+\int_0^1\frac{1}{2}x^2\, t^2\, u(t)dt \quad (19)$$

نلاحظ أن $f(x)=\frac{9}{10}x^2$ و $\lambda=1$ و $K(x,t)=\frac{1}{2}x^2\, t^2$. و بتطبيق طريقة تقريبات أدوميان نجد أن

$$u_0(x)=\frac{9}{10}x^2 \quad (20)$$

$$u_1(x)=\int_0^1 K(x,t)u_0(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}x^2\, t^2\frac{9}{10}t^2dt=\frac{9}{20}x^2\int_0^1 t^4dt \quad \Rightarrow$$

$$u_1(x)=\frac{9}{100}x^2 \tag{21}$$

$$u_2(x)=\int_0^1 K(x,t)u_1(t)dt=\int_0^1\frac{1}{2}x^2\ t^2\frac{9}{100}t^2dt=\frac{9}{200}x^2\int_0^1 t^4dt \quad\Rightarrow$$

$$u_2(x)=\frac{9}{1000}x^2 \tag{22}$$

و بهذا الأسلوب سنجد أن

$$u_n(x)=\frac{9}{10^{n+1}}x^2 \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots \tag{23}$$

و بالتالي يصبح الحل المطلوب للمعادلة التكاملية المعطاة بالشكل

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots=\frac{9}{10}x^2+\frac{9}{100}x^2\frac{9}{1000}x^2+\cdots \tag{24}$$

و الذي يمكن وضعه بالشكل التالي

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{9}{10^{n+1}}x^2=\frac{9}{10}x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{9}{10}x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{9}{10}x^2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) \quad\Rightarrow$$

$$u(x)=x^2 \tag{25}$$

مثال: باعتبار المعادلة التكاملية

$$u(x)=Cos(x)+2x+\int_0^{\pi}x\ t\ u(t)dt \tag{26}$$

لدينا $f(x)=Cos(x)+2x$ و $\lambda=1$ و $K(x,t)=x\ t$. و بتطبيق طريقة تقريبات أدوميان نجد أن

$$u_0(x)=Cos(x)+2x \tag{27}$$

$$u_1(x)=\int_0^{\pi}K(x,t)u_0(t)dt=\int_0^{\pi}x\ \ t\left(Cos(t)+2t\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$u_1(x)=\left(-2+\frac{2}{3}\pi^3\right)x \tag{28}$$

$$u_2(x)=\int_0^{\pi}K(x,t)u_1(t)dt=\int_0^{\pi}x\left(-2+\frac{2}{3}\pi^3\right)t^2\ dt \quad \Rightarrow$$

$$u_2(x)=\left(-\frac{2}{3}\pi^3+\frac{2}{9}\pi^6\right)x \tag{29}$$

و بهذا الأسلوب سنجد أن

$$u_n(x)=\left(-\frac{2}{3^{n-1}}\pi^{3(n-1)}+\frac{2}{3^n}\pi^{3n}\right)x \quad ; \quad n=1,2,\ldots \tag{30}$$

و بالتالي يصبح الحل المطلوب للمعادلة التكاملية المعطاة بالشكل

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

$$=Cos(x)+2x+\left(-2+\frac{2}{3}\pi^3\right)x+\left(-\frac{2}{3}\pi^3+\frac{2}{9}\pi^6\right)x+\cdots \quad \Rightarrow$$

$$u(x)=Cos(x) \tag{31}$$

مثال: باعتبار المعادلة التكاملية

$$u(x)=e^x-1+\int_0^1 t\ \ u(t)dt \tag{32}$$

لدينا $f(x)=e^x-1$ و $\lambda=1$ و $K(x,t)=t$. و بتطبيق طريقة التقريبات المتتالية نجد أن

$$u_0(x)=e^x-1 \tag{33}$$

$$u_1(x)=\int_0^1 K(x,t)u_0(t)dt=\int_0^1 t\left(e^t-1\right)dt \quad \Rightarrow$$

$$u_1(x)=\frac{1}{2} \tag{34}$$

$$u_2(x)=\int_0^1 K(x,t)u_1(t)dt=\int_0^1 \frac{1}{2}t\ dt \quad \Rightarrow$$

$$u_2(x)=\frac{1}{4} \tag{35}$$

و بهذا الأسلوب سنجد أن

$$u_n(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad n=1,2,\ldots \tag{36}$$

و بالتالي يصبح الحل المطلوب للمعادلة التكاملية المعطاة بالشكل

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=e^x-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=e^x-2+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \Rightarrow$$

$$u(x)=e^x-2+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=e^x \tag{37}$$

طريقة منشور أدوميان المعدلة:

تستخدم هذه الطريقة في حال كانت الدالة $f(x)$ في المعادلة (1) تتألف من أكثر من حد واحد, حيث نفرق هذه الدالة إلى مجموع دالتين بالشكل

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x) \tag{38}$$

و بالتالي تصبح المعادلة التكاملية بالشكل

$$u(x)=f_0(x)+f_1(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad ; \quad a\le x\le b \tag{39}$$

و بتعويض منشور الحل $u(x)$ المعطى في (10) في هذه المعادلة نجد أن

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots=f_0(x)+f_1(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt+$$

$$+\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt+\lambda\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt+\cdots \quad (40)$$

و بالتالي يمكن تعيين مركبات التابع المجهول بالطريقة التتابعية التالية

$$u_0(x)=f_0(x) \quad (41)$$

$$u_1(x)=f_1(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \quad (42)$$

$$u_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt \quad (43)$$

$$u_3(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_2(t)dt \quad (44)$$

و هكذا بنفس الأسلوب. و بهذه الطريقة يمكن أن نضع الصيغة العامة التتابعية التالية

$$u_0(x)=f_0(x) \quad (45)$$

$$u_1(x)=f_1(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt \quad (46)$$

$$u_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_n(t)dt \quad ; \quad n=1,2,\ldots \quad (47)$$

تختصر هذه الطريقة في معظم الأحيان الكثير من الحسابات و العمليات الحسابية المعقة كما سيتوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية.

مثال: باعتبار المعادلة التكاملية

$$u(x)=e^{3x}-\frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)x+\int_0^1 x\ t\ u(t)dt \quad (48)$$

لنضع

$$f_0(x)=e^{3x} \quad (49)$$

$$f_1(x)=-\frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)x \tag{50}$$

و بتطبيق طريقة تقريبات أدوميان المعدلة نجد أن

$$u_0(x)=e^{3x} \tag{51}$$

$$u_1(x)=f_1(x)+\lambda\int_0^1 K(x,t)u_0(t)dt=-\frac{1}{9}\left(2e^3+1\right)x+\int_0^1 x\ t\ e^{3t}dt \quad \Rightarrow$$

$$u_1(x)=0 \tag{52}$$

و بالتالي فإن $u_n(x)=0\ ;\ \forall n\geq 1$. و يصبح حل المعادلة التكاملية بالشكل

$$u(x)=e^{3x} \tag{53}$$

تمارين: حل المعادلات التكاملية التالية باستخدام طريقة منشور أدوميان المعدلة

$$u(x)=Sin^{-1}(x)+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)x-\int_0^1 x\ u(t)dt$$

$$u(x)=Sin(x)+Cos(x)-2x+\frac{\pi}{2}+\int_0^{\pi/2}(x-t)u(t)dt$$

$$u(x)=1+x+Sec^2(x)-\left(32+8\pi+\pi^2\right)x^2+\int_0^{\pi/2}32x^2\ u(t)dt$$

ظاهرة الضجيج (الحدود المتكررة):

عند استخدام طريقة منشور أدوميان, يمكن أن يتكرر ظهور بعض الحدود في مركبات الدالة $u(x)$ بإشارات متناوبة, و هذه الحدود تنتج عملياً بسبب ظاهرة فيزيائية تدعى الضجيج (Noise). و قد تم إثبات أن حذف هذه الحدود التي تظهر في عبارتي $u_0(x)$ و $u_1(x)$ يؤدي في بعض الأحيان إلى حصولنا على الحل التام للمعادلة التكاملية بشكل مباشر, إلا أنه لابد من التحقق من أن العبارة الناتجة عن هذا الحذف هي عبارة الحل التام للمعادلة.

مثال: باستخدام ظاهرة الضجيج, حل المعادلة التكاملية التالية

$$u(x)=x\ Cos(x)+2x+\int_0^{\pi} x\ u(t)dt \tag{54}$$

الحل:

تمارين: باستخدام ظاهرة الضجيج, حل المعادلات التكاملية التالية

$$u(x)=Cos(x)-Sin(x)+2x-\frac{\pi}{2}x+\int_0^{\pi/2} x\ t\ u(t)dt$$

$$u(x)=\frac{\pi}{2}x-x+x\ Tan^{-1}(x)-\int_{-1}^{1} x\ u(t)dt$$

تعريف: باعتبار المعادلة التكاملية المتجانسة الموافقة للمعادلة (1), أي المعادلة

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{55}$$

يتضح أن هذه المعادلة تملك دائماً حلاً هو الحل الصفري $u(x)=0$. لذلك نسمي كل قيمة $\lambda=\lambda_0$ تجعل المعادلة (55) تقبل حلاً $u(x)\neq 0$ غير الحل الصفري قيمة خاصة للنواة $K(x,t)$, كما نسمي الحل $u(x)\neq 0$ في هذه الحالة تابعاً خاصاً للنواة موافقاً للقيمة الخاصة λ_0.

ملاحظة: يمكن لكل قيمة خاصة $\lambda=\lambda_0$ للنواة $K(x,t)$ أن تملك أكثر من تابع خاص واحد, و بسبب خطية المعادلة التكاملية سنجد أن أي تركيب خطي من الشكل

$$\alpha_1\ g_1(x)+\alpha_2\ g_2(x)+\cdots+\alpha_m\ g_m(x)$$

لتوابع خاصة $g_1, g_2,\ldots, g_m$ للنواة $K(x,t)$ موافقة للقيمة الذاتية λ_0 هو أيضاً تابعاً خاصاً للنواة $K(x,t)$ موافقاً للقيمة الذاتية λ_0. و تجدر الملاحظة هنا إلى أن العدد الكلي للتوابع الخاصة المستقلة خطياً الموافقة لقيمة خاصة λ_0 للنواة $K(x,t)$ هو عدد ثابت k يسمى رتبة تضاعف القيمة الخاصة λ_0.

طريقة التقريبات المتتالية لحل معادلة فريدهولم:

سنقوم بنشر الحل $u(x)$ للمعادلة التكاملية (1) بمتسلسلة قوى في λ, بالشكل التالي

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\ u_{n}(x) \tag{56}$$

و بالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\ u_{n}(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n}\ u_{n}(t)\right]dt$$

$$=f(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\int_{a}^{b}K(x,t)\ u_{n}(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$u_{0}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n}\ u_{n}(x)=f(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{n+1}\int_{a}^{b}K(x,t)\ u_{n}(t)dt$$

و باستبدال كل n بالمقدار $n-1$ في المجموع الموجود في الطرف الأيمن تصبح العلاقة بالشكل

$$u_{0}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n}\ u_{n}(x)=f(x)+\sum_{n-1=0}^{\infty}\lambda^{(n-1)+1}\int_{a}^{b}K(x,t)\ u_{n-1}(t)dt$$

$$=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n}\int_{a}^{b}K(x,t)\ u_{n-1}(t)dt$$

و بالمقارنة بين الطرفين نجد أن

$$\begin{cases} u_{0}(x)=f(x) \\ u_{n}(x)=\int_{a}^{b}K(x,t)\ u_{n-1}(t)dt \quad ; \quad \forall n\geq 1 \end{cases} \tag{57}$$

لنعرف النواة المكررة $K_{n}(x,t)$ بالشكل

$$\begin{cases} K_{1}(x,t)=K(x,t) \\ K_{n}(x,t)=\int_{a}^{b}K_{n-1}(x,t_{1})\ K(t_{1},t)dt_{1} \quad ; \quad \forall n\geq 2 \end{cases} \tag{58}$$

و بالتالي فإن

$$K_2(x,t)=\int_a^b K_1(x,t_1)\ K(t_1,t)dt_1=\int_a^b K(x,t_1)\ K(t_1,t)dt_1$$

و التي يمكن بعد استبدال الرمز t_1 بالرمز t_2 بالشكل

$$K_2(x,t)=\int_a^b K(x,t_2)\ K(t_2,t)dt_2$$

و بالتالي فإن

$$K_3(x,t)=\int_a^b K_2(x,t_1)\ K(t_1,t)dt_1=\int_a^b\left[\int_a^b K(x,t_2)\ K(t_2,t_1)dt_2\right]K(t_1,t)dt_1 \quad \Rightarrow$$

$$K_3(x,t)=\int_a^b\int_a^b K(x,t_2)\ K(t_2,t_1)\ K(t_1,t)\ dt_2\ dt_1$$

و بالاستمرار بنفس الأسلوب سنجد أن

$$K_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,t_{n-1})\ K(t_{n-1},t_{n-2})\cdots K(t_1,t)\ dt_{n-1}\ dt_{n-2}\cdots dt_1 \qquad (59)$$

و ذلك من أجل جميع القيم $\forall n\geq 2$ مع ملاحظة وجود $n-1$ تكامل في الطرف الأيمن.

كما نلاحظ أن

$$u_1(x)=\int_a^b K(x,t)\ u_0(t)dt=\int_a^b K_1(x,t)\ f(t)dt$$

$$u_2(x)=\int_a^b K(x,t)\ u_1(t)dt=\int_a^b K(x,t_1)\ u_1(t_1)dt_1$$

$$=\int_a^b K(x,t_1)\left[\int_a^b K_1(t_1,t)\ f(t)dt\right]dt_1=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)\ f(t)dt_1\ dt$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(x,t_1)K_1(t_1,t)dt_1\right]f(t)dt=\int_a^b K_2(x,t)f(t)dt$$

و بنفس الأسلوب نجد أن

$$u_n(x)=\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt \quad ; \quad \forall n\geq 1 \qquad (60)$$

بالتعويض في العلاقة (56), نجد أن

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\ u_n(x)=u_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\ u_n(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\left[\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt\right]$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}K_n(x,t)\right]f(t)dt=f(x)+\lambda\int_a^b\left[\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\ K_{n+1}(x,t)\right]f(t)dt$$

حيث حصلنا على العلاقة الأخيرة بعد تبديل كل n بالقيمة $n+1$.

فإذا عرفنا نواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ بالعلاقة

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\ K_{n+1}(x,t) \qquad (61)$$

تصبح عبارة الحل الأخيرة للمعادلة التكاملية بالشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt \qquad (62)$$

تمرين: أثبت أن نواة الحالة المعرفة بالعلاقة (61) تحقق العلاقتين التاليتين

$$\begin{cases} R(x,t,\lambda)=K(x,t)+\lambda\int_a^b K(x,t_1)R(t_1,t,\lambda)dt_1 \\ R(x,t,\lambda)=K(x,t)+\lambda\int_a^b K(t_1,t)R(x,t_1,\lambda)dt_1 \end{cases} \qquad (63)$$

مبرهنة الوجود و الوحدانية: إذا وجدت من أجل كل قيمة λ للوسيط دالة مستمرة $R(x,t,\lambda)$ تحقق العلاقتين (63), عندئذٍ تملك معادلة فريدهولم التكاملية (1) حلاً وحيداً يتعين بالعلاقة (62).

مثال: عين عبارة الحل للمعادلة التكاملية باستخدام طريقة التقريبات المتتالية

$$u(x)=e^{2x}+\lambda\int_0^1 e^{x-t}\ u(t)dt$$

مخرج فريدهولم:

سنقوم بتجزئة المجال $[a,b]$ إلى n مجالاً جزئياً متساوياً بحيث يكون طول كل منها $\delta=\frac{b-a}{n}$, و لنرمز لنقاط هذه التجزئة و قيم التوابع في المعادلة التكاملية (1) بالشكل التالي

$$x_i=a+i\ \delta \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n$$

$$f_i=f\left(x_i\right) \quad , \quad u_i=u\left(x_i\right)$$

$$K_{i,j}=K\left(x_i,x_j\right) \quad ; \quad i,j=0,1,2,\dots,n$$

و في حال جعلنا n تسعى إلى اللانهاية يمكن أن نستبدل التكامل في المعادلة (1) بمجموع ريمان, لتصبح بالشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}K\left(x,x_j\right)u\left(x_j\right)\delta$$

و التي تصبح في نقاط التجزئة بالشكل التالي

$$u\left(x_i\right)=f\left(x_i\right)+\lambda\sum_{j=1}^{n}K\left(x_i,x_j\right)u\left(x_j\right)\delta \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n \quad \Rightarrow$$

$$u_i=f_i+\lambda\delta\sum_{j=1}^{n}K_{i,j}\ u_j \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n$$

و هي عبارة عن جملة معادلات خطية بالمجاهيل u_i, و التي يمكن وضعها باستخدام رمز كرونكر

$$\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & ; \quad i=j\\ 0 & ; \quad i\neq j\end{cases}$$

بالشكل التالي

$$\sum_{j=1}^{n}u_j\ \delta_{i,j}=f_i+\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{i,j}\ u_j\ \delta \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_{i,j}-\lambda\delta K_{i,j}\right)u_j=f_i \quad ; \quad i=0,1,2,\dots,n \qquad (64)$$

و لحل جملة المعادلات السابقة بطريقة جرامر نحتاج لحساب المحدد التالي الذي سيظهر في مخرج الحل

$$D_n(\lambda)=\left|\delta_{i,j}-\lambda\delta K_{i,j}\right| \quad ; \quad i,j=0,1,2,\dots,n$$

بنشر هذا المحدد نجد أن

$$D_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\sum_{i_1=1}^{n}K_{i_1,i_1}\ \delta+\frac{\lambda^2}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i_1,i_1} & K_{i_1,i_2}\\ K_{i_2,i_1} & K_{i_2,i_2}\end{vmatrix}\delta^2+\cdots+$$

$$+(-1)^n\ \frac{\lambda^n}{n!}\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i_1,i_1} & K_{i_1,i_2} & \cdots & K_{i_1,i_n}\\ K_{i_2,i_1} & K_{i_2,i_2} & \cdots & K_{i_2,i_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K_{i_n,i_1} & K_{i_n,i_2} & \cdots & K_{i_n,i_n}\end{vmatrix}\delta^n \tag{65}$$

فإذا وضعنا

$$K\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_m\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,y_1) & K(x_1,y_2) & \cdots & K(x_1,y_m)\\ K(x_2,y_1) & K(x_2,y_2) & \cdots & K(x_2,y_m)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ K(x_m,y_1) & K(x_m,y_2) & \cdots & K(x_m,y_m)\end{vmatrix} \quad ; \quad m=1,2,\dots,n$$

$$d_m=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & \cdots & t_m\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m\end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_m \ ; \ m=1,2,\dots,n$$

نلاحظ أن

$$\sum_{i_1=1}^{n}K_{i_1,i_1}\ \delta=\sum_{i=1}^{n}K_{i,i}\ \delta=\sum_{i=1}^{n}K(x_i,x_i)\ \delta\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_a^b K(t_1,t_1)dt_1=\int_a^b K\begin{pmatrix}t_1\\ t_1\end{pmatrix}dt_1=d_1$$

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i_1,i_1} & K_{i_1,i_2}\\ K_{i_2,i_1} & K_{i_2,i_2}\end{vmatrix}\delta^2=\sum_{i,j=1}^{n}\begin{vmatrix}K_{i,i} & K_{i,j}\\ K_{j,i} & K_{j,j}\end{vmatrix}\delta^2=\sum_{i,j=1}^{n}\begin{vmatrix}K(x_i,x_i) & K(x_i,x_j)\\ K(x_j,x_i) & K(x_j,x_j)\end{vmatrix}\delta^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{i_1,i_1} & K_{i_1,i_2} \\ K_{i_2,i_1} & K_{i_2,i_2}\end{vmatrix}\delta^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) \\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2)\end{vmatrix} dt_1 dt_2 = d_2$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_m=1}^{n}\begin{vmatrix} K_{i_1,i_1} & K_{i_1,i_2} & \cdots & K_{i_1,i_m} \\ K_{i_2,i_1} & K_{i_2,i_2} & \cdots & K_{i_2,i_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{i_m,i_1} & K_{i_m,i_2} & \cdots & K_{i_m,i_m}\end{vmatrix}\delta^m \xrightarrow[n\to\infty]{} d_m \quad ; \quad m=1,2,\ldots,n$$

و بالتعويض في العلاقة (65) تصبح بالشكل

$$D_n(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}d_1+\frac{\lambda^2}{2!}d_2-\cdots+\frac{\lambda^n}{n!}d_n=1+\sum_{m=1}^{n}(-1)^m\ \frac{\lambda^m}{m!}d_m$$

و بجعل n تسعى إلى اللانهاية نجد أن

$$D(\lambda)=\lim_{n\to\infty}D_n(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ \frac{\lambda^n}{n!}d_n \tag{66}$$

لنضع الآن

$$D(x,t,\lambda)=R(x,t,\lambda)\ D(\lambda) \tag{67}$$

إن عملية ضرب $R(x,t,\lambda)$ بالمخرج $D(\lambda)$ تحتم كون المقدار $D(x,t,\lambda)$ تابعاً صحيحاً للوسيط λ, وبالتالي يمكننا أن نفرض أن

$$D(x,t,\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_n(x,t) \tag{68}$$

حيث أن $d_n(x,t)$ هي توابع يطلب تعيينها.

لنضرب طرفي العلاقة الأولى في (63) بالمخرج $D(\lambda)$, لنجد أن

$$R(x,t,\lambda)D(\lambda)=K(x,t)D(\lambda)+\lambda\int_a^b K(x,t_1)R(t_1,t,\lambda)D(\lambda)dt_1 \quad \Rightarrow$$

$$D(x,t,\lambda)=K(x,t)D(\lambda)+\lambda\int_a^b K(x,t_1)D(t_1,t,\lambda)dt_1 \tag{69}$$

و بتعويض العلاقتين (66) و (68) في العلاقة السابقة و مقارنة أمثال قوى λ في الطرفين نجد العلاقة

$$d_n(x,t)=K(x,t)d_n-n\int_a^b K(x,t_1)d_{n-1}(t_1,t)dt_1 \quad ; \quad n=1,2,\ldots \tag{70}$$

التي تمكننا من حساب $d_n(x,t)$ على التتالي, و ذلك بعد أن نضع

$$d_0(x,t)=K(x,t)$$

تمرين: أثبت صحة العلاقات التالية

$$d_n(x,t)=\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b K\begin{pmatrix} x & t_1 & \cdots & t_n \\ t & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}dt_1dt_2\cdots dt_n \quad ; \quad n=1,2,\ldots \tag{71}$$

$$d_{n+1}=\int_a^b d_n(t,t)\,dt \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots \tag{72}$$

$$\int_a^b D(t,t,\lambda)\,dt=d_1+\sum(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}d_{n+1} \tag{73}$$

$$\frac{d}{d\lambda}D(\lambda)=-\int_a^b D(t,t,\lambda)\,dt \tag{74}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}D(x,t,\lambda)=\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!}d_n(x,t) \tag{75}$$

ملاحظة: بما أن $D(x,t,\lambda)$ هي دالة صحيحة بالوسيط λ, فإنه يمكن نشر هذه الدالة في جوار أي قيمة λ_0 اختيارية للوسيط بمتسلسلة من الشكل

$$D(x,t,\lambda)=D(x,t,\lambda_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial^k D(x,t,\lambda)}{\partial\lambda^k}\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\frac{(\lambda-\lambda_0)^k}{k!}$$

مبرهنة: إذا لم تكن λ صفراً للدالة $D(\lambda)$, فإن المعادلة التكاملية (1) تملك حلاً وحيداً من أجل أي دالة $f(x)$, يتعين بالعلاقة

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t,\lambda)\,f(t)dt$$

حيث أن

$$R(x,t,\lambda)=\frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)}$$

فإذا تمكنا من كتابة الدالة $f(x)$ بالشكل

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)\;\omega(t)dt$$

عندئذٍ تعطى عبارة الحل للمعادلة التكاملية بالعلاقة

$$u(x)=\int_a^b R(x,t,\lambda)\;\omega(t)dt$$

ملاحظة: إن أصفار الدالة $D(\lambda)$ هي أقطاب لنواة الحالة $R(x,t,\lambda)$ و هي قيم خاصة للمعادلة التكاملية المتجانسة (4) تملك من أجلها هذه المعادلة حلولاً غير الحل الصفري.

تعريف: نسمي المعادلة التكاملية

$$v(x)=\lambda\int_a^b K(t,x)\;v(t)dt \qquad (76)$$

المعادلة التكاملية المنقولة للمعادلة التكاملية المتجانسة (4). أي أنها المعادلة التكاملية المتجانسة التي نواتها تنتج عن نواة المعادلة التكاملية المتجانسة الأصلية (4) بالتبديل بين المتحولين x,t.

و لهذا السبب نسمي أي معادلة تكاملية من الشكل

$$v(x)=g(x)+\lambda\int_a^b K(t,x)\ v(t)dt \tag{77}$$

معادلة تكاملية منقولة للمعادلة التكاملية غير المتجانسة (1).

نستنتج من هذا أن المعادلة التكاملية المنقولة هي معادلة تكاملية تتعين نواتها K^T من خلال نواة المعادلة التكاملية الأصلية K بالعلاقة

$$K^T(x,t)=K(t,x)$$

و بالتالي سنجد أن

$$K^T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}=K\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

مما سيعني أن الأمثال d_n^T الموافقة لنواة المعادلة المنقولة K^T تتطابق مع نظيراتها d_n الموافقة لنواة المعادلة الأصلية $K(x,t)$, و بالتالي يمكن بسهولة إثبات صحة العلاقات التالية

$$d_n^T(x,t)=d_n(t,x) \quad ; \quad \forall n$$

$$D^T(x,t,\lambda)=D(t,x,\lambda) \quad , \quad D^T(\lambda)=D(\lambda)$$

و بالتالي نستنتج أن القيم الخاصة للمعادلة المنقولة هي ذاتها القيم الخاصة للمعادلة الأصلية, مما يعني أن حلول المعادلتين الأصلية و المنقولة ذات طبيعة واحدة.

قابلية حل معادلة فريدهولم في حال كانت λ قيمة خاصة للمعادلة:

إذا كانت قيمة خاصة للمعادلة (1), و ليكن $v(x)$ حلاً ما للمعادلة المتجانسة المنقولة (76). بضرب طرفي المعادلة (1) بالحل $v(x)$ و المكاملة بين الحدين $x=a$ و $x=b$, نجد أن

$$\int_a^b u(x)\ v(x)dx=\int_a^b f(x)\ v(x)dx+\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt\right]v(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)\, v(x)dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x,t) v(x)dx \right] u(t)dt$$

و بالمبادلة بين رمزي المتحولين x, t في التكامل المضاعف الأخير, نجد أن

$$\int_a^b u(x)\, v(x)dx = \int_a^b f(x)\, v(x)dx + \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(t,x) v(t)dt \right] u(x)dx$$

$$= \int_a^b f(x)\, v(x)dx + \int_a^b v(x)\, u(x)dx \quad \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)\, v(x)dx = 0 \tag{78}$$

و بالتالي نستنتج أنه لا يمكن أن يكون هناك حلاً $u(x)$ للمعادلة التكاملية (1) في هذه الحالة ما لم تحقق الدالة $f(x)$ الشرط (78) و ذلك من أجل أي حل $v(x)$ للمعادلة المتجانسة المنقولة (76). و بما أن λ هي قيمة خاصة للمعادلة التكاملية الأصلية (1) و بالتالي للمعادلة المتجانسة المنقولة (76), فإن المعادلة المنقولة المتجانسة (76) تملك حلولاً غير الحل الصفري. نستنتج من ذلك أن المعادلة (1) لا تملك حلولاً في حال لم تحقق الدالة $f(x)$ الشرط (78).

نتيجة: من أجل أي قيمة كيفية للوسيط λ, نستنتج ما يلي

1. إما أن تكون المعادلة التكاملية (1) قابلة للحل من أجل أي دالة مستمرة $f(x)$, و في هذه الحالة لا تملك المعادلة المتجانسة (4) إلا حل وحيد هو الحل الصفري.
2. أو أن تملك المعادلة المتجانسة (4) حلولاً غير صفرية, و في هذه الحالة لن تكون المعادلة (1) قابلة للحل من أجل الدوال $f(x)$ التي لا تحقق الشرط (78).

تعريف: نسمي العدد الأعظمي للتوابع الخاصة المستقلة خطياً الموافقة لقيمة خاصة λ لمعادلة تكاملية, رتبة تضاعف القيمة الخاصة λ. و نلاحظ هنا أن رتبة تضاعف أي قيمة خاصة هي ذاتها للمعادلة التكاملية الأصلية و المعادلة المنقولة.

مبرهنة: في حال كانت λ هي قيمة خاصة للمعادلة التكاملية (1) من الرتبة m و كانت

$$u_1(x)\ ,\ u_2(x)\ ,\ \ldots\ ,\ u_m(x)$$

هي الدوال الخاصة المستقلة الموافقة للقيمة الخاصة λ, فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة (4) يتعين بالعلاقة

$$\sum_{i=1}^{m} C_i \; u_i(x)$$

كما أن تحقيق الدالة $f(x)$ الشرط (78) من أجل أي دالة خاصة $v(x)$ للمعادلة التكاملية المتجانسة المنقولة (76), هو الشرط اللازم و الكافي لكي تكون المعادلة التكاملية غير المتجانسة (1) قابلة للحل. و في هذه الحالة تملك المعادلة غير المتجانسة (1) عدداً غير منتهٍ من الحلول يتعين الحل العام لها بالعلاقة

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{m} C_i \; u_i(x)$$

حيث أن $u_0(x)$ هو حل خاص للمعادلة التكاملية غير المتجانسة (1) يتحدد باستخدام نواة الحالة.

ملاحظة: يكفي دائماً التأكد من تحقق الشرط (78) من أجل الدوال الخاصة المستقلة

$$v_1(x) \; , \; v_2(x) \; , \; \ldots \; , \; v_m(x)$$

للمعادلة التكاملية المنقولة (76).

حل المعادلات التكاملية ذات النوى المتردية:

سنبحث في هذه الفقرة حل معادلة فريدهولم في حال كانت نواة المعادلة هي نواة متردية, أي أن

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t) \tag{79}$$

حيث يمكن و بدون المساس بعمومية المسألة أن نفرض أن الدوال $a_i(x)$ مستقلة خطياً و كذلك الدوال $b_i(t)$.

بتعويض العلاقة (79) في معادلة فريدهولم (1) نجد أن

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x) b_i(t) \right] u(t) dt = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \int_a^b b_i(t) u(t) dt$$

و بوضع

$$c_i = \int_a^b b_i(t) u(t) dt \quad ; \quad \forall i = 1,2,\dots,n \tag{80}$$

تصبح المعادلة بالشكل

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\ c_i \tag{81}$$

و بالتعويض في المعادلة (80) نجد أن

$$c_i = \int_a^b b_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j(t)\ c_j \right] dt = \int_a^b b_i(t) f(t) dt + \lambda \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b a_j(t) b_i(t) dt \right) c_j \quad \Rightarrow$$

$$c_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\ c_j \quad ; \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

حيث أن

$$f_i = \int_a^b b_i(t) f(t) dt \ , \ \alpha_{i,j} = \int_a^b a_j(t) b_i(t) dt \quad ; \quad \forall i,j = 1,2,\dots,n \tag{82}$$

و بملاحظة أن $c_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}\ c_j \ ; \ \forall i = 1,2,\dots,n$, حيث أن

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; \quad i = j \\ 0 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

و هو رمز كرونكر, تصبح العلاقة الأخير بالشكل

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j}\ c_j = f_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\ c_j \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_{i,j} - \lambda\ \alpha_{i,j} \right) c_j = f_i \quad ; \quad \forall i = 1,2,\dots,n \tag{83}$$

تمثل العلاقات (823) جملة معادلات خطية بالمجاهيل c_i, و التي لها محدد الأمثال التالي

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{1,1} & -\lambda\alpha_{1,2} & \cdots & -\lambda\alpha_{1,n} \\ -\lambda\alpha_{2,1} & 1-\lambda\alpha_{2,2} & \cdots & -\lambda\alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\alpha_{n,1} & -\lambda\alpha_{n,2} & \cdots & 1-\lambda\alpha_{n,n} \end{vmatrix} \tag{84}$$

فإذا كان $D(\lambda)\neq 0$, تكون مصفوفة الأمثال لجملة المعادلات (83) قابلة للقلب, و بالتالي جملة المعادلات تملك حلاً وحيداً (سواءً كانت جملة المعادلات متجانسة أو غير متجانسة) و بتعويض هذا الحل في المعادلة (81) نجد الحل الوحيد لمعادلة فريدهولم غير المتجانسة (1). و نلاحظ هنا أنه في حال كانت جملة المعادلات (83) متجانسة و هي جملة المعادلات الموافقة لكون $f(x)=0$ (أي معادلة فريدهولم المتجانسة), يكون الحل الوحيد لها هو الحل الصفري, مما يعني أن معادلة فريدهولم المتجانسة تملك حلاً وحيداً هو الحل الصفري, $u(x)=0$.

أما إذا كان $D(\lambda)=0$, فإن جملة المعادلات الخطية (83), في حال كانت متجانسة, تملك عدداً لانهائياً من الحلول, مما يعني أن معادلة فريدهولم المتجانسة (4) تملك عدداً لانهائياً من الحلول. فإذا فرضنا أن جملة المعادلات الخطية (83) و لنفرض أن المتجهات الذاتية لمصفوفة الأمثال في المعادلات و التي تمثل مجموعة الحلول المستقلة لجملة المعادلات هي

$$c^{(j)}=\left(c_1^{(j)},c_2^{(j)},\ldots,c_n^{(j)}\right) \quad ; \quad j=1,2,\ldots,p \tag{85}$$

و بتعويض هذه الحلول في المعادلة

$$u(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,c_i$$

سنحصل على الحلول الخاصة المستقلة لمعادلة فريدهولم المتجانسة المقابلة للقيمة الخاصة λ و هي

$$u_j(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\,c_i^{(j)} \quad ; \quad j=1,2,\ldots,p \tag{86}$$

و بالتالي يصبح الحل العام لمعادلة فريدهولم المتجانسة بالشكل

$$u(x)=\sum_{j=1}^{p}\mu_j\ u_j(x) \qquad (87)$$

حيث أن $\mu_j\ ;\ j=1,2,\ldots,p$ هي ثوابت اختيارية.

ملاحظة: في حال وجود حل خاص $u_0(x)$ لمعادلة فريدهولم غير المتجانسة (1), و بإجراء التغيير

$$u(x)=U(x)+u_0(x) \qquad (88)$$

و التعويض في المعادلة (1) نجد المعادلة التكاملية

$$U(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)U(t)dt \qquad (89)$$

و هي ذاتها المعادلة المتجانسة الموافقة للمعادلة (1), و بالتالي تملك الحل العام

$$U(x)=\sum_{j=1}^{p}\mu_j\ u_j(x) \qquad (90)$$

و بالتعويض في العلاقة (88), نجد أن معادلة فريدهولم غير المتجانسة تملك الحل العام التالي

$$u(x)=u_0(x)+\sum_{j=1}^{p}\mu_j\ u_j(x) \qquad (91)$$

أي أن الحل العام لمعادلة فريدهولم التكاملية غير المتجانسة هو عبارة عن مجموع لحل خاص لهذه المعادلة (إن وجد) مع الحل العام لمعادلة فريدهولم المتجانسة.

نعلم حسب دراستنا لمقررات الجبر الخطي أن الشرط اللازم و الكافي حتى تملك جملة المعادلات الخطية غير المتجانسة (83) حلاً في حال كانت λ هي قيمة ذاتية لمصفوفة الأمثال هو أن يتعامد متجه الثوابت $(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ مع جميع المتجهات الذاتية الموافقة لهذه القيمة الذاتية, أي أنه يجب أن يكون

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\ c_i^{(j)}=0 \quad ; \quad \forall j=1,2,\ldots,p \qquad (92)$$

و لتفسير هذا الشرط سنورد المناقشة التالية سنورد المناقشة التالية.

بالعودة للمعادلة التكاملية المنقولة (76) الموافقة لمعادلة فريدهولم و مناقشة وجود الحل لهذه المعادلة سنجد أن حل هذه المعادلة يتعين بالعلاقة

$$v(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_i\; b_i(x) \tag{93}$$

حيث أن

$$\bar{c}_i=\int_a^b a_i(t)v(t)dt \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n \tag{94}$$

و التي تتعين من خلال جملة المعادلات الخطية المتجانسة التالية

$$\bar{c}_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j,i}\;\bar{c}_j=0 \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n \tag{95}$$

و بملاحظة أن مصفوفة الأمثال في جملة المعادلات (95) الموافقة للمعادلة التكاملية المنقولة هي منقول مصفوفة الأمثال في جملة المعادلات (83) الموافقة لمعادلة فريدهولم الأساسية, نستنتج أن مصفوفة الأمثال في جملة المعادلات (95) تملك نفس القيم الذاتية و المتجهات الذاتية الموافقة لمصفوفة الأمثال في جملة المعادلات (83). و بالتالي فإن جملة المعادلات (95) ستملك المتجهات الذاتية نفسها التي عددها p (كما فرضنا سابقاً) و التي تقابل p حلاً مستقلاً للمعادلة المنقولة هي

$$v_j(x)=\lambda\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\;c_i^{(j)} \quad ; \quad j=1,2,\ldots,p \tag{96}$$

بالعودة الآن إلى الشرط (92) و تعويض قيم من العلاقات (82), نجد أن الشرط يصبح بالشكل

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\;c_i^{(j)}=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b b_i(t)f(t)dt\right)c_i^{(j)}=0 \quad\Rightarrow\quad \int_a^b\left[\sum_{i=1}^{n}b_i(t)c_i^{(j)}\right]f(t)dt=0 \quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\int_a^b v_j(t)f(t)dt=0 \quad ; \quad \forall j=1,2,\ldots,p} \tag{97}$$

تمثل مجموعة العلاقات (97) الأخيرة الشرط اللازم و الكافي لكي تملك معادلة فريدهولم غير المتجانسة (1) حلاً في حال كانت λ قيمة خاصة للمعادلة.

ملاحظة: في حال كانت λ قيمة خاصة لمعادلة فريدهولم و تحققت الشروط (97), فإن معادلة فريدهولم غير المتجانسة تملك حلاً عاماً هو عبارة عن مجموع حل خاص لها مع الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها.

المعادلات التكاملية ذات النوى الحقيقية المتناظرة:

تعريف: نقول عن نواة المعادلة التكاملية أنها متناظرة إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي

$$K(x,t)=K(t,x) \quad ; \quad \forall x,t \in [a,b] \tag{98}$$

مبرهنة: كل نواة متناظرة غير صفرية تملك نملك قيمة خاصة واحدة على الأقل لا تساوي الصفر.

خواص المعادلات ذات النوى المتناظرة:

1. تكامل جداء أي تابعين خاصين على مجال التكامل الأساسي للمعادلة ذات النواة الحقيقية المتناظرة موافقين لقيمتين خاصتين مختلفتين يساوي الصفر.
2. جميع القيم الخاصة للمعادلة ذات النواة الحقيقية المتناظرة هي قيم حقيقية.

ملاحظة: بترتيب مجموعة القيم الخاصة للمعادلة ذات النواة الحقيقية المتناظرة بالشكل

$$|\lambda_1|<|\lambda_2|<|\lambda_3|<\cdots$$

و التي يمكن أن تكون منتهية أو غير منتهية, يمكن ترتيب التوابع الخاصة الموافقة لها بالشكل

$$u_1(x),u_2(x),u_3(x),\ldots \tag{98}$$

بحيث يكون

$$\int_a^b [u_i(t)]^2\,dt=1 \quad ; \quad \forall i=1,2,3,\ldots$$

حيث تسمى جملة التوابع (98) جملة متعامدة ومنتظمة من التوابع الخاصة للنواة أو للمعادلة التكاملية.

3. أي تابع خاص $u_i(x)$ للمعادلة ذات النواة الحقيقية المتناظرة موافق للقيمة الذاتية λ_i يحقق العلاقة

$$\frac{u_i(x)}{\lambda_i}=\int_a^b K(x,t)u_i(t)dt \quad ; \quad \forall i=1,2,3,\ldots$$

حيث نسمي هذه المقادير أمثال فورييه للنواة $K(x,t)$ بالنسبة لجملة التوابع المتعامدة (98), و يكون

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{u_i(x)}{\lambda_i}u_i(t)$$

المعادلات التكاملية التي ترد إلى معادلات ذات نوى حقيقية متناظرة:

يمكن تحويل أي معادلة تكاملية من الشكل

$$\psi(x)=g(x)+\lambda\int_a^b \phi(x,t)\varphi(t)\psi(t)dt \tag{99}$$

إلى معادلة تكاملية ذات نواة متناظرة في حال كانت الدالة $\phi(x,t)$ هي دالة حقيقية متناظرة و من أجل أي دالة حقيقية موجبة $\varphi(t)$, و ذلك من خلال ضرب طرفي المعادلة بالدالة $\sqrt{\varphi(x)}$ لتصبح بالشكل

$$\psi(x)\sqrt{\varphi(x)}=g(x)\sqrt{\varphi(x)}+\lambda\int_a^b \phi(x,t)\sqrt{\varphi(x)}\varphi(t)\psi(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\psi(x)\sqrt{\varphi(x)}=g(x)\sqrt{\varphi(x)}+\lambda\int_a^b \phi(x,t)\sqrt{\varphi(x)\varphi(t)}\sqrt{\varphi(t)}\;\psi(t)dt$$

وبإجراء التغييرات التالية

$$\psi(x)\sqrt{\varphi(x)}=u(x) \quad , \quad g(x)\sqrt{\varphi(x)}=f(x) \quad , \quad \phi(x,t)\sqrt{\varphi(x)\varphi(t)}=K(x,t)$$

تصبح المعادلة التكاملية الأخيرة بالشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt$$

و المعادلة الأخيرة هي معادلة ذات نواة حقيقية متناظرة, لأنه بالاستفادة من كون الدالة $\phi(x,t)$ متناظرة, نجد أن

$$K(t,x)=\phi(t,x)\sqrt{\varphi(t)\varphi(x)}=\phi(x,t)\sqrt{\varphi(x)\varphi(t)}=K(x,t) \quad ; \quad \forall x,t\in[a,b]$$