رياضيات /3/

منشورات جامعة البعث
كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية

رياضيات /3/

الدكتور
عصام حكمت العبد الرزاق
أستاذ مساعد في قسم العلوم الأساسية

لطلاب السنة الثانية اختصاص (إلكترون – تحكم)

جامعة البعث

1433 هـ – 1434 هـ

2012 م – 2013 م

اللجنة العلمية:

-الأستاذ المساعد الدكتور عبد الباسط الخطيب(جامعة البعث-كلية العلوم)

-الأستاذ المساعد الدكتور محمد عامر(جامعة البعث-كلية العلوم)

-الأستاذ المساعد الدكتور عصام ديبان(جامعة البعث-كلية العلوم)

المدقق اللغوي:

-الدكتورة رشا العلي(جامعة البعث -كلية الآداب و العلوم الإنسانية)

الفهرس

الباب الثاني

التحليل العقدي

الباب الثالث

التحليل المتجهي

مقدمة الكتاب

تم إعداد كتاب الرياضيات (3) وفق المفردات المقترحة في مجلس قسم العلوم الأساسية في كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية في جامعة البعث ، وذلك لطلاب السنة الثانية لقسمي الإلكترون والتحكم في فرع الكهرباء . ويتناول هذا الكتاب ثلاثة أبواب.

الباب الأول: المعادلات التفاضلية.

ويحتوي على ثمانية فصول تعالج الموضوعات الآتية:

المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى – نماذج المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق – نماذج المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتق – بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى – المعادلات التفاضليّة الخطّيّة المتجانسة ذات الأمثال الثابتة (دون طرف ثانٍ) – المعادلات التفاضلية الخطية غير المتجانسة (بطرف ثان) ذات الأمثال الثابتة – جمل المعادلات التفاضلية – المعادلات التفاضلية الجزئية – حل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات والمعادلات التكاملية وطرائق حلها — حل المعادلات التكاملية (باستخدام تحويل لابلاس).

الباب الثاني: التحليل العقدي (المركب).

ويحتوي على عدة فصول تعالج الموضوعات الآتية:

العدد العقدي والمتحول العقدي – التوابع العقدية واشتقاقها – التكاملات العقدية ومبرهنة وصيغ كوشي التكاملية – المتسلسلات العقدية – نظرية الرواسب وحساب التكاملات – الراسم الحافظ للزاوية الموجهة.

الباب الثالث: التحليل ألمتجهي.

ويحتوي على ثلاثة فصول تعالج الموضوعات الآتية:

الحقول السلمية والحقول المتجهية – التكاملات المتجهية – التطبيقات الفيزيائية والهندسية للتحليل المتجهي.

وهذه الموضوعات مجتمعة ضرورية لتمهد الفهم والاستيعاب لمقرر الرياضيات (4) ، وكذا تعد امتداداً لمقررات الرياضيات في السنوات السابقة ، لتشكل هذه المقررات تسلسلاً رياضياً منطقياً مترابطاً.

وتم في هذا الكتاب مراعاة دعم كل فكرة نظرية بتطبيق عملي مباشر ، وذلك بهدف إغناء الفكرة النظرية وتوضيحها من جهة وتطويرها وترسيخها في ذهن الطالب من جهة أخرى، حيث أوردنا العديد من الأمثلة خلال عرضنا للمفاهيم النظرية وأتبعنا كل فصل بتطبيقات وتمارين عديدة يتجلى فيها فهم الطالب للقسم النظري ليرتقي إلى المستوى المنشود.

آملين في الختام أن يكون هذا الكتاب واضحاً وسهلاً وأن يؤدي الغاية المرجوة من تأليفه والله ولي التوفيق.

حمص 2013.

المؤلف

الدكتور عصام حكمت العبد الرزاق

الباب الأول

المعادلات التفاضلية

الفصل الأول: مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية.

الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى.

الفصل الثالث: المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الأمثال الثابتة.

الفصل الرابع: المعادلات التفاضلية الغير متجانسة ذات الأمثال الثابتة.

الفصل الخامس: جملة المعادلات التفاضلية.

الفصل السادس : المعادلات التفاضلية الجزئية.

الفصل السابع: حل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات.

الفصل الثامن: حل المعادلات التكاملية (باستخدام تحويل لابلاس).

فهرس الفصل الأول

الفصل الأول

1. مقدمة في المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى

تعريف: المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي على المشتقات أو التفاضلات لدالة نسبة لمتحول أو أكثر، فإذا كانت المشتقات عادية دعيت المعادلة بالمعادلة التفاضلية العادية وإذا كانت المشتقات جزئية دعيت المعادلة بالمعادلة التفاضلية الجزئية.

فإذا وجد في المعادلة متحول مستقل واحد x ودالة مجهولة واحدة y فإن الشكل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$F[x,y,y',y'',\cdots,y^n]=0 \;\; ; \;\; (n=1,2,3,\cdots)$$

مثال 1-1:

1) المعادلات التفاضلية:

$$\begin{cases} -\dfrac{dy}{dx}=f(x) \\ -M(x,y)dx+N(x,y).dy=0 \end{cases}$$

هي معادلات تفاضلية عادية.

2) المعادلات التفاضلية:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=x \\ -\dfrac{\partial u}{\partial t}=k\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \end{cases}$$

هي معادلات تفاضلية جزئية.

1.1 تصنيف المعادلات التفاضلية:

تعريف: إن رتبة المعادلة التفاضلية هي رتبة أعلى مشتقة للدالة موجودة في المعادلة.

تعريف: إن درجة المعادلة التفاضلية هي درجة أعلى مشتقة للدالة موجودة في المعادلة.

مثال 1-2:

المعادلة التفاضلية: $y' + y + \sin x = 0$ من الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

المعادلة التفاضلية: $3yy'y''^2 - y'^3 + 1 = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

المعادلة التفاضلية: $(n = 1,2,3,\cdots)\ ;\ F[x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}] = 0$ من الرتبة n والدرجة الأولى.

2.1 تشكيل المعادلة التفاضلية العادية :

يمكن الحصول على المعادلات التفاضلية العادية بعدة طرق أهمها الطريقة الآتية:

1.2.1 تشكيل المعادلة التفاضلية بطريقة حذف الثوابت الاختيارية:

لتكن المعادلة:

$$f(x,y,c) = 0 \qquad ; \qquad (1)$$

تمثل مجموعة منحنيات من المستوي (XOY)، ولنشكل المعادلة التفاضلية لـ (1) وذلك باشتقاقها نسبة لـ (x) على اعتبار (y) دالة في (x) و(c) ثابت، فنحصل على المعادلة:

$$f'_x(x,y,c) + f'_y(x,y,c)y' = 0 \quad ; \qquad (2)$$

بحذف الثابت c من العلاقتين (1) و(2) نحصل على معادلة مجموعة منحنيات المستوي (XOY):

$$f(x,y,y') = 0 \qquad (3)$$

مثال 1–3: أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر:

$$x^2 + y^2 - 2cx = 0$$

الحل: بالاشتقاق نسبة لـ x نجد:

$$2x + 2yy' - 2c = 0 \ \rightarrow c = \ x + yy'$$

نعوض قيمة c في معادلة الدوائر فنحصل على المعادلة التفاضلية لمجموعة الدوائر:

$$y^2 - x^2 - 2xyy' = 0$$

ملاحظة: إذا كانت معادلة مجموعة المنحنيات في المستوي (xoy) تحوي n ثابتاً اختيارياً أي:

$$f(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0 \quad ; \quad (4)$$

لإيجاد المعادلة التفاضلية لمجموعة المنحنيات (4) نشتق المعادلة (4) بشكل متتالي n مرة نسبة لـ x على اعتبار y دالة في $(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$ نحصل بالنتيجة على $(n+1)$ معادلة.

نوجد الثوابت $c_1, c_2, \cdots, c_n$ بدلالة $y,\ x$ ومشتقاتها من n معادلة ثم نعوض الناتج في معادلة مجموعة المنحنيات فنحصل على المعادلة التفاضلية:

$$F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (5)$$

وذلك على اعتبار الثوابت الاختيارية في المعادلة (4) مستقلة عن بعضها البعض.

مثال 1–4: شكل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة الآتية حلاً لها:

$$y = c_1 x + \frac{c_2}{x} + c_3$$

الحل: لحذف الثوابت الاختيارية للدالة نشتقها بصورة متتالية ثلاث مرات أي:

$$y' = c_1 - \frac{c_2}{x^2} \ , \ y'' = \frac{2c_2}{x^3} \ , \ y''' = \frac{-6c_2}{x^4}$$

نلاحظ أن العلاقة بين الدالة ومشتقاتها المستقلة عن الثوابت الاختيارية هي:

$$y''' + \frac{3}{x} y'' = 0$$

وهي المعادلة التفاضلية المطلوبة.

3.1 حل المعادلة التفاضلية :

نسمي الدالة $y = f(x)$ القابلة للاشتقاق n مرة على مجال I حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad (1)'$$

إذا حول هذه المعادلة التفاضلية إلى مطابقة من الشكل:

$$F\left(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)\right) \equiv 0 \ ; \ \forall\, x \in I$$

1.3.1 أنواع حلول المعادلة التفاضلية :

1. الحل العام :

نسمي كل حل من الشكل:

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n) \qquad (2)$$

حيث $c_1, c_2, \dots, c_n$ ثوابت اختيارية مستقلة عن بعضها البعض وعددها يساوي رتبة المعادلة التفاضلية $'(1)$. وبالحل العام لهذه المعادلة حيث نشترط أن الدالة φ لها مشتقات جزئية مستمرة حتى الرتبة n.

مثال 1–5: تحقق أن الدالة:

$$y = x^2 + cx$$

هي حلاً للمعادلة التفاضلية

$$x.y' - x^2 - y = 0$$

الحل: بالاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$y' = 2x + c \xrightarrow{\text{بالتعويض}} x(2x + c) - x^2 - (x^2 + cx) \equiv 0$$

نلاحظ أن لهذه المعادلة التفاضلية عدداً غير منته من الحلول وذلك بإعطاء c قيماً مختلفةً.

2. الحل الخاص :

كل حل يمكن الحصول عليه من الحل العام لمعادلة تفاضلية، بإعطاء الثوابت الاختيارية قيماً عدديةً مختلفةً يسمى حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية.

مثال 1–6: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y = 0$$

والمار بالنقطتين: $M_2\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $M_1(0,1)$ مع العلم أن لها حلاً عاماً:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \; .$$

الحل:

من أجل النقطة $M_1(0,1)$: $c_1 = 1 \Leftarrow 1 = c_1\cos(0) + c_2\sin(0)$

من أجل النقطة $M_2\left(\frac{\pi}{2},0\right)$: $c_2 = 0 \Leftarrow 0 = c_1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

إذاً الحل الخاص المار بالنقطتين المذكورتين هو : $y = \cos x$.

4.1 المعادلات التفاضلية من الرتب العليا، تخفيض الرتبة :

لدينا:

$$F\left[x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right] = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة n والدرجة الأولى، وفي بعض الحالات الخاصة يمكن تخفيض رتبة هذه المعادلة رتبة واحدة وأهم هذه الحالات:

1.4.1 الدالة y غير مذكورة صراحة :

أي من الشكل:

$$F\left[x, , y', y'', \cdots, y^{(n)}\right] = 0$$

عندئذ نفرض:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = p'$$

وبالتالي يكون:

$$F\left[x, p, p', p'', \cdots, p^{(n-1)}\right] = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في الدالة المجهولة p وبعد إيجادها نحصل على y بالمكاملة.

فإذا كانت المعادلة من الشكل المعمم:

$$F\left[x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}\right] = 0 \;\; ; \;\; (1 \le k \le n-1)$$

نفرض أن:

$$y^{(k)} = q \Rightarrow y^{(k+1)} = \frac{dq}{dx} = q'$$

ومنه نجد:

$$F\left[x, q, q', \cdots, q^{(n-k)}\right] = 0$$

معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-k)$ في الدالة المجهولة q وبعد إيجادها نحصل على y بالمكاملة.

2.4.1 المتحول x غير مذكور صراحة :

أي من الشكل:

$$F\left[y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right] = 0$$

$$\xrightarrow{\text{نفرض أن}} y' = \frac{dy}{dx} = p \xRightarrow{\text{حسب قاعدة السلسلة}} y'' = \frac{dp}{dy} . \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \ ;$$

$$y''' = \frac{d}{dy}\left(p . \frac{dp}{dy}\right) . \frac{dy}{dx} = p\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]$$

معادلة تفاضلية من الرتبة $(n-1)$ في المجهول p كدالة في y وبعد إيجادها نحصل على y بالمكاملة.

تمارين محلولة (1)

1.أوجد رتبة ودرجة المعادلات التفاضلية التالية:

المعادلة	الرتبة	الدرجة
$y' - \frac{2}{x}y = x$	أولى	أولى
$y'^3 x = 1 + y'$	أولى	ثالثة
$y'^2 - y^2 = 0$	أولى	ثانية
$y'' = x + 3$	ثانية	أولى
$y' - y^5 = 0$	أولى	أولى
$y''' + 4y' = 0$	ثالثة	أولى
$2y''y + y'^2 = y$	ثانية	أولى

2.أوجد المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات التالية:

1. $y^2 - cx^2 + \frac{a^2 c}{1+c} = 0$

الحل:

بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد:

$$2yy' - 2cx = 0 \rightarrow c = \frac{1}{x} y\, y'$$

نعوض بالمعادلة المعطاة:

$$y^2 - y\, y'\, x + \frac{a^2 \frac{y\, y'}{x}}{1 + \frac{y\, y'}{x}} = 0$$

2. $y = ce^{cx}$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة لـ x:

$$y = c^2 e^{cx} = cy \to c = \frac{\acute{y}}{y}$$

نعوض بالمعادلة:

$$y^2 - y' e^{\frac{y' x}{y}} = 0$$

3. $y = \frac{c_1}{x} + c_2$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة لـ x مرتين:

$$y' = \frac{-c_1}{x^2} \ , \ y'' = \frac{2c_1}{x^3} \to c_1 = \frac{x^3 y''}{2}$$

بالتعويض نجد:

$$y'' + \frac{2}{x} y' = 0$$

4. $y = ae^x + be^x + c$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة لـ x ثلاث مرات:

$$y' = ae^x + be^x \ , \ y'' = ae^x + be^x , y''' = ae^x + be^x$$
$$y' - y'' + y''' = y - c$$

5. $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$

الحل: بالاشتقاق بالنسبة لـ x مرتين:

$$\acute{y} = e^x(a\cos x + b\sin x) + e^x(-a\sin x + b\cos x)$$
$$\acute{y} = y + e^x(-a\sin x + b\cos x)$$
$$\acute{\acute{y}} = \acute{y} + \underbrace{e^x(-a\sin x + b\cos x)}_{\acute{y}-y} - \underbrace{e^x(a\cos x + b\sin x)}_{y}$$

وبالتالي بالتعويض نجد:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

3. تحقق فيما إذا كانت الدوال التالية تحقق المعادلات التفاضلية الموافقة لها:

1. $y'' + 2y' + y = x + 2 \quad ; \quad y = f(x) = x$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = 1\,,\ y'' = 0$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن: $y = x$ حلاً للمعادلة التفاضلية المعطاة.

2. $x^2\, y'' + 2x^2 y' + \left(x^2 - 2\right)y = 0 \quad ; \quad y = x^2 e^{-x}$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = 2x\,e^{-x} - x^2 e^{-x}$$

$$y'' = 2\,e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2\, e^{-x}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية.

3. $y'' + y = 1 \quad ; \quad y = 1 + \sin x\,, y = 1 - \cos x$

الحل: من أجل الدالة: $y = 1 + \sin x$ نجد:

$$y' = \cos x \quad , \quad y'' = -\sin x$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية.

من أجل الدالة: $y = 1 - \cos x$ نجد:

$$y' = \sin x \quad , \quad y'' = \cos x$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية.

4. $y'' + 4xy' + 5y = x^2 \quad ; \quad y = x^2 + 4x + 2$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = 2x + 4 \quad ; \quad y'' = 2$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن الدالة لا تحقق هذه المعادلة وبالتالي لا تصلح أن تكون حلاً للمعادلة المعطاة.

4.تحقق من أن الدالة: $y = ax^2 + bx$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^2 y'' + 2x\,y' + 2y = 0$$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = 2ax + b \quad ; \quad y'' = 2a$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية وبما أن الحل يحوي ثابتين اختيارين مستقلين وعددهما يساوي رتبة المعادلة فإننا نسميه حل عام للمعادلة التفاضلية.

5.تحقق أن الدالة: $y = ae^{x} + be^{-x}$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y'' - y = 0$$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = a\,e^{x} - b\,e^{-x} \quad ; \quad y'' = a\,e^{x} + b\,e^{-x}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية وبما أن الحل يحوي ثابتين اختيارين مستقلين وعددهما يساوي رتبة المعادلة فإننا نسميه حلاً عام للمعادلة التفاضلية.

6. تحقق أن الدالة: $y = ae^{2ix} + be^{-2ix} + c$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y''' + 2i\,y'' = 0$$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = 2ia\,e^{2ix} - 2ib\,e^{-2ix} \quad ;$$
$$y'' = -4a\,e^{2ix} - 4b\,e^{-2ix} \quad ;$$
$$y''' = -8iae^{2ix} + 8ibe^{-2ix}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية وبما أن الحل يحوي ثلاث ثوابت اختيارية مستقلة وعددهما يساوي رتبة المعادلة فإننا نسميه حل عام للمعادلة التفاضلية.

7. تحقق أن الدالة : $y = ax + bx^2 + cx^3$ هي حلاً للمعادلة التفاضلية التالية:

$$x^3\ y''' - 3x^2 y'' + 6x\,y' - 6y = 0$$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$y' = a + 2bx + 3cx^2 \quad ; \quad y'' = 2b + 6cx \quad ; \quad y''' = 6c$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد أن الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة، وبالتالي تشكل حلاً للمعادلة التفاضلية. وبما أن الحل يحوي ثلاث ثوابت اختيارية مستقلة وعددهما يساوي رتبة المعادلة فإننا نسميه حلاً عام للمعادلة التفاضلية.

8. خفض رتب المعادلات التفاضلية الآتية:

1. $x\,y'' + y' = x$

الحل: معادلة من الرتبة الثانية لا تحوي y صراحة لذلك نفرض أن :

$$y' = p \quad ; \quad y'' = p'$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد :

$$x\,p' + p = x$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالمجهول p كدالة بالمتحول x بعد إيجاده نكون حصلنا على y بالمكاملة.

2. $2yy'' + y'^2 = y$

الحل: معادلة من الرتبة الثانية لا تحوي x صراحة لذلك نفرض أن:

$$y' = p \quad ; \quad y'' = \frac{d\,p}{d\,y} \cdot \frac{d\,y}{d\,x} = p \cdot \frac{d\,p}{d\,y}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد :

$$2yp\frac{dp}{dy}+p^2=y$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالمجهول p كدالة بالمتحول y بعد إيجاده نكون حصلنا على y بالمكاملة.

3. $y''=y'+1$

الحل: معادلة من الرتبة الثانية لا تحوي x صراحة لذلك نفرض أن:

$$y'=p \quad ; \quad y''=p\cdot\frac{d\,p}{d\,y}$$

نعوض بالمعادلة التفاضلية نجد :

$$p\frac{dp}{dy}=p+1$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالمجهول p كدالة بالمتحول y بعد إيجاده نكون حصلنا على y بالمكاملة.

4. $y''+y'=2x$

الحل: من الرتبة الثانية ولا تحوي y صراحة. لذلك نفرض أن:

$$y'=p \;\rightarrow\; y''=p' \Longrightarrow p'+p=2x$$

معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى في المجهول p كدالة بالمتحول x.

5. $y'''+y''-2y'y=0$

الحل: من الرتبة الثالثة ولا تحوي المتحول x صراحة. لذلك نفرض أن :

$$y'=p \Longrightarrow y''=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \longrightarrow y'''=\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right).\frac{dy}{dx}=$$
$$p\left[(\frac{dp}{dy})^2+p\frac{d^2p}{dy^2}\right] \Longrightarrow y'''=p(\frac{dp}{dy})^2+p^2\frac{d^2p}{dy^2} \Longrightarrow p^2\frac{d^2p}{dy^2}+$$
$$p(\frac{dp}{dy})^2+p\frac{dp}{dy}$$
$$=\;2py \;\Rightarrow \boxed{p\;\frac{d^2p}{dy^2}+(\frac{dp}{dy})^2+\frac{dp}{dy}=2y}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية في المجهول p كدالة في y.

تمارين غير محلولة (1)

1 -كون المعادلات التفاضلية لمجموعة المنحنيات :

1) : $y = cx + c^3$.

2) : $y = (x - c)^3$.

3) : $y = c\,x^3$.

4) : $y = ax^2 + be^x$.

5) : $y = a\sin x + bx$.

6): $y = ax^3 + bx^2 + cx$.

2 -حول المعادلات التفاضلية الآتية، إلى معادلات من الرتبة الأولى وذلك بتخفيض رتبتها:

1) : $y''\left(3 + y\,y'^2\right) = y'^4$.

2) : $y'^2 + 2\,x\,y\,y'' = 0$.

3) : $y\,y' + 2x^2 y'' = x\,y'^2$.

4) : $2x\,y^2\left(x\,y'' + y'\right) + 1 = 0$.

5) : $y\left(2\,x\,y'' + y'\right) = x\,y'^2 + 1$.

6) : $x^2\,y\,y'' + 1 = (1 - y)x\,y'$.

فهرس الفصل الثاني

الفصل الثاني

2. المعادلات التفاضلية من الرتبة لأولى

تعريف:2-1 :الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى هو:

$$M(x,y)+N(x,y)\frac{dy}{dx}=0$$

أو من الشكل:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

1.2 نماذج المعادلات التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتق:

1.1.2 المعادلات ذوات المتحولات المنفصلة:

تعد المعادلات التفاضلية ذوات المتحولات المنفصلة من الأنواع البسيطة والأساسية للمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى، وفيها يكون أمثال dx تابعة فقط لـ x، وأمثال dy تابعة فقط لـ y، وهي تكتب بالشكل:

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

حيث: $M(x)$ و $N(y)$ توابع معطاة.

ولإيجاد الحل العام لها يكفي أن نكامل الطرفين:

$$\int M(x)dx+\int N(y)dy=c$$

حيث c ثابت التكامل (ثابت اختياري).

مثال 2–1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y'-x(y^2+1)=0$$

الحل: نكتب المعادلة بالشكل:

$$\frac{dy}{dx}-x(y^2+1)=0 \ \Rightarrow \frac{dy}{y^2+1}=x\,dx \ ; \quad y^2+1\neq 0$$

وبالمكاملة نجد أن الحل العام:

$$\arctan y=\frac{1}{2}x^2+c\Rightarrow$$

$$y = \tan\left(\frac{1}{2}\, x^2 + c\right)$$

مثال 2–2: المعادلة التفاضلية:

$$2\,x\,dx\; + (5\,y\,4\; + \cos y)\,d\,y\; = \;0$$

الحل: وهي معادلة منفصلة المتحولات، بالمكاملة نجد الحل العام لها وهو:

$$x^2 + \;y^5 + \sin y = c$$

ملاحظة: هناك معادلات تفاضلية تسمى معادلات منفصلة المتحولات، و هي من الشكل:

$$M_1\,(x)N_1(y)dx + M_2\,(x)N_2(y)dy = 0$$

حيث تصبح معادلة منفصلة المتحولات إذا قسمنا الطرفين على :

$M_2\,(x)\mathrm{N}_1(\mathrm{y}) \neq 0$. أما جذر المعادلة $M_2\,(x)N_1(y) = 0$، فهو قد يكون حلاً خاصاً للمعادلة التفاضلية.

مثال 2–3: أوجد الحل العام للمعدلة الآتية:

$$2x\sin y\;\,dx + (x^2 + 3)\cos y\,dy = 0$$

الحل: إن هذه المعادلة في ظاهرها غير منفصلة المتحولات ولكن بالتقسيم على الدالة: $(x^2 + 3)\sin y$ نحصل على:

$$\frac{2x}{(x^2+3)}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0$$

معادلة ذات متحولات منفصلة بمكاملة الطرفين نجد أن:

$$\ln[(x^2 + 3)|\sin y\,|] = \ln c$$

وبالتالي:

$$\sin y = \frac{c}{(x^2+3)} \Longrightarrow y = \arcsin\frac{c}{(x^2+3)}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

مثال 2–4: أثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$a(xy' + 2y) = xy'y$$

هو:

$$x^2y = ce^{\frac{y}{a}}$$

ثم أوجد الحل الخاص المار من النقطة $(2a, a)$ و المحقق للشرط الابتدائي $y(2a) = a$.

الحل: نكتب المعادلة المفروضة بالشكل:

$$2aydx + (ax - xy)dy = 0$$

$$\Longrightarrow 2aydx + x(a - y)dy = 0$$

بالتقسيم على $x \cdot y$ نجد:

$$2a\frac{dx}{x} + \frac{a-y}{y}dy = 0$$

بالمكاملة نجد أن:

$$2a\ln|x| \ + a\ln|y| - y = \ln c$$

$$2\ln|x| + \ln|y| - \ln c_1 = \frac{y}{a} \ ; \ln c_1 = \frac{\ln c}{a}$$

$$\frac{x^2y}{c_1} = e^{\frac{y}{a}} \Longrightarrow x^2y = c_1 e^{\frac{y}{a}}$$

وهو الحل العام. لإيجاد الحل الخاص المحقق للشرط الابتدائي المفروض نوجد قيم الثابت c_1 (أي نعوض $x = 2a, y = a$ في الحل العام، فنجد:

$$4a^3 = c_1 e \Longrightarrow c_1 = \frac{4a^3}{e}$$

بالتعويض في الحل العام نجد الحل الخاص التالي:

$$x^2y = \frac{4a^3}{e}e^{\frac{y}{a}}$$

2.1.2 المعادلات التفاضلية التي ترد إلي معادلات منفصلة المتحولات :

توجد بعض الأشكال من المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات منفصلة المتحولات، وذلك بتغيير االمتحولات.

1- المعادلات التفاضلية من الشكل:

$\acute{y} = f(ax + by + c)$ حيث: a, b, c ثوابت.

لحل مثل هذا النوع من المعادلات نفرض أن:

$$u = ax + by + c$$

ثم، نشتق الطرفين بالنسبة لـ x فنجد :

$$\acute{y} = \frac{1}{b}\acute{u} - \frac{a}{b} \text{ أو } \acute{u} = a + b\acute{y}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\frac{du}{dx} = bf(u) + a = f(u) \text{ أو } f(u) = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b}$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتحولات.

مثال 2–5: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y' = (y - 4x)^2$$

الحل: نفرض أن $t = y - 4x$ ومنه: $y' = t' + 4$ بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد: $t' + 4 = t^2$ وبالتالي:

$$\frac{dt}{t^2 - 4} = dx \Longrightarrow x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = c$$

$$\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| = \ln c - 4x \Longrightarrow \frac{t-2}{t+2} = c.e^{-4x} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-4x-2}{y-4x+2} = c.e^{-4x}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المفروضة.

2– المعادلة التفاضلية من الشكل :

$$y\ f_1(x.y) + x\ f_2(x.y)dy = 0$$

ترد هذه المعادلة إلى معادلة ذات متحولات منفصلة بأن نفرض:

$z = x.y$ ، ومنه $y = z / x$. بالمفاضلة نجد: $xdy = dz - \frac{z}{x}dx$

نعوض في المعادلة التفاضلية فتصبح:

$$\frac{z}{x}\ f_1(z)dx + f_2(z)dz - \frac{z}{x}\ f_2 dx = 0$$

أو بالشكل :
$$\frac{f_2(z)dz}{z(f_1(z)-f_2(z))}+\frac{dx}{x}=0$$
وهي معادلة منفصلة المتحولات.

مثال 2–6: أوجد الحل للمعادلة التفاضلية التالية:
$$y(x.y+1)dx+x(1+x.y+x^2y^2)dy=0$$
الحل: نفرض أن: $z=x.y$ ، ومنه:
$$y=\frac{z}{x},dy=\frac{xdz-zdx}{x^2}$$
وبالتعويض في المعادلة المفروضة نجد:
$$\frac{z}{x}(z+1)dx+x(1+z+z^2)(\frac{xdz-zdx}{x^2})=0$$
بإصلاح المعادلة الأخيرة نجد:
$$z^3dx-x(1+z+z^2)dz=0$$
وبفصل المتحولات نجد:
$$\frac{dx}{x}-\frac{dz}{z^3}-\frac{dz}{z^2}-\frac{dz}{z}=0$$
بالمكاملة:
$$\ln x+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}-\ln z=c$$
$$2z^2\ln\left|\frac{z}{x}\right|-2z-1=cz^2$$
$$2x^2y^2\ln y-2xy-1=cx^2y^2$$

مبرهنة:2–1–1 :كل معادلة تفاضلية من الشكل: $F(x,y,\acute{y})$ محلولة بالنسبة للمشتقة $\acute{y}=f(x,y)$ ولا تتغير إذا بدلنا كل x بـ cx مهما كانت قيمة c، حيث c ثابت اختياري، ترد إلى معادلة تفاضلية منفصلة المتحولات.

الإثبات: لتكن المعادلة التفاضلية من الأولى والمحلولة بالنسبة للمشتق $y' = f(x,y)$ ،
لنبدل كل x بـ cx، نحصل على المعادلة التفاضلية المكافئة التالية:

$$\frac{1}{c} y' = f(c\,x, y)$$ ،

و بما أن الثابت c كيفي فبإمكاننا أن نأخذه مساوياً $x \neq 0$; $c = \frac{1}{x}$، بالتعويض في المعادلة التفاضلية السابقة نحصل على:

$$y' = \frac{1}{x} g(y) \quad \text{أو} \quad y'x = f(1,y) = g(y)$$

والمعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة.

2.2 المعادلات التفاضلية التامة :

نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

حيث $M(x,y)$ و $N(x,y)$ تابعان قابلان للمفاضلة باستمرار في الساحة D من المستوي XOY، إنها تامة، إذا كان طرفها الأيسر تفاضلاً كلياً (تاماً) لتابع ما $F(x,y)$ أي:

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

مبرهنة: 2-1-2 الشرط اللازم والكافي لتكون المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

معادلة تامة هو أن تتحقق العلاقة:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الإثبات: لزوم الشرط: لنفرض أن الطرف الأيسر من المعادلة التفاضلية السابقة (1) تفاضل تابع للتابع $F(x,y)$، عندئذ:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

وعليه فإن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y), \frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$$

وباشتقاق هاتين العلاقتين بالنسبة لـx وy على الترتيب نحصل على:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

وكما نعلم، أنه إذا كانت المشتقات الجزئية المختلطة مستمرة فهي متساوية وهذا يؤدي إلى أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

كفاية الشرط: لنفرض أن الشرط $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ محقق ولنبرهن على أن الطرف الأيسر من المعادلة (1) هو تفاضل تام لتابع ما $F(x,y)$ يطلب إيجاده.

لنأخذ العلاقة الأولى $\frac{\partial F}{\partial \mathrm{x}} = M(x,y)$ ونكاملها بالنسبة لـ x معتبرين y ثابت فنجد أن:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (*)$$

حيث إن $\varphi(y)$ تابع كيفي في المتحول y يطلب تعينه. من أجل ذلك نشتق جزئياً بالنسبة لـ y العلاقة السابقة $(*)$ فنجد:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \acute{\varphi}\,(y) = N(x,y)$$

وبالتالي:

$$\acute{\varphi}\,(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\, dx \quad (**)$$

بقي أن نبرهن أن الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة غير متعلق بـ x لذلك نشتق بالنسبة لـ x آخذين بعين الاعتبار أن $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ فنحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial M}{\partial y}dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

وهذا يعني فعلاً أن الطرف الأيمن غير متعلق بـ x.

نكمل العلاقة $(**)$ بالنسبة لـy ، فنجد:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right)$$

نعوض قيمة $\varphi(y)$ في العلاقة $(*)$ فنجد التابع المطلوب:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}dx\right)dx$$

مثال 2–7: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(3x^2y+y^2)dx+(x^3+2xy+10y)dy=0$$

الحل: لدينا:

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=3\mathrm{x}^2+2y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

هذا يعني أن المعادلة تامة لحلها نفتش عن التابع $F(x,y)$ الذي يحقق العلاقتين:

$$\acute{F_x}\ =3x^2y+y^2\ ,\ \acute{F_y}\ =x^3+2xy+10y$$

نكامل العلاقة الأولى بالنسبة لـ x معتبرين أن y ثابت فنجد:

$$F(x,y)=\int(3x^2y+y^2)dx=x^3y+xy^2+\varphi(y)$$

حيث $\varphi(y)$ ثابت التكامل لنشتق جزئياً العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y:

$$\acute{F_y}\ =x^3+2xy+\acute{\varphi}\ (y)$$

ولكن:

$$\acute{F_y}\ =x^3+2xy+10y$$

وبالتالي نستنتج أن:

$$\acute{\varphi}\ (y)=10y\rightarrow\varphi(y)=5y^2+c$$

حيث c ثابت كيفي إذاً التابع المطلوب إيجاده هو:

$$F=x^3y+xy^2+5y^2+c$$

وبالتالي الحل العام يعطى بالشكل:

$$x^3y+xy^2+5y^2=c_1$$

ملاحظة 1: في عملية إيجاد التابع F انطلقنا من العلاقة $\acute{F_x}$ وكاملناها بالنسبة لـ x معتبرين أن y ثابت وبالإمكان الحصول على النتيجة نفسها إذا انطلقنا من العلاقة $\acute{F_y}$ وكاملناها بالنسبة لـ y معتبرين أن x ثابت.

ملاحظة 2: يمكن أن نستخدم طريقة أخرى مباشرة ولا تستخدم إلا في المعادلات التفاضلية التامة وهذه الطريقة تتلخص بالشكل التالي:

نوجد أولاً: $\int M(x,y)dx$ وثانياً: $\int N(x,y)dy$، ثم نأخذ اجتماع (اتحاد) هذين التكاملين فنحصل على الحل العام.

مثال: 2–8 عين قيمة الثابت a حتى تكون المعادلة التفاضلية:

$$(3x^3+2xy)dx+(ax^2+by^2)dy=0$$

تامة ثم أوجد الحل العام لها.

الحل: نلاحظ أن:

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=2x \quad ; \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2ax$$

وتكون المعادلة تامة عندما:

$$\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial \mathrm{y}}=2x \quad = \quad \frac{\partial N}{\partial x}=2ax \Longrightarrow a=1$$

والمعادلة التفاضلية تصبح بالشكل:

$$(3x^3+2xy)dx+(x^2+by^2)dy=0$$

ولإيجاد الحل العام، نوجد: $\int M\,dx$ و $\int N\,dy$ بالترتيب:

$$\int(3x^3+2xy)\,dx=x^3+x^2y$$
$$\int(x^2+by^2)\,dy=x^2y+\frac{b}{3}y^3$$

وبأخذ اجتماع هذين التكاملين نجد الحل العام المطلوب:

$$F=x^3+x^2y+\frac{b}{3}y^3=c$$

نلاحظ أننا لم نضع الثوابت الاختيارية في التكاملات السابقة وذلك لأن الثابت النهائي c يعبر ضمنياً في مجموع الثابتين الاختياريين السابقين.

3.2 المعادلات التفاضلية غير التامة وعوامل التكميل :

إذا لم تكن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\,; \qquad (1)$$

تامة ، أي أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

فإننا نضرب طرفي المعادلة بالدالة $\mu(x,y) \neq 0$ المعرفة على نفس ساحة تعريف كلا من $M(x,y); N(x,y)$ بحيث تصبح المعادلة التفاضلية (1) تامة. من الشكل:

$$\mu(x,y).M(x,y)dx + \mu(x,y).N(x,y)dy = 0\,; \qquad (2)$$

ملاحظة: حسب النظرية السابقة حتى تكون المعادلة التفاضلية (2) تامة، يجب أن يتحقق:

$$\frac{\partial(\mu.M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu.N)}{\partial x} \Rightarrow M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (3)$$

وبحل المعادلة (3) نحصل على عامل التكميل $\mu(x,y)$.

1.3.2 طرائق إيجاد عوامل التكميل :

1- إذا كان $\mu = \mu(x) \Longleftarrow \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ومنه:

$$N\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} \Rightarrow \frac{d(\ln|\mu|)}{dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow d(\ln|\mu|) =$$

$$f(x)dx \xRightarrow{\text{بالمكاملة}} \ln\mu = \int f(x)dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

2- إذا كان $\mu = \mu(y)$ فإن $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ عندئذ عامل التكميل هو:

$$\mu(\mathrm{y}) = e^{\int g(y)d(y)} \;\; ; g(y) = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

ملاحظة: يمكن معرفة عوامل التكميل للمعادلة التفاضلية غير التامة بالشكل:

- إذا كان $\frac{\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{N} = f(x)$ عندئذ عامل التكميل من الشكل $\mu = \mu(x)$.

- إذا كان $\frac{\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{M}=g(y)$ عندئذ عامل التكميل من الشكل $\mu=\mu(y)$.

مثال 2–9: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(y+xy^2)dx-xdy=0$$

الحل:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1+2xy\,;\ \frac{\partial N}{\partial x}=-1\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة غير تامة.

نلاحظ أن:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{-1-1-2xy}{y+xy^2}=\frac{-2(1+xy)}{y(1+xy)}=\frac{-2}{y}$$

هذا يعني أن $\mu=\mu(y)$ ومنه:

$$\frac{d(\ln|\mu|)}{dy}=\frac{-2}{y}\ \Rightarrow d(\ln|\mu|)=\frac{-2dy}{y}\ \Rightarrow\ \mu(y)=\frac{1}{y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكميل، نجد أن:

$$\left(\frac{1}{y}+x\right)dx-\frac{-x}{y^2}dy=0\overset{\text{تامة}}{\Rightarrow}\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{-1}{y^2}\Rightarrow xdx+\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy=0$$

$$\Rightarrow xdx+\frac{ydx-xdy}{y^2}=0\Rightarrow d\left(\frac{1}{2}x^2\right)+d\left(\frac{x}{y}\right)=0\xrightarrow{\text{بالمكاملة}}\frac{1}{2}x^2+\frac{x}{y}=c\Rightarrow$$

$$\boxed{x^2y+2x=2cy}$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية.

3– إذا كان عامل التكميل $\mu=\mu(z)$، حيث $z=z(x,y)$ دالة معلومة في x وy.

لما كان $\mu=\mu(z)=\mu(x,y)$ فإن: $\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial x}$ ومنه، نجد:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial z}\left(M\frac{\partial z}{\partial y}-N\ \frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

أي:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\acute{N}_x - \acute{M}_y}{M .\acute{z}_y - N .z'_x}$$

فإذا كان الطرف الأيمن دالة في المتغير z فقط، فإن الطرف الأيسر كذلك. وعليه، فإن عامل تكميل يعطى بالعلاقة:

$$\mu(z) = exp\left[\int \frac{\acute{N}_x - \acute{M}_y}{M .\acute{z}_y - N .\acute{z}_x} dz\right]$$

إذن، لإيجاد عامل تكميل للمعادلة التفاضلية غير التامة، يجب أن نفترض، أولاً، شكلاً معيناً للدالة z، كأن نفرض: $z = x$ أو $z = y$ أو $z = x + y$ أو $z = x.y$ ... إلخ وباستثناء الحالات التي يكون فيها للدالة z شكل بسيط، فقد لا نصل لحل.

فإذا كان $z = x$ نحصل على $\mu = \mu(x)$، وإذا كان $z = y$ نحصل على $\mu = \mu(y)$ ، أما إذا كان $z = x + y$ فإن عامل التكميل هو:

$$\mu(z) = \exp\left[\int \frac{\acute{N}_x - \acute{M}_y}{M - N} dz\right]$$

وإذا كان $z = x.y$ فإن عامل التكميل هو:

$$\mu(z) = \exp\left[\int \frac{\acute{N}_x - \acute{M}_y}{x\cdot M - xy\cdot N} dz\right]$$

ملحوظة 1: يمكن إهمال ثابت المكاملة الاختياري لدى حساب عامل التكميل، لأنه يكافئ ضرب المعادلة التفاضلية بثابت موجب.

ملحوظة 2: إن ضرب طرفي المعادلة التفاضلية الغير التامة بعامل التكميل $\mu(x,y)$ قد يفقدها أو يكسبها بعض الحلول، عندما يكون $\mu = 0$ أو $1/\mu = 0$ ، أي أن مجموعتا حلول المعادلتين ليستا، بالضرورة متطابقتين.

ملحوظة 3: إذا وجد للمعادلة التفاضلية عاملي تكميل μ وλ مستقلين خطياً، فإن الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية يعطى بالعلاقة $\lambda = c.\mu$، حيث c ثابت اختياري.

فمثلاً، المعادلة: $y\,dx + x\,dy = 0$ تامة، أي أن $\lambda = 1$ عامل تكميل لها.

والمعادلة: $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$ تامة، وهي تنتج من المعادلة السابقة بضرب طرفيها بالمقدار $\mu = 1/xy$.

إذن، $\mu = 1/xy$ عامل تكميل آخر للمعادلة الأصلية ولما كان μ و λ مستقلين خطياً، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة يعطى بالعلاقة:

$$\frac{c}{xy} = 1 \quad \text{أو} \quad y = \frac{c}{x}$$

ملحوظة 4: إن للمعادلة التفاضلية عدد غير منته من عوامل التكميل. وهذا واضح لأنه إذا كان μ عامل تكميل للمعادلة التفاضلية، وكان $u = c$ التكامل العام لهذه المعادلة، فإنه، وفقاً للملحوظة السابقة، يكون للمعادلة التفاضلية عامل تكميل من النمط $\lambda = \mu.f(u)$ ، حيث f دالة اختيارية في u.

ملحوظة 5: إذا كانت المعادلة متجانسة وكان $x \cdot M - y\,.N \neq 0$، فإن: $\mu = \frac{1}{x.M - y\,.N}$ عامل تكميل لهذه المعادلة.

مثال 2–10: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$(3x^2 \cos y - \sin y)\cos y\,dx - x\,dy = 0$$

الحل: نحسب الفرق:

$$M'_y - N'_x = -2(3x^2 \cos y - \sin y)\sin y$$

ولما كانت هذه العبارة لا تساوي الصفر، فالمعادلة التفاضلية غير تامة، ولكن نلاحظ أن:

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = 2\tan y$$

أي أن للمعادلة عامل تكميل يتبع y فقط، يعطى بالعلاقة:

$$\mu(y) = e^{[\int 2\tan y\,dy]} = e^{[-2\ln|\cos y|]} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل هذا، فتصبح:

$$(3x^2 - \tan y)dx - \frac{x}{\cos^2 y}\,dy = 0$$

وهي معادلة تامة ويكون الطرف الأيسر تفاضلاً تاماً لدالة $u(x,y)$ بحيث يكون:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - \tan y \quad (i) \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{cos^2 y} \ (ii)$$

تكامل المعادلة (i) بالنسبة إلى y:

$$u(x,y) = -x\int \frac{dy}{cos^2 y} = -x\tan y + \varphi(x)$$

نعوض في المعادلة (ii):

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2 - \tan y = -\tan y + \acute{\varphi}(x)$$

أي أن: $\acute{\varphi}(x) = 3x^2$ ومنه $\varphi(x) = x^3 + c_1$ وعليه فإن:

ويكون التكامل العام للمعادلة المفروضة هو:

مثال 2–11: أوجد الحل للمعادلة:

$$\left(1 - \frac{x}{y}\right)dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$

الحل : واضح أن المعادلة غير تامة، لأن $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ ولكن:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-\left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)}{2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}} = -\frac{1}{x}$$

أي أن عامل التكميل يتبع فقط للمتغير x ويعطى بالعلاقة:

$$\mu(x) = e^{\left[\int \frac{-1}{x}\right]dx} = e^{[-\ln|x|]} = \frac{1}{x}$$

نضرب طرفي المعادلة المعطاة بعامل التكميل، فنحصل على المعادلة التامة:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)dx + \left(2y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$$

ونكتبها كما يلي:

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{y} + 2y\right)dy - \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0$$

أي أن:

$$d\left(\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y}\right) = 0$$

وعليه، فالحل العام للمعادلة:

$$\ln|x| + \ln|y| + y^2 - \frac{x}{y} = c$$

مثال 2–12: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(xy^3 + 2x^2y^2 - y^2)dx + (x^2y^2 + 2x^3y - 2x^2)dy = 0$$

الحل : نحسب الفرق:

$$\acute{M}_y - \acute{N}_x = xy^2 - 2x^2y - 2y + 4x$$

فالمعادلة غير تامة، ولما كان:

$$\frac{\acute{M}_y - \acute{N}_x}{x.M - y.N} = 1 - \frac{2}{xy}$$

إذن، للمعادلة عامل تكميل يتبع للمقدار $z = x.y$:

$$\mu(z) = e^{\left[\int\left(1-\frac{2}{z}\right)dz\right]} = \frac{e^z}{z^2}$$

أي أن $\mu = \frac{e^{xy}}{x^2y^2}$ ويكون التكامل العام لها هو: $e^{xy}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) = c$.

مثال 2–13: أوجد الحل العام للمعادلة:

الحل: لما كانت المعادلة متجانسة، وكان $\mu = \frac{1}{x.M + y\,.N} = \frac{1}{x^5} \neq 0$، فإن μ عامل تكميل لها. بضرب طرفي المعادلة بالدالة μ، فتصبح المعادلة التفاضلية تامة:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^4}{x^5}\right)dx - \frac{y^3}{x^4}dy = 0$$

ويكون التكامل العام لها هو:

$$y^4 = 4x^4\ln|x| + cx^4$$

4.2 المعادلات المتجانسة

تعريف: 2-4-1 :نقول عن الدالة $f(x,y)$ إنه متجانسة من الدرجة n بالنسبة لـ x وy إذا بدلنا كل x بـ λx وكل y بـ λy حيث λ ثابت اختياري فنحصل على المطابقة:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n\cdot f(x,y)\quad \forall\lambda$$

تعريف: 2-4-2 : نقول عن المعادلة التفاضلية:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

إنها متجانسة إذا كان الدالتان $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ متجانستين ومن درجة واحدة.

تعريف: 2-4-3 :

كل معادلة متجانسة تكتب بالشكل: $y'=g(\frac{y}{x})$ أو بالشكل: $y'=f(\frac{y}{x})$

تسمى معادلة تفاضلية متجانسة.

1.4.2 طريقة حل المعادلة التفاضلية المتجانسة :

هناك طريقتان لحل مثل هذا النوع من المعادلات:

1. نفرض أن:

$$z=\frac{y}{x}\Rightarrow\quad y=xz$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة المتجانسة، نجد أن:

$$x\acute{z}+z=g(z)$$

والتي تكتب بالشكل: $$\frac{dx}{x}=\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{g(z)-z}}$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة وبعد إجراء عملية المكاملة نبدل z بقيمتها فنحصل على الحل العام للمعادلة المتجانسة.

2. بفرض أن :

$$u=\frac{y}{x}\Rightarrow\quad y=xu$$

بمفاضلة طرفي العلاقة : $y = u.x$ بالنسبة لـ x نجد:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u \Rightarrow x\frac{du}{dx} + u = f(u) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}$$

وبعد الحل نعوض $u = \frac{y}{x}$.

مثال 2–14: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2-y^2}$$

الحل: إن المعادلة متجانسة لذلك نفرض أن $y = u.x$ ومنه:

$$dy = xdu + udx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

نعوض في المعادلة المعطاة، فنجد أن:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{x^2u}{x^2-x^2u^2} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1-u^2}{u^3}du = \frac{dx}{x} \quad ; \qquad (x, u^3) \neq 0 \ \Rightarrow \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \frac{-1}{2u^2} = \ln|ucx|$$

$$\xRightarrow{y=ux} \frac{-x^2}{2y^2} = \ln|cy| \Rightarrow \pm cy = e^{\frac{-x^2}{2y^2}} \Rightarrow y = c_1\, e^{\frac{-x^2}{2y^2}} \ ; \ c_1 = \pm\frac{1}{c} \ \ ; c \neq 0$$

مما سبق نستنتج أن المعادلة $F(x, y, \acute{y}) = 0$ تكون متجانسة إذا بدلنا x بـ tx و y بـ ty ولم تتغير المعادلة، أي:

$$F(tx, ty, \acute{y}) = 0 \qquad\qquad : \forall\, t \in \mathbb{R}$$

مثال 2–15: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\acute{y} = \frac{y}{x} + tan\frac{y}{x}$$

الحل: هذه المعادلة متجانسة لأنها مكتوبة بالشكل: $\acute{y} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ لذلك نفرض $\frac{y}{x} = z$ أي أن: $y = z.x$ وبالتالي $dy = zdx + dz$ ، نعوض في المعادلة المفروضة فنجد:

$$z + x.\frac{dz}{dx} = z + \tan z$$

وبالتالي: $\frac{dz}{\tan z} = \frac{dx}{x}$ أو $\frac{\cos z dz}{\sin z} = \frac{dx}{x}$

بالمكاملة نحصل على: $\ln|\sin z| = \ln|x| + \ln|c|$

أي أن: $\sin z = cx$ ، وبالتالي : $z = \arcsin(cx)$

وبالتعويض عن z بقيمتها نجد:

مثال: **2–16**: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dy}{d\,x} = \frac{x.y}{x^2 - y^2}$$

الحل: إن هذه المعادلة متجانسة لأن التابع الموجود في الطرف الأيمن متجانس من الدرجة صفر، لذلك نفرض $\frac{y}{x} = z$ أي أن: $y = z.x$

وبالتالي: $\frac{dy}{d\,x} = z + x.\frac{dz}{d\,x}$ بالتعويض نحصل على: $x\frac{dz}{dx} = \frac{z^3}{1-z^2}$ بفصل المتحولات نكتب:

$$\frac{(1-z^2)dz}{z^3} = \frac{dx}{x} \rightarrow \left\{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z}\right\} dz = \frac{dx}{x}$$

وبالمكاملة نجد: $-\frac{1}{2z^2} - \ln|z| = \ln|x| + \ln|c|$

أو $-\frac{1}{2z^2} = \ln|zxc|$

وبالتعويض عن z بقيمته نحصل على الحل العام للمعادلة المفروضة الذي هو عبارة عن دالة ضمنية: $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|cy|$

2.4.2 المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلات متجانسة:

هناك بعض المعادلات التي لا تحقق بالشكل المطلوب شرط التجانس وإنما يمكن ردها إلى معادلات متجانسة، الشكل العام لهذه المعادلات هو:

$$\acute{y} = f\left[\frac{a_1+b_1y+c_1}{a_2+b_2y+c_2}\right]$$

حيث f تابع مستمر على مجال ما من مجموعة الأعداد الحقيقة $\mathbb{R}$ و $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ثوابت معلومة من $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن بسط الكسر في الطرف الأيمن هو معادلة مستقيم D_1 معادلته: $a_1x + b_1y+c_1 = 0$ وكذلك المقام هو عبارة عن معادلة مستقيم D_2 معادلته: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

لإيجاد الحل العام نناقش الحالات التالية:

1 -إذا كان: $c_1 = c_2 = 0$ فإن المعادلة التفاضلية المفروضة تصبح متجانسة وهذا ما رأيناه سابقاً.

2 -إذا كان $c_1 \neq 0$ أو $c_2 \neq 0$ فإننا نميز حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$، هذا يعني أن:

$$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$$

وهذا يعني هندسياً أن المستقيمين D_1, D_2 متقاطعان. لإيجاد الحل في هذه الحالة نوجد أولاً نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين وذلك بحل معادلتي هذين المستقيمين حلاً مشتركاً، لنفرض أن نقطة التقاطع هي $M_0(x_0, y_0)$ نسحب بعد ذلك جملة المحاور الإحداثية الأصلية إلى هذه النقطة فنحصل على جملة إحداثيات جديدة ولأجل ذلك نستخدم دساتير الانسحاب (التحويل):

$$x = x_0 + X \implies dx = dX$$

والمعادلة التفاضلية المفروضة تصبح بعد التعويض بالشكل:

$$\acute{y} = f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1+b_1.\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة تحل كما سبق، ثم نعود للمتحولات الأصلية وذلك بوضع:

$$X = x - x_0 \quad ، \quad Y = y - y_0$$

الحالة الثانية: إذا كان: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$، وهذا يعني $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ أي أن: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$ ، وهذا يعني هندسياً أن المستقيمين D_1, D_2 متوازيان.

إذاً: $a_1 = \lambda a_2\ ,\ b_1 = \lambda b_2$ حيث λ ثابت التناسب بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\acute{y} = f\left[\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right]$$

ولحلها نفرض المقدار المشترك بين البسط والمقام متحول جديد:

$$z = a_2x + b_2y$$

وبالاشتقاق يكون : $\acute{z} = a_2 + b_2\acute{y}$ ومنه: $\acute{y} = \frac{\acute{z}-a_2}{b_2}$ وبالتعويض نجد:

$$F(z) = \frac{z'-a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2}\right)$$

وبفصل المتحولات نحصل على:

$$\frac{dz}{b_2F(z)+a_2} = dx$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة تحل بالطريقة المعروفة. ثم نستبدل z بقيمتها المفروضة للحصول على الحل النهائي.

مثال 2–17 :أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$\acute{y} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$$

الحل: بما أن: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ ، نبحث عن نقطة تقاطع المستقيمين:

$$x - y + 1 = 0\ ,\ x + y - 3 = 0$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد أن $x_0 = 1,\ y_0 = 2$ نطبق دساتير الانسحاب:

$y = 2 + Y, x = 1 + X$ وبالتالي: $dy = dY,\ dx = dX$.

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد:

$$\acute{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y} = \frac{1-{}^{Y}/_{X}}{1+{}^{Y}/_{X}}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة لحلها نفرض: $z = {}^{Y}/_{X}$ أي أن $Y = zX$ باشتقاق الطرفين بالنسبة لـ x والتعويض نجد:

$$z + X\frac{dz}{dX} = \frac{1-z}{1+z}$$

ومنه:

$$\frac{(1+z)\,dz}{1-2z-z^2} = \frac{d\,X}{X}$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة، بمكاملة الطرفين نجد :

$$\frac{1}{2}\ln|z^2 + 2z - 1| = -\ln|X| + \ln c$$

أي أن:

$$(z^2 + 2z - 1)X^2 = c$$

نعوض عن z بقيمته فنحصل على:

$$Y^2 - 2Y.X - X^2 = c$$

وبالعودة إلى المتحولات الأصلية نحصل على الحل العام التالي:

$$y^2 - x^2 - 6y - 2x + 2xy = c_1$$

مثال 2-18: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x + 3y + 1)dx + (10x + 15y + 4)dy = 0$$

الحل: لدينا :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+1}{10x+15y+4} \to \frac{dy}{dx} = \frac{(2x+3y)+1}{5(2x+3y)+4}$$

نفرض: $z = 2x + 3y$ وبالتالي : $dz = 2dx + 3dy$

أي أن: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{dz}{dx} - 2\right)$ ، بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{7z+5}{5z+4} \to \left(\frac{5z+4}{7z+5}\right) dz = dx$$

وهي معادلة تفاضلية ذات متحولات منفصلة، بالمكاملة نجد:

$$\frac{5}{7}z+\frac{3}{49}\ln|7z+5|=x+c$$

ثم نعوض عن z بقيمته فنجد الحل العام المطلوب:

$$21x+105y+3ln|14x+21y+5|=c_1$$

5.2 المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى :

1.5.2 تعريفها وحلها:

شكلها العام هو: $$y'+p(x)y=Q(x); \qquad (1)$$

نظرية: تصبح المعادلة (1) تفاضلية تامة إذا ضربت بعامل التكميل $e^{\int p(x)dx}$ وحلها العام هو:

$$ye^{\int p(x)dx}=\int Q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx$$

ملاحظة: يمكن، بإجراء بعض التحويلات، رد عدد كبير من المعادلات التفاضلية إلى معادلات تفاضلية خطية. فمثلاً ، المعادلة $y'\sin y=\cos y\,(1-x\cos y)$ ، يمكن أن تكتب كما يلي :

$$\frac{\sin y}{\cos^2 y}y'-\frac{1}{\cos y}=-x$$

و بفرض $z=\frac{1}{\cos y}$ تصبح المعادلة:

$$z'-z=-x$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة المجهولة z.

وكذلك، فالمعادلة $y'\sin y=\cos x\,(2\cos y-\sin^2 x)$ تصبح خطية، بفرض $z=\cos y$:

$$z'+2z\cos x=\sin^2 x\cos x$$

2.5.2 المعادلات التفاضلية التي ترد إلى معادلة خطية من الدرجة الأولى:

يوجد نماذج عديدة أهمها:

1 -**معادلة برنولي**: من الشكل:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

حيث $n \neq 0,1$ عدد ثابت و$p(x), Q(x)$ دالتان مستمراتان على مجال ما، وعندما $n = 0\ ,1$ تصبح المعادلة السابقة خطية.

2 -**معادلة ريكاتي**: من الشكل:

$$y' + P(x)y = Q(x) + R(x)y^2$$

عندما $R(x) = 0$ تصبح المعادلة السابقة خطية.

عندما $Q(x) = 0$ تصبح المعادلة السابقة برنولي حيث $n = 2$.

لا يمكن حل هذه المعادلة إلا إذا علمنا حلاً خاصاً لها سلفاً نوجده بالتجريب فإذا كان الحل الخاص هو y_p فإننا نفرض: $y = y_p + \frac{1}{z}$ وبهذا الفرض نحصل على معادلة خطية من الرتبة الأولى وبحلها نحصل على z (الدالة المجهولة) ثم نعود إلى الدالة المجهولة y.

مثال 2-19: أوجد الحل العام لمعادلة ريكارتي التالية، مع العلم أنها تقبل حلاً خاصاً على شكل كثيرة حدود من الدرجة الأولى بالمتحول x :

$$y^2 - x^2y - 2x = \acute{y}(1 - x^3)$$

الحل: إن الشكل العام للحل الخاص هو $y_1 = ax + b$ ، لنعين الثابتين a, b، وذلك بالاشتقاق والمطابقة فنجد $y_1' = a$، وبما أن y_1 هو حلاً لمعادلة ريكارتي فهو يحققها، أي أنّ:

$$(ax + b)^2 - x^2(ax + b) - 2x = a(1 - x^3)$$

ومنه:

$$(a^2 - b)x^2 + (2ab - 2)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{0}$$

وبالمطابقة نجد أنّ : $a^2 - b = \boldsymbol{0},\ 2ab - 2 = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{b^2} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

وبالحل المشترك نجد: $a = b = 1$

وبالتالي فإن الحل الخاص لمعادلة ريكارتي هو: $y_1 = x + 1$ لنحول معادلة ريكارتي المفروضة إلى معادلة خطية بالتحويل التالي:

$$y = (x+1) + \frac{1}{z}$$

باشتقاق طرفي المعادلة السابقة بالنسبة لـ x والتعويض في معادلة ريكارتي نجد:

$$\acute{z} - \frac{x^2-2x-2}{1-x^3} z = \frac{1}{x^3-1}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية، تحل بالطرق المعروفة.

3- طريقة استبدال الدالة بالمتحول وبالعكس:

أحياناً لا تكون المعادلة خطية في الدالة المجهولة y ولكن إذا اعتبرنا x هو الدالة المجهولة وy هو المتحول المستقل فقد تنتج معادلة خطية.

مثال 2-20: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\square' + \square\ \square = \square^3\square^3 \quad ; \qquad (1)$$

الحل: من الواضح أن المعادلة هي معادلة برنولي حيث فيها $n = 3$ لذلك نفرض أن:

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^2} \xRightarrow{\text{بالاشتقاق نسبة لـ}\ x} z' = \frac{-2y\prime}{y^3} \xRightarrow{\text{نقسم الطرفين على}\ y^3} \frac{y\prime}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x^3$$

$$\xRightarrow{\text{بتعويض قيم}\ \square',\square} \square' - 2\square\ \square = -2\square^3 \quad ; \qquad (2)$$

هذه المعادلة خطية بالنسبة لـ □ وحلها:

$$ze^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx}\, Q(x)\, dx$$

$$\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2xd} = e^{-x^2} \xRightarrow{\text{نضرب الطرفين بعامل التكميل}\ \mu} z\,.\,e^{-x^2} = \int -2x^3 e^{-x^2} dx$$

$$ze^{-x^2} = \int x^2(-2x)^{-x^2} dx = x^2e^{-x^2} + \int -2x\,.\,e^{-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow ze^{-x^2} = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + c$$

نضرب الطرفين بـ: e^{x^2} فالحل العام للمعادلة التفاضلية هو:

$$z = x^2 + 1 + c \cdot e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = c\,e^{x^2} + x^2 + 1$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{ce^{x^2}+x^2+1}}$$

4- معادلة داربو التفاضلية :

من المعادلات التفاضلية الخطية التي ترد إلى معادلة برنولي معادلة داربو التي تملك الشكل التالي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + p(x,y)(xdy - ydx) = 0$$

حيث $N(x,y), M(x,y)$ تابعان متجانسان من الدرجة m، و$p(x,y)$ تابع متجانس من الدرجة L.

من الواضح أنه إذا كان $L = m - 1$ فإن معادلة داربو السابقة ترد الى معادلة متجانسة.

مبرهنة:1-4:تردّ معادلة داربو التفاضلية إلى معادلة برنولي التفاضلية بالتحويل التالي: $y = x \cdot z$ حيث x تابع مجهول نسبة لـ x.

الإثبات: لدينا:

$$y = x \cdot z \Longrightarrow dy = zdx + xdz$$

$$xdy - ydx = x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = x^2 dz \qquad (*)$$

يمكن كتابة معادلة داربو بالشكل:

$$x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right) dx + x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right) dy + x^l P\left(1, \frac{y}{x}\right)(xdy - ydx) = 0$$

وبالاستفادة من $(*)$ نجد:

$$x^m M(1,z)dx + x^m N(1,z)(zdx + xdz) + x^{l+2} P(1,z)dz = 0$$

وبالاختصار على x^m وبتجميع الحدود نجد:

$$[M(1,z) + N(1,z)z]dx + [N(1,z)x + P(1,z)x^{l+2-m}]dz = 0; x \neq 0$$

نقسم طرفي المعادلة الأخيرة على:

$$[M(1,z) + N(1,z)z]dz \neq 0$$

(اعتبرنا z متحولاً مستقلاً) نحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{dx}{dz} + \frac{N(1,z)}{M(1,z)+N(1,z)z} x = -\frac{P(1,z)}{M(1,z)+N(1,z)z} x^{l+2-m}$$

وهي معادلة برنولي بالنسبة للتابع المجهول x والمتحول المستقل z. بمكاملة هذه المعادلة وبالعودة إلى التابع y نحصل على الحل العام لمعادلة داربو التفاضلية المفروضة.

مثال 2–21: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$xdx + ydy + x^2(xdy - ydx) = 0$$

الحل: المعادلة المفروضة هي معادلة داربو التفاضلية، لحلها نفرض: $y = x \cdot z$، حيث z تابع مجهول نسبة لـ x.

بمفاضلة التحويل السابق والتعويض في المعادلة نجد:

$$xdx + zx(xdz + zdx) + x^4dz = 0$$

أو:

$$(1 + \mathrm{z}^2)\, \mathrm{d\,x} + (\mathrm{z\,x} + \mathrm{x}^3\,)\mathrm{d\,z} = 0\,; \;\; \mathrm{x} \neq 0$$

ومنها نجد معادلة برنولي التالية:

$$\frac{dx}{dz} + \frac{z}{1+z^2}x = -\frac{x^3}{1+z^2}$$

وبحل هذه المعادلة وبالعودة إلى الدالة y نجد:

$$c(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)\arctan\frac{y}{x} + xy - 1 = 0$$

هو الحل العام لمعادلة داربو التفاضلية.

5– معادلة جاكوبي:

نسمي معادلة جاكوبي كل معادلة تفاضلية من الشكل التالي:

$$(a_1 + b_1x + c_1y)(xdy - ydx) - (a_2 + b_2x + c_2y)dy +$$

$$+(a_3 + b_3x + c_3y)dx = 0$$

حيث $a_i\,,\; b_i\,, c_i\,; i = 1,2,3$ ثوابت حقيقية.

من الواضح أن معادلة داربو هي حالة خاصة من معادلة جاكوبي وذلك لأجل:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

إن فكرة حل معادلة جاكوبي التفاضلية هي محاولة إعادتها إلى معادلة داربو.

من أجل ذلك نقوم بانسحاب في المحاور: $(x, y) \to (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ معطى بالعلاقتين:

$$x = X + \alpha \,; y = Y + \beta$$

لنحاول تعيين : $\alpha \,, \beta$ ، بحيث تكون الأمثال:

$$XdY - YdX \,, dY \,, dX$$

توابع متجانسة في المتحولين X, Y.

بالتعويض في معادلة جاكوبي وترتيبها بشكل تكون فيه أمثال $XdY - YdX$ دالة متجانسة من الدرجة الأولى في X, Y:

$$(b_1 X + c_1 Y)(XdY - YdX)$$

$$-[A_2 + b_2 X + c_2 Y - \alpha(A_2 + b_1 X + c_1 Y) - A_1 X]dY +$$

$$+[A_3 + {}_3 X + c_3 Y - \beta(A_1 + b_1 X + c_1 Y) - A_1 Y]dX = 0$$

حيث: $$A_i = a_i + b_i\, \alpha + c_i\, \beta \,; i = 1{,}2{,}3$$

يمكن جعل أمثال: $\mathrm{d}X \,, \mathrm{d}Y$ تابعين متجانسين في $X \,, Y$ من الدرجة الأولى، وذلك باختيار α, β بحيث تتحقق العلاقتان:

$$A_2 - \alpha A_1 = 0 \,, A_3 - \beta A_1 = 0$$

لنعتبر : $A_1 = \lambda$ وسيطاً، عندئذ نجد أن قيم α, β المحققة لهدفنا هي القيم التي تحقق جملة المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - \lambda + b_1\alpha + c_1\beta = 0 \\ a_2 + (b_2 - \lambda)\alpha + c_2\beta = 0 \\ a_3 + b_3\alpha + (c_3 - \lambda)\beta = 0 \end{aligned}\right\} (i)$$

ولكي تقبل هذه المعادلات الثلاث حلاً مشتركاً لـ α, β يجب أن يكون المحدد التالي يساوي الصفر:

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

إذا تعينت قيمة لـ λ من هذا المحدد (معادلة من الدرجة الثالثة في λ) فتتعين قيم α, β من حل معادلتين في جملة المعادلات الثلاث (i).

وعندها يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الشكل:

$$XdY - YdX + f(Y/X)dY + g(Y/X)dX = 0$$

وهي من نوع معادلة داربو التفاضلية.

والتحويل $Y = Z \cdot X$ يعيدها الى معادلة برنولي التفاضلية.

مثال 2–22: أوجد الحل العام للمعادلة التالية :

$$(x - y + 1)dx + (x - y - 1)dy + (x + y - 1)(xdy - ydx)$$

الحل: تكتب المعادلة المفروضة بالشكل :

$$(-1 + x + y)(xdy - ydx) - (1 - x + y)dy + (1 + x - y)dx = 0$$

وهي معادلة جاكوبي التفاضلية.

إن المحدد الذي يعين قيمة λ هو:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ومنه:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$$

وبالتالي فإن قيمة λ التي تحقق هذه المعادلة هي: $\lambda = 1$.

تصبح المعادلتان الأولى والثانية من (i) على الشكل:

$$-2 + \alpha + \beta = 0\ ,\ 1 - 2\alpha + \beta = 0$$

ومنه: $\alpha = 1, \beta = 1$ ؛ وبالتالي يكون لدينا التحويل:

$$x = X + 1\ ; \qquad y = Y + 1$$

الذي يعيد المعادلة التفاضلية إلى المعادلة:

$$(X + Y)(XdY - YdX) + 3XdY - 3YdX = 0$$

وهي معادلة داربو الشهيرة نترك إكمال الحل للطالب.

6.2 نماذج المعادلات التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتقة :

المعادلة التي لا يمكن فيها عزل المشتق y' في طرف وما تبقى منها في طرف آخر، وهذه المعادلة، عادةً، إما ليس لها درجة أو أن درجتها تزيد على الواحد، ونكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (*)$$

ويكون، عادةً، في هذه الحالة، الميل y' للمنحني البياني للدالة $y(x)$ في النقطة (x_0, y_0) غير وحيد، مما يؤدي إلى وجود أكثر من حل للمعادلة غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق يمر بالنقطة نفسها. وسنناقش مسألة وجود الحل ووحدانيته فيما بعد. أما حل المعادلة، فيمكن إيجاده في عدة حالات تعتمد على شكل المعادلة نفسها.

1.6.2 الاختزال إلى معادلات محلولة بالنسبة إلى المشتق:

لنفرض أنه يمكن كتابة المعادلة غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق $(*)$، كحدودية في y' من الدرجة n، أي كما يلي:

$$A_0(x, y)(y')^n + A_1(x, y)(y')^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x, y) + A_n(x, y) = 0$$

ولنفرض، أيضاً ، أنه يمكن تحليل هذه الحدودية إلى جداء n عاملاً من الدرجة الأولى في المشتق y' كما يلي:

$$[y' - f_1(x, y)] \cdot [y' - f_2(x, y)] \cdot \cdots [y' - f_n(x, y)] = 0$$

وتتحقق هذه المعادلة، إذا تحققت إحدى المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى التالية:

$$y' = f_i(x, y) \quad ; \quad (i = 1,2, \cdots, n)$$

فإذا استطعنا إيجاد الحلول العامة لهذه المعادلات:

$$\emptyset(x, y, c_i) = 0 \quad ; \quad (i = 1,2, \cdots, n)$$

حيث c_i ثوابت اختيارية، $i = 1,2, \cdots, n$. لما كانت كل دالة من الدوال تحقق المعادلة ، فإن كل من هذه الدوال تمثل حلولاً للمعادلة . ولما كانت العلاقات تكافئ العلاقة:

$$\emptyset_1(x, y, c_1) \cdot \emptyset_2(x, y, c_2) \cdot \cdots \emptyset_n(x, y, c_n) = 0$$

لما كانت المعادلة من الرتبة الأولى، فإن حلها العام يجب أن يحوي ثابتاً اختيارياً واحداً، لذا، نختار $c = c_i$، $i = 1,2,\cdots,n$، ونعوض في العلاقة الأخيرة، فنحصل على الحل العام (التكامل العام) للمعادلة .

$$\emptyset_1(x,y,c)\cdot\emptyset_2(x,y,c)\cdot\cdots\emptyset_n(x,y,c) = 0$$

ملحوظة: يفضل كتابة الحل العام للمعادلة وفق الصيغة بدلاً من الصيغ . وذلك لأن الصيغة تمكننا من تعيين منحنيات تكاملية (حلولاً) للمعادلة التفاضلية تمثل تركيباً لمجموعة من المنحنيات التكاملية، يحقق كل منها المعادلة في مجال معين، بحيث يكون لهذه المنحنيات مماسات مشتركة في النقط التي تلتحم فيها هذه المنحنيات التكاملية.

حالة خاصة: إذا كانت المعادلة غير محلولة بالنسبة إلى المشتق تحوي فقط y'، أي هي من النمط:

$$F(y') = 0$$

وكان $y' = k$ جذراً حقيقياً لهذه المعادلة، فإنه بالمكاملة نجد $y = kx + c$، c ثابت اختياري. أي أن: $k = \frac{y-c}{x}$.

ولما كان $F(k) = 0$، فإن الحل العام للمعادلة يعطى بالعلاقة:

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$$

مثال: 2–23: أوجد الحل العام للمعادلة: $y'^3 - 2xy'^2 + y' = 2x$

الحل: لما كان:

$$y'^3 - 2xy'^2 + y' - 2x = (y' - 2x)(y'^2 + 1)$$

فإن المعادلة المعطاة، تكافئ المعادلة :

$$y' - 2x = 0$$

وبالمكاملة، نجد الحل العام لها، وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة:

$$y = x^2 + c$$

مثال 2–24: أوجد الحل العام للمعادلة : $y'^4 - 5y'^3 + 2y' = 3$.

الحل: لما كانت هذه المعادلة، لا تحوي سوى y' ، فإن الحل العام لها يعطى بالعلاقة:

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^4 - 5\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + 2\left(\frac{y-c}{x}\right) = 3$$

2.6.2 التمثيل الوسيطي

عندما يتعذر علينا حل المعادلة التفاضلية $(*)$ بالنسبة إلى المشتق، أو عندما نخفق في حل المعادلات المحلولة بالنسبة إلى المشتق ، فإننا نضطر، عادةً، لحل المعادلة $(*)$ وسيطياً.

نستبدل بالمعادلة الأشكال الوسيطية التالية:

$$x = f(u,v)\ ,\ \ y = \mathrm{g}(u,v)\ ,\ \ y' = h(u,v)$$

وباستخدام العلاقة $dy = y'\,dx$ ، نجد:

$$\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathrm{g}}{\partial v}dv = h(u,v)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv\right]$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق $\frac{dv}{du}$ ، نحصل على المعادلة:

$$\frac{dv}{du} = \frac{h(u,v)f'_u - g'_u}{\mathrm{g}'_v - h(u,v)f'_v}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى محلولة بالنسبة للمشتق $\frac{dv}{du}$ تحل كما درسنا سابقاً.

حالات خاصة:

1– المعادلة $(*)$ لا تحوي المتغير المستقل x: أي أن المعادلة من النمط:

$$F(y,y') = 0$$

إذا كان من الصعب حل هذه المعادلة بالنسبة للمشتق y'، فإننا ندخل وسيطا t، كما يلي:

$$y = \varphi(t) \qquad \text{و} \qquad y' = \psi(t)$$

ولما كان $dy = y'\,dx$، فإن $dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt$.

ويعطى الحل العام للمعادلة وسيطياً، بالعلاقتين:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + c \qquad \text{و} \qquad y = \varphi(t)$$

وبحذف t من عبارة x وy، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

ملحوظة: إذا أمكن حل المعادلة بالنسبة إلى y، فإنه يمكن اعتبار y' هو الوسيط t.

ملحوظة: يمكن أن يكون للمعادلة حل شاذ من النمط $y = b$، حيث إن b يعطى من المعادلة $F(b,0) = 0$.

مثال 2–25: أوجد الحل العام للمعادلة: $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

الحل: واضح أن المعادلة لا تحوي x صراحةً، ندخل الوسيط t كما يلي:

$$y' = \sin^3 t \qquad \text{و} \qquad y = \cos^3 t$$

ومنه $dx = \frac{dy}{y'} = -3\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t}dt$، وبالمكاملة نجد:

$$x = 3t + 3\cos t + c$$

ويعطى الحل العام للمعادلة المعطاة، وسيطياً، بالعلاقتين:

$$y = \cos^3 t \qquad \text{و} \qquad x = 3t + 3\cos t + c$$

2– المعادلة $(*)$ لا تحوي الدالة y: أي أن المعادلة من النمط:

$$F(x, y) = 0$$

إذا كان من الصعب حلها بالنسبة للمشتق y'، فإننا ندخل وسيطاً t كما يلي:

$$y' = \psi(t) \qquad \text{و} \qquad x = \varphi(t)$$

ولما كان $dy = y'\,dx$، فإن $dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$.

ويعطى الحل العام للمعادلة ، وسيطياً، كما يلي:

$$y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + c \qquad \text{و} \qquad x = \varphi(t)$$

وبحذف t من عبارة x وy نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

ملحوظة: إذا وجد العدد a، بحيث يكون:

$$\lim_{y' \to \pm\infty} F(a, y') = 0$$

فإن $x = a$ حل، للمعادلة ، قد يكون شاذاً.

مثال 2–26: أوجد الحل العام للمعادلة: $x^2 = y'^2(4 - x^2)$.

الحل: واضح أن المعادلة لا تحوي y صراحة، ندخل الوسيط t كما يلي:

$$y' = \tan t \quad و \quad x = 2\sin t \;\; ; \quad |t| < \frac{\pi}{2}$$

ومنه، فإن:

$$dy = (\tan t) 2\cos dt = 2\sin t\, dt$$

وبالمكاملة نجد:

$$y = c - 2\cos t$$

ويعطى الحل العام للمعادلة المعطاة، وسيطياً، بالعلاقتين :

$$y - c = -2\cos t \quad و \quad x = 2\sin t$$

وبحذف الوسيط t من هاتين العلاقتين نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً:

$$x^2 + (y - c)^2 = 4$$

3– المعادلة $(*)$ محلولة بالنسبة إلى x: أي أنها من النمط:

$$x = f(y, y')$$

فإننا نجعل y المتغير المستقل وx الدالة المجهولة، وندخل وسيطاً جديداً p، بحيث يكون $y' = p$. وعليه، تكتب المعادلة ، كما يلي:

$$x = f(y, p)$$

ويعطى التفاضل التام لها بالعلاقة:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

ولما كان $dy = y'dx$، أي $dy = pdx$، فإن

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp\right] \implies \frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الأولى بالنسبة إلى المشتق $\frac{dp}{dy}$. فإذا تمكنا من مكاملتها والحصول على تكاملها العام $\emptyset(y, p, c) = 0$، فإن الحل العام للمعادلة يعطى وسيطياً، بالعلاقتين:

$$\emptyset(y, p, c) = 0 \quad و \quad x = f(y, p)$$

وبحذف الوسيط p من هاتين العلاقتين، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً.

مثال 2–27: أوجد الحل العام للمعادلة: $\ln y' + \sin y' - x = 0$

الحل: بفرض $y' = p$ تصبح المعادلة كما يلي:

$$\ln p + \sin p = x$$

وبالمفاضلة نجد:

$$dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp \implies \frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right) dp$$

لأن:

$$dx = \frac{dy}{y\prime} = \frac{dy}{p}$$

وبالإصلاح والمكاملة نجد:

$$y = p + \cos p + p \sin p + c$$

ويعطى الحل العام، وسيطياً، للمعادلة المعطاة بالعلاقتين:

$$y = p + \cos p + p \sin p + c \qquad \text{و} \qquad x = \ln p + \sin p$$

4– المعادلة $(*)$ محلولة بالنسبة إلى y : أي أنها تكتب كما يلي:

$$y = f(x, y')$$

بفرض $y' = p$ تكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp \quad \implies \quad p = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$$

وهي معادلة تفاضلية محلولة بالنسبة إلى المشتق $\frac{dp}{dx}$. فإذا تمكنا من مكاملتها والحصول على التكامل العام لها $\emptyset(x, p, c) = 0$، فإن جملة المعادلتين:

$$\emptyset(x, p, c) = 0 \qquad \text{و} \qquad y = f(x, p)$$

تمثلان الحل العام وسيطياً. بحذف الوسيط p ، من هاتين العلاقتين، نحصل على عبارة الحل العام ديكارتياً. تعد معادلة لاغرانج ومعادلة كليرو من أهم المعادلات التي تحل بهذه الطريقة.

معادلة لاغرانج – Lagrange *:* هي معادلة من النمط:

$$y = xf(y') + g(y')$$

لحلها ندخل الوسيط $y' = p$ فتصبح المعادلة كما يلي:

$$y = xf(p) + g(p)$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى x، فنجد:

$$p = \frac{dy}{dx} = f(p) + xf'(p)\frac{dp}{dx} + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

وبالقسمة على $\frac{dp}{dx}$ ، بشرط $\frac{dp}{dx} \neq 0$ ، والترتيب نجد:

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} = xf'(p) + g'(p)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة x ومشتقها $\frac{dx}{dp}$ ، حيث نعتبر x الدالة و p المتغير المستقل، ويكون حلها العام دالة خطية في ثابت اختياري:

$$x = c\varphi(p) + \psi(p)$$

وبإضافة هذه المعادلة إلى المعادلة ، نحصل على الحل العام وسيطياً.

ندرس الآن الحالة المستثناة، $\frac{dp}{dx} = 0$، أي p ثابت. نعوض في المعادلة ، نحصل على العلاقة $p - f(p) = 0$.

وهكذا، فإن كان للمعادلة $p - f(p) = 0$ جذوراً حقيقية $p = p_j$، فإننا نحصل على جملة المعادلات الخطية $y = xf(p_j) + g(p_j)$، وهي تمثل مستقيمات في المستوي XOY، وهي تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة. ولكنها لا تنتج من الحل العام، أي أنها تمثل حلولاً شاذة لمعادلة لاغرانج.

مثال 2–28: أوجد جميع حلول المعادلة : $y = xy'^2 - y'$

الحل: نفرض $y' = p$، فتصبح المعادلة كما يلي:

$$y = xp^2 - p \qquad (i)$$

نشتق هذه المعادلة بالنسبة إلى x :

$$p = \frac{dy}{dx} = p^2 + 2px\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx}$$

نقسم الطرفين على $\frac{dp}{dx}$ ، بشرط $\frac{dp}{dx} \neq 0$ ، ونرتب المعادلة الناتجة، فنجد:

$$(p-p^2)\frac{dx}{dp}-2px=1$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في الدالة x و مشتقها $\frac{dx}{dp}$. بحلها نجد:

$$x=\frac{p-\ln p+c}{(p-1)^2} \qquad (ii)$$

وبحذف الوسيط من المعادلتين (i) و (ii) نحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة.

تتبقى، لدينا، الحالة المستثناة $\frac{dp}{dx}\neq 0$ ، وهي تكافئ $p=p_j$، حيث إن الثوابت p_j هي الجذور الحقيقية للمعادلة $p-f(p)=0$ ، أي $p-p^2=0$. ومنه، فإن $p=0$ و $p=1$. بتعويض $p=0$ في المعادلة (i)، نجد أن $y=0$ تمثل حلاً شاذاً. وكذلك من أجل $p=1$ ، نجد $y=x-1$ هو أيضاً، حل شاذ لمعادلة لاغرانج المعطاة.

معادلة كليرو – *Clairaut* : هي من النمط:

$$y=xy'+\mathrm{g}(y')$$

واضح أن المعادلة هي حالة خاصة من معادلة لاغرانج، حيث $f(y)=y'$. لذا نتبع الخطوات السابقة نفسها. فنفرض $y'=p$ ، فتصبح معادلة كليرو كما يلي:

$$y=xp+\mathrm{g}(p) \qquad (11)$$

نشتق الطرفين بالنسبة إلى x فنجد:

$$p=\frac{dy}{dx}=p+x\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx}$$
$$\Longrightarrow\ [x+g'(p)]\frac{dp}{dx}=0$$

وهذا يعني، أنه، إما $\frac{dp}{dx}=0$ أو $x+g'(p)=0$.

في الحالة الأولى: نجد أن $p=c$ ، حيث c ثابت اختياري ، نعوض في المعادلة (11) فنحصل على الحل العام لمعادلة كليرو:

$$y=xc+g(c) \qquad (12)$$

وفي الحالة الثانية: يتعين حل المعادلتين الوسيطيتين:

$$x+g'(p)=0 \quad \text{و} \quad y=xp+g(p)$$

وهذا الحل لمعادلة كليرو لا ينتج عن الحل العام أي أنه حل شاذ لها.

مثال 2–29: أوجد جميع حلول المعادلة: $\sqrt{y'^2+1}\ +xy'-y=0$

الحل: بفرض $y'=p$ تُكتب المعادلة كما يلي:

$$y=\sqrt{p^2+1}+xp$$

وهي معادلة كليرو، حلها العام يعطى، استناداً للعلاقة(12) .بالعلاقة:

$$y=cx+\sqrt{c^2+1}$$

أما الحل الشاذ لها، فينتج بحذف الوسيط p من المعادلتين:

$$x+(\sqrt{p^2+1})'=0 \quad , \quad y=xp+\sqrt{p^2+1}$$

وعليه، فإنَّ الدالة $y=\sqrt{1-x^2}$ تُمثل حلاً شاذاً للمعادلة المعطاة.

7.2 مسألة القيمة الابتدائية – مبرهنات الوجود والوحدانية:

إن مسألة القيمة الابتدائية، والتي تسمى مسألة كوشي Cauchy، تعني إيجاد منحن تكاملي للمعادلة التفاضلية مار بالنقطة (x_0,y_0) في المستوي XOY.

يكون في كثير من المسائل التطبيقية، الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية أمراً صعباً إن لم يكن مستحيلاً، بواسطة الطرائق العادية التي درسناها سابقاً. لذا نشأ علم حل المعادلات التفاضلية بالطرائق العددية التقريبية، والتي لن نتعرض لها في هذا الكتاب، ولكن سنعطي فكرة موجزة عن إحداها، وهي طريقة التقريبات المتتالية (طريقة بيـكار). ولكن قبل ذلك يجب التحقق من وجود الحل لمسألة كوشي ومن وحدانية هذا الحل.

1.7.2 المعادلة التفاضلية المحلولة بالنسبة للمشتقة:

نعطي، هنا، الشروط الكافية لوجود ووحدانية حل مسألة كوشي التالية:

$$y'=f(x,y) \quad ; \quad y(x_0)=y_0 \qquad (13)$$

في الساحة المغلقة R (مستطيل) المعرفة، كما يلي:

$R=\{|x-x_0|\le a\ ;\ |y-y_0|\le b\}$: (a و b ثابتان موجبان)

شرط لبشــتز: Lipschitz:

نقول إن الدالة $f(x,y)$ تحقق، في R^2، شرط ليبشتز بالنسبة إلى المتغير y، إذا وجد عدد ثابت موجب L، بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq L|y_1-y_2| \quad ; \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in R^2$$

ويبرهن، بسهولة، أنه إذا كانت الدالتان $f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}(x,y)$ مستمرتين على R^2 فإن الدالة $f(x,y)$ تحقق شرط ليبشتز في R^2 بالسبة إلى y. (تقبل بدون برهان).

مبرهنة (بيكار– Picard): إذا كانت الدالة $f(x,y)$ مستمرة بالنسبة إلى x و y في R^2، وتحقق شرط ليبشتز، في R^2، بالنسبة إلى y، فإن لمسألة كوشي (13)حل وحيد $y(x)$ معرَّف وقابل للاشتقاق بالنسبة إلى x، على المجال $|x-x_0| \leq h$، حيثُ:

$$h = min\left(a.\frac{b}{M}\right) \quad , \quad M = max\{|f(x,y)|: \forall (x,y) \in R\}$$

يكفي لوجود حل مسألة كوشي (13)في المجال $|x-x_0| \leq h$، أن تكون الدالة $f(x,y)$ مستمرة في الساحة المغلقة R^2(مبرهنة بيانو– Peano).

يمكن إيجاد حل مسألة كوشي (13)، عند تحقق شروط مبرهنة بيكار، كنهاية متتالية دوال $\{y_n(x)\}$ متقاربة بانتظام، عندما تسعى n إلى اللانهاية معرَّفة بالعلاقة التكرارية:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_n}^{x} f(t.y_n(t))dt \;\; ; \; y_0 = y(x_0) \;\; , n = 0,1,2,\ldots \qquad (14)$$

والتي تسمى دستور التقريبات المتتالية. وتُعطى دقة الخطأ، عند تبديل الحل الدقيق $y(x)$ بالحل التقريبي $y_n(x)$، بالمتراجحة:

$$|y(x)-y_n(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} h^{\mathrm{n}}$$

مثال 2–28: استخدم دستور التقريبات المتتالية لإيجاد حل مسألة كوشي التالية:

$$y' = y \qquad \text{و} \qquad y(0) = 1$$

الحل: نعوض في دستور التقريبات المتتالية :

$$f(x,y) = y \;\; ; \; y_0 = 1 \quad , \quad x_0 = 0$$

$$y_1 = 1 + \int_0^x y_0 dx = 1 + \int_0^x dt = 1 + x\,.$$

$$y_2 = 1 + \int_0^x y_1 dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

....

$$y_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

نأخذ نهاية الطرفين عندما تسعــى n إلى اللانهايــة فنجد:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

إذاً فإن المتتالية $\{y_n(x)\}$ متقاربة من الدالة $y(x) = e^x$ ومن السهل التحقق أنَّ هذه النهاية تحقق المعادلة التفاضلية المفروضة.

2.7.2 المعادلة التفاضلية غير المحلولة بالنسبة للمشتقة:

نفرض أنَّ المعادلة التفاضلية غير المحلولة بالنسبة إلى المشتق (*) تحقق الشرط الابتدائي:

$$y_0 = y(x_0) \qquad (15)$$

إنَّ حل هذه المسألة يختلف عن حل مسألة كوشي (13) حيث إنَّه يمكن أن يمر أكثر من حل من النقطة (x_0, y_0) يحقق شروط مبرهنة بيكـار. وعليه، يوجد لكل من هذه المعادلات $y' = f_j(x, y)$ حل وحيد يحقق الشـرط (15) لذا نحتاج إلى معرفة شرط آخر، وهو ميل مماس منحني الحل المطلوب في النقطة x_0.

وعليه، فإن خاصيـة وحدانية الحل تفهم، عادةً، في المعنى التالي: وهو أنه لا يوجد سوى منحن تكاملي واحد للمعادلة التفاضلية يمر بالنقطة (x_0, y_0) وفي اتجاه معين. فمثلاً، إنَّ خاصية الوحدانية لحل المعادلة $y'^2 - 1 = 0$ محققة دائماً، لأنه يمر في كل نقطة من نقاط المستوي منحنيان تكامليان لها $y = c + x$ و $y = c - x$ ولكل منها ميل مختلف عن الآخر.

مبرهنة: (تقبل دون برهان) إذا كانت الدالة $F(x, y, y')$ مستمرة بالنسبة إلى x على جوار للنقطـة $p_0(x_0, y_0, {y'}_0)$ حيثُ ${y'}_0$ أحد جذور المعادلة الجبرية:

$$p(\lambda) = F(x_0, y_0, \lambda) = 0$$

وكانت هذه الدالة قابلة للاشتقاق باستمرار بالنسبة إلى y و y'، وكانت المشتقة بالنسبة إلى y' غير معدومة عند النقطة p_0، أي:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{p_0} \neq 0$$

عندئذٍ يوجد حل وحيد $y = y(x)$ للمسألة $(*)$ و (15) معرف على جوارٍ صغير بشكل كاف، للنقطة x_0، بحيث يكون $y'_0 = y'(x_0)$.

ملحوظة: إنَّ شروط المبرهنتين السابقتين هي شروط كافية وغير لازمة، أي أنَّه إذا اختلَّ أحد الشروط، فإنَّ هذا لا يعني أن الحل غير موجود، أو غير وحيد.

3.7.2 حل مسألة كوشي باستخدام متسلسلات القوى الصحيحة:

مبرهنة: (تقبل بدون برهان) إذا كانت الدالة $f(x,y)$ قابلة للنشر وفق قوى $(x - x_0)$ و$(y - y_0)$ فإن حل مسألة كوشي (13) يكون، أيضاً، دالة قابلة للنشر وفق قوى $(x - x_0)$ ويُعطى بالعلاقة الآتية:

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0{}'}{1!}(x - x_0) + \frac{y_0{}''}{2!}(x - x_0)^2 + .. = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n \ldots\ldots\ldots (16)$$

حيثُ: $y_0^{(n)} = y^{(n)}(x_0)\ ;\ n = 1,2,\cdots$ والحد y_0 معطى من شروط البدء.

نجد المعامل $y_0{}'$ من المعادلة التفاضلية نفسـها $y_0{}' = f(x_0, y_0)$.

ولإيجاد المعامل y_0'' نشتق المعادلة التفاضلية بالنسبة إلى x، ويكون:

$$y'' = \frac{df(x,y)}{dx} \quad \Longrightarrow \quad y_0'' = \left.\frac{df(x,y)}{dx}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0 \\ y' = y_0'}}$$

ونتابع هكذا لإيجاد بقية المعاملات في العلاقة (16).

مثال 2–29: عين، في صورة متسلسلة قوى صحيحة، حل المسألة:

$$y' = xy + y^2 \ ; \ y(0) = 1$$

الحل: لما كانت الدالة $f(x,y) = xy + y^2$ حدودية في x وy، فإنها قابلة للنشر في كل المستوي، عندئذٍ يمكن التعبير عن حل مسألة كوشي المعطى، في صورة متسلسلة قوى صحيحة من النمط (16) :

$$y_0 = y(0) = 1 \quad \text{و} \quad {y_0}' = y'(0) = f(0,1) = 1$$

$$y'' = \frac{df(x,y)}{dx} = y + xy' + 2yy' \quad \Longrightarrow \quad {y_0}'' = 3$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = y' + y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' \quad \Longrightarrow \quad y''' = 10$$

ونتابع هكذا فنجد:

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{10}{3!}x^3 + \cdots$$

8.2 بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى:

تطبيق (1): دراسة دارة كهربائية بوجود تحريض ذاتـي:

نعلم أنه إذا مر تيار كهربائي متغير $I(t)$ في وشيعة عامل تحريضها الذاتي L، فإنه يتولد في الوشيعة قوة محركة كهربائية $e = -L\frac{dI}{dt}$، وتكون هذه القوة المحركة عكسية من أجل $\frac{dI}{dt} > 0$ أي أنَّ فرق الكمون بين طرفي الوشيعة هو:

$$V_A - V_B = RI + L\frac{dI}{dt} \qquad (17)$$

حيث إنَّ R مقاومة الوشيعة.

مثال 2–30: تشمل دارة كهربائية مولداً كهربائياً قوته المحركة الكهربائية E ثابتة ووشيعة مقاومتها الأومية R وعامل تحريضها الذاتي L. نغلق الدارة في اللحظة $t = 0$. أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها $I(t)$ ثم حل المعادلة الناتجة، بيّن أن شدة التيار تثبت عملياً بعد زمن قصير جداً، علماً أن: $\frac{R}{L} = 1000$.

الحل: نكتب المعادلة (17) كما يلي:

$$E = RI + L\frac{dI}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية، بالمكاملة نجـد:

$$\frac{I}{R}\ln\frac{RI-E}{C}=-\frac{t}{L} \quad \Longrightarrow \quad RI-E=ce^{\frac{-R}{L}t}$$

ونعين ثابت المكاملة c من شروط البدء $I(0)=0$، لحظة إغلاق الدارة. فيكون: $c=-E$، وعليه يتعين شدة التيار من العلاقة:

$$I=\frac{E}{R}\left(1-e^{\frac{-R}{L}t}\right) \qquad (18)$$

وبملاحظة أن $\frac{R}{L}=1000$ نجد $exp\left(-\frac{R}{4}t\right)=exp(-(1000)t)$

وهذا العدد يتقارب كثيراً من الصفر بعد زمن قصير جداً. وهذا يعني من العلاقة أنَّ شدة التيار تثبت عملياً بعد زمن قصير جداً وتساوي $I=E/R$.

تطبيق (2): يسقط مظلي بسرعة $v_0=55\,m/s$ عندما تنفتح مظلته. فإذا كانت مقاومة الهواء $\left(\frac{w.v^2}{25}\right)^N$، حيث w الوزن الكلي للمظلي والمظلة وv سرعة المظلي في اللحظة t. أوجد سرعة المظلي v كدالة في الزمن، بعد انفتاح المظلة.

الحل: القوة المحصلة المؤثرة على المجموعة، تساوي وزن المجموعة مطروحاً منه مقاومة الهواء، أي:

$$\frac{w}{g}.\frac{dv}{dt}=w-\frac{w.v^2}{25} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dv}{v^2 25}=-\frac{9.8}{25}dt$$

وهي معادلة تفاضلية منفصلة المتغيرات، نحلها بالمكاملة فنجد:

$$\frac{1}{10}\ln\left|\frac{v-5}{v+5}\right|=-\frac{9.8}{25}t+c$$

ولحساب c نعوض $t=0$ و $v=55$ فنجد: $c=\frac{1}{10}\ln\frac{5}{6}$ وعليه فإنَّ:

$$v=5.\frac{6+5e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$$

ونلاحظ أن المظلي يصل سريعاً إلى سرعة ثابتة تقريباً وهي السرعة النهائية $5\,m/s$.

تمارين محلولة (2)

التمرين الأول : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$\cot y\,dx - \tan x dy = 0 \;\Rightarrow \cot y\,dx = \tan x\,dy$$

الحل : نحول المعادلة إلى معادلة ذات متحولات منفصلة :

$$\frac{dx}{\tan x} = \frac{dy}{\cot y} \Rightarrow \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \frac{\sin y\,dy}{\cos y} \Rightarrow \frac{d\,(\sin x)}{\sin x} = \frac{-d(\cos y)}{\cos y} \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow}$$
$$\ln \sin x + \ln \cos y = \ln c \;\Rightarrow\; \sin x \cos y = c$$

التمرين الثاني : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية: $ydx - xdy = xydx$

الحل:

$$ydx - xdy = xydx \;\Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = dx \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow}$$

$$\ln x - \ln y + \ln c = x \;\Rightarrow \ln\frac{cx}{y} = x \Rightarrow \frac{cx}{y} = e^x \;\Longrightarrow$$
$$\boxed{ye^x = cx}$$

التمرين الثالث : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية: $(3y^2 - x)y' = y$

الحل:

$$(3y^2 - x)y' = y \;\Rightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2 - x) = y \Rightarrow$$
$$3y^2dy = ydx + xdy \;\Rightarrow d(y^3) = d(xy) \Rightarrow \boxed{xy = y^3 + c}$$

التمرين الرابع : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية: $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

الحل:

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \;\overset{\text{متجانسة}}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

$$\overset{\text{بفرض}}{\Longrightarrow} u=\frac{y}{x} \Rightarrow y=ux \Rightarrow y'=x\frac{du}{dx}+u \overset{\text{بالتعويض}}{\Longrightarrow}$$

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\sqrt{1+u^2} \Rightarrow \frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \overset{\text{بالمكاملة}}{\Longrightarrow}$$

$$\ln x+\ln c=\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) \Rightarrow cx=u+\sqrt{1+u^2} \Rightarrow$$

$$cx=\frac{y}{x}+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2} \Rightarrow cx=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{cx^2=y+\sqrt{x^2+y^2}}$$

التمرين الخامس : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية: $(x\ln x)y'+y=2\ln x$

الحل:

$$(x\ln x)y'+y=2\ln x \xrightarrow{\text{نقسم على } x\ln x}$$

$$y'+\frac{1}{x\,lnx}.y=\frac{2}{x} \quad (\text{معادلة خطية})$$

وبالتالي حلها العام هو:

$$ye^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}=\int\frac{2}{x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}\,dx$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x\ln x}\ ;\ \begin{cases}\ln x=t\\ x=e^t\end{cases} \Rightarrow dt=\frac{dx}{x} \Rightarrow dx=e^t\,dt \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\int\frac{e^t}{t.e^t}=\ln t+c=\ln(\ln x)+c \xrightarrow{\text{بالتعويض بالحل العام}}$$

$$ye^{\ln(\ln x)}=2\int\frac{\ln x}{x}dx=2\int(\ln x).d(\ln x)$$

$$\Rightarrow y.\ln x=(\ln x)^2+c \Rightarrow \boxed{y=\ln x+\frac{c}{\ln x}}$$

التمرين السادس : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية:

$$xy''=y'$$

الحل:

في المعادلة لم يذكر فيها y صراحة لذلك يمكن إرجاعها إلى معادلة رتبة أولى وذلك بفرض:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p \;\Rightarrow\; y'' = \frac{dp}{dx} \xrightarrow{\text{نعوض في المعادلة}} x\frac{dp}{dx} = p \;\Rightarrow$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln p = \ln x + \ln c \;\Rightarrow p = cx \;\Rightarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = cx \;\Rightarrow\; dy = cx\,dx \;\Rightarrow\; y = c_1x^2 + c_2$$

التمرين السابع : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية:

$$(\cos x - \sin x)\,dx + (\sin x + \cos x)\,dy = 0$$

الحل:

$$d(\sin x + \cos x\,) + (\sin x + \cos x)\,dy = 0$$
$$\frac{d(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)} + dy = 0 \;\Rightarrow \ln\left|\frac{\sin x + \cos x}{c}\right| = -y \;\Rightarrow$$
$$\frac{\sin x + \cos x}{c} = e^{-y} \;\Rightarrow\; \boxed{e^{y}(\sin x + \cos x) = c}$$

التمرين الثامن : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية: $x^2y - x^3y' = y^4\cos x$

الحل:

$$x^2y - x^3y' = y^4\cos x \;\Rightarrow\; y' - \frac{1}{x}y = -\frac{\cos x}{x^3}y^4 \qquad (\text{برنولي})$$

نردها إلى معادلة خطية من الدرجة الأولى وذلك بفرض:

$$n = 4 \;\Rightarrow\; z = \frac{1}{y^{n-1}} = \frac{1}{y^3} \;\Rightarrow\; z' = \frac{-3y\prime}{y^4} \xrightarrow{\text{نقسم طرفي برنولي على } y^3}$$
$$\frac{y\prime}{y^4} - \frac{1}{x}.\frac{1}{y^3} = -\frac{\cos x}{x^3} \xrightarrow{\text{بالتعويض بقيم } z',z} -\frac{1}{3}\,z' - \frac{1}{x}z = \frac{-\cos x}{x^3} \;\Rightarrow$$
$$z' + \frac{3}{x}z = \frac{3\cos x}{x^3} \xrightarrow{\text{حل المعادلة الخطية}} ze^{\int p(x)dx} =$$
$$\int Q(x)\,e^{\int p(x)dx}\,dx \;\Rightarrow$$
$$ze^{\int\frac{3dx}{x}} = 3\int\frac{\cos x}{x^3}\,e^{\int\frac{3dx}{x}}\,dx \;\Rightarrow\; zx^3 = 3\int\frac{\cos x}{x^3}x^3\,dx \;\Rightarrow$$
$$\frac{x^3}{y^3} = 3\,\int dsinx + \;c \;\Rightarrow$$
$$x^3 = y^3(3\sin x + c)$$

التمرين التاسع : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية:

$$\cos y\,dx + (1+e^{-x})\sin y\,dy = 0$$

الحل:

$$\cos y\,dx + (1+e^{-x})\sin y\,dy = 0\,, \frac{\cos y}{\sin y}dx + (1+e^{-x})dy = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-dx}{1+e^{-x}} = \frac{\sin y}{\cos y}dy \Rightarrow \frac{-dx}{1+e^{-x}} = \frac{-d(\cos y)}{\cos y} \Rightarrow \frac{dx}{1+e^{-x}} = \frac{d\cos y}{\cos y}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\cos y}{c_1}\right| = \int \frac{dx}{1+e^{-x}} \;;\; e^{-x} = t \Rightarrow dt = -e^{-x}dx \Rightarrow$$

$$dx = \frac{-dt}{t} \Rightarrow \mathrm{I}' = -\int \frac{dt}{t(1+t)} = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{d(1+t)}{(1+t)} = \ln\left|\frac{1+t}{t}\right| +$$

$$c_2 = \ln\left|\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}\right| + c_1 \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{\cos y}{c_3}\right| = \ln\left|\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}\right| \Rightarrow e^{-x}\cos y = c_2(1+e^{-x}) \Rightarrow$$

$$ce^{-x} = \frac{1}{\cos y}(1+e^{-x}) \Rightarrow ce^{-x} = \sec y\,(1+e^{-x}) \xRightarrow{x=0, y=\frac{\pi}{4}}$$

$$c = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{(1+e^{x})\sec y = 2\sqrt{2}}$$

<u>التمرين العاشر</u> : أوجد الحل العام للمعادلة الآتية:

$$(x^2+y^2+x)dx + xy\,dy = 0$$

الحل: نلاحظ أن: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = y$ (فالمعادلة غير تامة)

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x) \;,\; \mu = \mu(x) \Rightarrow$$

$$\frac{d(\ln|\mu|)}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln|\mu| = \ln|x| \Rightarrow \mu = x \xRightarrow{\text{نضرب الطرفين بـ } x}$$

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2y\,dy = 0$$

نلاحظ أن:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{المعادلة تامة}$$

وبالتالي يمكن كتابتها على شكل مجموع تفاضلات تامة من الشكل:

$$d\left(\frac{1}{4}x^4\right) + d\left(\frac{1}{3}x^3\right) + d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right) = 0\,,\; \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

$$\xRightarrow{\text{نضرب بـ } 12} \boxed{3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = c_1}$$

تمارين غير محلولة (2)

1. المعادلات التي يمكن فيها فصل المتغيرات

حل المعادلات المعطاة ثم ارسم لكل منها عدة منحنيات تكاملية. عين أيضاً الحلول التي تحقق الشروط الابتدائية (في المسائل التي يشار فيها إلى الشروط الابتدائية).

1. $xy\,dx + (x+1)\,dy = 0$
2. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$
3. $(x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0\,; y(0) = 1$
4. $y'\cot x + y = 2\,; y(0) = -1$
5. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}\,; y(2) = 0$
6. $xy' + y = y^2\,; y(1) = 0.5$
7. $2x^2yy' + y^2 = 2$
8. $y' - xy^2 = 2xy$
9. $e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1$
10. $z' = 10^{x+z}$
11. $x\frac{dx}{dt} + t = 1$
12. $y' = \cos(y - x)$
13. $y' - y = 2x - 3$
14. $(x+2y)y' = 1\,; y(0) = -1$
15. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

الأجوبة:

1. $y = C(x+1)e^{-x}\,, x = -1$; 2. $ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}$
3. $y(\ln|x^2-1| + C) = 1\,, y = 0\,, y[\ln(1-x^2)+1] = 1$
4. $y = 2 + C\cos x\,, 2 - 3\cos x$; 5. $y = (x-C)^3\,, y = 0\,,$
$y = (x-2)^3, y = 0$; 6. $y(1-Cx) = 1\,; y = 0\,; y(1+x) = 1$
7. $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$; 8. $\left(Ce^{-x^2} - 1\right)y = 2\,; y = 0$
9. $e^{-s} = 1 + Ce^{t}$; 10. $z = -\log(C - 10^x),$

11. $x^2 + t^2 - 2t = C$; 12. $\cot\frac{y-x}{2} = x + C\,; y - x = 2\pi k\,, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots;$ 13. $2x + y - 1 = Ce^x;$
14. $x + 2y + 2 = Ce^y; x + 2y + 2 = 0$
15. $\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2\right) = x + C$

2. المعادلات المتجانسة

حل المعادلات الآتية:

1. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$
2. $(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
3. $(y^2 + 2xy)\,dx + x^2\,dy = 0$
4. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$
5. $y^2 + x^2y' = xyy'$
6. $(y^2 + x^2)y' = 2xy$
7. $xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$
8. $xy' = y - x\,e^{\frac{y}{x}}$
9. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x+y}{x}$
10. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$
11. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = x\,dy$
12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
13. $(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)\,dy = 0$
14. $(2x + y + 1)\,dx - (4x + 2y - 3)\,dy = 0$
15. $x - y - 1 + (y - x + 2)\,y' = 0$
16. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$
17. $(y + 2)\,dx = (2x + y - 4)\,dy$
18. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$
19. $(y' + 1)\ln\frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$
20. $y' = \frac{y+2}{x+1} + \tan\frac{y-2x}{x+1}$
21. $x^3(y' - x) = y^2$
22. $2x^2y' = y^3 + xy$

23. $2x\,dy + (x^2y^4 + 1)y\,dx = 0$
24. $y\,dx + x(2xy + 1)\,dy = 0$
25. $2y' + x = 4\sqrt{y}$
26. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$
27. $2\,x\,y' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$
28. $\frac{2}{3}\,x\,y\,y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$
29. $2y + (x^2y + 1)\,x\,y' = 0$

الأجوبة:

1. $x + y = Cx\,; x = 0$ 2. $\ln(x^2 + y^2) = C - 2\tan^{-1}\frac{y}{x}$ 3. $x(x - y) = Cy\,;\ y = 0$ 4. $x = \pm\, y\sqrt{\ln Cx}\ ; y = 0$ 5. $y = Ce^{\frac{y}{x}}$ 6. $y^2 - x^2 = Cy\,; y = 0$ 7. $\sin\frac{y}{x} = Cx$ 8. $y = -x\ln\ln Cx$ 9. $\ln\frac{x+y}{x} = Cx$ 10. $\ln Cx = \cot\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)\ ; y = xe^{2\pi k}, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 11. $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}\,; y = 0$ 12. $\sin^{-1}\frac{y}{x} = \ln Cx \times \operatorname{sgn} x\,; y = \pm x$ 13. $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2\,; y = x + 1$ 14. $2x + y - 1 = Ce^{2y - x}$ 15. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$ 16. $(y - x + 5)^5 \times (x + 2y - 2) = C$ 17. $(y + 2)^2 = C(x + y - 1)\,; y = 1 - x$ 18. $y + 2 = Ce^{-2\tan^{-1}\frac{y+2}{x-3}}$ 19. $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}$ 20. $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x + 1)$ 21. $x^2 = (x^2 - y)\ln Cx\ ; y = x^2$ 22. $x = -y^2\ln Cx\ ; y = 0$ 23. $x^2y^4\ln Cx^2 = 1\,; y = 0$ 24. $y^2e^{-\frac{1}{xy}} = C\,; y = 0\,; x = 0$ 25. $\left(2\sqrt{y} - x\right)\ln C\left(2\sqrt{y} - x\right) = x\,;\ 2\sqrt{y} = x$ 26. $1 - xy = Cx^3(2 + xy)\,; xy = -2$ 27. $2\sqrt{\frac{1}{xy^2} - 1} = -\ln Cx\ ;\ xy^2 = 1$ 28. $\sin^{-1}\frac{y^2}{|x^3|} = \ln Cx^3\ ;\ |x^3| = y^2$ 29. $x^2y\ln Cy = 1\,; y = 0$

3. المعادلات الخطية من المرتبة الأولى

حل المعادلات:

1. $xy' - 2y = 2x^4$
2. $(2x+1)y' = 4x + 2y$
3. $y' + y\tan x = \sec x$
4. $x\,(y' - y) = e^x$
5. $x^2y' + xy + 1 = 0$
6. $y = x\,(y' - x\cos x)$
7. $y' = 2\,x\,(x^2 + y)$
8. $(xy' - 1)\ln x = 2y$
9. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$
10. $(x + y^2)\,dy = y\,dx$
11. $(2e^y - x)y' = 1$
12. $(\sin^2 y + x\cot y)y' = 1$
13. $(2x + y)\,dy = y\,dx + 4\ln y\ \,dy$
14. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$
15. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$
16. $y' + 2y = y^2e^x$
17. $(x+1)(y' + y^2) = -y$
18. $y' = y^4\cos x + y\tan x$
19. $xy^2y' = x^2 + y^3$
20. $xy\,dy = (y^2 + x)\,dx$
21. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$
22. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$
23. $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$
24. $y'x^3\sin y = xy' - 2y$
25. $(2x^2y\ln y - x)y' = y$

الأجوبة:

1. $y = Cx^2 + x^4$ 2. $y = (2x+1)(C + \ln|2x+1|) + 1$ 3. $y = \sin x + C\cos x$ 4. $y = e^x(\ln|x| + C)$ 5. $xy = C -$

$\ln|x|$ 6. $y = x(C + \sin x)$ 7. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$ 8. $y = C\ln^2 x - \ln x$ 9. $xy = (x^3 + C)e^{-x}$ 10. $x = y^2 + Cy\,; y = 0$ 11. $x = e^y + Ce^{-y}$ 12. $x = (C - \cos y)\sin y$ 13. $x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2\,; y = 0$ 14. $x = Cy^3 + y^2\,; y = 0$ 15. $(y-1)^2 x = y - \ln Cy\,; y = 0\,; y = 1$ 16. $y(e^x + Ce^{2x}) = 1\,; y = 0$ 17. $y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1\,; y = 0$ 18. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x\,; y = 0$ 19. $y^3 = Cx^3 - 3x^2$ 20. $y^2 = Cx^2 - 2x\,; x = 0$ 21. $y = x^4\ln^2 Cx\,; y = 0$ 22. $y^{-2} = x^4(2e^x + C)\,; y = 0$ 23. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$ 24. $x^2(C - \cos y) = y\,; y = 0$
25. $xy(C - \ln^2 y) = 1$

4. بواسطة تعويضات مناسبة أو عمليات تفاضل حوّل المعادلات الآتية إلى معادلات خطية وأوجد حلها العام.

1. $x\,dx = (x^2 - 2y + 1)\,dy$
2. $(x+1)(yy' - 1) = y^2$
3. $x(e^y - y') = 2$
4. $(x^2 - 1)y'\sin y + 2\,x\cos y = 2\,x - 2\,x^3$
5. $y(x) = \int_o^x y(t)\,dt + x + 1$
6. $\int_o^x (x - t)y(t)\,dt = 2\,x + \int_o^x y(t)\,dt$

الأجوبة:

1. $x^2 = Ce^{2y} + 2y$; 2. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$
3. $e^{-y} = Cx^2 + x$; 4. $\cos y = (x^2 - 1)\ln C(x^2 - 1)$
5. $y = 2e^x - 1$; 6. $y = -2e^x$

5. أوجد الحل الخاص لمعادلات ريكاتي المعطاة ثم حولها إلى معادلات برنولي ثم حلها:

1. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4$
2. $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$

3. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$
4. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$
5. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

الأجوبة:

1. $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{Cx^5 - x}\ ; y_0 = \frac{2}{x}$, 2. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{Cx^{\frac{2}{3}} + x}\ ; y_0 = \frac{1}{x}$
3. $y = x + \frac{x}{x+C}; y_0 = x$, 4. $y = x + 2 + \frac{4}{Ce^{4x} - 1}; y_0 = x + 2$
5. $y = e^x - \frac{1}{x+C}; y_0 = e^x$

6. المعادلات التفاضلية التامة، ومعامل التكاملي:

تحقق من أن المعادلات المعطاة معادلات تامة وحلها

1. $2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$
2. $(2 - 9xy^2)\,x\,dx + (4y^2 - 6x^3)\,y\,dy = 0$
3. $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$
4. $\frac{y}{x}\,dx + (y^3 + \ln x)\,dy = 0$
5. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}\,dy = 0$
6. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0$
7. $(1 + y^2 \sin 2x)\,dx - 2y\cos^2 x\ dy = 0$
8. $3x^2\,(1 + \ln y)\,dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)\,dy$
9. $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)\,dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0$

الأجوبة:

1. $3x^2y - y^3 = C$; 2. $x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = C$; 3. $xe^{-y} - y^2 = C$
4. $4y\ln x + y^4 = C$; 5. $x + \frac{x^3}{y^2} + \frac{5}{y} = C$; 6. $x^2 + \frac{2}{3}(x^2 - y)^{\frac{3}{2}} = C$
7. $x - y^2\cos^2 x = C$; 8. $x^3 + x^3\ln y - y^2 = C$; 9. $x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y$

7.حل المعادلات الآتية بتعيين المعامل التكاملي لكل منها بأية طريقة أو بإجراء التعويض بالمتغيرات.

1. $(x^2+y^2+x)\,dx+y\,dy=0$
2. $(x^2+y^2+y)\,dx-x\,dy=0$
3. $x\,dx=(x\,dy+y\,dx)\sqrt{1+x^2}$
4. $xy^2\,(xy'+y)=1$
5. $y^2\,dx-(xy+x^3)\,dy=0$
6. $\left(y-\frac{1}{x}\right)\,dx+\frac{dy}{y}=0$
7. $(x^2+3\ln y)\,y\,dx=x\,dy$
8. $y^2\,dx+(xy+\tan xy)\,dy=0$
9. $y\,(x+y)\,dx+(xy+1)\,dy=0$
10. $y\,(y^2+1)\,dx+x\,(y^2-x+1)\,dy=0$
11. $(x^2+2x+y)\,dx=(x-3x^2y)\,dy$
12. $y\,dx-x\,dy=2x^3\tan\frac{y}{x}\,dx$
13. $y^2\,dx+(e^x-y)\,dy=0$
14. $xy\,dx=(y^3+x^2y+x^2)\,dy$
15. $x^2y(y\,dx+x\,dy)=2y\,dx+x\,dy$
16. $(x^2-y^2+y)\,dx+x\,(2y-1)\,dy=0$
17. $(2x^2y^2+y)\,dx+(x^3y-x)\,dy=0$
18. $(2x^2y^3-1)\,y\,dx+(4x^2y^3-1)\,x\,dy=0$
19. $y\,(x+y^2)\,dx+x^2(y-1)\,dy=0$
20. $(x^2-\sin^2 y)\,dx+x\sin 2y\,\,dy=0$
21. $x\,(\ln y+2\ln x-1)\,dy=2y\,dx$
22. $(x^2+1)\,(2x\,dx+\cos y\,\,dy)=2x\sin y\,\,dx$
23. $(2x^3y^2-y)\,dx+(2x^2y^3-x)\,dy=0$
24. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)\,y'=0$
25. $(x^2-y)\,dx+x\,(y+1)\,dy=0$
26. $y^2\,(y\,dx-2x\,dy)=x^3(x\,dy-2y\,dx)$

الأجوبة:

1. $2x+\ln(x^2+y^2)=C$ 2. $x+\tan^{-1}\frac{x}{y}=C$ 3. $\sqrt{1+x^2}=xy+C$ 4. $2x^3y^3-3x^2=C$ 5. $y^2=x^2(C-2y)\,;\;x=0$ 6. $(x^2-C)y=2x$ 7. $x^2+\ln y=Cx^3\,;x=0$ 8. $y\sin xy=C$ 9. $\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C\,;y=0$ 10. $-x+1=xy(\tan^{-1}y+$

$C)\,;x=0\,;y=0$ 11. $x+2\ln|x|+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x}=C\,;x=0$
12. $\sin\frac{y}{x}=Ce^{-x^2}$ 13. $\ln|y|-ye^{-x}=C\,;y=0$ 14.
$\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=2y+C\,;y=0$ 15. $x^2y\ln Cxy=-1\,;x=0\,;y=0$ 16. $x^2+y^2=y+Cx\,;x=0$ 17. $x^2y+\ln\left|\frac{x}{y}\right|=C\,;x=0\,;\,y=0$ 18. $2xy^2+\frac{1}{xy}=C\,;x=0\,;y=0$ 19.
$\ln\frac{x+y}{y}-\frac{y(1+x)}{x+y}=C\,;y=0$ 20. $\sin^2y=Cx-x^2\,;x=0$ 21.
$y=C\ln x^2y$ 22. $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1)$ 23.
$xy(C-x^2-y^2)=1\,;x=0\,;y=0$ 24. $y^2=Cx^2e^{x^2y^2}$ 25.
$x\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}+\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)=C\,;x=0$ 26. $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}\,;x=0\,;y=0$

8. المعادلات غير المحلولة بالنسبة للمشتقة

1. $y'^2-y^2=0$
2. $8y'^3=27y$
3. $(y'+1)^3=27(x+y)^2$
4. $y^2(y'^2+1)=1$
5. $y'^2-4y^3=0$
6. $y'^2=4y^3(1-y)$
7. $xy'^2=y$
8. $yy'^3+x=1$
9. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$
10. $4(1-y)=(3y-2)^2\,y'^2$

الأجوبة:

1. $y=Ce^{\pm x}$ 2. $y^2=(x+C)^3\,;y=0$ 3. $y+x=(x+C)^3\,;y=-x$ 4. $(x+C)^2+y^2=1\,;y=\pm1$ 5. $y(x+C)^2=1\,;y=0$ 6. $y[1+(x-C)^2]=1\,;y=0\,;y=1$ 7. $(y-x)^2=2C(x+y)-$

$C^2\,; y = 0$ 8. $(x-1)^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = C$ 9. $4y = (x+C)^2\,; y = Ce^x$ 10. $y^2(1-y) = (x-C)^2\,; y = 1$

9.حل المعادلات الآتية بالنسبة إلى y'، وبعد ذلك عين الحلول العامة بالطرق المعتادة. جد أيضاً الحلول المفردة (إن وجدت).

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$
2. $xy'(xy' + y) = 2y^2$
3. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$
4. $xy'^2 = y(2y' - 1)$
5. $y'^2 + x = 2y$
6. $y'^3 + (x+2)e^x = 0$
7. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$
8. $(xy' + 3y)^2 = 7x$
9. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$
10. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$
11. $y'^4 + y^2 = y^4$
12. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$
13. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$
14. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$
15. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$
16. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$

الأجوبة:

1. $y = Ce^x\,; y = Ce^{-x} + x - 1$ 2. $x^2y = C\,; y = Cx$ 3. $x^2 + C^2 = 2Cy\,; y = \pm x$ 4. $(x+C)^2 = 4Cy\,; y = 0\,; y = x$ 5. $\ln\left|1 \pm 2\sqrt{2y - x}\right| = 2\left(x + C \pm \sqrt{2y - x}\right)$ 6. $4e^{-\frac{y}{3}} = (x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ 7. $y = 2x^2 + C\,; y = -x^2 + C$ 8. $y = Cx^{-3} \pm 2\sqrt{\frac{x}{7}}$ 9. $\ln Cy = x \pm 2e^{\frac{x}{2}}\,; y = 0$ 10. $\ln Cy = x \pm \sin x\,; y = 0$ 11. $\tan^{-1} u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = \pm x + C\,; u = \sqrt[4]{1 - \frac{1}{y^2}}\,; y = 0\,; y = \pm 1$ 12. $x^2 + (Cy + 1)^2 = 1\,; y = 0$ 13. $(Cx + 1)^2 = 1 - y^2\,; y = \pm 1$ 14. $2(x - C)^2 + 2y^2 = C^2\,; y = \pm x$ 15. $y = Ce^{\pm x} - x^2$ 16. $y^2 = C^2x - C\,; 4xy^2 = -1$

10.حل المعادلات الآتية بطريقة إدخال البارامتر

1. $x = y'^3 + y'$
2. $x(y'^2 - 1) = 2y'$
3. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$
4. $y'(x - \ln y') = 1$
5. $y = y'^2 + 2y'^3$
6. $y = \ln(1 + y'^2)$
7. $(y' + 1)^3 = (y' - y)^2$
8. $y = (y' - 1)e^{y'}$
9. $y'^4 - y'^2 = y^2$
10. $y'^2 - y'^3 = y^2$
11. $y'^4 = 2yy' + y^2$
12. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$
13. $5y + y'^2 = x(x + y')$
14. $x^2y'^2 = xyy' + 1$
15. $y'^3 + y^2 = xyy'$
16. $2xy' - y = y' \ln yy'$
17. $y' = y\, e^{xy'}$
18. $y = xy' - x^2y'^3$
19. $y = 2xy' + y^2y'^3$
20. $y\,(y - 2xy')^3 = y'^2$

الأجوبة:

1. $x = p^3 + p\,; 4y = 3p^4 + 2p^2 + C$ 2. $x = \frac{2p}{p^2-1}\,; y = \frac{2}{p^2-1} - \ln|p^2 - 1| + C$ 3. $x = p\sqrt{p^2 + 1}\,; 3y = (2p^2 - 1)\sqrt{p^2 + 1} + C$ 4. $x = \ln p + \frac{1}{p}\,; y = p - \ln p + C$ 5. $x = 3p^2 + 2p + C\,; y = 2p^3 + p^2\,; y = 0$ 6. $x = 2\tan^{-1} p + C\,; y = \ln(1 + p^2)\,; y = 0$ 7. $x = \ln|p| \pm \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right| \pm 3\sqrt{p + 1} + C\,; y = p \pm (p + 1)^{\frac{3}{2}}\,; y = \pm 1$ 8. $x = e^p + C\,; y = (p - 1)e^p\,; y = -1$ 9. $x = \pm\left(2\sqrt{p^2 - 1} + \sin\frac{1}{|p|}\right) + C\,; y = \pm p\sqrt{p^2 - 1}\,; y = 0$ 10. $x = \pm\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right| + 3\sqrt{1 - p}\right) + C\,; y = \pm p\sqrt{1 - p}\,; y = 0$ 11. $x = \pm 2\sqrt{1 + p^2} - \ln\left(\sqrt{p^2 + 1} \pm 1\right) + C\,; y = -p \pm p\sqrt{p^2 + 1}\,; y = 0$ 12. $4y = C^2 - 2(x - C)^2\,; 2y = x^2$ 13. $x = -\frac{p}{2} + C\,; 5y = C^2 - \frac{5p^2}{4}\,; x^2 = 4y$

14. $\pm xp\sqrt{2\ln Cp} = 1\,; y = \pm\left(\sqrt{2\ln Cp} - \frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$ 15. $pxy = y^2 + p^3\,;\ y^2(2p + C) = p^4\,; y = 0$ 16. $y^2 = 2Cx - C\ln C\ ; 2x = 1 + 2\ln|y|$ 17. $Cx = \ln Cy\ ; y = ex$ 18. $xp^2 = C\sqrt{|p|} - 1\,; y = xp - x^2p^3\,; y = 0$ 19. $2p^2x = C - C^2p^2\,; py = C\,; 32x^3 = -27y^4$ 20. $y^2 = 2C^3x + C^2\,; 27x^2y^2 = 1$

11. حل معادلات لاغرانج وكليرو

1. $y = xy' - y'^2$
2. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$
3. $y = 3xy' - 7y'^3$
4. $y = xy' - (2 + y')$
5. $x(y'^2 + 1) = 2yy'$
6. $y = xy'^2 - 2y'^3$
7. $xy' - y = \ln y'$
8. $xy'(y' + 2) = y$
9. $2y'^2(y - xy') = 1$
10. $2xy' - y = \ln y'$
11. $y'^3 = 3(xy' - y)$

الأجوبة

1. $y = Cx - C^2\,; 4y = x^2$ 2. $x\sqrt{p} = \ln p + C\,; y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)\,; y = 0$ 3. $x = 3p^2 + C|p|^{-\frac{3}{2}}\,;\ y = 2p^3 + 3C|p|^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sgn} p\,; y = 0$ 4. $x = Cx - C - 2$ 5. $x = Cp\,; 2y = C(p^2 + 1)\,; y = \pm x$ 6. $x = C(p - 1)^{-2} + 2p + 1\,; y = Cp^2(p - 1)^{-2} + p^2\,; y = 0\,; y = x - 2.$ 7. $y = Cx - \ln C\ ; y = \ln x + 1$ 8. $y = \pm 2\sqrt{Cx} + C\,; y = -x$ 9. $2C^2(y - Cx) = 1\,; 8y^3 = 27x^2$ 10. $xp^2 = p + C\,; y = 2 + 2Cp^{-1} - \ln p$ 11. $C^3 = 3(Cx - y)\,; 9y^2 = 4x^3$

12.جد المنحني الذي يكون كل مماس له مع محوري الإحداثيات مثلثاً مساحته $2a^2$.

الجواب: $xy = \pm a^2$

13.جد المنحني الذي يقطع كل مماس له على محوري الإحداثيات جزأين بحيث يكون مجموع المقدارين المقلوبين لمربعي طولي هذين الجزأين يساوي 1.

الجواب: $x^2 + y^2 = 1$

14.جد المنحني المار بنقطة الأصل والذي يكون لجزء العمودي عليه المقطوع بضلعي الزاوية الإحداثية الأولى طول ثابت يساوي 2.

الجواب:

$$x = \frac{p(p^2+2)}{\left(\sqrt{p^2+1}\right)^3}\ ,\ y = \frac{p^2}{\left(\sqrt{p^2+1}\right)^3}\ \ ;$$
$$x = \frac{p}{\left(\sqrt{p^2+1}\right)^3}\ ,\ y = \frac{2p^2+1}{\left(\sqrt{p^2+1}\right)^3}$$

15. معادلات متنوعة من الرتبة الأولى

حل المعادلات الآتية، وخطط الرسوم البيانية لحلولها:

1. $xy' + x^2 + xy - y = 0$
2. $2xy' + y^2 = 1$
3. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$
4. $(xy' + y)^2 = x^2y'$
5. $y - y' = y^2 + xy'$
6. $(x + 2y^3)\,y' = y$
7. $y'^3 - y'e^{2x} = 0$
8. $x^2y' = y(x + y)$
9. $(1 - x^2)\,dy + xy\,dx = 0$
10. $y'^2 + 2(x - 1)\,y' - 2y = 0$
11. $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)\,y'$
12. $x^2y' - 2xy = 3y$
13. $x + yy' = y^2(1 + y'^2)$
14. $y = (xy' + 2y)^2$
15. $y' = \frac{1}{x - y^2}$
16. $y'^3 + (3x - 6)\,y' = 3y$
17. $x - \frac{y}{y'} = \frac{2}{y}$
18. $2y'^3 - 3y'^2 + x = y$

19. $(x+y)^2\, y' = 1$
20. $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$
21. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)\, dy$
22. $xy' = e^y + 2y'$
23. $2(x-y^2)\, dy = y\, dx$
24. $x^2y'^2 + y^2 = 2x(2-yy')$
25. $dy + (xy - xy^3)\, dx = 0$
26. $2x^2y' = y^2\,(2xy' - y)$
27. $\frac{y-xy'}{x+yy'} = 2$
28. $x\,(x-1)\, y' + 2xy = 1$
29. $xy(xy'-y)^2 + 2y' = 0$
30. $(1-x^2)\, y' - 2xy^2 = xy$
31. $y' + y = xy^3$

الأجوبة:

1. $y = x\,(Ce^{-x} - 1)$ 2. $(Cx+1)y = Cx - 1\,; y = 1$ 3. $y\,(x^2 - C) = x\,; y = 0$ 4. $x\,(C-y) = C^2\,; x = 4y$ 5. $y\,(x+C) = x + 1\,; y = 0$ 6. $x = Cy + y^3\,; y = 0$ 7. $y = C\,; y = C \pm e^x$ 8. $y \ln Cx = -x\,; y = 0$ 9. $y^2 = C\,(x^2-1)\,; x = \pm 1$ 10. $2y = 2C\,(x-1) + C^2\,; 2y = -(x-1)^2$ 11. $x = Cy + \ln^2 y$ 12. $y = Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$ 13. $(x-C)^2 + y^2 = C\,; 4(y^2 - x) = 1$ 14. $4x^2y = (x+2C)^2\,; y = 0$ 15. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$ 16. $3y = 3C\,(x-2) + C^3\,; 9y^2 = 4\,(2-x)^3$ 17. $y^2 = C\,(xy-1)\,; xy = 1$ 18. $4(x-C)^3 = 27(y-C)^2\,; y = x - 1$ 19. $x + y = \tan(y - C)$ 20. $x^3y^2 + 7x = C$ 21. $y\,(xy-1) = Cx$ 22. $-e^{-y} = \ln C(x-2)$ 23. $x = y^2(C - 2\ln|y|)\,; y = 0$ 24. $3xy = C \pm 4x^{\frac{3}{2}}$ 25. $y^2\left(Ce^{x^2} + 1\right) = 1\,; y = 0$ 26. $y^2 = 2x \ln Cy\,; y = 0$ 27. $\ln(x^2+y^2) + \tan^{-1}\frac{y}{x} = C$ 28. $(x-1)^2y = x - \ln|x| + C$ 29. $C^2x^2 + 2y^2 = 2C\,; 2x^2y^2 = 1$ 30. $y\left(C\sqrt{|x^2-1|} - 2\right) = 1\,; y = 0$ 31. $y^2(Ce^{2x} + x + 0.5) = 1\,; y = 0$

16. المعادلات التي يمكن تخفيض رتبتها

حل المعادلات الآتية:

1. $x^2y'' = y'^2$

2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$
3. $y^3 y'' = 1$
4. $y'^2 + 2yy'' = 0$
5. $y'' = 2yy'$
6. $yy'' + 1 = y'^2$
7. $y''(e^x + 1) + y' = 0$
8. $y''' = y''^2$
9. $yy'' = y'^2 - y'^3$
10. $y''' = 2(y'' - 1)\cot x$

الأجوبة:

1. $C_1 x - C_1^2 y = \ln|C_1 x + 1| + C_2$; $2y = x^2 + C$; $y = C$,
2. $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3$; $y = \pm x + C$,
3. $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$,
4. $y^3 = C_1(x + C_2)^2$; $y = C$,
5. $y = C_1 \tan(C_1 x + C_2)$; $\ln\left|\frac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1 x + C_2$; $y(x - C) = 1$; $y = C$,
6. $C_1 y = \pm\sin(C_1 x + C_2)$; $C_1 y = \pm\sinh(C_1 x + C_2)$; $y = C \pm x$,
7. $y = C_1\,(x - e^{-x}) + C_2$,
8. $y = C_3 - (x + C_1)\ln C_2(x + C_1)$; $y = C_1 x + C_2$,
9. $y + C_1 \ln|y| = x + C_2$; $y = C$,
10. $2y = C_1 \cos 2x + (1 + 2C_1)\,x^2 + C_2 x + C_3$

فهرس الفصل الثالث

الفصل الثالث

3. المعادلات التفاضليّة الخطّيّة المتجانسة ذات الأمثال الثابتة

1.3 المؤثّرات الاشتقاقيّة:

تعريف: 3-1-1: المؤثّر الاشتقاقيّ هو الذي إذا أثّر على دالة y أعطى مشتقّتها ونرمز له بـ $D=\frac{d}{d\,x}$ ومنه نجد أنّ:

$$\frac{d\,y}{d\,x}=D\,y,\frac{d^2y}{dx^2}=D^2y\,,\dots\,,\frac{d^ny}{dx^n}=D^ny$$

فإذا كانت:

$p_0\,,p_1\,,\dots,p_{\mathrm{n}-1}\,,p_{\mathrm{n}}\neq 0$ ثوابت حقيقيّة فإنّ:

$$p_{\mathrm{n}}\,\frac{d^ny}{dx^n}+p_{\mathrm{n}-1}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_1\,\frac{d\,y}{d\,x}+p_0\,y=$$

$$(p_{\mathrm{n}}\,D^n+p_{\mathrm{n}-1}\,D^{n-1}+\dots+p_1\,D+p_0\,)y=f(D)y$$

حيث: $f(D)$ مؤثّر اشتقاقيّ ذو أمثال ثابتة وهو كثير حدود في D.

1.1.3 خواص المؤثّرات الاشتقاقيّة :

إذا كانت α,β ثوابت و r,s أعداد صحيحة موجبة وباستخدام قواعد الاشتقاق المعروفة نجد:

1): $D(u+v)=Du+Dv$

2): $D^r\left(D^s y\right)=D^s\left(D^r y\right)=D^{r+s}y$

3): $(D-\alpha)(D-\beta)y=\left[D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta\right]y$

4) : $Dy\neq yD$

على اعتبار y,u,v دوال بالمتحول x ونلاحظ أنّ المؤثّر الاشتقاقيّ لا يتمتّع بالخاصّة التبديليّة.

2.1.3 كيف يتعامل المؤثّر الاشتقاقيّ مع الدوال الأسّيّة:

ليكن λ ثابت و r عدد صحيح موجب و$f(D)$ المؤثّر الاشتقاقيّ، عندئذ:

1) بما أنّ $D(e^{\lambda x})=\lambda e^{\lambda x}$ ومنه $D^r(e^{\lambda x})=\lambda^r e^{\lambda x}$ هذا يعني إذا كتبنا $f(D)$ بشكل مفصّل نجد:

$$f(D)(e^{\lambda x})=(P_nD^n+.....+P_1D+P_0)e^{\lambda x}=$$

$$=e^{\lambda x}(P_n\lambda^n+.....+P_1\lambda+P_0)=e^{\lambda x}f(\lambda)$$

هذا يعني أنّه في التركيب $f(D)e^{\lambda x}$ أجرينا انزياحاً لـ $e^{\lambda x}$ إلى يسار $f(D)$ ثمّ استبدلنا D بـ λ في $f(D)$.

2) إذا كان v دالة بالمتحوّل x فإنّ:

$$D(e^{\lambda x}v)=\lambda e^{\lambda x}v+e^{\lambda x}\frac{dv}{dx}=e^{\lambda x}\left(\frac{dv}{dx}+\lambda v\right)=e^{\lambda x}(D+\lambda)v$$

وبوضع $(D+\lambda)v$ يكون:

$$\begin{aligned}&D\,(e^{\lambda x}v)=e^{\lambda x}U\\&\Rightarrow D^2(e^{\lambda x}v)=D(e^{\lambda x}U)=e^{\lambda x}(D+\lambda)U=e^{\lambda x}(D+\lambda)^2v\\&\Rightarrow D^r(e^{\lambda x}v)=e^{\lambda x}(D+\lambda)^r v\end{aligned}$$

هذا يعني في التركيب $f(D)(e^{\lambda x}v)$ تمّ إزاحة $e^{\lambda x}$ إلى يسار $f(D)$ ثمّ استبدال D بـ $(D+\lambda)$ في $f(D)$.

3.1.3 استخدام المؤثّرات الاشتقاقيّة في حلّ المعادلات الخطّيّة من الرتبة n:

المعادلة الخطّيّة من الرتبة n:

تعريف: 3-1-2: الشكل العامّ للمعادلة التفاضليّة الخطّيّة المتجانسة (بدون طرف ثانٍ) ذات الأمثال الثابتة من الرتبة n، وباستخدام المؤثّر الاشتقاقيّ، هو:

$$f(D)y=0$$

ملاحظة: إذا كانت $P_0, P_1, ..., P_n$ دوال بالمتحول x في $f(D)$ فإنّنا نحصل على معادلة خطّيّة ذات أمثال متحوّلة.

تعريف: 3-1-3:نقول عن مجموعة الدوال $y_1, y_2, ..., y_n$ إنّها مستقلّة خطّيّاً في المجال I إذا أدّى تحقّق المطابقة:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_n y_n \equiv 0$$

في جميع نقاط المجال I إلى أنّ:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$$

مبرهنة: 3-1-1: تكون مجموعة الدوال $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ مستقلّة خطّيّاً في المجال I إذا كانت مشتقّاتها من الرتبة n مستمرّة فيه وكان:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ..... & y_n \\ y_1' & y_2' & ..... & y_n' \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ..... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

في هذا المجال وهذا ما يسمّى بمعيّن رونسكي لمجموعة دوال.

4.1.3 حلّ المعادلة التفاضليّة الخطّيّة المتجانسة ذات الأمثال الثابتة:

اعتماداً على ما سبق يمكن أن نكتب المعادلة المتجانسة (دون طرف ثان) بالشكل:

$$f(D)y = (D-\lambda_1)(D-\lambda_2).....(D-\lambda_n)y = 0 \qquad (1)$$

إنّ حلّ أيّة معادلة من المعادلات:

$$(D-\lambda_1)y = 0, (D-\lambda_2)y = 0, ..., (D-\lambda_n)y = 0$$

هو حلّ للمعادلة المتجانسة (1) وحلّ المعادلات السابقة على الترتيب:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$$

وباعتبار أنّ هذه الحلول مستقلّة خطّيّاً فالحلّ العامّ للمعادلة (1) هو:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}$$

فإذا كان للمعادلة المتجانسة حلّ $y=e^{\lambda x}$ فإنّ هذا الحلّ يحقّق المعادلة المتجانسة:

$$f(D)y=0$$

$$\Rightarrow f(D)e^{\lambda x}=0 \Rightarrow f(D)e^{\lambda x}=e^{\lambda x}f(\lambda)=0$$

حيث:

$$f(\lambda)=\left(P_0+P_1\lambda+P_2\lambda^2+.....+P_n\lambda^n\right)=0 \qquad (2)$$

تدعى المعادلة (2) بالمعادلة المميّزة للمعادلة الخطّيّة المتجانسة.

نتيجة هامّة: إذاً لحلّ المعادلة المتجانسة نشكّل معادلتها المميّزة ثمّ نفتّش عن الجذور $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n$ عندئذ نميّز الحالات الآتية:

1): إذا كانت $(\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_n)$، n جذراً مختلفاً للمعادلة المميّزة فإنّ التوابع:

$$y_1=e^{\lambda_1 x},y_2=e^{\lambda_2 x},.....,y_n=e^{\lambda_n x}$$

تمثّل حلولاً خاصّة مستقلّة خطّيّاً للمعادلة المتجانسة، فالحلّ العامّ هو:

$$\boxed{y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+.....+C_ne^{\lambda_n x}}$$

مثال 3–1: أوجد الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة:

$$y'''+2y''-y'-2y=0$$

الحلّ: نكتب المعادلة بدلالة المؤثّر الاشتقاقيّ بالشكل:

$$(D^3+2D^2-D-2)y=0 \Rightarrow \lambda^3+2\lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow$$

$$(\lambda^2-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$$

و الحلّ العامّ هو:

$$\boxed{y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}}$$

2): إذا كان للمعادلة المميّزة (2) جذور مكرّرة: $\lambda_1,\lambda_2,.....,\lambda_m$ حيث: λ_1 مكرّر s_1 مرّة و λ_2 مكرّر s_2 مرّة وهكذا ... و λ_m مكرّر s_m مرّة حيث: $s_1+s_2+...+s_m=n$

وبالتالي المعادلة التفاضليّة تصبح من الشكل:

$$(D-\lambda_1)^{s_1}(D-\lambda_2)^{s_2}\ldots\ldots(D-\lambda_m)^{s_m}\,y=0 \qquad (3)$$

وإنّ كل حل لأيّ من المعادلات:

$$(D-\lambda_1)^{s_1}y=0,(D-\lambda_2)^{s_2}y=0,\ldots\ldots,(D-\lambda_m)^{s_m}y=0 \qquad (4)$$

هو حلّ للمعادلة (3). ويمكن إيجاد حلول المعادلات (4) بالطريقة التي نحلّ فيها المعادلة:

$$(D-\lambda)^s y=0$$

فإذا كان $s=1$ مثلاً فإنّ حلّ المعادلة $(D-\lambda)y=0$ هو: $y=C_1e^{\lambda x}$

وإذا كان $s=2$ فإنّ حلّ المعادلة $(D-\lambda)^2y=0$ هو: $y=(C_1x+C_2)e^{\lambda x}$

وإذا كان $s=3$ فإنّ حلّ المعادلة $(D-\lambda)^3y=0$ هو: $y=(C_1x^2+C_2x+C_3)e^{\lambda x}$

وبالتالي يمكن استنتاج حلّ المعادلة $(D-\lambda)^s y=0$ وهو:

$$y=(C_1x^{s-1}+C_2x^{s-2}+\ldots\ldots+C_s)e^{\lambda x}$$

والحلّ للمعادلة المفروضة هو مجموع حلول المعادلات (4).

مثال 3–2: أوجد الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة: $y'''-y''-y'+y=0$

الحلّ:

$$(D^3-D^2-D+1)y=0\Rightarrow\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=0\Rightarrow$$

$$(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda=-1,\quad\lambda=1\quad,\lambda=1$$

الحلّ العامّ هو: $y=(C_1x+C_2)e^x+C_3e^{-x}$

3): إذا كان للمعادلة المميّزة (2) جذران عقديّان: $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$ فإنّ للمعادلة المتجانسة حلّين خاصّين: $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x},y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$

إذاً الحلّ العام للمعادلة المتجانسة:

$$y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}\quad\Rightarrow\quad y=e^{\alpha x}\left(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x}\right)$$

وحسب علاقة أولر فإنّ:

$$\left.\begin{array}{l} e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x) \\ e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$y = e^{\alpha x}\{(C_1 + C_2)\cos(\beta x) + i(C_1 - C_2)\sin(\beta x)\}$$

أو:

$$y = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$$

ملاحظة: إذا كان كل من الجذرين العقديين $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ مكرّراً مرّتين فإنّ الحلّ العامّ هو:

$$y = e^{\alpha x}\{(A_1 + A_2 x)cos(\beta x) + (B_1 + B_2 x)sin(\beta x)\}$$

وبشكلّ أعمّ إذا كان كلّ من الجذرين العقدين المترافقين مكرّراً S مرّة فإنّ الحلّ العامّ هو:

$$y = e^{\alpha x}\left\{\left(A_1 + A_2 x + ... + A_s x^{s-1}\right)\cos(\beta x) + \left(B_1 + B_2 x + ... + B_s x^{s-1}\right)\sin(\beta x)\right\}$$

مثال: **3–3**: أوجد الحلّ العامّ للمعادلة التفاضليّة: $(D^2 + D + 1)^2 y = 0$

الحلّ:

$$(\lambda^2 + \lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(1)(1) = -3 = 3i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{3}i \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وكلاهما مكرّر مرّتين. فالحلّ العامّ هو:

$$y = e^{\frac{-x}{2}}\left\{(A_1 + A_2 x)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (B_1 + B_2 x)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

تمارين محلولة (3)

أوجد الحلّ العامّ للمعادلات التفاضليّة التالية:

1) $(D-3)^2(D^2+4)y=0$
2) $(D^3+8)y=0$
3) $(D^3+4D^2+D-6)y=0$
4) $(D^2+4D+5)y=0$
5) $y''-3y'+2y=0$
6) $y'''-y'=0$
7) $y''+9y=0$
8) $y'''-3y''+3y'-y=0$
9) $y^{(4)}+2y''+y=0$

الحلّ:

1) $(D-3)^2(D^2+4)y=0$

$(\lambda-3)^2(\lambda^2+4)=0 \Rightarrow \quad \lambda_1=3, \lambda_2=3, \lambda_3=2i, \lambda_4=-2i$

$$\boxed{y=e^{3x}(C_1x+C_2)+C_3\cos(2x)+C_4\sin(2x)}$$

2) $(D^3+8)y=0$

$\lambda^3+8=0 \Rightarrow (\lambda)^3+(2)^3=0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda^2-2\lambda+4)=0 \Rightarrow$

$\lambda^2-2\lambda+4=0, \lambda+2=0$

$\lambda_1=1+\sqrt{3}i, \lambda_2=1-\sqrt{3}i, \lambda_3=-2$

$y=e^x\left[C_1\cos\left(\sqrt{3x}\right)+C_2\sin\left(\sqrt{3}x\right)\right]+C_3e^{-2x}$

3) $(D^3+4D^2+D-6)y=0$

$\lambda^3+4\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow (\lambda+3)(\lambda^2+\lambda-2)=0 \Rightarrow$

$(\lambda+3)(\lambda-1)(\lambda+2)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=-3, \lambda_2=1, \lambda_3=-2 \Rightarrow$

الحلّ العامّ: $\boxed{y=C_1e^{-3x}+C_2e^x+C_3e^{-2x}}$

نعوّض في الشروط:

$$C_1=-2, C_2=0, C_3=3 \Rightarrow$$

الحلّ الخاصّ: $\boxed{y_1=-2e^{-3x}+3e^{-2x}}$

4) $(D^2+4D+5)y=0$

$\lambda^2+4\lambda+5=0 \Rightarrow \Delta=4i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\pm 2i \Rightarrow \quad \lambda_1=-2+i, \lambda_2=-2-i \Rightarrow$

$$\boxed{y=e^{-2x}[C_1\cos(x)+C_2\sin(x)]}$$

5) $y''-3y'+2y=0$

$(D^2-3D+2)y=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=1, \lambda_2=2$

$$\boxed{y=C_1e^x+C_2e^{2x}}$$

6) $y'''-y'=0$

$(D^3-D)y=0 \Rightarrow \lambda^3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2-1)=0 \Rightarrow \quad \lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-1 \Rightarrow$

$$\boxed{y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}}$$

7) $y''+9y=0 \quad \Rightarrow \quad (D^2+9)y=0 \Rightarrow \lambda^2+9=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3i \Rightarrow$

$$\boxed{y=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x)}$$

8) $y'''-3y''+3y'-y=0$

$(D^3-3D^2+3D-1=0)=0 \Rightarrow \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$

$$\boxed{y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x}$$

9) $y^{(4)}+2y''+y=0$

$(D^4+2D^2+1)y=0 \Rightarrow \lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=\pm i$

$$\boxed{y=(C_1+C_2x)\cos(x)+(C_3+C_4x)\sin(x)}$$

تمارين غير محلولة (3)

1. المعادلات الخطية ذات المعاملات الثابتة

حل المعادلات الآتية:

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0$
3. $y'' - 2y' = 0$
4. $2y'' - 5y' + 2y = 0$
5. $y'' - 4y' + 5y = 0$
6. $y'' - 9y' = e^{3x} \cos x$
7. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$
8. $y'' + y = x \sin x$
9. $y'' + 4y' + 4y = x\, e^{2x}$
10. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$

الأجوبة:

1. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$ 2. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ 3. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$
4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$ 5. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ 6. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x\right)$ 7. $y = (C_1 + C_2 x + x^3)e^{x}$
8. $y = \left(C_1 - \frac{x^2}{4}\right)\cos x + \left(C_2 + \frac{x}{4}\right)\sin x$ 9. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x} + \left(\frac{x}{23} - \frac{1}{32}\right)e^{2x}$ 10. $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0.2\, x^3 - 0.12\, x^2 - 0.048\, x + 0.02(\cos 5x - \sin 5x)$

فهرس الفصل الرابع

الفصل الرابع

4. المعادلات التفاضلية الخطية الغير متجانسة ذات الأمثال الثابتة

1.4 تعريفها وحلها العام:

الشكل العام للمعادلة الخطية المتجانسة (بطرف ثان) ذات الأمثال الثابتة هو:

$$f(D)y = F(x) \qquad (1)$$

فإذا كان y_p حلاً خاصاً للمعادلة المتجانسة (1) يكون $f(D)y_p = F(x)$ بينما إذا كان y_c حلاً مكملاً للمعادلة المتجانسة $f(D)y = 0$ فإن $f(D)y_c = 0$ وبالتالي الحل العام هو:

$$y = y_c + y_p$$

حيث y_p الحل الخاص لـ (1)، y_c الحل المكمل لـ (1).

1.1.4 تأثير المؤثر $f(D)$ على بعض الدوال:

$$1)\ f(D).\ e^{\alpha x} = e^{\alpha x}.f(\alpha)$$
$$2)\ f(D)\sin\alpha x = \sin\alpha x\, f(-\alpha^2)$$
$$3)\ f(D)\cos\alpha x = \cos\alpha x\, f(-\alpha^2)$$
$$4)\ f(D)\, e^{\alpha x}\, v(x) = e^{\alpha x} f(D+\alpha) v(x) \qquad ; \alpha = \text{const}$$

تعريف:1-1-4:إذا كانت $F(x)$ دالة مستمرةً ،فإن الدالة $\frac{1}{f(D)} F(x)$ هي بالتعريف الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $f(D)y = F(x)$ ونسمي $\frac{1}{f(D)}$ بالمؤثر العكسي.

نتيجة: إذا أثر المؤثر D على دالة $F(x)$ أعطى مشتقتها وإذا أثر $\frac{1}{\mathrm{D}}$ على دالة $F(x)$ أعطى تكاملها. إذن المؤثر $\frac{1}{\mathrm{D}}$ يسمى مؤثراً تكاملياً.

مثال: 4-1-1: $\quad D(x^2) = 2x \quad , \quad \frac{1}{D}(x^3) = \frac{1}{4}x^4$

2.1.4 تأثير المؤثر $1/f(D)$ على بعض الدوال:

1) $\frac{1}{f(D)}\ k\ F(x) = K\ \frac{1}{f(D)}\ f(x)\quad ; k = const$

2) $\frac{1}{f(D)}\ e^{\alpha x} = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}\ ;\ f(\alpha) \neq 0\ \&\ \alpha = const$

3) $\frac{1}{f(D^2)} \sin \alpha x = \frac{\sin \alpha x}{f(-\alpha^2)}\ ;\ \ f(-\alpha^2) \neq 0$

4) $\frac{1}{f(D^2)}\ \cos \alpha x = \frac{\cos \alpha x}{f(-\alpha^2)}\ ;\ f(-\alpha^2) \neq 0$

5) $\frac{1}{f(D)}\ e^{\alpha x}\ v(x) = e^{\alpha x}\ \frac{1}{f(D+\alpha)} v(x)$

3.1.4 إيجاد الحلول الخاصة للمعادلة الخطية غير المتجانسة:

أشكال الطرف الأيمن $F(x)$ للمعادلة غير المتجانسة:

أولاً: $F(x) = e^{\alpha x}\ ;\ \alpha = const$

أ - إذا لم يكن λ جذر للمعادلة المميزة أي $f(k) \neq 0$ فإن الحل الخاص اعتماداً على المساواة (2) يعطى بالعلاقة $y_p = \frac{e^{\alpha x}}{f(\alpha)}$ حيث نبدل كل k بـ λ في المعادلة المميزة.

ب -إذا كان λ جذرا للمعادلة المميزة أي أن $f(k) = 0$ فإن الحل الخاص يعطى بالعلاقة: $y_p = \frac{1}{\emptyset(\lambda)}\frac{x^r}{r!}\ e^{\lambda x}$ حيث نبدل كل k بـ λ في المعادلة المميزة.

مثال: 4-1-2: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 4y = 2e^x$$

الحل: نكتب المعادلة بدلالة المؤثر التفاضلي:

$$(D^3 - 3D^2 + 4)\ y = 2e^x$$

الحل العام دون طرف: نوجد المعادلة المميزة والتي هي:

$$K^3 - 3K^2 + 4 = 0; (k-2)^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k_1 = k_2 = 2, k_3 = 1$$
$$y_C = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) = e^{2x}$$

الحل الخاص مع طرف ثان:

$$y_p = 2\frac{1}{(D-2)^2\,(D+1)} e^x$$

حيث إن العدد $\lambda = 1$ لا يمثل جذراً للمعادلة المميزة ومنه.

$$y_p = 2\frac{e^x}{(-1)^2\,(2)} = e^x$$

وبالتالي الحل العام هو:

$$y = e^x + C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^{2x}$$

مثال:4-1-3: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$y''' - 3y'' + 4y = e^{2x}$$
$$(\mathrm{D}^3 - 3D^2 + 4)y = e^{2x}$$

نلاحظ كما في المثال السابق أن جذور المعادلة المميزة هي: $k = -1$ و$k = 2$ مكرر مرتين. وبالتالي:

$$y_C = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^{2x}$$

بينما:

$$y_p = \frac{1}{(D-2)^2\,(D+1)}e^{2x}$$

ولكن العدد $\lambda = 2$ هو جذر للمعادلة المميزة مكرر $r = 2$ مرة وبالتالي:

$$y_p = \frac{1}{\emptyset(\lambda)}\,\frac{x^r}{r!}\,e^{\lambda x} = \frac{1}{\emptyset(2)}\,\frac{x^2}{2!}\,e^{2x}\ \ ;\ \ \emptyset(\lambda) \neq 0$$

نلاحظ أن: $\emptyset(\lambda) \neq 0$ و$f(D)$ يقبل القسم على $(D-2)$ ومنه:

$$f(D) = (\mathrm{D}-2)^2\,(D+1)$$

حيث: $\emptyset(\lambda) = D + 1$ و$(D-2) \Leftarrow \emptyset(2) = 2 + 1 = 3$ وبالتالي:

$$y_p = \frac{1}{3}\,\frac{x^2}{2!}\,e^{2x} = \frac{1}{6}x^2e^{2x}$$

الحل العام:

$$y = C_1e^{-x} + (C_2 + C_3x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^2e^{2x}$$

$$F(x) = \cos\lambda x \quad \text{أو} \quad F(x) = \sin\lambda x$$

ثانياً: نميز الحالتين:

أ - إذا لم يكن λ جذراً للمعادلة المميزة وكانت $f(D^2)$ كثيرة حدود ذات قوى زوجية فإنه حسب (3)، (4) في البند(2.1.4) ، نجد أن:

$$y_p = \frac{\sin \lambda x}{f(-\lambda^2)} \quad \text{أو} \quad y_p = \frac{\cos \lambda x}{f(-\lambda^2)} \quad \text{حيث} \quad f(-\lambda^2) \neq 0$$

ب -إذا كان λ جذراً للمعادلة المميزة أي أن: $F(x^2) = 0$ وكانت $f(D)$ كثيرة حدود، ولاتمتلك قوى زوجية ففي هذه الحالة بالإعتماد على علاقة أولر:

$$e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

فإنه بحل المعادلة: $$f(D)y = e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$$

إذا كانت المعادلة المعطاة من الشكل $f(D)y = \sin \lambda x$ ، فنختار القسم التخيلي من الحل الخاص للمعادلة $f(D)y = e^{i\lambda x}$.

و إذا كانت المعادلة المعطاة من الشكل $f(D)y = \cos \lambda x$ ، فنختار القسم الحقيقي من الحل الخاص للمعادلة $f(D)y = e^{i\lambda x}$.

ملاحظة: في بعض الأحيان قد نضطر في حل المعادلة $f(D)y = e^{i\lambda x}$ إلى العودة إلى الحالة (أ) أي نرجع هذا الشكل من الحل الخاص إلى الشكل e^{kx} حيث $i\lambda = k$ و هنا نميز، فيما إذا كان $f(k) = 0$ أو $f(k) \neq 0$ أي أن $i\lambda$ جذراً أم لا للمعادلة المميزة.

مثال :4-1-4: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + y = \cos 3x$$

نكتب المعادلة بدلالة المؤثر التفاضلي:

$$(D^2 + 1)y = 2\cos 3x \Rightarrow y_p = 2\frac{1}{D^2+1}\cos 3x$$

إن $\lambda = 3$ ليس جذراً للمعادلة المميزة وحسب (1) وبالاعتماد على:

$$y_p = \frac{1}{f(D^2)}\cos \lambda x = \frac{\cos \lambda x}{f(-\lambda^2)} \Rightarrow y_p = \frac{2\cos 3x}{-3^2+1} = -\frac{1}{4}\cos 3x$$
$$\Rightarrow y_p = -\frac{1}{4}\cos 3x$$

مثال:4-1-5:أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 2y' = \cos x$$

الحل:

$$D(D+2)y = \cos x$$

نلاحظ أن $f(D)$ تمتلك حداً فردياً وحداً زوجياً فحسب (ب) نحل المعادلة وذلك بإيجاد الحل الخاص للمعادلة:

$$D(D+2)y = e^{ix}$$

وهو:

$$y_p = \frac{1}{D(D+2)} e^{ix} = \frac{e^{ix}}{i(i+2)} = \frac{e^{ix}}{2i-1} = -\frac{2i+1}{5} e^{ix} = \left(\frac{-2i}{5} - \frac{1}{5}\right) e^{ix} =$$
$$= \left(\frac{-2i}{5} - \frac{1}{5}\right)(\cos x + i\sin x) = \left(\frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x\right) +$$
$$i\left(\frac{-2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x\right)$$

باختيار القسم الحقيقي للحل الخاص للمعادلة $D(D+2)y = e^{ix}$ نجد أن:

$$y_p = \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$$

مثال:4-1-6: أوجد الحل الخاص للمعادلة: $y'' + 2y = \sin x$

الحل: من المثال السابق بأخذ القسم التخيلي للحل الخاص للمعادلة:

$$D(D+2)y = e^{ix}$$

نحصل على الحل الخاص للمعادلة المطلوبة:

$$y_p = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x$$

ثالثاً: إذا كان $F(x) = x^m$ حيث m عدد صحيح موجب، فالحل الخاص للمعادلة:

$$f(D)y = x^m$$

هو:

$$y_p = \frac{1}{f(D)} x^m$$

ففي هذه الحالة ننشر المؤثر $\frac{1}{f(D)}$ بجوار $D = 0$ كما لو كان D عدداً جبرياً فنحصل على كثير حدود في D مع العلم أن $D^{m+1}\, x^m = 0$ أي يجب أن نتوقف في النشر من أجل D^m ويتم ذلك بترتيب $f(D)$ تصاعدياً ثم نقسم الواحد على $f(D)$ ونستمر

في عملية التقسيم حتى نحصل على ناتج القسمة $R(D)$ من الدرجة m بحيث تكون درجة كل حد من حدود باقي القسمة $R(D)$ أكبر تماماً من m وبالتالي الحل الخاص:

$$y_p = \frac{1}{f(D)}x^m = (a_0 + a_1 D \ + a_2 D^2 + \cdots \ + a_m D^m)x^m \ ; \ a_0 \neq 0$$

مثال:4-1-7: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$(D+1)(D+3)y = x^2 - 3x$$

الحل: الحل الخاص هو:

$$y_p = \frac{1}{D^2+4D+3}(x^2 - 3x)$$

نقسم:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 3 + 4D + D^2 \\
\cline{2-2}
\mp 1 \mp \frac{4}{3}D \mp \frac{1}{3}D^2 & \frac{1}{3} - \frac{4}{9}D + \frac{13}{27}D^2 \\
\cline{1-1}
-\frac{4}{3}D - \frac{1}{3}D^2 & \\
\frac{4}{3}D \pm \frac{16}{9}D^2 \pm \frac{4}{9}D^3 & \\
\cline{1-1}
\frac{13}{9}D^2 + \frac{4}{9}D^3 & \\
\frac{16}{9}D^2 \mp \frac{52}{27}D^3 \mp \frac{13}{27}D^4 & \\
\cline{1-1}
-\frac{4}{27}D^3 + \frac{13}{27}D^4 &
\end{array}$$

$$\Longrightarrow y_p = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{9}D + \frac{13}{27}D^2\right)(x^2 - 3x) \Longrightarrow y_p = \frac{1}{3}x^2 - \frac{17}{9}x + \frac{62}{27}$$

رابعاً: إذا كان $F(x) = e^{\lambda x}v(x)$ حيث $\lambda = \text{const}$، لإيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية: $f(D)y = \ e^{\lambda x}v(x)$ نعتمد الخاصة (5).

مثال:4-1-8: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$(D^2 - 2D + 1)y = xe^x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2-2D+1}xe^x \xrightarrow{\text{حسب علاقة } 5} \frac{1}{f(D)}\ e^{\lambda x}v(x) = \ e^{\lambda x}\frac{1}{f(D+\lambda)}v(x) \Rightarrow$$

$$y_p = e^x \frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+1} x = e^x \frac{1}{D^2} x = \frac{1}{6} x^3 e^x \Rightarrow$$
$$y_p = \frac{1}{6} x^3 e^x$$

خامساً: $F(x) = e^{mx} \cos \lambda x$ أو $F(x) = e^{mx} \sin \lambda x$ حيث $\lambda; m$ ثابتين حقيقيين.

$$y_{p_1} = \frac{1}{f(D)} (e^{mx} \cos\lambda x) = RE[\frac{1}{f(m+i\lambda)} e^{(m+i\lambda)x}]$$
$$y_{p_2} = \frac{1}{f(D)} (e^{mx} \sin\lambda x) = RE[\frac{1}{f(m+i\lambda)} e^{(m+i\lambda)x}]$$

بوضع $f(m + i\lambda) = Ae^{i\theta}$ ثم نتابع كما في (ثانياً)

مبرهنة: (3.1.4): إن الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$f(D) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots + F_n(x)$$

هو من الشكل:

$$y_p = \frac{1}{f(D)} F_1(x) + \frac{1}{f(D)} F_2(x) + \cdots + \frac{1}{f(D)} F_n(x)$$

حيث: $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ دوال مستمرة.

مثال:4-1-9: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$(D^2 - 1)y = 3 e^{2x} - 2 \cos x \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2-1} 3 e^{2x} - 2 \cos x =$$
$$= \frac{1}{D^2-1} (3 e^{2x}) - \frac{1}{D^2-1} (2 \cos x) = 3 \frac{e^{2x}}{2^2-1} - \frac{2 \cos x}{-1^2-1} =$$
$$= e^{2x} + \cos x \Longrightarrow y_p = e^{2x} + \cos x$$

2.4 طريقة عامة لإيجاد الحل الخاص (طريقة تغيير الوسطاء):

نستخدم طريقة تغيير الوسطاء في إيجاد الحل الخاص لمعادلة تفاضلية غير متجانسة إذا كان من غير الإمكان استخدام الطرق المختصرة السابقة.

لتكن المعادلة:

$$p_2 y'' + p_1 y' + p_0 y = F(x) \qquad (1)$$

وتابعهما المكمل:

$$y_c = Au + Bv; \begin{cases} u(x), v(x) \text{ حلان مستقلان خطياً لـ (1) دون طرف ثان} \\ A, B \text{ ثابتان اختياريان (أو وسيطان)} \end{cases}$$

$$p_2u'' + p_1u' + p_0u = 0\ ; \ p_2v'' + p_1v' + p_0v = 0 \qquad (2)$$

بفرض أن حلاً خاصاً لـ (1) هو:

$$y_p = au + bv \qquad (3)$$

(حيث a, b وسيطان تابعان لـ x).

باشتقاق (3) ينتج:

$$y_p' = a'u + b'v + au' + bv' \qquad (4)$$

$$a'u + b'v = 0 \qquad (5)$$

$$y_p' = a'u + b'v \qquad (6)$$

باشتقاق (6) ينتج:

$$y''_p = a'u' + au'' + b'v' + bv'' \qquad (7)$$

من (3) و(6) و(7) نعوض عن y_p'', y_p', y_p في (1) ينتج:

$$a(p_2u'' + p_1u' + p_0u) + b(p_2v'' + p_1v' + p_0v) + \\ + p_2(a'u' + b'v') = F(x)$$

ونلاحظ من (2) أن أمثال a, b تنعدم في العلاقة الأخيرة ومنه:

$$p_2(a'u' + b'v') = F(X) \qquad (8)$$

من المعادلتين (5) و(8) نحسب المجهولين a', b' ينتج:

$$a' = \frac{vF(X)}{p_2(vu' - uv')}, b' = \frac{uF(X)}{p_2(uv' - u'v)}; \begin{cases} uv' - u'v \neq 0 \\ u, v \text{ مستقلان خطياً} \end{cases}$$

بالمكاملة نحصل على a, b ونهمل ثوابت المكاملة الاختيارية ثم نعوض الناتج في (3) فنحصل على الحل الخاص.

مثال:4-2-1: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية:

$$y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$$

الحل: نلاحظ أنه لا يمكن إيجاد الحل الخاص $\frac{1}{D^2+4}\frac{4}{\cos 2x}$ بالطرق المختصرة، لذلك نلجأ لطريقة تغيير الوسطاء.

من المعادلة المميزة نجد:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2i \,; \lambda_2 = -2i$$

فيكون التابع المكمل:

$$y_C = A\cos 2x + B\sin 2x \,;\; \left(A, B \text{ ثابتان اختياريان} \right)$$

نفرض حلاً خاصاً:

$$y_p = a\cos 2x + b\sin 2x \qquad (1)$$

حيث a, b وسيطان تابعان للمتحولx. بالاشتقاق نجد:

$$y_p{}' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x + a'\cos 2x + b'\sin 2x$$

نفرض أن:

$$a'\cos 2x + b'\sin 2x = 0 \qquad (2)$$

وبالتالي:

$$y'_p = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \Rightarrow$$

$$y''_p = -2a'\sin 2x + 2b'\cos 2x - 4\,a\cos 2x - 4b\sin 2x \qquad (3)$$

بالتعويض عن $y_p \;;\; y''_p$ من (1) و(3) في المعادلة الأصلية نجد:

$$-2a'\sin 2x + 2b'\cos 2x - 4\,a\cos 2x - 4b\sin 2x +$$
$$4\,a\cos 2x + 4b\sin 2x = \frac{4}{\cos 2x}$$

$$a'\sin 2x - b'\cos 2x = \frac{-2}{\cos 2x} \qquad (4)$$

نحل المعادلتين (2) و(4) لحساب a' و b' فنجد:

$$a' = -b'\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

نعوض في (4) فنجد:

$$-b'\sin^2 2x\,\frac{\cos 2x}{\cos 2x} - b'\cos^2 2x = -2$$

$$-b' = -2 \Rightarrow b' = 2 \Rightarrow b = 2x \Rightarrow a' = -2\frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow$$

$$a' = \frac{d(\cos 2x)}{(\cos 2x)} \Rightarrow a = \ln\cos 2x$$

نعوض بقيم a, b في (1) ينتج حلاً خاصاً للمعادلة:

$$y_p = (\ln\cos 2x)\cos 2x + (2x)\sin 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_p + y_c =$$
$$=(A + \ln\cos 2x)\cos 2x + (B + 2x)\sin 2x \quad ; \quad [\![\text{الحل العام}]\!]$$

3.4 حل المعادلات التفاضلية الخطية بطريقة متسلسلات القوى الصحيحة

نقدم الآن تعميماً للمبرهنة السابقة: لتكن لدينا المعادلات التفاضلية الخطية:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \quad (1)$$

مع شروط البدء:

$$y(x_0) = y_0 \cdot y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

إذا كانت الدالة f قابلة للنشر في جوار للنقطة $\left(x_0, y_0, y'_0 \dots\ , y_0^{(n-1)}\right)$، فإن حل المعادلة (1) ، مع شروط البدء (2) ، يكون أيضاً دالة قابلة للنشر، في جوار للنقطة x_0، تعطى بالعلاقة:

$$y(x) = y_0 + y'_0\frac{(x-x_0)}{1!} + y''_0\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots + y_0^{(n)}\frac{(x-x_0)^n}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_0^{(n)}\ \frac{(x-x_0)^n}{n!} \quad (3)$$

إن المعاملات $y_0, y'_0, \cdots, y_0{}^{(n-1)}$ معطاة من شروط المسألة، أما المعامل $y_0^{(n)}$، فنجده من المعادلة التفاضلية نفسها:

$$y_0^{(n)} = f\left(x_0, y_0, y'_0, \cdots, y_0^{(n-1)}\right)$$

ولإيجاد المعامل $y_0^{(n-1)}$ نشتق المعادلة التفاضلية المعطاة (1):

$$y^{(n+1)} = \frac{d}{dx} f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

ومن ثم نعوض $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ بالقيم $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n)}$، فنجد القيمة $y_0^{(n+1)}$ ونتابع هكذا ... لإيجاد بقية المعاملات في العلاقة (3) .

إذا كانت المعادلة التفاضلية من النمط:

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0 \ ; (4)$$

وكانت الدوال $P_0(x),\ P_1(x), \cdots, P_n(x)$ قابلة للنشر، في جوار النقطة x_0، وكان $P_0(x_0) \neq 0$، فإن حل هذه المعادلة أيضاً هو قابل للنشر في جوار للنقطة x_0 وهو من النمط:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (x - x_0)^n$$

وباشتقاق هذه الدالة، والتعويض في المعادلة (4) والمطابقة بين الطرفين، نحصل على قيم الثوابت a_i، حيث $i \geq n$، بدلالة الثوابت:

$$y_0 = a_0, y_0' = a_1, \dots, y_0^{(n-1)} = a_{n-1}$$

المعطاة من شروط المسألة الابتدائية. أي نحصل على المسألة التي تمثل الحل، بعد دراسة تقارب هذه المتسلسلة والحصول على مجال تقاربها،و يكون هذا المجال هو المجال الذي نستطيع فيه حل المعادلة التفاضلية (4).

مثال 4–10: عين في صورة متسلسلة قوى، حل مسألة كوشي التالية:

الحل: واضح أن الدالة $f = y$ قابلة للنشر دوماً، لأنها حدودية. وعليه، فإن حل هذه المعادلة يعطى بالعلاقة : ونعين الآن المعاملات في العلاقة :

$$y_0 = y(0) = 1\,, \quad y_0' = y'(0) = 1\,,\ y_0'' = y''(0) = y(0) = 1$$

لإيجاد y_0'''، نشتق المعادلة المعطاة، فنجد: $y''' = y'$ ، ومنه فإن: $y_0''' = y_0' = 1$

وهكذا نجد: $y_0^{(n)} = 1$ مهما تكن n.

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

مثال:4–3–1:عين في صورة متسلسلة قوى، حل المعادلة:

$$(x-1)(x-2)y'' + (x-3)y' - y = 0$$

المحقق للشروط: $y(0) = y'(0) = 1$.

الحل: الدالتان $(x-1)(x-2)$ و$(x-3)$ قابلتان للنشر، في جوار للنقطة $x_0 = 0$ إذن ، يعطى حل المسألة بالعلاقة . نعين الآن، المعاملات في العلاقة :

$$a_1 = y'(0) = 1 \quad , \quad a_0 = y(0) = 1$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة، والمطابقة بين قوى x المختلفة نجد:

$$4a_2 = 4\,, 6a_3 = 6, \cdots, 2na_n = (3n-3)a_{n-1} - (n-3)a_{n-2}$$

ومنه: $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1$.

وعليه فإن:

$$y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x}$$

4.4 تطبيق المعادلات التفاضلية العادية من المرتبة الثانية:

1.4.4 مسألة السرعة الكونية:

ما هي أصغر سرعة، يجب أن يقذف بها جسم رأسياً نحو الأعلى، بحيث لا يعود إلى الأرض مع إهمال مقاومة الهواء وجاذبية الكواكب الأخرى.

الحل: نرمز لكتلة الأرض بـ M ولكتلة الجسم المقذوف m. تعطى حسب قانون نيوتن، قوة جاذبية الأرض f المؤثرة على الجسم m بالعلاقة:

$$f = k\frac{mM}{x^2}$$

حيث: x هي المسافة بين مركز الأرض ومركز ثقل الجسم المقذوف، وk ثابت الجاذبية، وحسب قانون التحريك الأساسي، تكون المعادلة التفاضلية لحركة الجسم:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{mM}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{M}{x^2} \qquad (i)$$

(الإشارة السالبة، لأن التسارع سالب في هذه الحالة). وهذه المعادلة هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية دالتها المجهولة x ومتحولها المستقل t. نخفض رتبة هذه المعادلة، بإدخال الرموز:

$$\frac{d^2x}{\mathrm{dt}^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \qquad و \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

حيث v سرعة الحركة. تصبح المعادلة (i)، كما يلي:

$$v\frac{dv}{dx} = -k\frac{M}{x^2} \quad \Rightarrow \quad vdv = -kM\frac{dx}{x^2}$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى، دالتها المجهولة v ومتحولها المستقل x، وهي منفصلة المتغيرات. بالمكاملة نجد:

$$\frac{v^2}{2} = k\frac{M}{x} + c$$

نعين ثابت المكاملة c من شروط البدء، حيث في لحظة البدء $t = 0$، يكون $R = x$ نصف قطر الأرض و$v = v_0$ سرعة القذف.

$$\frac{v_0^2}{2} = k\frac{M}{R} + c \qquad \Rightarrow \qquad C = -k\frac{M}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

ومنه فإن:

$$\frac{v^2}{2} = k\frac{M}{x} - k\frac{M}{R} + \frac{v_0^2}{2} = k\frac{M}{x} + \left(\frac{v_0^2}{2} - k\frac{M}{R}\right)$$

ولكن من شروط المسألة، يجب أن تكون السرعة موجبة دوماً، وعليه فإن $\frac{v^2}{2} > 0$.

واضح أنه كلما زادت المسافة x ازدياداً غير محدود، فإن المقدار $k\frac{M}{x}$ يصبح صغيراً للغاية، فالشرط $\frac{v^2}{2} > 0$ يتحقق (مهما تكن قيمة المسافة x) فقط، في الحالة:

$$\frac{v_0^2}{2} - k\frac{M}{R} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{\mathrm{R}}}$$

وعليه فإن أقل سرعة يقذف بها الجسم ولا يعود إلى الأرض تتعين بالمساواة:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{\mathrm{R}}} \qquad\qquad (ii)$$

حيث $k = 6.66 \times 10^{-18} cm^3/g.s^2$ و $R = 63 \times 10^7\, cm$ ويكون تسارع الجاذبية على سطح الأرض، أي عندما يكون $R = x$، هو $G = 981 cm/s^2$.

ونحصل من (i) على العلاقة:

$$G = \frac{kM}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad M = G\frac{R^2}{k}$$

نعوض في العلاقة (ii)، فنجد:

$$v_0 = \sqrt{2GR} = \sqrt{2 \times 981 \times 63 \times 10^7} \approx 11.2 \times 10^5 cm/s = 11.2 km/s$$

تمارين محلولة (4)

أوجد الحل العام لكل معادلة من المعادلات التفاضلية الآتية:

1) $\left(D^2+6D+25\right)y=104e^{3x}+25$

الحل: المعادلة المميزة:

$$k^2+6k+25=0\Rightarrow\Delta=36-100=64i^2\Rightarrow\pm\sqrt{\Delta}=\pm8i$$

$$\Rightarrow k=-3\pm4i\Rightarrow y_c=e^{-3x}\left(C_1\cos4x+C_2\sin4x\right)$$

$$y_p=\frac{1}{D^2+6D+25}\left(104e^{3x}+25\right)=\frac{1}{f(D)}104e^{3x}+\frac{1}{f(D)}25e^{0x}$$

$$y_{p_1}=104\frac{1}{D^2+6D+25}e^{3x}=\frac{104e^{3x}}{(3)^2+6(3)+25}=\frac{104}{52}e^{3x}=2e^{3x}$$

$$y_{p_2}=25\frac{1}{D^2+6D+25}e^{0x}=\frac{25}{25}=1\Rightarrow$$

$$\boxed{y=e^{-3x}\left(C_1\cos4x+C_2\sin4x\right)+2e^{3x}+1}$$

2) $\left(D^2-4\right)y=6sh2x,sh2x=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\Rightarrow$

$$\left(D^2-4\right)y=3e^{2x}-3e^{-2x}\Rightarrow k^2=4\Rightarrow k=\pm2\Rightarrow$$

$$y_c=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x},\quad y_p=y_{p_1}+y_{p_2};$$

$$y_{p_1}=\frac{1}{(D-2)\underbrace{(D+2)}_{\Phi(\lambda)}}3e^{2x}\quad;\quad\Rightarrow(D-2)(D+2)=(D-2)\Phi(\lambda)=0;\Phi(\lambda)\neq0$$

$$\Rightarrow(D-2)\Phi(2)=0\Rightarrow(D-2)=0\Rightarrow D=2\Rightarrow\Phi(\lambda)=D+2=2+2=4$$

$$\Rightarrow y_{p_1}=3\frac{1}{4}\frac{x}{1!}e^{2x}=\frac{3}{4}xe^{2x}$$

$$y_{p_2}=\frac{1}{(D+2)\underbrace{(D-2)}_{\Phi(\lambda)}}-3e^{-2x};\Rightarrow(D+2)\Phi(-2)=0;\Phi(-2)\neq0\Rightarrow D+2=0$$

$$\Rightarrow D=-2\Rightarrow\Phi(-2)=D-2=-2-2=-4$$

$$\Rightarrow y_{p_2}=\frac{-3}{-4}\frac{x}{1!}e^{-2x}=\frac{3}{4}xe^{-2x}\Rightarrow y_p=\frac{3}{4}x\underbrace{\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)}_{2ch2x}=\frac{3}{2}xch2x$$

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{3}{2} x ch 2x} \Rightarrow$$

3) $\left(D^2 + 8D + 25\right) y = 48\cos x - 16\sin x \Rightarrow k^2 + 8k + 25 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = 64 - 100 = 36i^2 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta} = \pm 6i \Rightarrow k = -4 \pm 3i \Rightarrow$

$y_c = e^{-4x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$

نلاحظ أن $\lambda = 1$ ليست جذراً للمميزة ولكن $f(D)$ كثير حدود يمتلك حدود زوجية وفردية لذلك:

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}, y_{p_1} = 48\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{f(D)} e^{ix}\right] = 48\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{i^2 + 8i + 25} e^{ix}\right] \Rightarrow$$

$$y_{p_1} = 48\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{8i + 24}\left(\cos x + i\sin x\right)\right]$$

$$= \frac{48}{640}\mathrm{Re}\left[\left(24\cos x + 8\sin x\right) + i\left(-8\cos x + 24\sin x\right)\right]$$

$$\boxed{y_{p_1} = \frac{3}{40}\left(24\cos x + 8\sin x\right) = \frac{1}{5}\left(9\cos x + 3\sin x\right)} \Rightarrow$$

$$y_{p_2} = \frac{-16}{640}\mathrm{Im}\left[\left(24\cos x + 8\sin x\right) + i\left(-8\cos x + 24\sin x\right)\right]$$

$$\boxed{y_{p_2} = \frac{-1}{40}\left(-8\cos x + 24\sin x\right) = \frac{1}{5}\left(\cos x - 3\sin x\right)}$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{5}\left(10\cos x\right) = 2\cos x}$$

$$\boxed{y = e^{-4x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + 2\cos x}$$

4) $\left(D^5 - D\right) y = 12e^x + 8\sin x - 2x$

الحلّ:

$y = y_c + y_p$

$k^5 - k = 0 \Rightarrow k\left(k^2 - 1\right)\left(k^2 + 1\right) = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = -1, k_4 = i, k_5 = -i$

$$\boxed{y_c = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} + \left(C_4 \cos x + C_5 \sin x\right)} \Rightarrow$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

$$y_{p_1}=\frac{1}{D^5-D}12e^x=12\frac{1}{D(D^2-1)(D^2+1)}e^x$$

$$=12\frac{1}{(D^2-1)\Phi(D)}e^x=\frac{12}{(D-1)\Phi(D)}e^x$$

$$\Rightarrow D-1=0\Rightarrow D=1\Rightarrow \Phi(D)=D(D+1)(D^2+1)\Rightarrow \Phi(1)=4\Rightarrow$$

$$y_{p_1}=12\frac{1}{\Phi(1)}\frac{x}{1!}e^x=\frac{12}{4}xe^x=3xe^x$$

$$y_{p_2}=\frac{1}{D^5-D}8\sin x=8\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{D(D^2-1)(D-i)(D+i)}e^{ix}\right]\Rightarrow$$

$$y_{p_2}=8\,\mathrm{Im}\frac{1}{(D-i)\Phi(D)}e^{ix}\Rightarrow D=i,\Phi(D)=D(D^2-1)(D+i)\Rightarrow$$

$$\Phi(i)=4\Rightarrow y_{p_2}=8\,\mathrm{Im}\left[\frac{1}{4}\frac{x}{1!}e^{ix}\right]=2x\,\mathrm{Im}(\cos x+i\sin x)$$

$$\boxed{y_{p_2}=2x\sin x}\Rightarrow$$

$$y_{p_3}=a_0x^2+a_1x\Rightarrow y'_{p_3}=2a_0x+a_1\Rightarrow\ldots\Rightarrow y^{(5)}{}_{p_3}=0$$

نعوض في المعادلة الأصلية ونطابق:

$$0-2a_0x-a_1=-2x\Rightarrow a_0=1,a_1=0\Rightarrow \boxed{y_{p_3}=x^2}$$

$$y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4\cos x+C_5\sin x+3xe^x+2x\sin x+x^2$$

5) $(D-1)y=(x+3)e^{2x}=xe^{2x}+3e^{2x}$

$$k-1=0\Rightarrow k=1\Rightarrow y_c=C_1e^x$$

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}$$

$$y_{p_1}=\frac{1}{f(D)}e^{2x}\underbrace{x}_{v(x)}=e^{2x}\frac{1}{f(D+\lambda)}x=\frac{e^{2x}}{D+2-1}x\Rightarrow$$

$$y_{p_1}=e^{2x}\frac{1}{D+1}x=e^{2x}(1-D)x=xe^{2x}-e^{2x}$$

$$y_{p_2}=3\frac{1}{f(D)}e^{2x}=3\frac{1}{2-1}e^{2x}=3e^{2x}$$

$$\boxed{y=C_1e^x+e^{2x}(x+2)}$$

6) $(D^2-6D+13)y=8e^{3x}\sin 2x$

الحل:

$$y = y_c + y_p$$

$$k^2 - 6k + 13 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 52 = 16i^2 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta} = \pm 4i$$

$$\Rightarrow k_1 = 3 \pm 2i \Rightarrow y_c = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$$

$$y_p = \mathrm{Im}\left\{8\frac{1}{[D-(3+2i)][D-(3-2i)]}e^{(3+2i)x}\right\} \Rightarrow$$

$$[D-(3+2i)]\Phi(D) = 0 \Rightarrow D = 3+2i \Rightarrow \Phi(3+2i) = 4i$$

$$y_p = \mathrm{Im}\left[8\left(\frac{1}{4i}\frac{x}{1!}e^{3x}e^{2ix}\right)\right] = \mathrm{Im}\left\{2xe^{3x}\left[-i(\cos 2x + i\sin 2x)\right]\right\}$$

$$\boxed{y_p = -2xe^{3x}\cos 2x}$$

$$\boxed{\Rightarrow y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - 2x\cos 2x\right)}$$

7) $\left(D^2 + 4D + 5\right)y = e^{-2x}\cos x$

$$y_p = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{f(D)}e^{-2x}e^{ix}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{f(D)}e^{(-2+i)x}\right]$$

$$k^2 + 4k + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 = 4i^2 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta} = \pm 2i$$

$$k_1 = -2 + i, k_2 = -2 - i$$

$$\Rightarrow y_p = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{[D-(-2+i)][D-(-2-i)]}e^{(-2+i)x}\right] \Rightarrow$$

$$[D-(-2+i)]\Phi(D) = 0$$

$$\Rightarrow D = -2 + i \Rightarrow \Phi(-2+i) = [-2+i-(-2-i)] = 2i$$

$$\Rightarrow y_p = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2i}\frac{x}{1!}e^{-2x}(\cos x + i\sin x)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{-2i}{4}xe^{-2x}(\cos x + i\sin x)\right]$$

$$\boxed{y_p = \frac{1}{2}xe^{-2x}\sin x}$$

وهذا الحل يمثل اهتزاز سعته متغيرة $A = \dfrac{xe^{-2x}}{2}$ وهي متغيرة بالنسبة للزمن ولندرس تحولات دالة السعة:

$$A' = \frac{1}{2}\left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) = \frac{e^{-2x}}{2}(1-2x)$$

$$A'=0\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow A_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4e}$$

x		$1/2$	
A'	$+$	0	$-$
A		$1/4e$	

8) $(D^2-1)y=\dfrac{2}{1+e^x}\Rightarrow k^2-1=0\Rightarrow k=\pm1\Rightarrow y_c=Ae^x+Be^{-x}$

نفرض أن الحل الخاص هو:

$$y_p=ae^x+be^{-x}\ (1)\qquad y_p'=a'e^x+b'e^{-x}+ae^x-be^{-x}$$

نفرض أن:

$$a'e^x+b'e^{-x}=0\quad (2)\quad \Rightarrow y_p'=ae^x-be^{-x}\quad (3)$$

$$y_p''=a'e^x-b'e^{-x}+ae^x+be^{-x}\quad (4)$$

نعوض (4) و(1) في المعادلة الأصلية فنجد:

$$a'e^x-b'e^{-x}+ae^x+be^{-x}-ae^x-be^{-x}=\frac{2}{1+e^x}$$

$$\boxed{a'e^x-b'e^{-x}=\frac{2}{1+e^x}\quad (5)}$$

بحل المعادلتين (2) و(5) نجد:

$$(2)\Rightarrow a'=-b'\frac{e^{-x}}{e^x}\overset{(5)}{\Rightarrow}-b'\frac{e^{-x}}{e^x}e^x-b'e^{-x}=\frac{2}{1+e^x}$$

$$\Rightarrow -2b'e^{-x}=\frac{2}{1+e^x}\Rightarrow b'=\frac{-1}{e^{-x}(1+e^x)}\Rightarrow b=-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$$

$$\Rightarrow b=-\int\frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)}=-\ell n(1+e^x)\Rightarrow a'=\frac{1}{e^{-x}(1+e^x)}\frac{e^{-x}}{e^x}\Rightarrow a=\int\frac{dx}{e^x(1+e^x)}$$

نفرق الكسر:

$$\frac{1}{e^x(1+e^x)}=\frac{1}{e^x}-\frac{1}{1+e^x}$$

$$a=\int\frac{dx}{e^x}-\int\frac{dx}{1+e^x}\overset{\times e^{-x}}{\Rightarrow}a=\int e^{-x}dx-\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$\Rightarrow a = -e^{-x} + \ell n\left(1+e^{-x}\right)$$
$$\Rightarrow y_p = \left[-e^{-x} + \ell n\left(1+e^{-x}\right)\right]e^{x} + \left[-\ell n\left(1+e^{x}\right)\right]e^{-x}$$
$$\boxed{y = \left[A - e^{-x} + \ell n\left(1+e^{-x}\right)\right]e^{x} + \left[B - \ell n\left(1+e^{x}\right)\right]e^{-x}} \Rightarrow$$

9) $\left(D^2 - 6D + 9\right)y = \dfrac{e^{3x}}{x^2} \Rightarrow (D-3)^2 y = e^{3x}\underbrace{x^{-2}}_{v(x)}$

$$(k-3)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 3 \qquad \Rightarrow y_c = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right)$$
$$y_p = \frac{1}{f(D)} e^{3x}\underbrace{x^{-2}}_{v(x)} = e^{3x}\frac{1}{f(D+3)}x^{-2} = e^{3x}\frac{1}{(D+3-3)^2}x^{-2}$$
$$\Rightarrow y_p = e^{3x}\frac{1}{D^2}x^{-2} = e^{3x}\frac{1}{D}\frac{-1}{x} = -e^{3x}\ell nx$$
$$\boxed{y = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x - \ell nx\right)}$$

10) $\left(D^5 + 2D^3 + D\right)y = 2x - \sin x$

$$k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k\left(k^2+1\right)^2 = 0 \Rightarrow k(k+i)^2(k-i)^2 = 0$$
$$\Rightarrow k_1 = 0, \left(k_2 = k_3 = i, k_4 = k_5 = -i\right)$$
$$\Rightarrow y_c = \left(C_1\cos x + C_2 \sin x\right)\left(C_3 + C_4 x\right) + C_5 \qquad \& \qquad y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

y_{p_1} من الشكل x^m لذلك ننشر $f(D)$ بجوار الصفر بالشكل:

$$y_{p_1} = a_0 x^2 + a_1 x \Rightarrow y'_{p_1} = 2a_0 x + a_1, y''_{p_1} = 2a_0, y'''_{p_1} = 0, y^{(5)}{}_{p_1} = 0$$
$$\Rightarrow \left(0 + 2(0) + 2a_0 x + a_1\right) = 2x \Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 0 \qquad \boxed{y_{p_1} = x^2} \Rightarrow$$
$$y_{p_2} = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{f(D)}e^{ix}\right] = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{D(D-i)^2(D+i)^2}e^{ix}\right]$$
$$\Rightarrow (D-i)^2\Phi(D) = 0 \Rightarrow D = i, \Phi(D) = D(D+i)^2 \Rightarrow \Phi(i) = -4i$$
$$\Rightarrow y_{p_2} = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{-4i}\frac{x^2}{2!}e^{ix}\right] = \frac{x^2}{8}\operatorname{Im}\left[-i\left(\cos x + i\sin x\right)\right] \boxed{y_{p_2} = \frac{-x^2}{8}\cos x}$$
$$\boxed{y = \left(C_1\cos x + C_2\sin x\right)\left(C_3 + C_4 x\right) + C_5 + x^2 - \frac{x^2}{8}\cos x} \Rightarrow$$

تمارين عامة

1) حل المعادلة التفاضلية: $y''=3$ و استنتج حلها الخاص إذا كان:

$$(x=1, y=0), (x=0, y'=2)$$

الحل: وهو الحل العام $y''=3 \xrightarrow{\int} y'=3x+C_1 \xrightarrow{\int} y=\frac{3}{2}x^2+C_1x+C_2$

(C_1 و C_2 ثابتان اختياريان) وبالتعويض بالشرطين المفروضين نجد:

$$y_p=\frac{3x^2}{2}+2x-7/2 \quad \text{(الحل الخاص)}$$

2) أوجد المعادلة التفاضلية لمجموعة القطوع:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1 \quad (1)$$; (a,b ثابتان معينان و λ وسيط متحول)

نشتق (1) لـ x:

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}+\frac{2yy'}{b^2+\lambda}=0 \quad (2)$$

بحذف الوسيط λ من (1) و (2):

$$a^2+\lambda=\frac{x^2y'-xy}{y'} \qquad (3)$$

$$b^2+\lambda=y^2-xyy' \qquad (4)$$

$$\xrightarrow{(3)-(4)} a^2-b^2=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy' \Rightarrow$$

$$\boxed{xyy'^2+\left(x^2-y^2-a^2+b^2\right)y'-xy=0}$$

معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الثانية.

3) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$

$$\to \frac{dy}{dx}=P \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=P\frac{dP}{dy} \Rightarrow yP\frac{dP}{dy}-P^2=0$$

$$\Rightarrow y\frac{dP}{dy}=P \overset{\times\left(\frac{dy}{Py}\right)}{\Rightarrow} \frac{dP}{P}=\frac{dy}{y}\xrightarrow{\int}\ell n|P|=\ell n|y|+\ell n|C|$$

$$P=Cy\Rightarrow\frac{dy}{dx}=Cy\rightarrow\frac{dy}{y}=Cdx$$

بالمكاملة الحل العام: $\boxed{y=C_1e^{Cx}}$

4) أوجد حل المعادلة التفاضلية: $(x^2+1)(y^2-1)dx+2xydy=0$

بفصل المتحولات:

$$\xrightarrow{\div\left[x(y^2-1)\neq0\right]}\frac{(x^2+1)}{x}dx+\frac{2ydy}{y^2-1}=0\rightarrow xdx+\frac{dx}{x}+\frac{d(y^2-1)}{(y^2-1)}=0$$

$$\xrightarrow{\int}\frac{1}{2}x^2+\ell n\left|x(y^2-1)\right|=\ell n|C|\Rightarrow$$

نرفع لـ e ومنه $\boxed{x(y^2-1)=Ce^{\frac{-x^2}{2}}}$ هو الحل العام.

5) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\left(y+\sqrt{x^2-y^2}\right)dx-xdy=0\xrightarrow{\div(x)}\frac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\,dx-dy=0$$

متجانسة، نفرض $y=xu$ نشتق لـ x $\Leftarrow$

$$dy=xdu+udx$$

$$\Rightarrow x\left(u+\sqrt{1-u^2}\right)dx-x(xdu+udx)=0\Rightarrow x\sqrt{1-u^2}\,dx=+x^2du$$

$$\xrightarrow{\div\left[x^2\sqrt{1-u^2}\right]\neq0}\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\Rightarrow\ell n|x|=\arcsin u+\ell n|C|\Rightarrow\arcsin\frac{y}{x}=\ell n\left|\frac{x}{C}\right|$$

الحل العام: $\boxed{y=x\sin\left(\ell n\left|\frac{x}{C}\right|\right)}\Rightarrow$

6) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\underbrace{(x^2+y^2+x)}_{M}dx+\underbrace{xy}_{N}dy=0\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=2y\neq\frac{\partial N}{\partial x}=y$$ (والمعادلة غير تامة)

$$\xrightarrow{\mu} \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y-y}{xy} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} = f(x) \xrightarrow{\mu=\mu(x)}$$

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ell n|x|} = x \xrightarrow{\times\mu(x)}$$

$$x^3dx + \left(xy^2dx + x^2ydy\right) + x^2dx = 0$$

بفصل المتحولات:

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) + d\left(\frac{x^3}{3}\right) = 0 \xrightarrow{\int} \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C_1 \Rightarrow$$

$$3 \qquad 6 \qquad 4$$

الحل العام: $\boxed{3x^4 + 6x^2y^2 + 4x^3 = C}$

تمارين غير محلولة (4)

اكتب لكل معادلة معطاة حلها الخاص بمعاملات غير محدودة (لا تعين القيم العددية للمعاملات)

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x$
2. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$
3. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$
4. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$
5. $y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x\sin 2x$
6. $y'' - 2y' + y = 2xe^x + e^x\sin 2x$
7. $y'' - 8y' + 17y = e^{4x}(x^2 - 3x\sin x)$
8. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$
9. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x}\sin 2x + 2x^2$
10. $y'' - 6y' + 8y = 5xe^{2x} + 2e^{4x}\sin x$

حل المعادلات الآتية بطريقة تغيير الثوابت

1. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$
2. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$
3. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$
4. $y'' + 4y = 2\tan x$
5. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
6. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$

الأجوبة:

1. $y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)$
2. $y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$
3. $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\sin x + (C_2 - x)\cos x$
4. $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$
5. $y = e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C_1 + C_2x\right)$
6. $y = -\frac{1}{x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$

عين حلول المعادلات التي تحقق الشروط المذكورة

1. $y''' - y' = 0\,; \quad y(0) = 3\,,\ y'(0) = -1\,,\ y''(0) = 1$
2. $y'' - 2y' + y = 0\,; \quad y(2) = 1\,,\ y'(2) = -2$
3. $y'' + y = 4e^x\,; \quad y(0) = 4\,,\ y'(0) = -3$
4. $y'' - 2y' = 2e^x\,; \quad y(1) = -1\,,\ y'(1) = 0$
5. $y'' - y = 2x\,; \quad y(0) = 0\,,\ y(1) = -1$
6. $y'' + y = 1\,; \quad y(0) = 0\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
7. $y'' + y = 1\,; \quad y(0) = 0\,,\ y(\pi) = 0$
8. $y'' + y = 2x - \pi\,; \quad y(0) = 0\,,\ y(\pi) = 0$

الأجوبة:

1. $y = 2 + e^{-x}$, 2. $y = (7 - 3x)e^{x-2}$, 3. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$, 4. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$, 5. $y = \frac{\sinh x}{\sinh 1} - 2x$ 6. $y = 1 - \sin x - \cos x$ 7. (لا توجد حلول) 8. $y = 2x - \pi + \pi\cos x + C\sin x\,;$ (C اختيارية)

حل معادلات أويلر الآتية:

1. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
2. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$
3. $x^3y''' + xy' - y = 0$
4. $x^2y''' = 2y'$
5. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$
6. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$
7. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x$
8. $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$
9. $x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$
10. $x^2y'' - 2y = \sin\ln x$

الأجوبة:

1. $y = C_1x^2 + C_2x^3$ 2. $y = C_1x^3 + C_2x^{-1}$ 3. $y = x(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|)$ 4. $y = C_1 + C_2\ln|x| + C_3x^3$ 5. $y = x(C_1 + C_2\ln|x|) + 2x^3$

6. $= C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|) + 2x$ 7. $y = C_1x^2 + \frac{1}{x}C_2\left(-\frac{2}{3}\ln|x| - \ln^2|x|\right)$ 8. $y = x^2(C_1\cos\ln|x| + C_2\sin\ln|x| + 3)$
9. $y = C_1x^3 + C_2x^{-2} + x^3\ln|x| - 2x^2$ 10. $y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0.1\cos\ln|x| - 0.3\sin\ln|x|$

حل المعادلات بواسطة المتسلسلات

عين في صورة متسلسلة قوى الحل الذي يحقق الشرط الابتدائي المعطى. احسب بعض المعاملات الأولى للمتسلسلة (حتى معامل x^4 شمولاً)

1. $y' = y^2 - x \;;\; y(0) = 1$
2. $y' = x + \frac{1}{y} \;;\; y(0) = 1$
3. $y' = y^2 + xe^y \;;\; y(0) = 0$
4. $y' = 2x + \cos y \;;\; y(0) = 0$
5. $y' = x^2 + y^3 \;;\; y(1) = 1$
6. $y'' = xy' - y^2 \;;\; y(0) = 1\,, y'(0) = 2$
7. $y'' = y'^2 + xy \;;\; y(0) = 4\,, y'(0) = -2$

الأجوبة:

1. $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^4}{12} + \cdots$ 2. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} + \cdots$
3. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{6} + \cdots$ 4. $y = x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{3} - \cdots$ 5. $y = 1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + \frac{25}{3}(x-1)^3 + \frac{81}{4}(x-1)^4 + \cdots$ 6. $y = 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} - \cdots$ 7. $y = 4 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + \frac{19}{6}x^4 + \cdots$

عين تلك الحلول للمعادلات المعطاة التي يمكن التعبير عنها في صورة متسلسلات قوى:

1. $xy'' + 2y' + xy = 0$
2. $2x^2y'' + (3x - 2x^2)\,y' - (x+1)\,y = 0$
3. $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$
4. $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0$
5. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$
6. $xy'' - xy' - y = 0$
7. $xy'' + y' - xy = 0$

الأجوبة:

1. $y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots = \frac{\cos x}{x}$

2. $y_1 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots = \frac{e^x}{x}$, $y_2 = x^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5\times7} + \frac{(2x)^3}{5\times7\times9} + \cdots\right)$

3. $y_1 = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{5\times6} + \frac{x^4}{5\times6\times11\times12} + \cdots\right)$, $y_2 = x^{\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{x^2}{6\times7} + \frac{x^4}{6\times7\times12\times13} + \cdots\right)$

4. $y_1 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$, $y_2 = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{4\times5} + \frac{x^5}{4\times5\times6} + \cdots = 6\left(\frac{e^x-1}{x} - 1 - \frac{x}{2}\right)$

5. $y_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{40} + \frac{7x^4}{720} + \cdots$, $y_2 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{20} + \cdots$

6. $y_1 = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots = xe^x$ 7. $y_1 = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\times4^2} + \frac{x^6}{2^2\times4^2\times6^2} + \cdots$

فهرس الفصل الخامس

الفصل الخامس

5. جمل المعادلات التفاضلية

1.5 تعاريف ومفاهيم أولية

نسمي جملة تفاضلية نظامية، مجموعة المعادلات التفاضلية من النمط:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, ... y_n) \;\; ; \;\; i = 1,2,.....,n \qquad (1)$$

حيث إن $y_1, y_2, ..., y_n$ دوال مجهولة في المتغير المستقل x، بينما $f_1, f_2, ..., f_n$ دوال معلومة في $x, y_1, y_2, ..., y_n$ وهي مستمرة على جوار ما.

نسمي العدد n رتبة الجملة التفاضلية النظامية (1).

ويمكن كتابة الجملة التفاضلية بالشكل المتناظر:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \; ... = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} \qquad (2)$$

ونقول عن الجملة التفاضلية (1) إنها خطية، إذا كانت جميع الدوال f_i، خطية بالنسبة إلى $y_1, y_2, ..., y_n$ وهي تكتب كما يلي:

$$\frac{dy_i}{dx} = P_{i_1}(x)\, y_1 + P_{i_2}(x)\, y_2 + ... P_{i_n}(x) y_n + f_i(x) \quad \text{،} \quad i = 1,2, ..., n \quad :\text{حيث}$$

إن حل التفاضلية (1) على المجال $I \subseteq R$ هو مجموعة الدوال:

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$$

القابلة للاشتقاق باستمرار على المجال I والتي تحول معادلات الجملة التفاضلية المعطاة إلى مطابقات صحيحة، مهما تكن x من المجال I.

نسمي المعادلة التفاضلية، الناتجة من جملة المعادلات التفاضلية (1) بعمليات جبرية تركيباً قابلاً للمكاملة، إذا كانت هذه المعادلة عبارة عن تفاضل تام لدالة $\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$، أي: $d\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ وبمكاملة الطرفين، نجد:

$$\phi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c \qquad (3)$$

حيث c ثابت اختياري، نسمي هذه المعادلة تكاملاً أولياً لجملة المعادلات التفاضلية (1)

إذا علمنا أن n تكاملاً أولياً مستقلاً خطياً للجملة التفاضلية من المرتبة n (1):

$$\phi_1(x, y_1, ..., y_n),\ \phi_2(x, y_1, ..., y_n),\ ..., \phi_n(x, y_1, ..., y_n)$$

فإن مجموعة المعادلات:

$$\phi_i(x, y_1, ..., y_n) = c_i \ ; \ i = 1,2 \ ....., n \qquad (4)$$

تمثل التكامل العام للجملة (1).

ويمكن من التكامل العام الحصول عملياً، على أي حل لهذه الجملة وذلك بحل المعادلات (4) بالنسبة إلى $y_1, y_2, ..., y_n$.

إذا علمنا تكاملاً أولياً، لا يطابق الثابت للجملة التفاضلية (1) فإنه بحل المعادلة (3) بالنسبة إلى أحد متغيراتها $y_1, y_2, ..., y_n$ وليكن مثلاً y_n.

$$y_n = \psi(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, c) \qquad (5)$$

وبتعويض (5) في أول $(n-1)$ معادلة، من معادلات الجملة (1) نحصل على جملة معادلات تفاضلية جديدة من الرتبة $(n-1)$.

2.5 طريقة حل المعادلات التفاضلية النظامية:

1.2.5 طريقة التكاملات المتتالية:

إذا كانت الجملة التفاضلية، مؤلفة من n معادلة من الرتبة الأولى، وكل معادلة تحوي دالة مجهولة واحدة، أي أن الجملة من النمط:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1),\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), ..., \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n)$$

فإن حل هذه الجملة، يؤول إلى حل كل معادلة من هذه المعادلات على حدة.

وإذا كانت الجملة من النمط:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), ..., \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

فإن تكاملها يتم بالتتالي، حيث تكامل المعادلة الأولى، ونعوض الحل العام الناتج في المعادلة الثانية، ونكاملها، ونتابع هكذا...

مثال 5–2–1: أوجد الحل العام للجملة: $\left\{\dfrac{dy}{dx} = y\sin x, \dfrac{dz}{dx} = ye^{\cos x}\right\}$

الحل: نحل المعادلة الأولى، بغض النظر عن المعادلة الثانية:

$$\frac{dy}{y} = \sin x dx \Rightarrow y = c_1 e^{-\cos x}$$

نعوض هذه القيمة في المعادلة الثانية من معادلات الجملة:

$$\frac{dz}{dx} = c_1 e^{-\cos x} . e^{\cos x} = c_1 \Rightarrow z = c_1 x + c_2$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة المعطاة:

$$\left\{y = c_1 e^{-\cos x} \ , \ z = c_1 x + c_2\right\}$$

c_1 و c_2 ثابتان اختياريان.

2.2.5 طريقة الحذف:

يمكن حل كثير من الجمل النظامية، برد الجملة من الرتبة n إلى معادلة تفاضلية من الرتبة n بدالة مجهولة واحدة، أو إلى عدة معادلات تفاضلية مجموع رتبها يساوي n. ويتم ذلك عن طريق التفاضل المتتالي لمعادلة واحدة من معادلات الجملة وحذف جميع الدوال المجهولة باستثناء أحدها. وبتكامل المعادلة الناتجة نحصل على دالة من الدوال المجهولة، ونعين الدوال المجهولة الباقية من معادلات الجمل التفاضلية الأصلية ومن المعادلات الناتجة من تفاضلها.

مثال 5–2–2: أوجد حل للجملة: $\left\{y' = 1 - \dfrac{1}{z}, z' = \dfrac{1}{y - x}\right\}$

المحقق للشروط: $y(0) = -1 , z(0) = 1$

الحل: نوجد الحل العام للجملة بطريقة الحذف، نفاضل بالنسبة لـ x طرفي المعادلة الثانية:

$$z'' = -\frac{1}{(y-x)^2}(y'-1)$$

نحذف y و y' من المعادلة الناتجة، وذلك بتعويض قيمة $(y'-1)$ و $\left(\frac{1}{y-x}\right)$ من قيمها من معادلات الجملة نجد:

$$z'' = \frac{z'^2}{z}$$

وعليه فإن:

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z} \Rightarrow z' = c_1 z \Rightarrow z = c_2 e^{c_1 x}$$

لإيجاد y نعوض قيمة z التي حصلنا عليها، في المعادلة الأولى من معادلات الجملة، فنجد:

$$y = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}$$

وعليه، فإن عبارة الحل العام للجملة:

$$\left\{ y = x + \frac{1}{c_1 c_2} e^{-c_1 x}, z = c_2 e^{c_1 x} \right\}$$

حيث $c_1\ ,c_2$ ثابتان اختياريان.

لإيجاد حل مسألة كوشي المطلوب(أي الحل المحقق للشروط الابتدائية)، نعوض في عبارة الحل العام: $x(0) = 0, y(0) = -1 , z(0) = 1$ ، فنجد أن $c_1 = -1 , c_2 = 1$. وعليه، فإن الحل المطلوب:

$$\left\{ y = x - e^x \ , \ z = e^{-x} \right\}$$

3.2.5 طريقة التكاملات الأولية:

ندعو تركيب قابل للمكاملة كل معادلة تفاضلية تنتج عن جملة معادلات تفاضلية بعمليات جبرية، وبحيث تكون هذه المعادلة التفاضلية قابلة للمكاملة مباشرة، أي تمثل تفاضلاً تاماً للدالة $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$.

أي أن التركيب القابل للمكاملة يكتب كما يلي:

$$d\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0$$

وبالمكاملة، نحصل على التكامل الأولي: $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = c$

وإذا أمكن إيجاد تكامل أولي واحد، فإننا نستطيع تخفيض رتبة الجملة التفاضلية مرة واحدة، وهكذا، إذا استطعنا من أجل جملة مؤلفة من n معادلة ، إيجاد n تكاملاً أولياً مستقلاً خطياً، فإن هذا يعني أننا وجدنا التكامل العام لهذه الجملة.

ويكون من المفيد أحياناً كتابة الجملة المعطاة بالشكل المتناظر، لتسهيل إيجاد التراكيب القابلة للمكاملة، وذلك باستخدام إحدى الطرائق التالية:

1– المكاملة المباشرة لـ n من هذه النسب المتساوية، والتي عددها $n+1$.

2– حساب تكامل أول من هذه النسب، ومن ثم نعوض هذا التكامل في النسب الأخرى لحساب تكامل ثان، وهكذا للحصول على n تكامل أولي:

3– طريقة الأمثال غير المعينة ، وذلك بالاستفادة من خواص التناسب:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ ... = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1} = \frac{\alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + ... + \alpha_n dy_n + \beta dx}{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_n + \beta}$$

حيث: $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \beta$ أمثال غير معينة، يتم اختيارها، بحيث يصبح البسط تفاضلاً تاماً للمقام في الطرف الأيمن، أو بحيث ينعدم المقام ويكون البسط عبارة عن تفاضل تام لدالةٍ ما.

مثال 5–2–3:أوجد الحل العام للجملة: $\left\{\frac{dy}{dx} = z \ , \ \frac{dz}{dx} = -y\right\}$

الحل: لإيجاد تركيب قابل للمكاملة من هذه الجملة نضرب الأولى بـy والثانية بـz ونجمع:

$$y\frac{dy}{dx} + z \ \frac{dz}{dx} = 0$$

ومنه فإن:

$$y^2 + z^2 = c_1^2 \Rightarrow z = \sqrt{c_1^2 - y^2}$$

وهو يمثل تكاملاً أولياً للجملة. نختار القيمة الموجبة لـ z، حيث إن الإشارة السالبة تُعطي نفس النتيجة، وتعالج باسلوب مشابه.

نعوض قيمة z في المعادلة الأولى من معادلات الجملة، فنحصل على معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1^2 - y^2} \Rightarrow \quad \arcsin\frac{y}{c_1} = x + c_2$$

وهو تكامل أولي آخر للجملة المعطاة، والتكاملان الأوليان مستقلان خطياً وعليه، فإنه الحل العام للجملة:

$$\left\{ z = \sqrt{c_1^2 - y^2} \cdot \arcsin\frac{y}{c_1} = x + c_2 \right\}$$

حيث $c_1\ ,c_2$ ثابتان اختياريان.

ملحوظة: يمكن حل هذا التمرين بطريقة الحذف، وذلك بتعويض z من المعادلة الأولى في الثانية، فنجد:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بأمثال ثابتة، حلها العام:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x$$

مثال 5–2–4: أوجد الحل العام للجملة: $\dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}$

الحل: نشكل تركيبان قابلان للمكاملة، باستخدام خواص النسب:

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

ومنه فإن:

$$dx + dy + dz = 0$$

أي أن:

$$d(x+y+z) = 0 \Rightarrow x + y + z = c_1$$

وهو تكامل أول للجملة، ولحساب التكامل الأولي الآخر نضرب البسط والمقام في الجملة المعطاة بـ $2x,2y,2z$ بالترتيب، ومن ثم نجمع:

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)}=\frac{2ydy}{2y(x-z)}=\frac{2zdz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}$$

ومنه فالتكامل الأولي الآخر:

$$x^2+y^2+z^2=c_2^2$$

ولما كان التكاملان الأوليان مستقلان خطياً، فإن الحل العام للجملة:

$$\{x^2+y^2+z^2=c_2^2 \quad , \quad x+y+z=c_1\}$$

حيث $c_1\,,c_2$ ثابتان اختياريان.

3.5 جمل المعادلات التفاضلية الخطية:

الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة هي الجمل التفاضلية من النمط:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{i=1}^{n}P_{Ki}(x)y_i+f_k(x) \quad ; \quad k=1,2,.....,n \qquad (6)$$

إذا كان $f_k(x)=0$ حيث $k,i=1,2,.....,n$ من أجل جميع قيم x، فإن الجملة التفاضلية (6) تسمى جملة تفاضلية خطية متجانسة.

نفرض أن جميع الدوال $P_{ki}\cdot f_k(x)$، معرفة ومستمرة على المجال $R\supseteq I$، يكون عندها للجملة (6) حل وحيد:

$$y_1=y_1(x),y_2=y_2(x),...,y_n=y_n(x)$$

معرف على المجال I، ويحقق الشروط الابتدائية:

$$y_1=y_1^{(0)},y_2=y_2^{(0)},.....y_n=y_n^{(0)},\ x=x_0$$

حيث إنه يمكن إعطاء المعطيات الابتدائية بشكل اختياري و x_0 من المجال I.

واضح أن الجملة التفاضلية الخطية هي جملة تفاضلية نظامية، لذا يمكن حلها بالطرائق نفسها التي مرت معنا في البند 2.5.

ولكن يوجد طريقة خاصة لحل الجمل التفاضلية الخطية تعتمد على خواص حلولها.

نبدأ أولاً بدراسة الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة الموافقة للجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} P_{Ki}(x) y_i \quad , \quad k = 1,2,.....,n \qquad (7)$$

1.3.5 الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة:

يوجد للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (7) دائماً الحل الصفري (التافه):

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0\ ,\ ...,\ y_n = 0$$

وهو الحل الوحيد الذي يحقق الشروط الابتدائية الصفرية:

$$y_1 = 0, y_2 = 0\ ,\ ...,\ y_n = 0, x = x_0$$

ولا يوجد حلول أخرى تحقق شروط البدء الصفرية.

لإنشاء الحل العام للجملة الخطية المتجانسة (7) يكفي معرفة n حلاً خاصاً، غير صفري مستقل خطياً على المجال I:

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_{11}, y_{12}, ..., y_{1n}) \\ y_2 &= (y_{21}, y_{22}, ..., y_{2n}) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= (y_{n1}, y_{n2}, ..., y_{nn}) \end{aligned} \qquad (8)$$

وتكون هذه الحلول مستقلة خطياً على المجال I، إذا تحققت المطابقة:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{iK} y_{ik} = 0 \quad ; \ k = 1,2,......n\ ,\ x \in I$$

حيث إن $\alpha_{i1}\ ,\ \alpha_{i2}\ ,......\alpha_{in}$ ثوابت، فقط عندما يكون:

$$.\ \alpha_{i1} = 0,\ \alpha_{i2} = 0, ...,\ \alpha_{in} = 0$$

نسمي جملة الحلول (8) المستقلة خطياً على المجال I، جملة حلول أساسية للجملة التفاضلية الخطية المتجانسة (7).

ويمكن التحقق، من أن الشرط اللازم والكافي كي تكون جملة الحلول (8)، للجملة

التفاضلية الخطية المتجانسة (7) جملة حلول أساسية، هو أن يكون المحدد التالي و الذي يدعى محدد رونسكي لها:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots\dots\dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots\dots\dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots\dots\dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

مخالفاً للصفر، على الأقل في نقطة من المجال I.

إذا كانت (8) جملة حلول أساسية فإن تركيبها الخطي:

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_{iK} y_{ik} \quad ; \; k = 1,2,\dots\dots n \qquad (9)$$

حيث $c_{Ik}, c_{2k}, \dots\dots c_{nk}$ ثوابت اختيارية، يُمثل حلاً عاماً للجملة النظامية المتجانسة (7) في الساحة:

$$D = \{x \in I \; , | \, y_1 | < \infty , |y_2| \langle \infty , \dots , | \, y_n | < \infty \} \qquad (10)$$

بقي أن نشير إلى أن كل حلول الجملة الخطية المتجانسة (7) محتواة في الصيغة (9).

2.3.5 الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة:

لإيجاد الحل العام للجملة غير المتجانسة (6) يكفي معرفة حل عام للجملة الخطية المتجانسة الموافقة (7) من الشكل (9) وحل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (6) من النمط: $[(y_p)_1 , (y_p)_2 , \dots , (y_p)_n]$.

ويعطى الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (6) في الساحة D، كما يلي:

$$y_k = (y_p)_k + \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ik} \quad ; \; k = 1,2,\dots\dots n \qquad (11)$$

وتكون كل حلول الجملة (6) محتواة في الصيغة (11).

يمكن إيجاد الحل العام للجملة (6) باستخدام طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج) وذلك انطلاقاً من جملة الحلول الأساسية للجملة الخطية المتجانسة الموافقة (7).

3.3.5 طريقة تحويل الثوابت (طريقة لاغرانج):

نبحث عن حل خاص للجملة الخطية غير المتجانسة (7) من النمط:

$$(y_p)_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_{ik} \quad ; \; k = 1,2,......n \qquad (12)$$

حيث إن $c_1(x),\; c_2(x), ...\; c_n(x)$ دوال في x، قابلة للاشتقاق باستمرار على I. تحدد هذه الدوال من جملة المعادلات:

$$\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) y_{ik} = f_k(x) \;\; ; \;\; k = 1,2,......n$$

ويكون لهذه الجملة الجبرية في المجاهيل $c_1'(x), c_2'(x), ..., c_n'(x)$ ، حل وحدي، لأن معين الأمثال لها لا يساوي الصفر، وهو معين رونسكي لجملة الحلول (8) وبحلها نجد:

$$c_i'(x) = \varphi_i(x) \quad ; \;\; i = 1,2,........n$$

وعليه، فإن:

$$c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx \quad ; \;\; i = 1,2,...,n$$

مع إهمال ثوابت المكاملة لأننا نبحث هنا، عن الحل الخاص.

نعوض هذه القيم في الصيغة (12)، فنحصل على حل خاص للجملة (6) في الساحة D. وبالتعويض في (11) نحصل على الحل العام للجملة الخطية غير المتجانسة (6):

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} y_{ik} \int \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{n} c_i y_{ik} \qquad ; k = 1,2,...,n$$

مثال 5–3–1: أوجد الحل العام للجملة التفاضلية الخطية:

$$\left\{ \frac{dy}{dx} - y\sin x = e^{-\cos x} ,\; \frac{dz}{dx} - y\, e^{\cos x} = 2x^2 + 1 \right\}$$

الحل: إن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة، يعطى بالعلاقات:

$$y = c_1 e^{-\cos x} \;,\; z = c_1 x + c_2$$

نفرض، الآن، أن الحل الخاص للجملة المعطاة يعطى بالعلاقات:

$$y = c_1(x) e^{-\cos x} \;,\; z = c_1(x)\, x + c_2(x) \qquad (i)$$

نشتق هذه الحلول ونعوض في الجملة التفاضلية المعطاة، فنحصل على المعادلات:

$$c_1'(x)e^{-\cos x} = e^{-\cos x}\ ,\ c_1'(x)x + c_2'(x) = 2x^2 + 1 \qquad (ii)$$

من المعادلة الأولى نجد $c_1' = 1$ وعليه فإن $c_1 = x$ نعوض قيمة c_1 في المعادلة الثانية من معادلات (ii) فنجد:

$$c_2' = 2x^2 - x + 1 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

نعوض في (i)، فنحصل على الحل الخاص للجملة المعطاة، وهكذا، فإن الحل العام المطلوب هو:

$$\{y = (x + c_1)e^{-\cos x}\ ,\ z = (x + c_1)x + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + c_2\}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان.

4.5 الجمل التفاضلية الخطية بأمثال ثابتة:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y + f_i(x) \quad ;\ k = 1,2,.....,n\ ;\ a_{ki} \in \Re \qquad (13)$$

ويتم حل هذا النوع من الجمل بالطرق التي مرت معنا سابقاً، كما يوجد طرق أخرى لحلها، كطريقة دالامبير وطريقة المعينات، التي سنناقشها في الحالة العامة في البند 5.5 ونشير قبل ذلك إلى أن حل جملة المعادلات غير المتجانسة (13) يقتضي حل جملة المعادلات التفاضلية المتجانسة الموافقة لها:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}y_i \quad ;\ k = 1,2,.....,n \qquad (14)$$

1.4.5 حل الجملة التفاضلية الخطية المتجانسة بأمثال ثابتة – طريقة أولر:

وهي طريقة مشابهة للطريقة المتبعة في حل المعادلات التفاضلية العادية الخطية بأمثال ثابتة في الفصل السابق نبحث عن حل للجملة (14) من النمط:

$$Y = (y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x},\ y_n = \gamma_n e^{\lambda x}) \qquad (15)$$

حيث λ ثابت وكذلك $\gamma_1, \gamma_2, ...,\gamma_n$ ثوابت أحدها على الأقل مخالف للصفر.

نعوض الحل (15) في الجملة (14) ونقسم على $e^{\lambda x}$ فنحصل على الجملة:

$$\begin{aligned} &(a_{11}-\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0 \\ &a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\gamma_n = 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

ولكي يكون لهذه الجملة حلاً غير صفرياً يلزم ويكفي أن يكون محدد الأمثال لها مساوٍ للصفر، أي أن يكون λ جذراً للمعادلة:

$$\begin{vmatrix} (a_{11}-\lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (17)$$

وهي معادلة جبرية من الدرجة n في λ، تسمى المعادلة المميزة للجملة التفاضلية (14) وتسمى جذورها، الأعداد المميزة للجملة، ويقابل كل عدد مميز، على الأقل، حل خاص من النمط (15):

$$Y_i = (y_{i1} = \gamma_{i1}e^{\lambda ix},\ y_{i2} = \gamma_{i2}e^{\lambda ix},\ \ldots,\ y_{in} = \gamma_{in}e^{\lambda ix})\ ;\ i = 1,2,\ldots.\ n$$

حيث $(\gamma_{i1}\ , \gamma_{i2}\ ,\ldots.,\gamma_{in})$ هو حل لجملة المعادلات (16) المقابل للقيمة $\lambda = \lambda_i$ ونميز هنا حالتين:

أولاً: <u>جميع جذور المعادلة المميزة بسيطة:</u>

لتكن $\lambda_1,\ \lambda_2\ ,\ \ldots\ ,\lambda_n$ جذوراً حقيقة بسيطة للمعادلة (17) نحصل في هذه الحالة على n حلاً خاصاً خطياً للجملة المتجانسة (14).

$$\begin{aligned} Y_1 &= (\gamma_{11}e^{\lambda_1 x},\ \gamma_{12}e^{\lambda_1 x}\ ,\ \ldots\ ,\gamma_{1n}e^{\lambda_1 x}) \\ Y_2 &= (\gamma_{21}e^{\lambda_2 x},\ \gamma_{22}e^{\lambda_2 x}\ ,\ \ldots,\ \gamma_{2n}e^{\lambda_2 x}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= (\gamma_{n1}e^{\lambda_n x}\ ,\gamma_{n2}e^{\lambda_n x}\ ,\ \ldots\ ,\ \gamma_{nn}e^{\lambda_n x}) \end{aligned}$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة التفاضلية المتجانسة (14) هو:

$$Y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i \gamma_{ik} e^{\lambda_i x} \quad ;\ k = 1,2,\ldots..,n$$

حيث $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت اختيارية.

إذا كانت بعض الجذور البسيطة عقدية، ليكن مثلاً، $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ جذراً عقدياً للمعادلة المميزة (17) عندئذ فإن مرافقه $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ هو أيضاً جذراً لهذه المعادلة، نشكل حلاً للجملة التفاضلية المتجانسة (14) من النمط (15) يقابل الجذر λ_1 :

$$Y_1 = (y_{11} = \gamma_{11} e^{(\alpha+i\beta)}, y_{12} = \gamma_{12} e^{(\alpha+i\beta)x} \;, \;\ldots,\; y_{1n} = \gamma_{1n} e^{(\alpha+i\beta)x})$$

نعزل من هذا الحل، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي، بالاستفادة من علاقة أولر $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$، وبذلك نحصل على حلين خاصين حقيقيين مستقلين خطياً للجملة المتجانسة (14) يقابلان الجذران العقديان المترافقان $\lambda_1, \lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ ننشئ الحلول الخاصة المقابلة لجميع أزواج الجذور العقدية المترافقة، وجميع الجذور الحقيقية، إن وجدت ونأخذ التركيب الخطي للحلول الخاصة المستقلة خطياً التي أوجدناها، مع ثوابت اختيارية، فنحصل على الحل العام للجملة (14).

ثانياً : <u>بعض الجذور مكررة:</u>

ليكن مثلاً λ_1 جذراً حقيقياً مكرراً k مرة للمعادلة المميزة (17) ويمكن بسهولة البرهان أنه يقابل هذا الجذر حل خاص من النمط:

$$Y_1 = \{y_{11} = P_1(x)e^{\lambda 1x}, y_{12} = P_2(x)e^{\lambda 1x}, \ldots\ldots, y_{1n} = P_n(x)e^{\lambda 1x}\} \qquad (18)$$

حيث $P_1(x), P_2(x), \ldots . P_n(x)$ حدوديات من الدرجة $(k-1)$ على الأكثر، وبحيث إنه هناك k ثابتاً اختيارياً من بين أمثال هذه الحدوديات مستقلة خطياً، وباقي الأمثال تنتج من هذه الثوابت الاختيارية المستقلة.

نفرض بالتتالي، أن أحد هذه الثوابت مساوٍ للواحد، والبقية مساوية للصفر، وهكذا نحصل على k حلاً خاصاً مستقلة خطياً مقابلة للجذر λ_1.

إذا كان $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ جذراً عقدياً مكرراً k مرة للمعادلة المميزة (17)، فإن مرافقه $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ كذلك جذر مكرراً k مرة. نوجد كما فعلنا أعلاه k حلاً عقدياً خاصاً مستقلة خطياً تقابل الجذر λ_1 وهي من النمط (18).

نعزل الجزء الحقيقي والجزء التخيلي منها، فنحصل على $2k$ حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطياً، تقابل الجذرين $\lambda_1, \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$.

إذا كان هناك حلولاً أخرى غير λ_1 (بسيطة أو مكررة)، فإنه بإنشاء n حلاً خاصاً حقيقياً مستقلة خطية، تقابل الجذور كلها، وبأخذ تركيبها الخطي مع ثوابت اختيارية، نحصل على الحل العامل للجملة المتجانسة (14).

مثال 5–4–1: أوجد الحل العام للجملة: $\left\{\dfrac{dy}{dx} = -y - 2z, \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z\right\}$

الحل: نبحث عن الحل العام للجمل من النمط: $(*)$ $\left\{y = \gamma_1 e^{\lambda x}, \ z = \gamma_2 e^{\lambda x}\right\}$

نكتب المعادلة المميزة المقابلة للجملة:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

والجذور هي: $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 2$ ننشئ الحل الخاص، من النمط $(*)$ المقابل للجذر λ_1.

من العلاقة (18) نبحث عن العددين γ_1 و γ_2 من الجملة الخطية:

$$-2\gamma_1 - 2\gamma_2 = 0\,, \qquad 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0$$

والتي توافق معادلة واحدة هي: $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$

أي يجب اختيار أحد العددين γ_1 أو γ_2 اختيارياً. لنفرض $\gamma_1 = 1$ ويكون $\gamma_2 = -1$.

وعليه فإن الحل المقابل للجذر λ_1 هو $\left\{y_1 = e^x \ , \ z_1 = -e^x\right\}$

وبأسلوب مشابه نوجد الحل الخاص المقابل للجذر λ_2: $\left\{y_2 = 2e^{2x} \ , \ z_2 = -3e^{2x}\right\}$

والحل العام للجملة المعطاة هو:

$$\left\{y = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} \ , \ z = -c_1 e^x - 3c_2 e^{2x}\right\}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان مستقلان.

مثال 5–4–2: أوجد الحل للجملة: $\left\{\dfrac{dy}{dx} = 2y - z, \dfrac{dz}{dx} = y + 2z\right\}$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للجملة:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

وجذراها $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$ ننشئ الحلول العقدية المقابلة للجذر $2+i$ من النمط:

$$\left\{ y = \gamma_1 e^{(2+i)x},\ z = \gamma_2 e^{(2+i)x} \right\}$$

ونحصل على العددين γ_1 و γ_2 من المعادلة $-i\gamma_1 \quad -\gamma_2 \quad = 0$ بفرض $\gamma_1 = 1$ نجد: $\gamma_2 = -i$، ومنه:

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i\sin x)$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i\cos x)$$

وبعزل الجزء الحقيقي عن الجزء التخيلي، نحصل على حلين خاصين حقيقيين مستقلين خطياً:

$$y_1 = e^{2x}\cos x, y_2 = e^{2x}\sin x, z_1 = e^{2x}\sin x, z_2 = -e^{2x}\cos x$$

والحل العام للجملة المعطاة:

$$\{ y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)\ , z = e^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x) \}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياريان مستقلان.

مثال 5–4–3: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{ \frac{dx}{dt} = -4x + 2y + 5z,\ \frac{dy}{dt} = 6x - y - 6z, \frac{dz}{dt} = -8x + 3y + 9z \right\}$$

الحل: نكتب المعادلة المميزة للجملة:

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$$

وجذورها $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

نوجد أولاً، الحل الخاص المقابل للجذر λ_1:

$$\left\{ x = \gamma_1 e^{2t},\ y = \gamma_2 e^{2t}\ ,\ z = \gamma_3 e^{2t} \right\}$$

نوجد الأعداد $\gamma_1, \gamma_2\ , \gamma_3$ من جملة المعادلات:

$$-6\gamma_1+2\gamma_2+5\gamma_3=0$$
$$6\gamma_1-3\gamma_2-6\gamma_3=0$$
$$-8\gamma_1+3\gamma_2+7\gamma_3=0$$

بحل هذه المعادلات نجد: $\gamma_1=1$ و $\gamma_2=-2$ و $\gamma_3=2$، ويكون الحل الخاص:

$$\left\{x_1=e^{2t},\ y_1=-2e^{2t},\ z_1=2e^{2t}\right\}$$

ننشئ الآن، حلان خاصان مستقلان خطياً، يقابلان الجذر $\lambda_2=\lambda_3=1$، وهما من النمط (18):

$$x=(A_1t+A_2)e^t\ ,\ y=(B_1t+B_2)e^t\ ,z(C_1t+C_2)e^t$$

حيث إن A_1,A_2,B_1,B_2C_1,C_2 ثوابت نوجدها من تعويض العلاقات السابقة في معادلات الجملة:

$$A_1t+A_1+A_2=(-4A_1+2B_1+5C_1)t-4A_2+2B_2+5C_2$$
$$B_1t+B_1+B_2=(6A_1-B_1-6C_1)t+6A_2-B_2-6C_2$$
$$C_1t+C_1+C_2=(-8A_1+3B_1+9C_1)t-8A_2+3B_2+9C_2$$

وبالمطابقة بين الأطراف وحل الجملة الجبرية الناتجة نجد:

$$B_2=3C_1,\ A_2=C_1+C_2,B_1=0,A_1=C_1$$

حيث C_1 و C_2 ثابتان اختياريان مستقلان.

ويكون حل الجملة المعطاة:

$$\{x=(C_1t+C_1+C_2)e^t,y=3C_1\,e^t,z=(C_1t+C_2)e^t\}$$

ويمكن، بمثابة حلان مستقلان خطياً، مقابلين للجذر $\lambda_2=\lambda_3=1$ اختيار:

$$\{x_2=(t+1)e^t,\ y_2=3e^t\ ,\ z_2=t\,e^t\}$$
$$\{x_3=e^t,y_3=0,\ z_3=e^t\}$$

والحل العام للجملة المعطاة:

$$x=C_1\,e^{2t}+(C_2\,t+C_2+C_3)e^t$$
$$y=-2C_1\,e^{2t}+3C_2\,e^t$$
$$z=2C_1\,e^{2t}+(C_2\,t+C_3)e^t$$

حيث C_1 و C_2 و C_3 ثوابت اختيارية مستقلة.

2.4.5 حل الجملة التفاضلية الخطية غير المتجانسة بأمثال الثابتة:

يمكن إيجاد حل الجملة غير المتجانسة (6) بطريقة تحويل الثوابت البند 2.3.5، كما يمكن إيجاد الحل بطريقة التكاملات الأولية والتي تسمى طريقة دالامبير.

طريقة دلامبير: نعرض لهذه الطريقة من أجل جملة مؤلفة من معادلتين:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=a_{11}y+a_{12}z+f_1(x)\,,\ \frac{dz}{dx}=a_{21}y+a_{22}z+f_2(x)\right\} \qquad (19)$$

نوجد تركيب قابل للمكاملة للجملة (19) كما يلي:

نضرب المعادلة الثانية بالعدد k ونجمع مع المعادلة الأولى:

$$\frac{d(y+kz)}{dx}=(a_{11}+ka_{21})y+(a_{12}+ka_{22})z+f_1(x)+kf_2(x)$$

$$=(a_{11}+ka_{21})\left(y+\frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}}z\right)+f_1(x)+kf_2(x) \qquad (20)$$

نختار العدد k، بحيث يكون الطرف الأيمن في المعادلة (20) دالة خطية في $(y+kz)$.

نضع:

$$k=\frac{a_{12}+ka_{22}}{a_{11}+ka_{21}} \qquad (21)$$

فنجد:

$$\frac{d(y+kz)}{dx}=(a_{11}+ka_{21})(y+kz)+f_1(x)+kf_2(x)$$

نكامل هذه المعادلة الخطية، بالنسبة إلى المقدار $(y+kz)$ فنحصل على:

$$y+kz=e^{(a_{11}+ka_{21})x}\left\{c+\int[f_1(x)+kf_2(x)]e^{-(a_{11}+ka_{21})x}dx\right\} \qquad (22)$$

إذا كان للمعادلة (21) جذوراً حقيقية بسيطة k_1 و k_2، فإننا نحصل من (22)، على تكاملين أوليين للجملة (19).

يمكن تعميم طريقة دالامبير من أجل جمل خطية ذات أمثال ثابتة مؤلفة من أكثر من معادلتين تفاضليتين.

مثال 5–4–4: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=y-2z+3,\ \frac{dz}{dx}=y-z+1\right\}$$

الحل: نوجد أولاً الحل العام للجملة المتجانسة الموافقة:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=y-2z,\ \frac{dz}{dx}=y-z\right\}$$

المعادلة المميزة لها:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2+1=0$$

وجذورها $\lambda_1=i$ و $\lambda_2=-i$ يقابل الجذر λ_1 الحل العقدي:

$$y=2e^{ix}\ ,\ z=(1-i)e^{ix}$$

ومنه فإن:

$$\{y_1=2\cos x \quad ,\ z_1=\cos x+\sin x\}$$
$$\{y_2=2\sin sx \quad ,\ z_2=\sin x-\cos x\}$$

وعليه، فإن الحل العام للجملة المتجانسة:

$$\{y=2c_1\cos x+2c_2\sin x, z=(c_1-c_2)\cos x+(c_1+c_2)\sin x\}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياران مستقلان.

ننتقل الآن لإيجاد الحل العام للجملة غير المتجانسة المعطاة. نلاحظ في هذا المثال أنه ليس من الضروري الحل وفق طريقة تحويل الثوابت، حيث إنه يمكن ببساطة إنشاء حل خاص للجملة كما يلي:

نبحث عن الحل من النمط $y=b$, $z=c$ فنجد أن $\{z=2, y=1\}$ تمثل حلاً خاصاً للجملة المعطاة. ومنه فالحل العام لها هو:

$$\{y=1+2c_1\cos x+2c_2\sin x, z=2+(c_1-c_2)\cos x+(c_1+c_2)\sin x\}$$

مثال 5–4–5: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=-y-2z+2e^{-x}\,,\quad \frac{dz}{dx}=3y+4z+e^{-x}\right\}$$

الحل: نوجد الحل العام بطريقة تحويل الثوابت:

وجدنا سابقاً، الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة. لذا نبحث عن الحل العام للجملة غير المتجانسة المعطاة من النمط:

$$y=c_1(x)e^{x}+2c_2(x)e^{2x}\ ,\ z=-c_1(x)e^{x}-3c_2(x)e^{2x}$$

ونوجد $c_1(x)$ و $c_2(x)$ من الجملة:

$$c'_1(x)e^{x}+2c'_2(x)e^{2x}=2e^{-x}\,,-c'_1(x)e^{x}-3c'_2(x)e^{2x}=e^{-x}$$

فنجد:

$$c'_1(x)=8e^{-2x}\ \ ,\ c'_2(x)=-3e^{-3x}$$

ومنه فإن:

$$c_1(x)=-4e^{-2x}+c_1\ \ ,\ c_2(x)=e^{-3x}+c_2$$

وعليه فإن الحل العام للجملة المعطاة:

$$\{y=-2e^{-x}+c_1e^{x}+2c_2e^{2x}\ ,\ z=e^{-x}-c_1e^{-x}-3c_2e^{2x}\}$$

حيث c_1 و c_2 ثابتان اختياران مستقلان.

ملحوظة: كان من الممكن، كما فعلنا في المثال السابق، عدم اللجوء إلى هذه الطريقة، وذلك بالبحث عن حل خاص للجملة المعطاة من النمط $y=ae^{-x}\ ,\ z=be^{-x}$

ونجد بطريقة الأمثال غير المعينة: $\{y_1=-2e^{-x}\ ,z_1=e^{-x}\}$

مثال6–4–5: أوجد الحل العام للجملة:

$$\left\{\frac{dy}{dx}=5y+4z+e^{-x}\,,\quad \frac{dz}{dx}=4y+5z+1\right\}$$

الحل: نوجد الحل العام بطريقة دلامبير، نضرب المعادلة الثانية من معادلات الجملة بـ k ونجمع مع المعادلة الأولى، فنحصل على التركيب:

$$\frac{d(y+kz)}{dx}=(5+4k)y+(4+5k)z+(e^{x}+k)$$

$$= (5+4k)\left(y+\frac{4+5k}{5+4k}z\right)+e^x+k$$

نضع: $k=\dfrac{4+5k}{5+4k}$

أي: $k^2-1=0$. ومنه فإن: $k=\pm 1$.

إذن، نحصل على تكاملين أوليين للجملة بتعويض قيمة k، في العلاقة (22):

$$y+z=e^{9x}\left[c_1+\int(e^x+1)e^{-9x}dx\right]=c_1e^{9x}-\frac{1}{8}e^x-\frac{1}{9} \qquad (i)$$

$$y-z=e^x\left[c_2+\int(e^x-1)e^x dx\right]=c_2e^x+xe^x+1 \qquad (ii)$$

وعليه فإن التكاملين الأوليين (i) و (ii) يمثلان الحل العام للجملة المعطاة.

5.5 الجمل التفاضلية الخطية غير النظامية بأمثال الثابتة:

نسمي جملة تفاضلية خطية غير نظامية بأمثال ثابتة، مجموعة المعادلات التفاضلية:

$$f_{i1}(D)+f_{i2}(D)y_2+....+f_{in}(D)y_n=F_i(x)\,;\,(i=1,2,...,n)$$

حيث إن جميع المعاملات $f_{ik}(D)$ حدوديات تفاضلية في $D=\dfrac{d}{dx}$ بأمثال ثابتة.

إن الرتبة m لجملة تفاضلية هي مجموع رتب المعادلات التفاضلية في هذه الجملة فمثلاً الجملة:

$$\{(D^2+3D+1)y+(D^3-1)z=\sin x,\ (D^4+2D)y-2Dz=\ln x\}$$

هي جملة تفاضلية خطية غير نظامية بأمثال ثابتة في الدالتين المجهولتين $y\,,z$ ورتبة هذه الجملة $m=7$، لأن المعادلة الأولى من الرتبة الثالثة والمعادلة الثانية من الرتبة الرابعة.

إن طريقة حل جملة n معادلة تفاضلية في n دالة مجهولة، تشبه طريقة حل الجملة الجبرية الخطية التي يتساوى فيها عدد المعادلات مع عدد المجاهيل. إذ نستخدم المعينات وقاعدة كرامر للحصول على معادلة تفاضلية خطية تحتوي كل منها على دالة مجهولة واحدة.

نوضح هذه الطريقة في حالة جملة تفاضلية غير نظامية مؤلفة من معادلتين.

$$\{f_1(D)y-g_1(D)z=F_1(x)\,,\ \ f_2(D)y+g_2(D)z=F_2(x)\} \qquad (23)$$

حيث إن f_1,f_2,g_1,g_2 حدوديات في D ذات أمثال ثابتة.

يكون للجملة (23) حل وحيد، إذا كان معين هذه الجملة $\Delta(D) \neq 0$:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} \neq 0$$

ويتم نشر المعين $\Delta(D)$ كما تنشر المعينات العددية، وهو يمثل حدودية في D من الدرجة r حيث $0 \leq r \leq m$.

مبرهنة: (تقبل دون إثبات): إذا كانت $\Delta(D) \neq 0$، فإن العدد الكلي للثوابت الاختيارية المستقلة في الحل العام للجملة (23) مساوٍ لدرجة المعين كحدودية في D.

وفي الحالة الخاصة، عندما يكون $\Delta(D) \equiv 0$، يمكن ألا يكون للجملة (23) حل أو من الممكن أن يكون لها حلولاً تحوي أي عدد من الثوابت المستقلة.

يعطى حل الجملة (23) حسب كرامر، من حل كل من المعادلتين التفاضليتين الخطيتين بأمثال ثابتة، من المرتبة r.

$$\Delta(D)\, y = \Delta_y, \Delta(D) z = \Delta_z \qquad (24)$$

حيث:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} F_1(x) & g_1(D) \\ F_2(x) & g_2(D) \end{vmatrix} , \ \Delta z = \begin{vmatrix} f_1(D) & F_1(x) \\ f_2(D) & F_2(x) \end{vmatrix}$$

نحرص على نشر المعينين Δ_z و Δ_y وفق عناصر العمود الحاوي على تركيب في D.

إن عدد الثوابت الاختيارية في الحل العام لكل من المعادلتين (24) هو r، فيكون عدد الثوابت الاختيارية الكلي $2r$. غير أن الحل العام لكل من المعادلتين (24) يجب أن يحقق الجملة (23) أي توجد علاقات تربط بين الثوابت التي عددها $2r$، بحيث يمكن تخفيض عدد الثوابت إلى r، لإيجاد العلاقات بين الثوابت الاختيارية، نعوض الحل العام لكل من المعادلتين (24) في معادلات الجملة (23) فنحصل على علاقات الارتباط ونحصل في كثير من المسائل على العلاقات بين الثوابت الاختيارية من خلال تعويض الحل العام للمعادلتين (24) في معادلة واحدة فقط من معادلات الجملة (23).

إذا كان $\Delta(D) \equiv 0$ وكان أحد المعينين Δ_z أو Δ_y على الأقل، مخالفاً للصفر فلا يمكن أن تتحقق المعادلات (24) وعليه، لا يوجد حل للجملة (23).

أما إذا كان $\Delta(D) \equiv 0$ وكان المعينان Δ_z و Δ_y مطابقين للصفر، فإن معادلات الجملة (23) مرتبطة، أي أن الحل يحوي عدد من الثوابت المستقلة ولن ندرس هذه الحالة.

مثال 5-5-1: أوجد الحل العام للجملة:

$$\{y'' + z' - y - z = 1 \ \ , \ \ z'' + y'' + y + z = x\}$$

الحل: نكتب الجملة كما يلي:

$$\{(D^2 - 1)y + (D - 1)z = 1 \ , \ (D + 1)y + (D^2 + 1)z = x\}$$

إن معين هذه الجملة هو:

$$\Delta(D) = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & D - 1 \\ D + 1 & D^2 + 1 \end{vmatrix} = D^2(D^2 - 1)$$

لما كان $\Delta(D) \neq 0$ فإن للجملة حل وحيد، وعدد الثوابت الاختيارية المستقلة أربعة، ويعطى الحل، حسب العلاقات (24) من المعادلات:

$$\Delta(D)y = \begin{vmatrix} 1 & D - 1 \\ x & D^2 + 1 \end{vmatrix} , \Delta(D)z = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & 1 \\ D + 1 & x \end{vmatrix}$$

أو:

$$D^2(D^2 - 1)y = x \qquad (i)$$
$$D^2(D^2 - 1)z = -(x + 1) \qquad (ii)$$

إن الحل العام، لكل من هاتين المعادلتين هو:

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x + a_4 e^{-x} - \frac{x^2}{6}$$
$$z = b_1 + b_2 x + b_3 e^x + b_4 e^{-x} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

حيث $a_1, \ldots, a_4, b_1, \ldots, b_4$ ثوابت اختيارية.

وللحصول على العلاقة بين الثوابت والاختيارية هذه، نعوض في الجملة الأصلية، فنجد:

$$(b_2 - a_1 - b_1 - 1) - (a_2 + b_2)x - 2b_4 e^{-x} \equiv 0$$

$$(a_1 + a_2 + b_1 + 1) + (a_2 + b_2)x + (a_3 + b_3)\, e^x + 2b_4 e^{-x} \equiv 0$$

وتتحقق هاتان المطابقتان، إذا كانت المعاملات جميعها أصفاراً. ومنه، نجد:

$$b_1 = -(a_1 + a_2 + 1)\,, b_2 = -a_2, b_3 = -a_3, b_4 \equiv 0$$

ويكون الحل العام للجملة المعطاة هو:

$$y = a_1 + a_2 x + a_3 e^x + a_4 e^{-x} - \frac{x^2}{6}$$

$$z = -(a_1 + a_2 + 1) - a_2 x - a_3 e^x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

حيث a_1, a_2, a_3, a_4 ثوابت اختيارية مستقلة.

ملحوظة: كان من الممكن الحصول على الحل العام z للمعادلة (ii)، مباشرة بعد الحصول على الحل العام y للمعادلة (i)، وذلك بأن نعوض قيمة y، في المعادلة الثانية من معادلات الجملة، فنحصل على z، وهذه الدالة هي الحل العام للمعادلة (ii). وهي تحوي الثوابت الاختيارية المستقلة a_1, a_2, a_3, a_4، تجنبنا هذه الطريقة، البحث عن العلاقات بين الثوابت الاختيارية المرتبطة $a_1,...a_4, b_1,...b_4$.

6.5 تطبيق على جمل المعادلات التفاضلية في دراسة الاهتزازات الكهربائية:

لتكن لدينا دارتان موصولتان مغناطيسياً، أي أن التيار المار بإحدى هاتين الدارتين، يولد حقلاً مغناطيسياً، يحرض في الدارة الثانية قوة محركة كهربائية. فإذا كانت $I_1\,,\, I_2$ شدتي التيار في الدارتين، عندئذ تكون القوة المحركة الكهربائية في الدارة الأولى $M\,\frac{dI_2}{dt}$، وفي الدارة الثانية $M\,\frac{dI_1}{dt}$، حيث إن M ثابت التحريض المتبادل. نفرض عدم وجود أي منبع كهربائي في أي من الدارتين، عندئذ يكون:

$$L_1 \frac{d^2 I_1}{dt^2} + R_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{I_1}{C_1} + M\,\frac{d^2 I_2}{dt^2} = 0 \qquad (25)$$

$$L_2\frac{d^2I_2}{dt^2}+R_2\frac{dI_2}{dt}+\frac{1_2}{C_2}+M\frac{d^2I_1}{dt^2}=0 \qquad (26)$$

حيث إن L_1 , R_1 , C_1 بالترتيب عامل التحريض الذاتي للدارة الأولى ومقاومتها وسعتها، و L_2 , R_2 , C_2 بالترتيب عامل التحريض الذاتي للدارة الثانية ومقاومتها وسعتها.

نحل هاتين المعادلتين، بطريقة الحذف، نحسب $\frac{d^2I_2}{dt^2}$ من (26) ونعوض الناتج في (25) فنحصل على المعادلة التفاضلية.

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^2I_1}{dt^2}+L_2R_1\frac{dI_1}{dt}+\frac{L_2}{C_1}I_1-R_2M\frac{dI_2}{dt}-\frac{M}{C_2}I_2=0$$

نشتق هذه المعادلة ونبدل بـ $M\frac{d^2I_2}{dt^2}$ العبارة:

$$M\frac{d^2I_2}{dt^2}=-L_1\frac{d^2I_1}{dt^2}-R_1\frac{dI_1}{dt}-\frac{I_1}{C_1} \qquad (27)$$

التي نحصل عليها من (25) فنجد:

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^2I_1}{dt^3}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^2I_1}{dt^2}+$$
$$+\left(\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{dI_1}{dt}+\frac{R_2}{C_1}I_1-\frac{M}{C_2}\frac{dI_2}{dt}=0$$

نشتق هذه العادلة ثانية، ونبدل $M\frac{d^2I_1}{dt^2}$ من العبارة (27) فنحصل على المعادلة:

$$(L_1L_2-M^2)\frac{d^4I_1}{dt^4}+(L_1R_2+L_2R_1)\frac{d^3I_1}{dt^3}+$$
$$+\left(\frac{L_1}{C_2}+\frac{L_2}{C_1}+R_1R_2\right)\frac{d^2I_1}{dt^2}+\left(\frac{R_1}{C_2}+\frac{R_2}{C_1}\right)\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_1}{dt}+\frac{I_1}{C_1C_2}=0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية من المرتبة الرابعة بأمثال ثابتة، تابعها المجهول I_1 ومتغيرها المستقل t. معادلتها المميزة: (28)

$$(1-k^2)\lambda^4+2(\alpha_1+\alpha_2)\lambda^3+(\beta_1^2+\beta_2^2+4\alpha_1\alpha_2)\lambda^2+2(\alpha_1\beta_2^2\alpha_2\beta_1^2)\lambda+\beta_1^2\beta_2^2=0$$

حيث رمزنا اختصاراً:

$$k=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}},\ \alpha_1=\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}},\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}},\ \beta_1=\frac{R_1}{2L_1},\beta_2=\frac{R_2}{2L_2}$$

ويمكن كتابة المعادلة (28) كما يلي:

$$(\lambda^2+2\alpha_1\lambda+\beta_1^2)(\lambda^2+2\alpha_2\lambda+\beta_2^2)-k^2\lambda^4=0 \qquad (29)$$

وفي الحالة التي لا يوجد فيها وصل مغناطيسي بين الدارتين، يكون $M=0$ في المعادلتين (25) و(26) ونحصل على معادلتين منفصلتين، تعينان لنا كيف يتم تفريغ الشحنة الكهربائية:

$$\frac{d^2I_1}{dt^2}+2\alpha_1\frac{dI_1}{dt}+\beta_1^2I_1=0\ ,\ \frac{d^2I_2}{dt^2}+2\alpha_2\frac{dI_2}{dt}+\beta_2^2I_2=0 \qquad (30)$$

وتكون، عادةً، الدارتان اهتزازيتين، أي يكون للمعادلتين المميزتين الموافقتين للمعادلتين (30):

$$\lambda^2+2\alpha_1\lambda+\beta_1^2=0\ ,\ \lambda^2+2\alpha_2\lambda+\beta_2^2=0$$

حلول عقدية، أي أن: $\alpha_1^2-\beta_1^2<0$ و $\alpha_2^2-\beta_2^2<0$، إذن:

$$\frac{R_2}{2L_2}<\frac{1}{\sqrt{L_2C_2}} \quad \text{و} \quad \frac{R_1}{2L_1}<\frac{1}{\sqrt{L_1C_1}}$$

أو:

$$\frac{R_2}{2}<\sqrt{\frac{L_2}{c_2}} \quad \text{و} \quad \frac{R_1}{2}<\sqrt{\frac{L_1}{c_1}}$$

فالمعادلة (29) تعطينا، من أجل $k=0$، زوجين من الجذور العقدية المترافقة.

أما إذا كانت M صغيرة، وهو ما يحدث عملياً فإن للمعادلة (29)، زوجين من الجذور العقدية المترافقة $\lambda_{1,2}=-m\pm in$, $\lambda_{3,4}=-\alpha\pm ib$ بأجزاء حقيقية سالبة.

وتعطى I_1 كما يلي:

$$I_1=e^{-\alpha t}(c_1\cos bt+c_2\sin bt)+e^{-mt}(c_3\cos nt+c_4\sin nt)$$

وللحصول على I_2، نعوض قيمة I_1 هذه، في المعادلة (25)، فنحصل على حل يشبه الحل السابق بثوابت جديدة.

أما إذا أهملنا المقاومات، أي إذا جعلنا $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ، وفرضنا إضافة إلى ذلك، أن الدارتين مضبوطتان على التواتر نفسه، أي $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ، عندئذ تكتب المعادلة (29) كما يلي:

$$(1-k^2)\lambda^4 + 2\beta^2\lambda^2 + \beta^4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -\frac{\beta^2}{1\pm k}$$

وعليه، فإن:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\beta i}{\sqrt{1+k}} \; , \; \lambda_{3,4} = \pm \frac{\beta i}{\sqrt{1-k}}$$

والحل الموافق لهذه الجذور التخيلية الصرفة ذو شكل مثلثي، أي إذا افترضنا وجود وصل مغناطيسي لدارتين متفقتين بالتواتر، ينشأ عندئذٍ، اهتزازات يرتبط تواترهما بالتواتر المشترك β للدارتين وبثابت k للوصل المغناطيسي وفق العلاقتين: $\beta'' = \frac{\beta}{\sqrt{1-k}}$, $\beta' = \frac{\beta}{\sqrt{1+k}}$.

تمارين غير محلولة (5)

1- أوجد الحل العام لكل من الجمل التفاضلية التالية:

$$\{y'=y\sin x\,,\ z'=ye^{\cos x}\}\quad,\quad \{y'=z\,,\ z'=y\,,\ u'=y+z+u\}$$

$$\{y'=ay+z\,,\ z'=-y+az\}\quad,\quad \{y'=u-z,\ z'=u, u'=u-y\}$$

$$\left\{y'=1-\frac{1}{z}\,,\ z'=\frac{1}{y-x}\right\}\quad,\quad \left\{y'=yz, z'=\frac{z}{x}-yz^2\right\}$$

$$\left\{y'=-\frac{z}{x}\,,\ z'=-\frac{y}{x}\ ;\ (x>0)\right\}\quad,\quad \left\{\begin{matrix} y'=z+(1-y^2-z^2)y, \\ z'=-y+(1-y^2-z^2)z \end{matrix}\right\}$$

$$\{y'=z-u\,,\ z'=y^2+z\,,\ u'=y^2+u\}$$

2- أوجد الحل العام للجمل التفاضلية:

$$\frac{dx}{2z-y}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}\quad,\quad \frac{dx}{x(y-z)}=\frac{dy}{y(z-x)}=\frac{dz}{z(x-y)}$$

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy}\quad,\quad \frac{dx}{x+y-xy^2}=\frac{dy}{x^2y-x-y}=\frac{dz}{y^2-x^2}$$

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}\quad,\quad \frac{dx}{2xy}=\frac{dy}{y^2-x^2-z^2}=\frac{dz}{2yz}$$

3- أوجد الحل لعام لكل من الجمل التفاضلية:

$$\{y'=5y+2z\,,\ z'=-4y-z\}$$

$$\{y'=3y+z\,,\ z'=-y+z\}$$

$$\{y'=3y+2z\,,\ z'=-y-z\}$$

$$\{y'=4y-z\,,\ z'=3y+z-u,\ u'=y+u\}$$

$$\{y'=2y+2u-z\,,\ z'=y+2u\,,\ u'=z-2y+u\}$$

4- أوجد الحل العام لكل من الجمل التفاضلية التالية (بطريقة تحويل الثوابت):

$$\{y'=y+z-x^2+x-2\,,\ z'=-2y+4z+2x^2-4x-7\}$$

$$\{y'=-2y+z-e^{2x}\,,\ z'=-3y+2z+6e^{2x}\}$$

$$\{y'=2y-z+e^{2x}\,,\ z'=3y-2z+4e^{x}\}$$

$$\{y' = 2y + 4z + \cos x, z' = -y - 2z + \sin x\}$$

$$\{y' = y - z + 4\cos 2x, z' = 3y - 2z + 8\cos 2x + 5\sin 2x\}$$

5- أوجد الحل العام لكل من الجمل التالية:

$$\begin{cases} (D-1)y + (D+1)u = 3e^x \\ (D-1)y + (D+2)z = 1 + e^x \\ (D+2)z + (D+1)u = 2 + e^x \end{cases}$$

$$\{(D^2+16)y - 6Dz = 0\ ,\ 6Dy + (D^2+16)z = 0\}$$

$$\{(D^4+4)y + z = \sin^2 x\ ,\ (D^2+1)z - 2y = \cos^2 x\}$$

$$\begin{cases} (2D^2+3D-9)y + (D^2+7D-14)z = 4 \\ \qquad (D+1)y + (D+2)z = -8e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (9D^2+8)y + (3D^2+4)z = 0 \\ (2D^2+1)y + (D^2+2)z = 120\cos 3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+5)y + (D+3)z = e^{-x} \\ (2D+1)y + (D+1)z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2D+3)y + (D+4)z = -\cos x \\ (D+1)y + (D+2)z = 2\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} Dy + (D-1)z + (D+2)u = 2e^x \\ (D-1)y + Dz + (D-2)u = ae^x \\ (D+1)y + (D-2)z + (D+6)u = e^x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D+1)y + (D+5)z + (2D+5)u = 15e^x \\ (2D+1)y + (D+2)z + (3D+2)u = 10e^x \\ (D+3)y + (3D+4)z + (4D+6)u = 21e^x \end{cases}$$

$$\{(D^2-1)y + (D-1)z = 1\ ,\ (D+1)y + (D^2+1)z = x\}$$

$$\{y' = y + z + x\ ,\ z' = -2y - z + e^x\}$$

$$\{(D-1)y - z = x\ ,\ 2y + (D+1)z = e^x\}$$

$$\{(D-1)y + 5z = e^x\ ,\ -2y + (D+1)z = e^{2x} - 2x\}$$

$$\{(D^2-1)y + Dz = e^x\ ,\ Dy + (D^2+1)z = 0$$

$$\begin{cases}(D^3+3D^2+5D-1)y+(-3D^2-4D+2)z=0\\ 2(D-1)y+(D^2-D+2)z=e^{-x}\end{cases}$$

$$\{(D^2+1)y+z=5x+4\cos x\,,\ -4y+(D^2-3)z=-3e^x$$

فهرس الفصل السادس

الفصل السادس

6. المعادلات التفاضلية الجزئية

1.6 تعاريف ومفاهيم أولية:

نسمي معادلة تفاضلية جزئية، كل معادلة تحتوي على دالة مجهولة بعدة متغيرات مستقلة، وعلى المشتقات الجزئية لهذه الدالة، بالنسبة إلى متغيراتها المستقلة.

ونقول عنها إنها خطية، إذا كانت من الدرجة الأولى في الدالة ومشتقاتها الجزئية.

وتعرف رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية الجزئية، كما عرفناها من أجل المعادلة التفاضلية العادية سابقاً.

إن حل المعادلة التفاضلية الجزئية هو دالة لها تلك المشتقات الجزئية التي تظهر في المعادلة، والتي تحولها إلى مطابقة بعد التعويض.

إذا حوت المعادلة التفاضلية الجزئية الدالة المجهولة في المتغيرين المستقلين x, y فإن حلها $z = z(x,y)$ يقابل سطحاً في الفراغ $OXYZ$، ويسمى هذا السطح سطحاً تكاملياً للمعادلة التفاضلية الجزئية، وعليه فإن المعادلة التفاضلية الجزئية ليست إلا تعبيراً عن صفة هندسية معينة يتمتع بها هذا السطح التكاملي.

مثال 6–1–1: تعد الدالة $z = x^2 + y^2$ حلاً للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى: $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ ، مهما تكن x و y .

ويمثل هذا الحل هندسياً، مجسم قطع مكافئ دوراني محوره OZ. كما أن كل الدوال من النمط $z = F(x^2 + y^2)$ حيث إن F أي دالة قابلة للمفاضلة باستمرار، تُعد حلولاً للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، وهي تمثل، هندسياً، مجموعة سطوح متناظرة محورياً، محورها OZ.

مثال 6–1–2: إن حل المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى: $\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=0$

هو الدالة $z=f(x)$، وذلك بمكاملة المعادلة التفاضلية الجزئية مباشرة، بالنسبة إلى y، حيث إن $f(x)$ دالة اختيارية في x، وهو يقابل الثابت الاختياري، عند مكاملة معادلة تفاضلية عادية. ويمثل، هندسياً، جميع الاسطوانات، في الفراغ $OXYZ$، والتي مولداتها توازي المحور OY.

مثال 6–1–3: يمكن أن تكتب المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية: $\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x\partial y}=1$ كما يلي: $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right]=1$.

الحل: وبالمكاملة، أولاً، بالنسبة إلى x، نجد:

$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=x+f(y)$$

حيث إن $f(y)$ دالة اختيارية في y.

نكامل الآن، بالنسبة إلى y، فنحصل على حل المعادلة المعطاة:

$$z=xy+\int f(y)dy+g(x)$$

حيث $g(x)$ دالة اختيارية في x.

وهكذا، نلاحظ أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى يحوي دالة اختيارية واحدة، والحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية يحوي دالتين اختياريتين.

وعموماً، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة n، يحوي n دالة اختيارية وليس فقط ثوابت اختيارية، كما في المعادلات التفاضلية العادية.

نقدم، الآن، بعض الأنماط الخاصة لمعادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة مع الإشارة إلى إننا سنقتصر في دراستنا، لاحقاً، على نوعين من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية:

– المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى، وكحالة خاصة، معادلة لاغرانج، الخطية.

- المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من رتب عليا بدالة لمتغيرين مستقلين وذات أمثال ثابتة.

2.6 معادلات تفاضلية جزئية تكامل مباشرة:

مثال 6–2–1: أوجد الحل العام للمعادلة: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}$ حيث $z=z(x,y)$.

الحل: نكتب المعادلة كما يلي: $\frac{\partial^2 z/\partial x^2}{\partial z/\partial x}=1$ وبالمكاملة بالنسبة إلى x نجد:

$$\ln\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x+\varphi(y)\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=f(y)e^x$$

نكامل ثانيةً بالنسبة x، فنحصل على الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$z=f(y)e^x+g(y)$$

حيث إن $f(y)$ و $g(y)$ دالتان اختياريتان في y.

مثال 6–2–2: أوجد الحل العام للمعادلة التالية:

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x+y)-y\sin(x-y)\quad ;\ z=z(x,y)$$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي: $\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}[y\cos(x+y)]$

وبالمكاملة بالنسبة إلى y، نجد: $y\frac{\partial z}{\partial x}=y\cos(x+y)+f(x)$

نقسم الطرفين على y، ونكامل بالنسبة إلى x، فنجد:

$$z=\sin(x+y)+\frac{1}{y}\int f(x)\,dx+g(y)\Rightarrow z=\sin(x+y)+\frac{F(x)}{y}+g(y)$$

حيث إن $F(x)$ و $g(y)$ دالتان اختياريتان.

مثال6–2–3:

أوجد الحل العام للمعادلة: $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 y-6y^2=0$، حيث $z=z(x,y)$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي: $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3y\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\right)=0$

ومنه: إما، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y=0$ ، وحلها العام: $z=-x^2 y+x\,f(y)+g(y)$.

أو، $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-3y=0$ ، وحلها العام: $z=\frac{3}{2}yx^2+x\,f(y)+g(y)$.

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة، هو اجتماع مجموعتي الحلول السابقتين، ويمكن أن نكتبه كما يلي:

$$[-x^2+x\,f(y)+g(y)]\left[\frac{3}{2}x^2 y+x\,f(y)+g(y)\right]=0$$

حيث إن $f(y)$ و $g(y)$ دالتان اختياريتان.

مثال6–2–4: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-5y\frac{\partial z}{\partial x}+6y^2 z=12y^3 \quad ; \quad z=z(x,y)$$

الحل: نفرض، مؤقتاً، y وسيطاً في المعادلة، فتصبح معادلة تفاضلية عادية من الرتبة الثانية دالتها المجهولة z ومتغيرها المستقل x معادلتها المميزة: $\lambda^2-5\lambda\,y+6y^2=0$

وجذورها: $\lambda=2y$ و $\lambda=3y$ ، فالحل العام للمعادلة بدون طرف ثانٍ هو:

$$z_c=f(y)e^{3xy}+g(y)e^{2xy}$$

ونحصل بسهولة، على حل خاص للمعادلة مع طرف ثانٍ، وليكن $z_p=2y$. وعليه، فإن الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$z=z_p+z_c=f(y)e^{3xy}+g(y)e^{2xy}+2y$$

3.6 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى:

هي المعادلات كما يلي:

$$F_1(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+F_2(x_1,x_2,....,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_2}+...$$

$$+F_n(x_1,x_2,...,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_n}+R(x_1,x_2,....,x_n,z) \qquad (1)$$

حيث إن z دالة مجهولة، في المتغيرات المستقلة: $x_1,x_2,....,x_n$ ، و $F_1,F_2,....,F_n,R$ دوال معطاة.

إذا كان $R(x_1,x_2,....,x_n,z)\equiv 0$ وكانت الدوال $F_1,F_2,....,F_n$ لا تحوي الدالة z، فإننا نقول إن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية متجانسة، وفيما عدا ذلك تكون خطية غير متجانسة.

1.3.6 مسألة كوشي:

تُعد مسألة كوشي، أي مسألة إيجاد حل يحقق شروط ابتدائية مفروضة، من أهم المسائل المدروسة في الفصول السابقة، من أجل المعادلات التفاضلية العادية، وهي كذلك من أجل المعادلات التفاضلية الجزئية. وتعني مسألة كوشي، بالنسبة إلى المعادلة (1)، إيجاد من بين جميع حلول المعادلة، الحل $z=f(x_1,x_2,....,x_n)$ المحقق للشرط الابتدائي:

$$z=\varphi(x_1,x_2,....,x_{n-1});\ x_n=x_{0n}$$

حيث إن φ دالة مُعطاة قابلة للمفاضلة باستمرار بالنسبة إلى جميع متغيراتها.

وفي الحالة الخاصة، معادلة لاغرانج الخطية، أي المعادلة:

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z) \qquad (2)$$

إن مسألة كوشي تعني إيجاد الحل $z=f(x,y)$ المحقق للشرط الابتدائي.

$$z=\varphi(y)\ \ ;\ x=x_0$$

2.3.6 مبرهنة حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الأولى:

إن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (2)، هو الدالة (5)، حيث Φ دالة اختيارية، في الدالتين: φ_1 و φ_2 القابلة للمفاضلة باستمرار، وحيث إن:

$$\varphi_2(x,y,z)=c_2\ ,\ \varphi_1(x,y,z)=c_1$$

تكاملان أوليان مستقلان، للجملة التفاضلية المميزة (3).

نبدأ، للسهولة، بمعادلة لاغرانج الخطية (2).

ليكن $z=f(x,y)$ سطحاً تكاملياً، للمعادلة التفاضلية الجزئية (2) في الفراغ $OXYZ$.

عندئذ تكون أمثال توجيه الناظم على هذا السطح هي $\vec{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$. وهذا يعني، من المعادلة (2) إن الناظم $\vec{n}$ عمودياً على متجه معين $\vec{F}\,(P,Q,R)$، لأنه يُمكن كتابتها متجهياً، كما يلي $\vec{n}.\,\vec{F}=0$. أي أن المتجه $\vec{F}$ يقع في المستوي المماس عند كل نقطة من السطح التكاملي. لتكن $M(x,y,z)$ نقطة على السطح التكاملي $z=f(x,y)$ تتحرك دائماً باتجاه المتجه $\vec{F}$، فهي ترسم منحنياً، تُعطى معادلته من علاقة الارتباط الخطي بين المتجه (dx,dy,dz) المحمول على المماس في النقطة M لهذا المنحني، والمتجه $\vec{F}$ وهي:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (3)$$

إذاً، فالمنحني الناتج ليس إلا منحنياً تكاملياً لجملة المعادلات التفاضلية العادية هذه، والتي نسميها الجملة التفاضلية المميزة للمعادلة (2). ولما كان المتجه $\vec{F}$ وحيد التعيين، فإن هذا المنحني التكاملي المار بالنقطة M وحيد. ولما كان المتجه $\vec{F}$ يقع، دوماً، في المستوي المماس عند كل نقطة من السطح، فإنه يبقى أثناء الحركة ملازم للسطح، أي أن هذا المنحني التكاملي يقع على السطح الممثل بالمعادلة $z=f(x,y)$ أي أن كل سطح تكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية (2) يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (3).وبالعكس، فإذا كان السطح $z=f(x,y)$ يتولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (3)، فإن الناظم على هذا السطح، أي المتجه $\vec{n}\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},-1\right)$ عمودياً على المماس للمنحني المولد بتلك النقطة، والذي أمثال توجيهه هو المتجه $\vec{F}$، أي أن $\vec{n}.\,\vec{F}=0$ ونعبر عن ذلك، تحليلياً، بالعلاقة:

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}-R=0$$

أي أن هذا الشرط هو المعادلة التفاضلية الجزئية (2)، وهذا يعني، أن السطح $z = f(x, y)$ هو سطح تكاملي للمعادلة (2).

وبذا نكون قد برهنا، أن أي سطح تكاملي للمعادلة التفاضلية الجزئية (2) يولد بمنحنيات تكاملية للجملة التفاضلية العادية (3).

وبالعكس: نسمي الجملة التفاضلية العادية (3)، للمعادلة التفاضلية الجزئية (2)، الجملة التفاضلية المميزة.

نفرض أن جملة المعادلتين:

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1 \, , \, \varphi_2(x, y, z) = c_2 \qquad (4)$$

تمثل المنحنيات التكاملية للجملة (3). عندئذٍ، فإن أي منحني لا ينتمي إلى هذه الجملة، يقع على سطح مولد بمنحنيات من هذه الجملة، يتعين بتقاطع السطحين:

$$f(x, y, z) = 0 \ \ , \ g(x, y, z) = 0$$

وهو يقطع، حتماً، المنحني المولد للسطح. ويتعين شرط التقاطع هذا من حذف x و y و z بين المعادلات الأربع:

$$\varphi_1(x, y, z) = c_1 \, , \, \varphi_2(x, y, z) = c_2 \quad , \quad f(x, y, z) = 0 \, , \, g(x, y, z) = 0$$

ويصبح هذا الشرط كما يلي:

$$\Phi(c_1, c_2) = 0$$

وعليه، فإن معادلة السطح المولد بالمنحنيات (4) ويحقق الشرط السابق، هي كما يلي:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0 \qquad (5)$$

وهو المطلوب.

تعميم: إن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (1) هو الدالة:

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ ...., \varphi_n) = 0$$

حيث إن Φ دالة اختيارية، في الدوال $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ قابلة للمفاضلة باستمرار، وحيث إن:

$$\varphi_1(x_1, x_2, ...x_n, z) = c_1, ..., \varphi_n(x_1, x_2, ..., x_n, z) = c_n$$

تكاملات أولية للجملة التفاضلية المميزة:

$$\frac{dx_1}{F_1}=\frac{dx_2}{F_2}=....=\frac{dx_n}{F_n}=\frac{dz}{R}$$

مثال6–3–1: أوجد حلاً عاماً للمعادلة التفاضلية الجزئية:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+(y+x^2)\,\frac{\partial z}{\partial y}=z \qquad ; \quad z=z(x,y)$$

ومن ثم أوجد حلاً خاصاً محققاً للشرط الابتدائي: $z=y-4\ ,\ x=2$

الحل: نكتب الجملة التفاضلية المميزة للمعادلة المعطاة:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{x^2+y}=\frac{dz}{z}$$

ولإيجاد حلولها المستقلة، نكامل، أولاً النسبتين الأولى والثانية، فنجد:

$$y=x(c_1+x)\Rightarrow\ \frac{y-x^2}{x}=c_1\ \Rightarrow\varphi_1=\frac{y-x^2}{x}$$

وهو تكامل أولي. ولإيجاد تكامل أولي آخر، نكامل النسبة الأولى والثالثة فنجد:

$$\frac{z}{x}=c_2\ \Rightarrow\varphi_2=\frac{z}{x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو:

$$\Phi\left(\frac{y-x^2}{x},\frac{z}{x}\right)=0\ \Rightarrow z=x\,f\left(\frac{y-x^2}{x}\right)$$

حيث إن f دالة اختيارية في $\frac{y-x^2}{x}$.

نوجد الآن، الحل المقابل للشرط الابتدائي المعطى، أي السطح التكاملي المار بالمنحني:

$$\Gamma:\{z=y-4,\ x=2\}$$

نعوض في التكاملين φ_1 و φ_2 فنجد:

$$\left\{\varphi_1=\frac{y-4}{2},\frac{z}{2}=\varphi_2\right\}\Rightarrow\{y=2\varphi_1+4,z=2\varphi_2\}$$

نعوض قيم y و z، في الشرط الابتدائي للحصول على علاقة ارتباط بين φ_1 و φ_2، فنجد:

$$\varphi_1=\varphi_2$$

وللحصول على السطح التكاملي المار بالمنحني Γ، نعوض قيمة التكاملين الأوليين φ_1 و φ_2، في علاقة الارتباط، فنجد:

$$z = y - x^2$$

مثال6–3–2: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(z+y+u)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y+u)\frac{\partial u}{\partial z} = x+y+z$$

حيث: $u = u(x, y, z)$.

الحل: نكتب الجملة التفاضلية المميزة:

$$\frac{dx}{y+z+u} = \frac{dy}{x+z+u} = \frac{dz}{x+y+u} = \frac{du}{x+y+z}$$

ولحل هذه الجملة، نطرح النسب من النسبة الأولى، كلٍ على حدى ومن ثم نطرح النسبة الرابعة من النسبة الثالثة، وأخيراً، نجعل كل ذلك مساوياً لمجموع هذه النسب مع بعضها البعض، أي:

$$\frac{dx+dy+dz+du}{2(x+y+z+u)} = \frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dx-dz}{z-x} = \frac{dx-du}{u-x} = \frac{dz-du}{u-z}$$

باستخدام النسبة الأولى مع كل النسب الباقية، نحصل على أربعة تكاملات أولية مستقلة خطياً:

$$(x+y+z+u)(y-x)^2 = c_1$$

$$(x+y+z+u)(z-x)^2 = c_2$$

$$(x+y+z+u)(u-x)^2 = c_3$$

$$(x+y+z+u)(u-z)^2 = c_4$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة هو:

$$\Phi(c_1, c_2, c_3, c_4) = 0$$

4.6 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية من مراتب عليا بدالة لمتغيرين مستقلين ذات أمثال ثابتة:

نرمز بـ $D_x \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}$ و $D_y \equiv \dfrac{\partial}{\partial y}$، وندرس المعادلة:

$$L(D_x, D_y) = f(x, y) \qquad (6)$$

حيث إن $L(D_x, D_y)$ مؤثر تفاضلي متجانس، من الدرجة n، في D_x و D_y، وبأمثال ثابتة، أي:

$$L(D_x, D_y) \equiv D_x^n + a_1 D_x^{n-1} D_y + a_2 D_x^{n-2} D_y^2 + ... + a_n D_y^n$$

و $a_1, a_2, ... a_n$ ثوابت عددية.

من الواضح أن $L(D_x, D_y)$ مؤثر خطي، أي أنه إذا كانت g و h دالتان في x و y وكان α و β عددين، فإن:

$$L(D_x, D_y)(\alpha g + \beta h) = \alpha L(D_x, D_y) g + \beta L(D_x, D_y) h$$

ومنه إذا كان $z_1(x, y)$ و $z_2(x, y)$ حلين للمعادلة المتجانسة $Lz = 0$ أي أن: $Lz_1 = 0$ و $Lz_2 = 0$، فإن كل تركيب خطي في هذين الحلين، هو حل لها أيضاً، لأن:

$$L(D_x, D_y)(\alpha z_1 + \beta z_2) = \alpha L(D_x, D_y) z_1 + \beta L(D_x, D_y) z_2 = 0$$

وإذا كان $z_p(x, y)$ حلاً خاصاً للمعادلة (6)، أي كان $Lz_p = f(x, y)$، وأجرينا التحويل $z = z_p + z_c$ في المعادلة (6) لوجدنا:

$$L(D_x D_y) z = L(D_x, D_y)(z_p + z_c) = Lz_p + Lz_c = f(x, y)$$

وعليه فإن $L(D_x D_y) z_c = 0$، أي أن z_c هو حل للمعادلة التفاضلية المتجانسة الموافقة، بدون طرف ثانٍ، أي للمعادلة.

$$L(D_x, D_y) z = 0 \qquad (7)$$

وعليه، فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (6) عبارة عن مجموع حلين الأول z_c، الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة (7)، ويُسمى الدالة المكمّلة والثاني z_p حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (6). أي:

$$z = z_p + z_c$$

1.4.6 المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة بأمثال ثابتة:

بفرض أنه يمكن أن نكتب المعادلة (7)، كما يلي:

$$(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)....(D_x - \lambda_n D_y)z = 0 \qquad (8)$$

واضح أن حل أي من المعادلات:

$$(D_x - \lambda_i D_y)z = 0 \;\; ; \;\; i = 1,2,...,n$$

هو حل للمعادلة (8). لذا نبدأ بهذا النوع من المعادلات، أي:

$$(D_x - \lambda D_y)z = 0 \qquad (9)$$

وتكون الجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda}, \; dz = 0$$

والتكاملين الأوليين المستقلين لهذه الجملة هما: $y + \lambda x = c_2$, $z = c_1$ والحل العام للمعادلة (9) هو:

$$\varphi(z, y + \lambda x) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \Phi(y + \lambda x)$$

حيث إن Φ دالة اختيارية في $y + \lambda x$.

وهكذا، فإننا سنبحث عن قيم λ، التي تجعل الدالة $z = \Phi(y + \lambda x)$ حلاً للمعادلة (8).

لنضع $t = y + \lambda x$ ونعوض $z = \Phi(t)$ في المعادلة (8)، فنجد:

$$\frac{d^n \Phi}{dt^n}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$$

وهذا يعني، أنه لكي تكون الدالة $z = \Phi(y + \lambda x)$ حلاً للمعادلة (7)، يلزم ويكفي أن يكون λ جذراً للمعادلة المميزة:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (10)$$

التي تنتج من المعادلة $L(D_x, D_y) = 0$، بتقسيم طرفيها على D_y، ثم استخدام الرمز $\frac{D_x}{D_y} = \lambda$ ونميز الحالتين:

1- جميع جذور المعادلة المميزة بسيطة (غير مكررة):

لتكن هذه الجذور هي $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ وعليه، فإن الدوال $z_i = \Phi_i(y + \lambda_i x)$، حيث $i = 1,2,....,n$، هي حلول للمعادلة (8)، ويكون الحل العام لها هو:

$$z = \Phi_1(y + \lambda_1 x) + \Phi_2(y + \lambda_2 x) + ... + \Phi_n(y + \lambda_n x)$$

2- بعض (أو كل) جذور المعادلة المميزة مكررة:

لنبدأ بالمعادلة:

$$(D_x - \lambda D_y)^2 z = 0 \qquad (11)$$

نفرض $t = (D_x - \lambda D_y)z$ فتكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$(D_x - \lambda D_y)t = 0$$

والحل العام لها هو $t = \Phi_1(y + \lambda x)$ وبالتعويض في عبارة t، نجد:

$$(D_x - \lambda D_y)z = \Phi_1(y + \lambda x)$$

وهي معادلة لاغرانج الخطية، الجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda} = \frac{dz}{\Phi_1(y + \lambda x)}$$

من النسبتين الأولى والثانية، نجد تكامل أول $y + \lambda x = c_1$. نعوض الناتج في النسبة الثالثة، فنجد من هذه النسبة والنسبة الأولى، التكامل الأولي $z = x\Phi_1(c_1) + c_2$ ويكون الحل العام للمعادلة (11):

$$z = x\Phi_1(y + \lambda x) + \Phi_2(y + \lambda x)$$

حيث إن Φ_1 و Φ_2 دالتان اختياريتان في $y + \lambda x$.

وبتكرار المحاكمة السابقة من أجل المعادلة:

$$(D_x - \lambda D_y)^k z = 0 \; ; \; k > 2$$

نجد أن الحل العام لها هو:

$$z = x^{k-1}\Phi_1 + x^{k-2}\Phi_2 + ... + x\Phi_{k-1} + \Phi_k$$

حيث إن $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ دوال اختيارية في $y + \lambda x$.

ينتج، مما سبق، أنه إذا كان للمعادلة المميزة (10) جذراً λ، مكرراً k مرة، وكان هناك r جذراً بسيطاً لها، فإن المعادلة (8)، تكتب كما يلي:

$$(D_x - \lambda D_y)^k \ (D_x - \lambda_1 D_y).....(D_x - \lambda_r D_y)z = 0$$

وحلها العام هو:

$$z = x^{k-1}\Phi_1(y+\lambda x) + x^{k-2}\Phi_2(y+\lambda x) + ... + x\Phi_{k-1}(y+\lambda x) +$$
$$+ \Phi_k(y+\lambda x) + G_1(y+\lambda_1 x) + G_2(y+\lambda_2 x) + ... + G_r(y+\lambda_r x)$$

حيث إن $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_k, G_1, G_2, ...G_r$ دوال اختيارية.

2.4.6 المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية غير المتجانسة بأمثال ثابتة:

نبحث الآن في إيجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة (6).

إذا كان z_p حلاً خاصاً لها، أي أن $Lz_p = f(x,y)$، فإننا نكتب ذلك كما يلي:

$$z_p = \frac{1}{L(D_x, D_y)} f(x,y) = L^{-1}(D_x, D_y) \ f(x,y)$$

ويمكن التعامل مع المؤثر التفاضلي المعاكس $L^{-1}(D_x, D_y)$، كما تم التعامل معه في المعادلات التفاضلية العادية. إذ يمكن تحليل المؤثر $L^{-1}(D_x, D_y)$ إلى عوامل أو تفريقه إلى كسور أولية، أو نشرة في متسلسلة قوى منتهية ... الخ.

فإذا أمكن تحليل المؤثر L كما يلي:

$$L(D_x, D_y) \equiv (D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)...(D_x - \lambda_n D_y)$$

فإن إيجاد حل خاص للمعادلة (6)، يعني إيجاد القيمة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - \lambda_1 D_y)(D_x - \lambda_2 D_y)...(D_x - \lambda_n D_y)} f(x,y)$$

وبذا، تؤول مسألة إيجاد الحل الخاص z_p، إلى إيجاد القيمة:

$$z = \frac{1}{(D_x - \lambda D_y)} \; f(x,y)$$

أي إيجاد حل خاص للمعادلة $(D_x - \lambda D_y) z = f(x,y)$، وهي معادلة لاغرانج الخطية. نستفيد من التكامل الأولي $y + \lambda x = c_1$ للجملة التفاضلية المميزة لها:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\lambda} = \frac{dz}{f(x,y)}$$

في إيجاد عبارة z، من النسبتين الأولى والثالثة:

$$z = \int f(x, c_1 - \lambda x) dx$$

مع إهمال ثابت المكاملة، هنا، لأننا نبحث عن حل خاص.

وبعد إجراء المكاملة نستبدل c_1 بـ $y + \lambda x$. وعليه، يمكن أن نأخذ دائماً:

$$z = \frac{1}{(D_x - \lambda D_y)} \; f(x,y) = \int f(x, c - \lambda x) dx \qquad (12)$$

على أن نستبدل c بقيمتها بعد المكاملة. ويمكن إعادة هذه العملية مرة تلو الأخرى.

مثال6–4–1: أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x + 2y \;;\; z = z(x,y)$$

الحل: نكتب هذه المعادلة كما يلي:

$$(D_x^2 - 4D_x D_y + 3D_y^2) z = x + 2y \Rightarrow (D_x - D_y)(D_x - 3D_y) z = x + 2y$$

لما كانت جذور المعادلة المميزة الموافقة هي: $\lambda = 3$ و $\lambda = 1$ وهي بسيطة فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة هو:

$$z_c = \Phi_1(x+y) + \Phi_2(3x+y)$$

حيث إن Φ_1 و Φ_2 دالتان اختياريتان.

ونجد الحل الخاص للمعادلة المعطاة من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - 3D_y)(D_x - D_y)} \; (x+2y) = \frac{1}{(D_x - 3D_y)} \left[\frac{1}{(D_x - D_y)} (x+2y) \right]$$

نوجد، أولاً:

$$z_1 = \frac{1}{(D_x - D_y)}(x+2y)$$

من العلاقة (12)، نجد:

$$z_1 = \int [x + 2(c-x)]dx = -\frac{x^2}{2} + 2cx = \frac{3}{2}x^2 + 2xy$$

ومنه، أصبح من الممكن إيجاد حل خاص z_p، من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x - 3D_y)}\left(\frac{3}{2}x^2 + 2xy\right)$$

وحسب (12)، مرة أخرى، نجد:

$$z_p = \int \left[\frac{3}{2}x^2 + 2x(c-3x)\right]dx = -\frac{3}{2}x^3 + x^2c = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2y$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة:

$$z = z_p + z_e = -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2y + \Phi_1(x+y) + \Phi_2(3x+y)$$

مثال6–4–2: أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(D_x + D_y)^2 z = 2\cos y - x\sin y\ ;\ \ z = z(x,y)$$

الحل: لما كان للمعادلة المميزة الموافقة جذر $\lambda = -1$ مكرر مرتين، أي $k = 2$، فإن الحل العام للمعادلة المتجانسة، بدون طرفٍ ثانٍ، يُعطى بالعلاقة:

$$z_c = x\Phi_1(y-x) + \Phi_2(y-x)$$

حيث إن Φ_1 و Φ_2 دالتان اختياريتان.

ونجد الحل الخاص للمعادلة المعطاة من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x + D_y)^2}(2\cos y - x\sin y)$$

ونوجد، أولاً، $z_1 = \frac{1}{(D_x + D_y)}(2\cos y - x\sin y)$، من العلاقة (12)، نجد:

$$z_1 = \int [2\cos(c+x) - x\sin(c+x)]dx =$$
$$= \sin(c+x) + x\cos(c+x) = \sin y + x\cos y$$

ومنه، أصبح من الممكن إيجاد z_p، من العلاقة:

$$z_p = \frac{1}{(D_x + D_y)}(\sin y + xosy)$$

وحسب (12)، مرة أخرى، نجد:

$$z_p = \int [\sin(c+x) + x\cos(c+x)]dx = x\sin(x+c) = x\sin y$$

ويكون الحل العام للمعادلة المعطاة هو:

$$z = z_p + z_c = x\sin y + x\Phi_1(y-x) + \Phi_2(y-x)$$

ملاحظة: إن المؤثر التفاضلي الجزئي المعاكس، هو مؤثر خطي يتصف بتلك الصفات التي اتصف بها المؤثر التفاضلي العادي المعاكس. وندرس تأثير هذا المؤثر في بعض الأشكال الخاصة للدالة $f(x,y)$:

1) $L^{-1}(D_x, D_y)e^{ax+by} = L^{-1}(a,b)e^{ax+by}\ ;\ L(a,b) \neq 0$

وإذا كان $L(a,b) = 0$، أي أن (a,b) جذر مكرر k مرة، للمعادلة: $L(D_x, D_y) = 0$ ومنه، فإن:

$$L(D_x, D_y) = \left(D_x - \frac{a}{b}D_y\right)^k . G(D_x, D_y)\ ;\ G(a,b) \neq 0$$

وعليه، فإن:

$$L^{-1}(D_x, D_y)e^{ax+by} = \left[\left(D_x - \frac{a}{b}D_y\right)^k . G(D_x, D_y)\right]^{-1} e^{ax+by} =$$
$$= G^{-1}(a,b).\frac{x^k}{k!}e^{ax+by}$$

2) $L^{-1}(D_x^2, D_x D_y, D_y^2)\sin(ax+by) = L^{-1}(-a^2, ab, -b^2)\sin(ax+by)$

$L^{-1}(D_x^2, D_x D_y, D_y^2)\sin(ax+by) = L^{-1}(-a^2, ab, -b^2)\cos(ax+by).$

بشرط: $L(-a^2, ab, -b^2) \neq 0$

$$3):\ \ L^{-1}(D_x, D_y)\left\lfloor a^{ax+by}.v(x,y)\right\rfloor = e^{ax+by}.L^{-1}(D_x+a, D_y+b)v(x,y)$$

إذا كان $f(x,y)$ حدودية في x و y، فإن:

$$4):\ \ L^{-1}(D_x, D_y)\ f\ (x,y) = D_x^{-n} P(D_x, D_y)\ f(x,y)$$

حيث إن $P(D_x,D_y)$ هو حاصل قسمة الواحد على $L(D_x,D_y)$، بعد إخراج D_x^n خارج قوسين، وبعد ترتيب حدوده تصاعدياً وفق قوى D_y، بحيث يصبح أول حد في المقام هو الواحد.

مثال3–4–6: أوجد حلاً خاصاً للمعادلة:

$$(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2)z = 12xy + e^{2x+y} + 9\cos 3x$$

الحل: نكتب المعادلة كما يلي:

$$(D_x - D_y)^2 z = 12xy + e^{2x+y} + 9\cos 3x\ .$$

ويكون الحل الخاص لها عبارة عن مجموع ثلاثة حلول خاصة:

$$z_{p_1} = (D_x - D_y)^{-2}(12xy) = D_x^{-2}\left(1 - \frac{D_y}{D_x}\right)^{-2}(12xy) =$$

$$= D_x^{-2}\left(1 + 2\frac{D_y}{D_x} + 3\frac{D_y^2}{D_x^2} + ...\right)(12xy) =$$

$$= D_x^{-2}(12xy) + 2D_x^{-3}(12x) = 2x^3y + x^4$$

$$z_{p_2} = (D_x - D_y)^{-2}e^{2x+y} = (2-1)^{-2}e^{2x+y} = e^{2x+y}$$

$$z_{p_3} = (D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2)^{-1}(9\cos 3x) = (-9 - 0 - 0^2)^{-1}(9\cos 3x) =$$

$$= -\cos 3x$$

والحل الخاص للمعادلة المعطاة هو:

$$z_p = z_{P_1} + z_{p_2} + z_{P_3} = 2x^3y + x^4 + e^{2x+y} - \cos 3x$$

5.6 تطبيق على المعادلات التفاضلية الجزئية:

معادلة انتشار الحرارة:

ندرس قضيباً متجانساً طوله l معزول حرارياً من الجوانب، ولتكن درجتي الحرارة عند طرفي القضيب ثابتين u_1 وu_2.وتسري الحرارة من الطرف الأكثر سخونة إلى الطرف الأقل سخونة وتعطى كمية الحرارة السارية خلال مقطع القضيب، الذي مساحته S، في وحدة الزمن، بالقانون التجريبي:

$$Q = -k\frac{u_2 - u_1}{l}S = -k\frac{\partial u}{\partial x}S \qquad (13)$$

حيث إن k ثابت الانتشار الحراري، مُعامل التوصيل، وهو يعتمد على مادة القضيب. ويُعد مقدار الدفق الحراري موجباً، إذا كانت الحرارة تسري من جهة تزايد x.

ندرس عملية انتشار الحرارة في القضيب ونوصف هذه العملية بالدالة $u(x,t)$ المعبرة عن درجة الحرارة في المقطع x، في اللحظة t. نُعين المعادلة التي يجب أن تحققها الدالة $u(x,t)$. لذا نصيغ القوانين الفيزيائية التي تحدد العمليات المرتبطة بانتشار الحرارة.

1 - قانون فورييه: إذا كانت درجة حرارة القضيب غير منتظمة، فإنه ينشأ فيه دفوق حرارية متجهة من الأماكن ذات درجات الحرارة الأعلى إلى الأدنى. وكمية الحرارة السارية في المقطع x خلال الزمن dt هي: $dQ = qSdt$، حيث $q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ هي كثافة الدفق الحراري المساوية لكمية الحرارة السارية في وحدة الزمن، خلال مساحة قدرها $1\ cm^2$، وهو تعميم للقانون (13). إذا كان القضيب غير متجانس، فإن k تكون دالة في x.

2 - كمية الحرارة التي يجب إكسابها للقضيب المتجانس، لرفع درجة حرارته بمقدار Δu تساوي $Q = c.m.\Delta u = c\rho V\Delta u$، حيث c السعة الحرارية النوعية وm كتلة القضيب وρ كثافته، وV حجمه.

3 - داخل القضيب يمكن أن تنشأ أو تمتص الحرارة. مثلاً، عند مرور تيار، أو نتيجة تفاعلات كيميائية. ويمكن تمييز انبعاث الحرارة بكثافة المصادر الحرارية $F(x,t)$ عند النقطة x، في اللحظة t، مثلاً، الأجهزة الكهربائية العاملة في مركبة فضائية، يمكن

النظر إليها كمنبع حراري. ونتيجة لتأثير هذه المصادر تنبعث على منطقة من القضيب dx خلال الزمن dt، كمية حرارة تساوي $dQ = SF(x,t)\ dxdt$.

وللحصول على معادلة انتشار الحرارة نفرض أن للدالة $u(x,t)$ مشتقان مستمران $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$، ونحسب توازن الحرارة في جزء ما $[x_1,x_2]$، من خلال فترة زمنية $[t_1,t_2]$، وبتطبيق قانون حفظ الطاقة والاستعانة بمبرهنة القيمة الوسطى، نجد:

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\bigg|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x-\tau)\bigg|_{x=x_1} \right]\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t =$$

$$=\{c\rho[u(\xi,t_2)-u(\xi,t_1)]\}_{\xi=x_3}\Delta x$$

والتي يمكن كتابتها، باستخدام مبرهنة التزايدات المحددة، كما يلي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right]_{\substack{x=x_5\\t=t_3}}\Delta x\Delta t + F(x_4,t_4)\Delta x\Delta t = \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right]_{\substack{x=x_3\\t=t_5}}\Delta x\Delta t$$

حيث t_3,t_4,t_5,x_3,x_4,x_5 نقاط داخل المجالين $[x_1,x_2]$ و $[t_1,t_2]$. نختصر على $\Delta x\Delta t$، فنجد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\bigg|_{\substack{x=x_5\\t=t_5}} + F(x,t)\big|_{\substack{x=x_4\\t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{\substack{t=t_5\\x=x_3}}$$

كل هذه التحليلات تتعلق بمجالين اختياريين $[x_1,x_2]$ و $[t_1,t_2]$. وبالانتقال إلى اللانهاية، عندما $x_1,x_2\to x$ و $t_1,t_2\to t$. نحصل على معادلة انتشار الحرارة.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x,t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

إذا كان القضيب متجانساً، فإنه يمكن النظر إلى k,c,ρ كثوابت، وتكتب المعادلة كما يلي:

$$u_1^{'}=a^2u_{xx}^{''}+f(x,t)\ ;\ \ f(x,t)=\frac{F(x,t)}{c\rho}$$

ويسمى الثابت a^2 معامل انتشار الحرارة.

وإذا انعدمت مصادر الحرارة، أي كان $F(x,t)=0$ ، فإن معادلة انتشار الحرارة تكتب كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{14}$$

نحل هذه المعادلة ضمن بعض الشروط:

- الشرط الابتدائي:

$$u(x,0)=\varphi(x)\ ;\ 0<x<l \tag{15}$$

ولنفرض أيضاً، أن درجة حرارة طرفي القضيب $x=0$ و $x=l$ ثابتة، وتساوي درجة حرارة الوسط المحيط. ولنفرض أنها تساوي الصفر، أي أنه لدينا أيضاً الشروط الحدية:

$$u(0,t)=0\ ,\ u(l,t)=0\ ;\ \forall t\geq 0 \tag{16}$$

ضمن هذه المعطيات، يجب إيجاد توزع درجات الحرارة $u=u(x,t)$، في القضيب في لحظة ما $t\geq 0$.

نبحث عن حل للمعادلة (14)، بطريقة خاصة، تسمى طريقة فورييه أو طريقة فصل المتغيرات، بأن نفرض أن الحل u من النمط:

$$u=X(x)T(t) \tag{17}$$

حيث إن X دالة في x فقط، و T دالة في t فقط. ولما كان:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X\,T' \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=X''\,T$$

نعوض في (14)، فنحصل على المعادلة:

$$XT'=a^2X''T \qquad \Rightarrow\ \frac{X''}{X}=\frac{T'}{a^2T}$$

حيث إن الطرف الأيسر في المطابقة دالة في x فقط، والأيمن في t فقط، ولما كان x و t مستقلين خطياً، فإن طرفي هذه المطابقة تساوي ثابت، وليكن $-\lambda^2$.

يمكن التحقق بسهولة من أن الإشارة الموجبة لهذا الثابت، لن تؤدي بنا للحلول المطلوبة، ومنه، فإن:

$$\frac{X''}{X}=-\lambda^2 \;\; ; \;\; \frac{T'}{a^2T}=-\lambda^2 \Rightarrow X''+\lambda^2X=0 \;,\; T'+a^2\lambda^2T=0$$

وبحل هاتين المعادلتين الخطيتين، نجد:

$$X(x)=\alpha\sin\lambda x+\beta\cos\lambda x,\; T(t)=ce^{-a^2\lambda^2t}$$

حيث α,β,c ثوابت اختيارية.

عندئذ يُكتب (17)، كما يلي:

$$u=ce^{-a^2\lambda^2t}(\alpha\sin\lambda x+\beta\cos\lambda x)$$

واضح أن هذه الدالة، تحقق المعادلة (14) مهما تكن α,β,λ. نعوض في هذه الدالة الشروط الحدية (16):

نضع $x=0$، فنجد $0=e^{-a^2\lambda t}$ ومنه فإن $\beta=0$ ، وعليه:

$$u=\alpha e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda x$$

ونضع ، $x=l$ فنجد من الشروط الحدية (16):

$$0=\alpha e^{-a^2\lambda^2t}\sin\lambda l \;\;\Rightarrow\;\; \alpha\neq 0$$

لأنه في الحالة المعاكسة، نحصل على الحل الصفري $u=0$. لذا، فإن:

$$\sin\lambda l=0\Rightarrow \lambda l=n\pi \;\; ; \;\; n\in z$$

أو

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{l} \;\; ; \; n\in z$$

والتي تسمى أعداد مميزة للمسألة، ومجموعها يساوي طيف المسألة.

يقابل كل عدد مميز حل خاص لمعادلة انتشار الحرارة:

$$u_n=\alpha_ne^{-b^2n^2t}\sin\frac{n}{1}\pi x \;;\; b=\frac{a}{l}\pi \qquad (18)$$

وهكذا، فإن هذه الصيغة، تُعطي كل الحلول الخاصة المستقلة خطياً للمعادلة (14)، وتحقق الشروط الحدية:

فيزيائياً، تُعد الدوال u_n موجات حرارية، بياناتها متخامدة، عند $t\to\infty$.

لما كانت المعادلة (14) خطية، فإن مجموع كل الحلول (18)، يُعد أيضاً، حل لها:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-b^2n^2t} \sin\frac{n}{l}\pi x$$

إذا كانت هذه المتسلسلة متقاربة، فإننا نعوض $t = 0$، في هذه الصيغة، وبالاستفادة من الشرط الابتدائي، نجد:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{n}{l}\pi x \qquad (19)$$

تُمثل هذه المتسلسلة نشر فورييه للدالة $\varphi(x)$، في المجال $[0,l]$، وتُعين الثوابت من العلاقة:

$$\alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n}{l}\pi x\,dx \;\; ; \;\; n \in N^*$$

ويُبرهن، على أنه إذا كان منحن الدالة $\varphi(x)$ أملساً، في المجال $[0,l]$، فإن المتسلسلة (19)، تكون، متقاربة ومجموعها يساوي $u(x,t)$، المحقق للمعادلة (14)، والشرط الابتدائي (15) والشروط الحدية (16).

تمارين غير محلولة (6)

1- تحقق فيما إذا كانت الدوال:

$$1):u(x,y,z)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\ ,\ 2):u(x,y,z)=xyz\ ,\ 3):\ u(x,y,z)=\frac{y}{x}e^{xz/y^2}$$

تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية: $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$ ، حيث $x>0,y>0,z>0$

2- هل تُمثل الدالة: $u=\sqrt{x^2+y^2}\cdot f\left(arc\cot\frac{y}{x}+\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)$ حلاً للمعادلة التفاضلية $(x+y)u'_x-(x-y)u'_y=u$ ، (حيث f دالة ما، قابل للمفاضلة باستمرار).

3- أوجد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

1) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6x+y+12x^2y^2$

2) $z'_x-z'_y=1$

3) $\frac{1}{\cos x}u'_x+u'_y=u\cot y$

4) $x^2u'_x+y^2u'_y+z^2u'_z=u$

5) $yu'_x+xu'_y=x^2+y^2$

6) $(\sin^2 x)z'_x+(\tan x)z'_y=\cos^2 z$

7) $\frac{1}{x}u'_x+\frac{1}{y}u'_y=\frac{u}{y^2}$

8) $2xz'_x+(y-x)z'_y-x^2=0$

9) $yzz'_x-xzz'_y=e^z$

10) $u'_x+u'_y+(1+\sqrt{u-x-y-z})u'_z=3$

11) $u'_x+2u'_y+u'_z=xyz=xyz$

12) $y^2u'_x+x^2u'_y=x^2y^2(x^3+y^3)$

13) $z'_x-3z'_y=5z+\tan(y-3x)$

4- أوجد الحل الخاص لكلٍ من المعادلات التالية والمحقق لشروط البدء الموافقة:

1) $yu'_x-xu'_y=0$	; $u(0,y)=Py^2$
2) $xz'_y=z$	; $z(1,y)=\sin y$
3) $xu'_x+yu'_y+zu'_z=0$	; $u(1,y,z)=y^2+z^2$
4) $u'_x+u'_y+u'_z=xyz$	; $u(0,y,z)=y-z$
5) $xu.u'_x+yuu'_y+xy=0$	; $u(x,\frac{1}{x})=1$ أو $u\vert_{x\cdot y=1}=1$

6) $xu'_x + yu'_y = u - x^2 - y^2$	; $u(x,-2) = x - x^2$
7) $xu'_x + 2yu'_y + 3zu'_z = 4u$	; $u(x,x,z) = z$
8) $xz'_x - yz'_y = z^2(x-3y)$	; $x=1,\ yz+1=0$
9) $(x-z)z'_x + (y-z)z'_y = 2z$	; $x-y=2, z+2x=1$
10) $\sqrt{x}\cdot u'_x + \sqrt{y}\cdot u'_y + \sqrt{z}\cdot u'_z = 0$	; $u(1,y,z) = y - z$
11) $(1+\sqrt{z-y-x})\cdot z'_x + z'_y = 2$	; $z(x,0) = x$
12) $x\cdot u'_x + yz\cdot u'_z = 0$	; $u(x,y,1) = x^4$
13) $\sin x \sin y \cdot u'_x + \cos x \cos y \cdot u'_y = 0$	; $x+y=\dfrac{\pi}{2}, u=\cos 2y$
14) $(y+2z^2)\cdot z'_x - 2x^2 z\cdot z'_y = x^2$	; $z(x,x^2) = x$

5- أوجد الحل العام لكلٍ من المعادلات التالية:

1) $(D_x^2 + D_y^2)z = x^2y^2$

2) $(D_x^3 - 3D_x^2D_y - 4D_xD_y^2 + 12D_y^3)z = \sin(y+2x)$

3) $(D_x^2 - 6D_xD_y + 9D_y)^2 z = 12x^2 + 36xy$

4) $(D_x^2 - D_xD_y - 2D_y^2)z = (2x^2 + xy - y^2)\sin xy - \cos xy$

5) $(D_x^3 - 4D_x^2D_y + 4D_xD_y^2)z = 4\sin(2x+y) + \cos(2x+3y)$

6) $(D_x^2D_y + D_x^3 - D_xD_y^2 - D_y^3)z = e^x\cos 2y$

7) $(D_x^3 - 7D_xD_y^2 - 6D_y^3)z = \cos(x-y) + x^2 + xy^2 + y^3$

8) $(D_x^2 + 2D_xD_y + 8D_y^2)z = \sqrt{2x+3y}$

9) $(D_x - 2D_y)^2.(D_x + 2D_y)z = e^{2x+y}$

10) $(D_x^2 + D_y^2)z = x^2y^2$

11) $(D_x^2 - D_xD_y - D_y^2)z = (y-1)e^x$

12) $(D_x^3 - 3D_x^2D_y - 4D_xD_y^2 + 12D_y^3)z = \sin(y+2x)$

13) $(D_x^2 + 5D_xD_y + 5D_y^2)z = x\sin(3x-2y)$

المعادلات التفاضلية الجزئية من الرتبة الأولى

عين لكل من المعادلات الآتية الحل العام:

1. $y\frac{z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$
2. $e^x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=ye^x$
3. $2x\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}-x^2=0$
4. $xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz$
5. $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2y+z$
6. $(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0$
7. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=x\sqrt{z^2+1}$
8. $x^2z\frac{\partial z}{\partial x}+y^2z\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$
9. $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^z$
10. $(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$

الأجوبة:

1. $F(x^2-y^2,x-y+z)=0$ **2**. $F\left(e^{-x}-y^{-1},z+\frac{x-\ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\right)=0$ **3**. $F\left(x^2-4z,\frac{(x+y)^2}{x}\right)=0$ **4**. $F\left(x^2+y^2,\frac{z}{x}\right)=0$ **5**. $F\left(\frac{x^2}{y},xy-\frac{3z}{x}\right)=0$ **6**. $F\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z},\frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0$ **7**. $F\left(x^2+y^4,y\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)\right)=0$ **8**. $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ln|xy|-\frac{z^2}{2}\right)=0$ **9**. $F\left(x^2+y^2,\tan^{-1}\frac{x}{y}+(z+1)e^{-z}\right)=0$ **10**. $F(z^2-y^2,x^2+(y-z)^2)=0$

عين السطح الذي يحقق المعادلة المعطاة ويمر بالمنحني المعطى

1. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x\,;\;\; x=0\,,z=y^2$
2. $x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2\,;\;\; y=1\,,z=x^2$
3. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy\,;\;\; x=2\,,z=y^2+1$
4. $\tan x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z\,;\;\; y=x\,,z=x^3$
5. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y)\,;\;\; x=1\,,yz+1=0$
6. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2\,;\;\; y=-2\,,z=x-x^2$
7. $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy\,;\;\; x=a\,,y^2+z^2=a^2$
8. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz\,;\;\; x+y=2\,,yz=1$

9. $z\frac{z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0\,;\;\; y=x^2\,, z=2x$

10. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y\,;\;\; z=y=-x$

الأجوبة:

1. $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|$ **2**. $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$ **3**. $(x+2y)^2=2x(z+xy)$ **4**. $\sqrt{\frac{z}{y^3}}\sin x=\sin\sqrt{\frac{z}{y}}$ **5**. $2xy+1=x+3y+z^{-1}$ **6**. $x-2y=x^2+y^2+z$ **7**. $2x^2-y^2-z^2=a^2$ **8**. $[(y^2z-2)^2-x^2+z]y^2z=1$ **9**. $x^2+z^2=5(xz-y)$ **10**. $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$

فهرس الفصل السابع

الفصل السابع

7. حل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات

1.7 حل المعادلات التفاضلية بطريقة المصفوفات:

1.1.7 اشتقاق وتكامل المصفوفات:

ليكن لدينا مصفوفة $A = [a_{ij}(t)]$ حيث عناصرها ، دوال بالمتحول t:

$$A = [a_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ويمكن أن نكتب بشكل مبسط أيضاً العلاقة (1) بالشكل التالي:

$$[a(t)] = [a_{ij}(t)] \quad ; \quad i = 1,2,\dots,m \quad ; \quad j = 1,2,\dots,n \qquad (2)$$

لنفرض أن عناصر هذه المصفوفة لها مشتقات:

$$\frac{da_{11}(t)}{dt} \ , \ \frac{da_{12}(t)}{dt} \ , \dots , \frac{da_{mn}(t)}{dt}$$

تعريف7–1–1:ندعو مشتقة المصفوفة $[a(t)]$ المصفوفة التي نرمز لها بالرمز $\frac{d}{\mathrm{dt}}[a(t)]$، والتي عناصرها هي مشتقات عناصر المصفوفة $[a(t)]$ وتكتب:

$$\frac{d}{dt}\,[a(t)] = \begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \dots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \dots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

العلاقة (3) تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}[a(t)] = \left[\frac{d}{dt}\ \ a_{ij}\,(t)\right] \qquad (4)$$

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}[a(t)] = \left[\frac{d}{dt} \quad a\,(t)\right] \qquad (5)$$

ممكن في بعض الأحيان استخدام مفهوم المؤثر التفاضلي D حيث $D = \frac{d}{dt}$ عندئذٍ فإن العلاقة (5) تأخذ الشكل التالي باستخدام الرمز D:

$$D[a] = [Da]$$

أو:

$$D[a(t)] = [Da(t)]$$

تعريف7–1–2:ندعو تكامل محدود مصفوفة $[a(t)]$ ونرمز له بالرمز:

$$\int_0^t \; [a(z)] \; dz \qquad\qquad (6)$$

المصفوفة التي عناصرها هي تكاملات لعناصر المصفوفة الأساسية وتكتب عندئذٍ:

$$\int_{t_0}^{t}[a(z)] \; dz \; = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} a_{11}(z)dz & \cdots & \int_{t_0}^{t} a_{1n}(z)dz \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{t_0}^{t} a_{m1}(z)dz & \cdots & \int_{t_0}^{t} a_{mn}(z)dz \end{bmatrix} \qquad (7)$$

أو بشكل مبسط:

$$\int_{t_0}^{t}[a(z)dz] \; = \left[\int_{t_0}^{t} a(z)dz\right] \qquad (8)$$

2.1.7 الكتابة المصفوفية لجملة معادلات تفاضلية وحل هذه الجملة ذات الأمثال الثابتة :

لتكن لدينا جملة معادلات مؤلفة من n معادلة تفاضلية تحوي n تابعاً مجهولاً: $x_1(\mathrm{t}), \cdots, x_n(t)$ وبالتالي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

الأمثال a_{ij} في الجملة (9) ثوابت، لنضع $x(\mathrm{t})$ على شكل مصفوفة ذات عمود بالشكل:

$$[x(\mathrm{t})] = \begin{bmatrix} x_1(\mathrm{t}) \\ x_2(\mathrm{t}) \\ \vdots \\ x_n(\mathrm{t}) \end{bmatrix} \qquad (10)$$

المصفوفة (10) تمثل مصفوفة حل الجملة (9). باشتقاق المصفوفة (10) نجد:

$$\left[\frac{dx}{dt}\right] = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

بفرض أن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة الأمثال في الطرف الثاني للجملة (9) نجد أن الجملة (9) استناداً إلى (10) و(11) تكتب على شكل مصفوفة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (12)$$

أو بشكل مختصر:

$$d[(x(t)\ )]/dt \ = \ [a]\ .[x] \qquad (13)$$

أو:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\,.\,x \qquad (14)$$

بفرض أن:

$$[\alpha] = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad (15)$$

حيث α_i أعداد.

لنبحث الآن عن حل لجملة معادلات تفاضلية على الشكل:

$$[x] = e^{kt}\ [\alpha] \qquad (16)$$

أو:

بتعويض (17) في (14) بعد استخدام خاصة اشتقاق مصفوفة وإجراء عملية ضرب المصفوفات نحصل على:

ومنه نجد:

$$k\,\alpha = a\,\alpha \qquad (19)$$

ومنه نجد:

$$k\,\alpha - a\,\alpha = 0 \qquad (20)$$

حيث في العلاقة (20):a هي مصفوفة الأمثال المعينة في الجملة (20) ، k عدد، α المصفوفة العمودية المعينة في (15). بناءً على ذلك فإن العلاقة (20) تكتب بشكل مفصل على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0 \qquad (21)$$

على شكل جداء داخلي فإن الجملة (20) تكتب على شكل جملة معادلات جبرية:

حيث E مصفوفة واحدية ذات قوة n.

العدد k يجب أن يتعين اعتماداً على (حل جملة معادلات تفاضلية ذات أمثال ثابتة) والتي نكتبها بالشكل المصفوفي التالي:

$$\Delta\,(a - kE) = 0 \qquad (23)$$

بقولٍ آخر: المعين:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0, (24)$$

يجب أن يكون معدوم.

لنفرض الآن أن جميع جذور (24) مختلفة فيما بينها:

$k_1 , k_2 , \cdots , k_n$ ، فمن أجل كل قيمة k_i للجملة (22) نعين مصفوفة القيم α:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha_{\mathrm{n}}^{(1)} \end{bmatrix}$$

بناءً على ما تقدم فإن حل جملة المعادلات (12) يكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \cdots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \cdots & \alpha_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} & \cdots & \alpha_n^{(n)} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_1 e^{k_1 t} \\ c_2 e^{k_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{k_n t} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

حيث c_i هي ثوابت، العلاقة (25) تكتب بشكل مبسط على النحو التالي:

$$[x] = [\alpha] . [c\, e^{kt}]$$

3.1.7 حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n ذات الأمثال الثابتة بطريقة المصفوفات :

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n وذات الأمثال الثابتة:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = a_n \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-1} \frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \dots + a_1\, x \quad ,(26)$$

نفرض أن: $x = x_1$ وبالتالي فإن:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1}{dt} = x_2 \\ &\frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ &\frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ &\vdots \\ &\frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ &\frac{dx_n}{dt} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

لنكتب مصفوفة أمثال المجموعة (27) فنجد:

$$[a^*] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (28)$$

وبذلك يمكن كتابة المجموعة (27) على شكل مصفوفة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \qquad (29)$$

الشكل (29) يمكن كتابته بشكل مبسط على النحو التالي:

$$\frac{d}{dt}[x] = [a^*] \cdot [x] \qquad (30)$$

2.7 حل جملة معادلات تفاضلية خطية ذات أمثال متحولة بطريقة التقريب المتتالي التكاملية وباستخدام المصفوفات :

لتكن لدينا جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال المتحولة (المتحول t) بالشكل:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

وتحقق الشروط الابتدائية التالية:

$$x_1 = x_{10}\ ,\ x_2 = x_{20}\ ,\ \dots\ ,x_n = x_{n0}\ ;\ t = t_0\ , \qquad (32)$$

إن هذه الجملة يمكن كتابتها على شكل مصفوفات استناداً إلى ما سبق كما يلي:

$$A = [a(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad (33)$$

مصفوفة الحل والمشتق والشروط الابتدائية تكتب:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}} \end{bmatrix} ,\frac{d}{\mathrm{dt}}\ [x] = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} ,[x_0] = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{\mathrm{n}0} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

وبالتالي فإن الجملة (31) تكتب بالشكل المصفوفي التالي:

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}\ [x] = [a(t)] . [x] \qquad (35)$$

حيث من أجل $t = t_0$ فإن:

$$[x] = [x_0] = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} \qquad (36)$$

وفي (35) تشير $a(t)$ إلى مصفوفة الأمثال.

من أجل حل الجملة المفروضة نستخدم الآن طريقة التقريب المتتالي التكاملية لإيجاد الحل والتي سنشرحها كما يلي:

باستخدام طريقة ضرب المصفوفات وتكامل المصفوفات نستطيع أن نحصل على حل الجملة السابقة ضمن الشروط الابتدائية المرافقة إذ يقودنا الأمر إلى البحث عن حل المعادلة التكاملية المصفوفية ذات الشكل :

$$[x(t)] = [x_0] \int_{t_0}^{t} [a(z)].[x(z)]\, dz \qquad (37)$$

وهكذا نرى من المعادلة السابقة (37) أن مسألة حل الجملة المفروضة ، تحولت إلى حل المعادلة التكاملية (37) بشكل مصفوفات. وحل هذه المعادلة يعتمد كما سنرى على طريقة التقريب المتتالي. إذ نجد التقريبات المتتالية التالية :

$$[x_m(t)] = [x_0] + \int_{t_0}^{t} [a(z)].[x_{m-1}(z)]\, dz \qquad (38)$$

وهكذا نجد من العلاقة (38) أن هذه العلاقة تكتب بشكل تقريبي متتالي على النحو:

$$[x(t)] = [x_0] + \int_{t_0}^{t} [a(z_1)].\Big\{[x_0] + \int_{t_0}^{t_1} [a(z_2)]\Big\{[x_0] + \int_{t_0}^{t_2} [a(z_3)]\Big\{ [x_0] + \int_{t_0}^{t_3} [a(z_4)]\,[\cdots]dz_4\Big\}dz_3\Big\}dz_2\Big\}dz_1 \quad , \quad (39)$$

أو بالشكل المكافئ:

$$[x(t)] = [x_0] + \int_{t_0}^{t} [a(z_1)].\ [x_0]dz_1 \ +$$

$$\int_{t_0}^{t} [a(z_1)] \int_{t_0}^{t_1}[a(z_2)]\,[a(z_2)]dz_1dz_2 + \cdots \qquad (40)$$

فإذا استخدمنا الاصطلاح التكاملي التالي:

$$S(\quad) = \int_{t_0}^{t}(\qquad)\,dz \qquad (41)$$

فإن المعادلة (40) بعد استخدام الاصطلاح (41) تكتب:

$$[x(t)] = \{[E] + S[a] + S[a]S[a] + S[a]S[a]S[a] + \cdots\} + [x_0], \ (42)$$

فإذا رمزنا لما ضمن القوس بالمؤثر التفاضلي $\varepsilon_{\|a(t)\|}^{(t_0\ t)}$ كما يلي:

$$\varepsilon_{\|a(t)\|}^{(t_0\ t)} = \{[E] + S[a] + S[a]S[a] + S[a]S[a]S[a] + \cdots\}, (43)$$

فإن العلاقة (42) تأخذ الشكل النهائي التالي:

$$[x(t)] = \varepsilon_{\|a(t)\|}^{(t_0\ t)} \cdot [x_0] \qquad (44)$$

و الشكل الأخير هو حل جملة المعادلات المفروضة ذات الأمثال الثابتة بدلالة المؤثر التكاملي السابق.

فإذا قمنا باستخدام المؤثر التكاملي حداً حداً نجد باستخدام التقريب المتتالي أن:

$$\left.\begin{aligned} S[a] &= \frac{t-t_0}{1}\,[a] \\ S[a]S[a] &= \frac{(t-t_0)^2}{2!}\,[a]^2 \\ S[a]S[a]S[a] &= \frac{(t-t_0)^3}{3!}\,[a]^3 \\ S[a]S[a]S[a]S[a] &= \frac{(t-t_0)^4}{4!}\,[a]^4 \\ S[a]S[a]S[a]S[a]S[a] &= \frac{(t-t_0)^5}{4!}\,[a]^5 \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

هكذا بمتابعة العمل بالتقريب شيئاً فشيئاً ، نجد أخيرا أن الحل يعطى على شكل متسلسلة قوى بـ $(t-t_0)$:

$$[x(t)] = \left\{[E] + \frac{t-t_0}{1}[a] + \frac{(t-t_0)^2}{2!}[a]^2 + \frac{(t-t_0)^3}{3!}[a]^3 + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}[a]^n + \cdots\right\} \cdot [x_0] \qquad (46).$$

وإذا نظرنا إلى ما ضمن القوس فهو عبارة عن متسلسلة قوى أي هو منشور الدالة:

عندئذٍ نستطيع أن نكتب الحل النهائي (46) على الشكل التالي :

$$[x(t)] = e^{(t-t_0)[a]} \cdot [x_0] \qquad (47)$$

وهو الحل المطلوب للجملة المفروضة.

ملاحظة هامة: إذا كانت الأمثال في الجملة (31) أمثال ثابتة فإنه بنفس الطريقة "طريقة التقريب المتتالي" السابقة يمكن إيجاد حل الجملة ذات الأمثال الثابتة.

3.7 المعادلات التكاملية وطرق حلها بطريقة التقريب المتتالي:

المعادلة التكاملية هي معادلة تربط دالة مجهولة ذات متحول حقيقي بتكامل. ويوجد نوعين من المعادلات التكاملية ، و يتم حلها ،بطريقة التقريب المتتالي ، وهما:

1.3.7 النوع الأول: معادلة فولتيرا Equation de Voltera التكاملية :

إن المعادلة التكاملية لفولتيرا هي من الشكل:

$$y(x) - \lambda \int_0^x k(x,z)y(z)\ dz = f(x) \qquad (48)$$

حيث λ وسيط (بارامتر) و$f(x)$ و$k(x,z)$ دوال معطاة، الدالة $f(x)$ تدعى بالطرف الثاني للمعادلة. إذا كانت $f(x)$ معدومة $(f(x) = 0)$ نقول إن المعادلة التكاملية متجانسة من النوع الأول. إذا كان $f(x) \neq 0$ فإن المعادلة التكاملية تكون معادلة متجانسة من النوع الثاني.

الدالة $k(x,z)$ بالتعريف تدعى بنواة المعادلة. ونعتمد في هذه الفقرة طريقة التقريب المتتالي لحل معادلة فولتيرا.

لنفرض أن النواة $k(x,z)$ مستمرة على المنطقة:

$$0 \le x \le X \qquad \& \qquad 0 \le z \le X$$

حيث X عدد حقيقي موجب منتهي معطى، و$f(x)$ كذلك مستمرة على المجال:

إن طريقة التقريب المتتالي تعتمد في البحث على حل $y(x)$ على شكل منشور قوى متزايدة أو على شكل سلسلة قوى متزايدة للوسيط λ من الشكل:

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \cdots + \lambda^n y_n(x) + \cdots \quad (49)$$

أو بالشكل التالي بتغير شكل الوسيط مع المحافظة على خواصه:

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots + \varepsilon^n y_n(x) + \cdots$$

أو:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \lambda^k\, y_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k\, y_k(x) \qquad (50)$$

حيث الدوال:

$$y_0(x),\ \ y_1(x),\ \ y_2(x),\cdots,\ y_n(x)$$

دوال موجبة يجب تعيينها . والسلسلة في (50) يجب أن تكون متقاربة فرضاً.

الآن: بوضع (49) في معادلة فولتيرا التكاملية، نجد:

$$y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \cdots + \lambda^n y_n(x) - \lambda \int_0^x k(x,z)[y_0(z) + \\ + \lambda y_1(z) + \lambda^2 y_2(z) + \cdots + \lambda^n y_n(z)]dz - f(x) = 0 \qquad (51)$$

وبإجراء المطابقة حسب قوى تسلسل λ نحصل على المعادلات:

$$\left.\begin{array}{c} y_0 = f(x) \\ y_1 = \int_0^x k(x,z).\, y_0(z).\, dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = \int_0^x k(x,z).\, y_{n-1}(z) dz \end{array}\right\} (52)$$

وهكذا بالتقريب شيئاً فشيئاً نحصل على الدوال التالية:

$$y_0(x),\ \ y_1(x),\ \ y_2(x),\ \ y_3(x),\ \ \cdots,\ \ y_n(x),\ \ \cdots$$

2.3.7 دراسة تقارب متسلسلة حل معادلة فولتيرا:

بعد أن تم تعيين الحل لمعادلة فولتيرا على شكل متسلسلة قوى للوسيط λ أو ε يجب أن ندرس تقارب هذه المتسلسلة والتي تدعى النشر في متسلسلة نيومان.

في الحقيقة بما أن الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $0 \le x \le X$ فهو محدودة من الأعلى بالقيمة المطلقة في هذا المجال، أي أن:

$$|f(x)| \le A \quad ; \qquad A = \text{constant}$$

كذلك بنفس النمط: النواة $k(x,z)$ مستمرة في المنطقة:

$$0 \le z \le x \le X \qquad \& \qquad 0 \le x \le X$$

أيضاً هذا الدالة محدودة من الأعلى بالقيمة المطلقة، أي أن:

$$|k(x,z)| \le K \quad ; \quad (K = \text{مقدارثابت})$$

على هذا الأساس العلاقات (52) تكتب بالشكل:

$$|y_0(x)| = |f(x)| \le A$$

$$|y_1(x)| \le \int_0^x |k(x,z)| \cdot |y_0(z)|.dz \le AK\int_0^x dz = \frac{AKx}{1!}$$

$$|y_2(x)| \le \int_0^x |k(x,z)| \cdot |y_1(z)|.dz \le AK^2\int_0^x z.dz = \frac{AK^2x^2}{2!}$$

وهكذا بمتابعة الحل نجد:

$$|y_n(x)| \le \int_0^x |k(x,z)| \cdot |y_{n-1}(z)|.dz = \frac{AK^nx^n}{n!}$$

ومنه نجد:

$$\left|\lambda^n y_n(x)\right| \le A\frac{|K\lambda X|^n}{n!}$$

إن الطرف الأيمن من المتراجحة هو الحد العام لمتسلسلة متقاربة وهكذا فإن الحد العام للمتسلسلة يكون:

$$\lambda^n y_n(x)$$

بالقيمة المطلقة متقارب على المجال $0 \le x \le X$ حيث إن:

$$A\frac{|K\lambda x|^n}{n!} \le \frac{A|K\lambda X|^n}{n!}$$

و X عدد حقيقي موجب منتهي.

وهكذا على المجال $0 \le x \le X$ فإن الحل الناتج يكون مستمر.

3.3.7 البرهان على وحدانية حل معادلة فولتيرا:

لنبرهن أن تابع الحل المستمر الذي حصلنا عليه يكون وحيداً، ومن أجل برهان وحدانية الحل هذا نفرض وجود حلين مستمرين على المجال $[0,x]$ وليكن هذان الحلان هما $y_2(x), y_1(x)$ ولنبرهن أنهما حل واحد، أي أن:

$$y_1(x) = y_2(x)$$

البرهان: بالفرض لدينا:

$$y_1(x) - \lambda \int_0^x k(x,z) y_1(z) dz = f(x)$$

وكذلك بما أن $y_2(x)$ حل فهو يحقق معادلة فولتيرا أيضاً.

$$y_2(x) - \lambda \int_0^x k(x,z) y_2(z) dz = f(x)$$

لنشكل الفرق بينهما بالدالة:

$$u(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

من ذلك نستنتج أن: الدالة $u(x)$ هو حل للمعادلة المتجانسة

$$u(x) - \lambda \int_0^x k(x,z) u(z) dz = 0$$

ولنبرهن أن المعادلة لا تعطي إلا الحل:

$$u(x) = 0$$

حيث $u(x)$ هو دالة مستمرة على المجال $[0,x]$ ومحدود من الأعلى بالقيمة المطلقة

$$|u(x)| \le A$$

من جهة أخرى لدينا دوماً أن: $|u(z)| \le K \quad ; \quad 0 \le z \le x \le X$

ينتج من ذلك أن:

$$|u(x)| \le |\lambda| \int_0^x |k(x,z)|.|u(z)| dz \le |\lambda| \frac{KAx}{1!}$$

وهكذا نحصل على حد أعلى جديد لـ $|u(x)|$ لذلك نستطيع أن نكتب:

$$|u(x)| \le |\lambda| \int_0^x \frac{\lambda K^2 Az}{1!}.dz \le |\lambda|^2 \frac{AK^2x^2}{2!}$$

وبإعادة العمل نجد:

$$|u(x)| \le |\lambda|^3 \frac{AK^3x^3}{3!}$$

وهكذا بمتابعة العمل نحصل بشكل عام على:

$$|u(x)| \le |\lambda|^n \frac{AK^nx^n}{n!}$$ حيث n عدد تام.

ينتج من ذلك بأن $|u(x)|$ هي كمية موجبة وتسعى إلى الصفر.

$$|u(x)| \to 0$$

إذاً المعادلة المتجانسة لفولتيرا لا تعطي إلا الحل $u(x) = 0$ ومن ذلك نجد أن:

$$y_1(x) - y_2(x) = 0$$

وهذا يؤدي إلى أن الحل وحيد ، إذ نجد أن: $y_1(x) = y_2(x)$

وبذلك نكون قد برهنا مسألة الوحدانية لحل معادلة فولتيرا التكاملية.

4.3.7 النوع الثاني : معادلة فريد هولم التكاملية :

معادلة فريد هولم التكاملية من الشكل:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 k(x,z)\, y(z) dz = f(x) \qquad (53)$$

حيث λ وسيط و$k(x,z)$ نواة المعادلة و$f(x)$ هو الطرف الثاني في المعادلة. كما ذكرنا في معادلة فولتيرا إذا كان $f(x) = 0$ فإن المعادلة (53) تكون متجانسة وتأخذ الشكل التالي وتدعى معادلة من النوع الأول:

$$y(x) - \lambda \int_0^1 k(x,z)\, y(z) dz = 0 \qquad (54)$$

وإذا لم يكن $f(x)$ معدوماً، أي أن $f(x) \neq 0$ فإن المعادلة تدعى بمعادلة غير متجانسة، وتأخذ الشكل (53) وتكون معادلة فريد هولم من النوع الثاني. والدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[0,1]$ وكذلك النواة $k(x,z)$ أيضاً مستمرة على المربع:

$$0 \le x \le 1 \qquad ; \qquad 0 \le z \le 1$$

من أجل حل معادلة فريد هولم (53) نجري نفس الطريقة التي شرحت بها معادلة فولتيرا (الحل بطريقة التقريب المتتالي): حيث نبحث عن حل على شكل سلسلة قوى للوسيط λ من الشكل:

$$y(x) = y_0 + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \cdots + \lambda^n y_n(x) \qquad (55)$$

بشكل مشابه لما مر في معالجة حل معادلة فولتيرا نعوض (55) في (53) ونطابق حسب قوى الوسيط λ فنحصل على الحلول:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), \cdots, y_n(x), \cdots$$

كما يلي:

$$\left.\begin{array}{c} y_0(x) = f(x) \\ y_1(x) = \int_0^1 k(x,z)\, y_0(z) dz \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) = \int_0^1 k(x,z)\, y_{n-1}(z) dz \end{array}\right\} \qquad (56)$$

وهذه العلاقات تسمح أقرب فأقرب بتعيين الدوال:

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), \cdots$$

5.3.7 دراسة تقارب متسلسلة حل معادلة فريد هولم:

لنبحث الآن في تقارب المتسلسلة التي حصلنا عليها والتي تمثل حل معادلة فريد هولم.

لذلك نرى أنه من أجل: $0 \leq z \leq x \leq 1$

فإن:

$$f(x) \leq A \qquad \& \qquad k(x,z) \leq K$$

أي $f(x)$ والنواة $k(x,z)$ دوال محدودة من الأعلى وA و K حقيقية موجبة ثابتة.

العلاقات (56) تعطى بالشكل:

$$|y_0(x)| \leq A$$
$$|y_1(x)| \leq AK$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|y_n(x)| \leq AK^n$$

وبالتالي ضمن هذه الشروط فإن الحد العام لمتسلسلة الحل التي قدمناها بصيغة نشر حسب قوى λ يكون:

$$\left|\lambda^n y_n(x)\right| \leq A\left|\lambda K\right|^n$$

الطرف الأيمن من هذه المتراجحة هو حد عام لسلسلة هندسية متقاربة عندما:

$$|\lambda| \leq \frac{1}{K}$$

وبما أن الشرط السابق محقق فإن سلسلة النشر التي تعين الحل $y(x)$ تكون متقاربة على المجال $[0,1]$ وهذا الحل $y(x)$ هو حل معادلة فريد هولم التكاملية.

ملاحظة هامة: إن مسألة معالجة وحدانية الحل صعبة جداً للمعالجة في الحالة العامة. ونظراً لهذه الصعوبات في دراسة وحدانية الحل سنقوم بعرض معالجة وحدانية الحل من خلال تمرين محلول في فقرة التمارين المحلولة في آخر هذا الفصل. وهذا الأمر سيكون فقط لتسهيل عمليات الفهم وتذليل الصعوبات من خلال التمرين.

تمارين محلولة (7)

تمرين 7–1: حل جملة المعادلات التالية بطريقة المصفوفات:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 3x_2$$

الحل: نعيين مصفوفة الأمثال فنجد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحل العمودية:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الجملة المفروضة تكتب بشكل مصفوفات على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ولحل هذه الجملة المصفوفية الأخيرة ، نشكل معادلتها المميزة ، وهي:

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 5k + 4 = 0$$

ومنه نجد:

$$k_1 = 1 \quad \& \quad k_2 = 4$$

وبأخذ الجملة (21) من أجل تعيين $\alpha_1^{(1)}$ و $\alpha_2^{(1)}$ المطابقة للجذر $k_1 = 1$ نجد:

$$(1-2)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0$$
$$\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0$$

بفرض أن: $\alpha_1^{(1)} = 1$ نحصل على: $\alpha_2^{(1)} = -\frac{1}{2}$

بنفس الطريقة نجد $\alpha_1^{(2)}$ و $\alpha_2^{(2)}$ المطابقة للقيمة $k_2 = 4$ حيث نحصل على:

$$\alpha_1^{(2)} = 1 \qquad \& \qquad \alpha_2^{(2)} = 1$$

وهكذا فإن الحل يكون:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 & e^t \\ C_2 & e^{4t} \end{bmatrix}$$

أو:

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1e^t + C_2e^{4t} \; ; x_1 = C_1e^t + C_2e^{4t}$$

وهو المطلوب.

تمرين 2–7: لتكن لدينا جملة المعادلات:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 \, , \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 \, , \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 + 3x_3$$

المطلوب: أوجد حل جملة المعادلات الخطية السابقة بطريقة المصفوفات.

الحل: تكتب مصفوفة الأمثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

وتكتب جملة المعادلات المفروضة على شكل المصفوفات بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

وتكون المعادلة المميزة:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 1 & 2-k & 0 \\ 1 & 1 & 3-k \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow (1-k)(2-k)(3-k) = 0$$

ومنه فإن جذور المعادلة المميزة هي:

$$k_1 = 1 \quad \& \quad k_2 = 2 \quad \& \quad k_3 = 3$$

لنعين استناداً إلى العلاقة (21) القيم $\alpha_3^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \alpha_1^{(1)}$ المطابقة للجذر $k_1 = 1$

فنجد:

$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_1^{(1)} = 0$$
$$\alpha_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} + 2\alpha_3^{(1)} = 0$$

ومنه نجد:

$$\alpha_1^{(1)} = 1 \quad \& \quad \alpha_2^{(1)} = -1 \quad \& \quad \alpha_3^{(1)} = 0$$

بنفس الطريقة نعين كذلك قيم $\alpha_3^{(2)}, \alpha_2^{(2)}, \alpha_1^{(2)}$ وكذلك $\alpha_3^{(3)}, \alpha_2^{(3)}, \alpha_1^{(3)}$ المطابقة للجذرين الباقيين $k_2 = 2$ و $k_3 = 3$ على الترتيب فنجد:

من أجل الجذر $k_2 = 2$ واستناداً إلى (21) أن:

$$\alpha_1^{(2)} = 0$$
$$\alpha_1^{(2)} = 0$$
$$\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + \alpha_3^{(2)} = 0$$

ومنه نجد أن: $\alpha_1^{(2)}$ & $\alpha_2^{(2)}$ & $\alpha_3^{(2)}$ وكذلك من أجل الجذر $k_3 = 3$ واستناداً إلى (21) أن:

$$-2\alpha_1^{(3)} = 0$$
$$\alpha_1^{(3)} - \alpha_1^{(3)} = 0$$
$$\alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} = 0$$

ومنه فإن:

$$\alpha_1^{(3)} = 0 \quad \& \quad \alpha_2^{(3)} = 0 \quad \& \quad \alpha_3^{(3)} = 1$$

ويكون الحل على شكل مصفوفات هو:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 e^{t} \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{3t} \end{bmatrix}$$

أو الحل يعطى بالشكل:

$$x_1 = C_1 e^{t} \ , \ x_2 = -C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} \ , \ x_3 = -C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}$$

وهو المطلوب.

تمرين 7–3: اكتب على شكل مصفوفات المعادلة التالية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = P\frac{dx}{dt} + qx$$

الحل: نفرض أن $x = x_1$ عندئذٍ يكون لدينا:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Px_2 + qx_1$$

وتكتب هذه الجملة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ q & P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix}$$

تمرين 7–4: لدينا جملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات أمثال متحولة بالشكل التالي:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + \cdots + a_{1n}(t)x_n$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + \cdots + a_{2n}(t)x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + a_{n3}(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n$$

ضمن الشروط الابتدائية:

$x_1 = x_{10}\,, x_2 = x_{20}\,, x_3 = x_{30}\,, \cdots, x_n = x_{n0}$ من أجل $t = t_0$

المطلوب: أكتب هذه الجملة بطريقة المصفوفات.

الحل: نشكل أولاً مصفوفة الأمثال فنجد:

$$[a(t)] = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحل تكتب أيضاً مع مصفوفة المشتقة:

$$[x] = \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \\ x_3 \end{bmatrix} \& \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}[x]$$

وعند أخذ شروط البدء بعين الاعتبار نجد:

$$[x_0] = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

باستخدام الشكل المصفوفي السابق فإن الجملة المفروضة يمكن أن تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d}{dt}[x] = [a(t)] \cdot [x]$$

أو بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix}; [x_0] = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

تمرين 5-7: لتكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية:

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x$$

المطلوب: باستخدام طريقة التقريب المتتالي التكاملية أوجد حل هذه المعادلة علماً بأن الشروط الابتدائية هي:

$$t = t_0 \qquad , \qquad x = x_0$$

الحل: إن حل المعادلة التفاضلية المفروضة ذات الطرف الثاني بأمثال متحولة يقود إلى البحث عن حل المعادلة التكاملية التالية بطريقة التقريب المتتالي آخذين بعين الاعتبار الشروط الابتدائية:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x\,(z)dz$$

إن طريقة التقريب المتتالي تعطي الحلول التقريبية التالية:

$$x_1(t), x_2(t), x_3(t), \cdots, x_n(t)$$

حيث x_0 هو حل بدء التقريب. فنجد:

$$x_1 = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_0\,(z)dz$$
$$x_2 = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_1\,(z)dz$$
$$x_3 = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_2\,(z)dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_m = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(z)x_{m-1}\,(z)dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وهذا كما مر معنا في حل معادلة فولتيرا التكاملية.

فإذا استخدمنا المؤثر التكاملي: $S(\quad) = \int_{t_0}^{t}(\qquad)dz$

باستخدام رمز المؤثر التكاملي S نجد أن العلاقات السابقة تأخذ الشكل المختزل التالي:

$$x_2 = x_0 + S(ax_1) = x_0 + \left[a\big(x_0 + S(ax_0)\big)\right]$$
$$x_3 = x_0 + S\left[a\left(x_0 + S\left(a\big(x_0 + S(ax_0)\big)\right)\right)\right]$$

$$x_m = x_0 + S\left[a\left(x_0 + S\left(a\left(x_0 + S\left(ax_0 + S\big(ax_0 + S(a\cdots)\big)\right)\right)\right)\right)\right]$$

وبانجاز هذا العمل ما ضمن الأقواس خطوة خطوة نجد:

$$x_m = x_0 + Sax_0 + Sa\,Sax_0 + Sa\,Sa\,Sax_0 + \cdots + Sa\,Sa\,Sa \ldots Sa\,x_0$$

حيث S مؤثر تكاملي، فإذا وضعنا x_0 بشكل مضروب نجد:

$$x_m = (1 + Sa + Sa\,Sa + \cdots + Sa\,Sa \cdots Sa)x_0$$

وكما شرحنا سابقاً أنه إذا كان التابع $a(t)$ مستمر (كما سبق وشرحنا في حل معادلة فولتيرا) فإن المتتالية (x_m) متقاربة. وحد هذه المتتالية يكون اذاً سلسلة متقاربة

$$x = [1 + Sa + Sa\,Sa + \cdots]x_0 \qquad (*)$$

فإذا كانت $a(t)$ أمثال ثابتة غير متحولة فإن الحل في العلاقة $(*)$ يصبح أكثر بساطة ويمكن انجازه حداً فحداً باستخدام المؤثر التكاملي، إذ نجد:

$$Sa = \int_{t_0}^{t} a dz = a\int_{t_0}^{t} 1 dz = aS_1 = a\frac{(t-t_0)}{1!}$$

بالمثل نجد:

$$Sa\,Sa = aS_1 \cdot aS_1 = a^2 S(t-t_0) = a^2\frac{(t-t_0)^2}{2!}$$

$$Sa\,Sa\,Sa = aS_1\,Sa\,Sa = a^3 S\frac{(t-t_0)^2}{2!} = a^3\frac{(t-t_0)^3}{3!}$$

$$Sa\,Sa\,Sa\,Sa = a^4\frac{(t-t_0)^4}{4!}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

وبمتابعة هذا العمل نجد أخيراً أن:

$$Sa\,Sa\,Sa\,Sa \cdots Sa = a^m\frac{(t-t_0)^m}{m!}$$

وأخيراً نحصل على الحل الموجود في العلاقة $(*)$ من أجل ثابت هو:

$$x = \left[1 + a\frac{t-t_0}{2!} + a^2\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots + a^m\frac{(t-t_0)^m}{m!} + \cdots\right]\cdot x_0$$

لكن ما ضمن القوس هو منشور التابع الأسي $e^{a(t-t_0)}$ حسب قوى $(t-t_0)$ إذاً الحل الأخير والنهائي يكون للمعادلة التفاضلية هو: $x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$ وهو المطلوب.

تمرين 7–6: حل المعادلة التكاملية التالية:

$$y(x) - \lambda\int_0^x (x+z)y(z)dz = 1$$

الحل: إن طريقة التقريب المتتالي تعطي:

$$y_1(x) = \int_0^x (x+z)dz = \frac{3}{2!}x^3$$

$$y_2(x) = \int_0^x (x+z)\frac{3}{2}z^2 dz = \frac{3.7}{4!}x^4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_m(x) = \frac{3.7\cdots(4n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

ومنه نجد الحل العام للمعادلة المفروضة:

$$y(x) = 1 + \lambda\frac{3}{2!}x^3 + \lambda^2\frac{3.7}{4!}x^4 + \cdots + \lambda^n\frac{3.7\cdots(4n-1)}{(2n)!}x^{2n}$$

إن نصف قطر تقارب هذه السلسلة هو يساوي الصفر.

تمرين 7–7: لتكن لدينا معادلة فريد هولم التالية غير المتجانسة:

$$y(x) - \lambda\int_0^1 k(x,z)y(z)dz = f(x)$$

بفرض أن النواة هي $k(x,z) = xz$ والمطلوب: ادرس وحدانية حل هذه المعادلة حسب النواة المعطاة.

الحل: إن طريقة التقريب المتتالي حسب حل بدء التقريب $y_0 = f(x)$ تعطى:

$$y_0(x) = f(x)$$
$$y_1(x) = \int_0^1 xzy_0(z)dz = x\int_0^1 zf(z)dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n(x) = x\int_0^1 zy_{n-1}(z)dz$$

بفرض أن:

$$F = \int_0^1 zf(z)dz$$

نحصل على:

$$y_1(x) = xF$$
$$y_2(x) = x\int_0^1 z^2Fdz = \frac{xF}{3}$$
$$y_3(x) = x\int_0^1 z^2\frac{F}{3}dz = \frac{xF}{3^2}$$

وبشكل عام نجد:

$$y_n(x) = \frac{xF}{3^{n-1}}$$

وهكذا نجد:

$$y(x) = f(x) + xF\left|\lambda + \frac{\lambda^2}{z} + \frac{\lambda^3}{z^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{z^{n-1}} + \cdots\right|$$

ما داخل القوس من سلسلة هندسية متقاربة إذا كان:

$$\left|\frac{\lambda}{z}\right| < 1$$

وهكذا من أجل $|\lambda| < 3$ فإن المعادلة المعتبرة للحل يكون لها الحل التالي:

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda x F}{1-\frac{\lambda}{3}}$$

لنرى بأن الحل المعطى بالعلاقة السابقة $y(x)$ هل حل للمعادلة المفروضة من أجل كل قيمة λ مختلفة عن 3. إذاً مع $\lambda \neq 3$ يوضع $y(x)$ من العلاقة السابقة في المعادلة المفروضة نجد:

$$f(x)\frac{\partial xF}{1-\frac{\lambda}{3}} - \lambda\int_0^1 xz\left[f(z) + \frac{\lambda zF}{1-\frac{\lambda}{3}}\right]dz = f(x)$$

$$\frac{\partial xF}{1-\frac{\lambda}{3}} - \lambda xF - \frac{\lambda^2 xF}{1-\frac{\lambda}{3}}\cdot\frac{1}{3} = 0$$

هذه العلاقة محققة جيداً من أجل $\lambda \neq 0$ وبشكل نهائي من أجل $\lambda \neq 3$ فإن معادلة فريد هولم يكون لها الحل:

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda x F}{1-\frac{\lambda}{3}}$$

لنبرهن بأن هذا الحل لمعادلة فريد هولم وحيد من أجل $\lambda \neq 3$ لذلك من أجل البرهان نفرض بأن المعادلة المفروضة لها حلان هما $y_1(x)$ و $y_2(x)$ عندئذ يكون لدينا:

$$y_1(x) - \lambda\int_0^1 xzy_1(z)dz = f(x)$$

$$y_2(x) - \lambda\int_0^1 xzy_2(z)dz = f(x)$$

يظهر من ذلك بأن التابع $u(x) = y_1(x) - y_2(x)$ حل للمعادلة المتجانسة لفريد هولم التالية:

$$u(x) - \lambda\int_0^1 xzu(z)dz = 0 \qquad (*)$$

وبالتالي فإن الوحدانية للحل تبرهن إذا نحن استطعنا إثبات أنه من أجل $\lambda \neq 0$ فإن المعادلة السابقة لا تملك إلا الحل $u(x) = 0$ ولذلك ومن أجل برهان هذا الأمر أي أن المعادلة السابقة $(*)$ لا تملك إلا الحل $u(x) = 0$ من أجل $\lambda \neq 0$ لدينا:

$$u(x) - \lambda x\int_0^1 zu(z)dz$$

نلاحظ هنا أنه مهما كان التابع $u(x)$ فإن الطرف الثاني هو عبارة عن جداء x بالثابت.

$$\lambda \int_0^1 zu(z)dz$$

لنفرض أن Cx هو الطرف الثاني حيث C ثابت. من ذلك نجد إذا كانت لمعادلة فريدهولم $(*)$ حلاً فإنه بالضرورة يكون من الشكل:

$$u(x) = Cx$$

بتعويض هذا الحل في المعادلة $(*)$ نجد:

$$Cx\left(1 - \frac{\lambda}{3}\right) = 0$$

إذا كانت λ مختلفة عن الصفر فإنه يكون لدينا $C = 0$ وهكذا أخيراً نجد أنه عندما $\lambda \neq 3$ فإن $u(x) = 0$ والحل الذي نبحث عنه للمعادلة المفروضة وحيد.

وبالعكس إذا كانت $\lambda = 3$ فإن معادلة فريد هولم المفروضة لها الحل من الشكل $u(x) = Cx$ لنبحث الآن عن حل معادلة فريد هولم عندما $\lambda = 3$ في الحقيقة إن معادلة فريد هولم ضمن الشرط $\lambda = 3$ تكتب على الشكل التالي:

$$y(x) - 3\int_0^1 xzy(z)dz = f(x) \qquad (**)$$

لنضرب طرفي هذه العلاقة بـ x ونكامل من 0 إلى 1 فنحصل على:

$$\int_0^1 xy(x)dx - 3\int_0^1 x^2dx \int_0^1 zy(z)dz = \int_0^1 xf(x)dx$$

ليكن:

$$\int_0^1 xf(x)dx = 0$$

وهكذا نجد بأن المسألة المعالجة من أجل $\lambda = 3$ لاتكون ممكنة إلا اذا كان $f(x)$ محقق للعلاقة السابقة. نستطيع أن نكتب العلاقة $(**)$ على الشكل:

$$u(x) - f(x) - 3x\int_0^1 [\,y(z) - f(z)]\; dz = 0$$

حيث إن:

$$\int_0^1 z\, f(z)dz = 0$$

بفرض أن:

$$u(x) = y(x) - f(x)$$

إذا ظهر بأن التابع $u(x)$ يحقق المعادلة المتجانسة:

$$u(x) - \lambda \int_0^1 x\, z\, u(z) dz = 0$$

من أجل $\lambda = 3$ فإنه ينتج مما سبق أن الحل يكون:

$$u(x) = C\, x \qquad ; \qquad C = \text{ثابت}$$

وهكذا نجد من أجل $\lambda = 3$، فالمعادلة الأساسية المفروضة للحل يكون لها عدد غير منتهي من الحلول من الشكل:

تمرين 8: حل المعادلة التكاملية التالية بطريقة التقريب المتتالي:

$$y(x) - 1 - \int_0^x y(z)\ dz = 0$$

الحل: ضمن شروط التقارب نجد (حيث $\lambda = 1$) أن:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 0\ dz = 1$$

ومنه نجد:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x y_0\,(z) dz \qquad ; \qquad y_0\,(z) = 0$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x y_1\,(z) dz = 1 + \int_0^x dz = 1 + x$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x y_2\,(z) dz = 1 + \int_0^x (1+z) dz = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x y_3\,(z) dz = 1 + \int_0^x \left(1 + z + \frac{z^2}{2!}\right) dz$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

وهكذا بتكرار العمل نجد:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

تمارين غير محلولة(7)

استخدم شكل المصفوفات في حل جملة المعادلات التالية:

1) $\frac{dx_2}{dt} + 4\,x_1 = 0 \quad , \quad \frac{dx_1}{dt} + x_2 = 0$

2) $\frac{dy}{dt} = x + z \quad , \quad \frac{dx}{dt} = y + z$

3) $\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2 \quad , \quad \frac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2$

4) $\frac{d^2y}{dt^2} = -x + y \quad , \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x - 4y$

5) $\frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2x_2 \quad , \quad \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 2x_2$

6) $\frac{dy}{dt} = -x + y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = x + y$

7) $\frac{dy}{dt} = -x - 3y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = y - x$

8) $\frac{dy}{dt} = x - 2y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = -4x - 10y$

9) $\frac{dy}{dt} = -x - 3y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = y - x$

10) $\frac{dy}{dt} = -8x - 12y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 12x + 18y$

11) $\frac{dy}{dt} = 3x + 4y \quad , \quad \frac{dx}{dt} = x - 2y$

تمرين : استخدم طريقة التقريب المتتالي في حل المعادلات التكاملية التالية الخطية:

1) $y(x) + \lambda \int_0^x (x-4)\, y(z)\, dz = x$

2) $y(x) + \lambda \int_0^x y(z)\, dz = x + 1$

3) $y(x) + \lambda \int_0^x y(z)\, dz = x + 2$

4) $y(x) + \lambda \int_0^x x\, y(z)\, dz = 2x^2 + 2$

5) $y(x) + \lambda \int_0^x x\, y(z)\, dz = 3x^2 - 2$

6) $y(x) - \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} x\, y(z)\, dz = \cos x$

7) $y(x) - \lambda \int_0^1 (x + z)\; dz = 1$

8) $y(x) - \lambda \int_0^1 (x - z)\; dz = 5$

9) $y(x) - \lambda \int_0^1 x\, z\, y(z)\, dz = 4 + x$

10) $y(x) - \lambda \int_0^1 (2x)(2z)\, y(z)\, dz = x - 2$

11) $y(x) - \lambda \int_0^1 (x^2)\, (z^2 - 1) y(z)\, dz = x + 1$

12) $y(x) - \lambda \int_0^x [-1 + z + y^2(z)]\; dz = 1$

فهرس الفصل الثامن

الفصل الثامن

8. حل جمل (المعادلات التفاضلية – المعادلات التكاملية)

– باستخدام تحويل لابلاس –

1.8 الحلول الخاصة لجمل المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة ذات

الأمثال الثابتة:

بالاعتماد على تحويل لابلاس يمكن إيجاد بعض الحلول الخاصة لجملة معادلات خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة بالشكل:

لتكن لدينا جمل المعادلات بـ n مجهول وهي الآتية :

$$\left.\begin{array}{c} y'_1 + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = f_1(t) \\ y'_2 + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = f_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_n + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n = f_n(t) \end{array}\right\} (1)$$

حيث $(\forall\, i,j)\ ;\ a_{ij}$ أعداد.

ولنفرض أننا نريد إيجاد الحل الخاص لجمل المعادلات الذي يحقق الشروط الابتدائية:

$$y_1(0) = y_{10}, y_2(0) = y_{20}, \cdots, y_n(0) = y_{n0} \qquad (2)$$

ولنفرض أنه لجميع التوابع: $f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t)$ أصولاً

ولنطبق تحويل لابلاس على معادلات الجملة مستخدمين الرموز:

$$L[y_i] = y_i(s) \qquad ; \qquad L[f_i(t)] = F_i(S)$$

وبالتالي نجد:

$$\left.\begin{array}{c} s\,y_1(s) - y_1(0) + a_{11}y_1(s) + a_{12}y_2(s) + \cdots + a_{1n}y_n(s) = F_1(s) \\ s\,y_2(s) - y_2(0) + a_{21}y_1(s) + a_{22}y_2(s) + \cdots + a_{2n}y_n(s) = F_2(s) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s\,y_n(s) - y_n(0) + a_{n1}y_1(s) + a_{n2}y_2(s) + \cdots + a_{nn}y_n(s) = F_n(s) \end{array}\right\} (3)$$

وبإصلاح (3) نجد:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}+s)y_1(s)+a_{12}y_2(s)+\cdots+a_{1n}y_n(s)=F_1(s)+y_1(0)\\ a_{21}y_1(s)+(a_{22}+s)y_2(s)+\cdots+a_{2n}y_n(s)=F_2(s)+y_2(0)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}y_1(s)+a_{n2}y_2(s)+\cdots+(a_{nn}+s)y_n(s)=F_n(s)+y_n(0)\end{array}\right\}(4)$$

وبذلك تكون الجملة (4) جملة معادلات جبرية خطية بـ n مجهولاً. ولنأخذ معين هذه الجملة:

$$\Delta(S)=\begin{vmatrix}a_{11}+s & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+s & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+s\end{vmatrix};\quad (\Delta S\neq 0)$$

عندئذ بتطبيق قاعدة كرامر يمكن حساب المجاهيل:

$$y_1(s),y_2(s),\cdots,y_n(s)$$

بواسطة العلاقات:

$$y_1(s)=\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)},y_2(s)=\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)},\cdots,y_n(s)=\frac{\Delta_n(s)}{\Delta(s)}$$

حيث المعين $\Delta_i(s)$ هو المعين الناتج من المعين $\Delta(s)$ وذلك باستبدال العمود i بالعمود المشكل من الحدود الموجودة في الطرف الأيمن من المعادلات الأخيرة (4) وبناءاً عليه يكون:

$$L[y_i]=\frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)}\to y_i=L^{-1}\left[\frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)}\right];(i=1,2,3,\cdots,n)$$

مثال8–1–1: أوجد الحل الخاص لجملة المعادلات:

$$\begin{array}{l}y'-2y-4z=\cos t\\ z'+y+2z=\sin t\end{array}$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية: $y(0)=z(0)=0$

الحل: بفرض $y(t),z(t)$ الحل الخاص المطلوب لجملة المعادلات.

لنأخذ حسب لابلاس صورة طرفي كل من المعادلتين السابقتين بالشكل:

$$sL[y]-y(0)-2L[y]-4L[z]=L[\cos t]$$

$$sL[z]-z(0)+L[y]+2L[z]=L[\sin t]\xrightarrow{\text{بالإصلاح}}$$

$$\left.\begin{aligned}(-2)L[y]-4\,L[z]&=\frac{s}{s^2+1}\\ L[y]+\ (s+2)L[z]&=\frac{1}{s^2+1}\end{aligned}\right\}\ \xrightarrow{\text{محددالجملة}}$$

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix}s-2 & -4\\ 1 & s+2\end{vmatrix}=s^2-4+4=s^2$$

والمعينات $\Delta_1(s)$ و $\Delta_2(s)$ من الشكل:

$$\Delta_1(s)=\begin{vmatrix}\frac{s}{s^2+1} & -4\\ \frac{1}{s^2+1} & s+2\end{vmatrix}=\frac{1}{s^2+1}(s^2+2s+4)=\frac{s^2+2s+4}{s^2+1}$$

$$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix}s-2 & \frac{s}{s^2+1}\\ 1 & \frac{1}{s^2+1}\end{vmatrix}=\frac{1}{s^2+1}(s-2-s)=\frac{-2}{s^2+1}$$

وحسب قاعدة كرامر ينتج أن:

$$L[y]=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}\ ;L[z]=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-2}{s^2(s^2+1)}$$

وبالتالي نجد:

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{s^2+2s+4}{s^2(s^2+1)}\right]\overset{\text{نفرق}}{\Rightarrow}L^{-1}\left[\frac{4}{s^2}+\frac{2}{s}-\frac{2s+3}{s^2+1}\right]=4t+2-2\cos t\ -3\sin t$$

$$z(t)=\ L^{-1}\left[\frac{-2}{s^2(s^2+1)}\right]=L^{-1}\left[-\frac{2}{s^2}+\frac{2}{s^2+1}\right]=\ -2t+2sint$$

وبالتالي الحل الخاص المطلوب هو:

$$\begin{aligned}y(t)&=\ 4t+2—2\cos t-3\sin t\\ z(t)&=\ -2t+2\sin t\end{aligned}$$

مثال8–1–2: أوجد الحل الخاص لجملة المعادلات:

$$\begin{aligned}x'+y&=e^t\\ x+y'&=e^{-t}\end{aligned}$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية: $x(0)=x_0\ ;\ \ y(0)=y_0$

الحل: نأخذ تحويل لابلاس لطرفي كل معادلة من معادلات الجملة نجد:

$$\left.\begin{aligned}sL[x]-x_0+L[y]&=L[e^t]\\ L[x]+sL[y]-y_0&=L[e^{-t}]\end{aligned}\right\}\ \xrightarrow{\text{بالإصلاح}}$$

$$\left.\begin{aligned} sL[x]+L[y] &= \frac{1}{s-1}+x_0 \\ L[x]+sL[y] &= \frac{1}{s+1}+y_0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{حسب كرامر}}$$

$$\Delta(s)=\begin{vmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{vmatrix}=s^2-1$$

$$\Delta_1(s)=\begin{vmatrix} \frac{1}{s-1}+x_0 & 1 \\ \frac{1}{s+1}+y_0 & s \end{vmatrix}=\frac{s}{s-1}+x_0 s-\frac{1}{s+1}-y_0$$

$$\Delta_2(s)=\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s-1}+x_0 \\ 1 & \frac{1}{s+1}+y_0 \end{vmatrix}=\frac{s}{s+1}+y_0 s-\frac{1}{s-1}-x_0$$

ومنه ينتج أن:

$$L[x]=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{s}{s^2-1}x_0-\frac{1}{s^2-1}y_0+\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$$
$$L[y]=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{s}{s^2-1}y_0+\frac{1-x_0}{s^2-1}-\frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

بأخذ L^{-1} لطرفي المعادلتين:

$$x=x_0 ch\,t-y_0\,sh\,t+t\,ch\,t$$
$$y=y_0\,ch\,t+(1-x_0)sh\,t-2t\,sh\,t$$

2.8 المعادلات التفاضلية التكاملية:

(1ً): لتكن المعادلة التكاملية:

$$\alpha y(t)-\beta\int_0^t k(t,u)y(u)du=f(t) \qquad (1)$$

التي تسمى بمعادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول إذا كانت $\alpha=0$ ومن النوع الثاني إذا كانت $\alpha\neq 0$. ونسمي التابع $k(t,u)$ باسم نواة المعادلة التكاملية.

فإذا كان : $k(t,u)=k(t-u)$ فإننا نحصل على التكامل:

$$\int_0^t k(t-u)y(u)du=k(t)*y(t)$$

باستخدام تحويلات لابلاس المطبقة على طرفي المعادلة التكاملية (1) وذلك بفرض أن كلاً من $k(t-u),f(t)$ يحقق شروط الأصل بالنسبة لـ t نجد:

$$\alpha L[y] - \beta L[k(t)].L[y] = L[f(t)] \qquad (2)$$

نسمي (2) بالمعادلة الرمزية للمعادلة التكاملية، ومن ثم نجد:

$$L[y] = \frac{L[f(t)]}{\alpha-\beta L[k(t)]} \qquad (3)$$

وبإيجاد الأصل أي بإيجاد تحويل لابلاس المعاكس نحصل على حل المعادلة التكاملية المعطاة.

مثال8–2–1: أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$y - \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)^2 y\ du = \sin t$$

الحل: بما أن:

$$\int_0^t (t-u)^2 y\ du = t^2 * y$$

نأخذ الصورة وفق لابلاس لطرفي المعادلة التكاملية، فنجد:

$$L[y] - \frac{1}{2}\ L[t^2].L[y] = L[\sin t]$$

$$L[y] - \frac{1}{2}\ \frac{2}{s^3} L[y] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[y]\left(1-\frac{1}{s^3}\right) = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\text{نجد}} L[y] = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^3-1)} \Longrightarrow$$

$$L[y] = \frac{s^3}{(s^2+1)(s^2+s+1)(s-1)} \overset{\text{نفرق}}{\Rightarrow} \frac{1}{6}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

نأخذ L^{-1} للطرفين نجد:

$$y = \frac{1}{6}\left(e^t + 3\sin t - 4e^{-t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\ t\right); (t>0\ )$$

مثال8–2–2:أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\int_0^t sh\ (t-u)y\ du\ = 1-\cos t$$

الحل: بما أن:

$$\int_0^t sh\ (t-u)y\ du\ = y * sh\ t \xrightarrow{\text{لابلاس}} L[y].L[sh\ t] = L[1-\cos t]$$

$$L[y].\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

$$L[\quad] = \frac{s^2-1}{s(s^2+1)} \overset{\text{نفرق}}{\Rightarrow} \frac{2s}{s^2+1} - \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{للطرفين } L^{-1}}$$
$$y = L^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 2\cos t - 1\ ;(\ t > 0\ )$$

(2ً): المعادلات التفاضلية التكاملية:

يستخدم تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية التكاملية التي هي من الشكل:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1\, y^{(n-1)}\,(t) + \cdots + a_n y\,(t) +$$
$$+ \sum_{m=0}^{n} \int_0^t k_m\,(t-u)\ y^{(m)}(t)du = f\,(t) \qquad (1)$$

حيث $a_0\,, a_1\,, \cdots, a_n$ أعداد و $y\,(t)$ دالة مجهولة و $k_m(t-u), f(t)$ دوال معطاة. بالاعتماد على تحويل لابلاس وعلى العلاقة:

$$\int_0^t k_m\,(t-u) y^{(m)}(f)du = L[k_m(f)].L[y^m(t)]$$

ينتج:

$$a_0 L\left[y^{(n)}\right] + a_1 L\left[y^{(n-1)}\right] + \cdots + a_n L[y] +$$
$$\sum_{m=0}^{n} L[k_m(t).L\left[y^{(m)}\right] = L[f(t)]$$

ومنه نحصل بعد الأخذ بعين الاعتبار الشروط الابتدائية لمعادلة من الشكل:

$$L[y] = \emptyset(s)$$

وبالاعتماد على تحويل لابلاس المعاكس نحصل على الحل.

مثال8–2–3: أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التكاملية الآتية:

$$y'' + \int_0^t \sin(t-u)\, y''\, du + \int_0^t \sin(t-u) y\ du = 2\cos t$$

الذي يحقق الشروط الابتدائية: $y'(0) = y\,(0) = 0$

الحل: نكتب المعادلة بالشكل:

$$y'' + \sin t\ * y'' + \sin t\ * y\ = 2\cos t \xrightarrow{\text{للطرفين } L}$$
$$L[y''] + L[\sin t].L[y''] + L[\sin t].L[y] = 2\,L[\cos t]$$
$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + \frac{1}{s^2+1}\{s^2 L[y] - sy(0) - y'(0)\} +$$
$$\frac{1}{s^2+1} L[y] = \frac{2s}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)L[y] = \frac{2s}{s^2+1} \Longrightarrow L[y] = \frac{2s}{(s^2+1)^2} \xrightarrow{\text{للطرفين } L^{-1}}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right] = t\sin t\,;(t>0)$$

قائمة تحويلات لابلاس ولابلاس المعاكس

No.	$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)]$
1	$1 = H(t) = u_0(t)$	$\frac{1}{s}$; $s > 0$
2	t	$\frac{1}{s^2}$; $s \neq 0$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
5	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\, s^{3/2}}$
6	$t^{-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
7	$\delta(t)$	1
8	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$; $s > a$
9	$t\, e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
10	$t^n\, e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
11	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
12	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
13	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
14	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$

15	$\sin^2 \omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
16	$\cos^2 \omega t$	$\dfrac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$
17	$\sinh^2 \omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
18	$\cosh^2 \omega t$	$\dfrac{s^2-2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}$
19	$H(t-a) = u_a(t)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}\quad ; \quad s > 0$
20	$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
21	$e^{at}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
22	$e^{at}\cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
23	$e^{at}\sinh \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2-\omega^2}$
24	$e^{at}\cosh \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2-\omega^2}$
25	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
26	$f(t-a)\, H(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
27	$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} F(s)$
28	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)\, G(s)$
29	$\int_0^t f(t)\, dt$	$\dfrac{F(s)}{s}$
30	$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

31	$\cos\omega t$	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
32	$t\sinh\omega t$	$\dfrac{2\omega s}{(s^2-\omega^2)^2}$
33	$t\cosh\omega t$	$\dfrac{s^2+\omega^2}{(s^2-\omega^2)^2}$
34	$\sin\omega t+\omega t\cos\omega t$	$\dfrac{2\omega s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
35	$\sin\omega t-\omega t\cos\omega t$	$\dfrac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$
36	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
37	$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
38	$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\dfrac{s-a}{s-b}$
39	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\dfrac{e^{a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
40	$1-\cos\omega t$	$\dfrac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$
41	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s)\,ds$
	$\dfrac{\sin at}{t}$	$\arctan\left(\dfrac{a}{s}\right)$
42	$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
43	$f''(t)$	$s^2F(s)-\ sf(0)-f'(0)$
44	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-$ $s^{n-2}f'(0)-s^{n-3}f''(0)-$ $\cdots-f^{(n-1)}(0)$

45	$(t+T) = \ f(t);\ \forall t$	$\dfrac{1}{1-e^{-Ts}}\displaystyle\int_{0}^{T} e^{-st} f(t)\, dt$

حيث إن: $H(t) = u_0(t)$ دالة الهايفيسايد، و $\delta(t)$ هو دالة دلتا ديراك النبضية.

الباب الثاني

التحليل العقدي

الفصل الأول: العدد العقدي والمتحول العقدي.

الفصل الثاني: الدوال العقدية واشتقاقاتها.

الفصل الثالث: التكاملات العقدية وصيغ كوشي التكاملية.

الفصل الرابع: المتسلسلات العقدية.

الفصل الخامس: نظرية الرواسب وحساب التكاملات.

الفصل السادس : الراسم الحافظ للزاوية الموجهة.

الفصل السابع: تطبيقات الرواسم الحافظة للزاوايا الموجهة.

الفصل الثامن: تحويلة (شفارتز —كريستوفل).

الفصل التاسع : صيغ التكامل من نوع بواسون.

الفصل العاشر: إفاضة في نظرية الدوال.

فهرس الفصل الأول

الفصل الأول

1. العدد العقدي والمتحول العقدي

1.1 تعريف العدد العقدي:

يعبر عن العدد العقدي بالشكل $ai + b$ (حيث a , b عددين حقيقيين وi تسمى بالوحدة التخيلية) التي تمتلك الخاصة $i^2 = -1$ فإذا كان $z = ai + b$ عندئذ نسمي $Re\{z\} = a$ بالجزء الحقيقي بينما نسمي $Im\{z\} = b$ بالجزء التخيلي لـ z والرمز z يسمى بالمتحول العقدي ويعبر عن أي عنصر من مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$.

2.1 مرافق العدد العقدي

العدد العقدي المرافق للعدد العقدي $z = ai + b$ هو $\bar{z} = ai - b$ وينتج من هذا التعريف أن:

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = a = Re(z) \quad \& \quad \frac{z-\bar{z}}{2i} = b = Im(z) \quad \& \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \geq 0$$

يكون العدد العقدي z حقيقياً إذا كان $z = \bar{z}$.

ملاحظات:

1) ينتج عن الخاصة المميزة للعنصر التخيلي أن:

$$i^1 = i \ , \ i^2 = -1 \ , \ i^3 = -i \ , \ i^4 = 1$$

هذا يعني أن i^n هو أحد الأعداد العقدية: $-1 , 1 , -i , i$.

2) من أجل عددين عقديين $a + ib \ , \ c + id$ يكون:

$$a + ib = c + id \Longleftrightarrow a = c \ , b = d$$

3) يمكن اعتبار أن مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ أي $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ مع ملاحظة أن القسم التخيلي معدوماً أي: $b = 0$.

3.1 العمليات الأساسية على الأعداد العقدية:

يمكن القيام بعمليات الأعداد العقدية بنفس الأسلوب المطبق على جبر الأعداد الحقيقية وذلك بعد إبدال i^2 بـ (-1) بالشكل:

1. الجمع:

$$(a+ib)+(c+id)=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$$

2. الطرح:

$$(a+ib)-(c+id)=a+ib-c-id=(a-c)+i(b-d)$$

3. الضرب:

$$(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd=(ac-bd)+i(ad+bc)$$

4. القسمة:

$$\frac{a+ib}{c+id}=\frac{a+ib}{c+id}\cdot\frac{c-id}{c-id}=\frac{ac-iad+ibc-i^2bd}{c^2-i^2\cdot d^2}==\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

4.1 القيمة المطلقة (الطويلة):

القيمة المطلقة للعدد العقدي $a+ib$ تعرف بالشكل: $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

مثال:1-4-1: $|-6+2i|=\sqrt{(-6)^2+(2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

1.4.1 خواص القيم المطلقة (أو طويلات) الأعداد العقدية:

إذا كانت $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ أعداد عقدية فإن الخواص التالية محققة:

(1): $|Z|\geq \mathrm{Re}(Z), |Z|\geq \mathrm{Im}(Z)$ لأن: $|Z|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(Z)+\mathrm{Im}^2(Z)}$

(2): $Z.\bar{Z}=|Z|^2$ لأن: $|Z|=|\bar{Z}|$

(3): $|Z_1.Z_2|=|Z_1|.|Z_2|$ أو $|Z_1.Z_2......Z_n|=|Z_1|.|Z_2|.....|Z_n|$

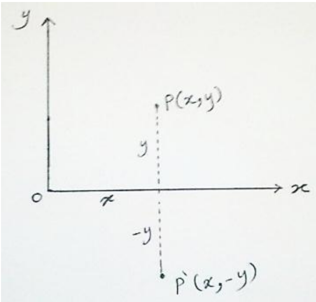
(4): $|Z_1+Z_2|\leq|Z_1|+|Z_2|$ أو $|Z_1+Z_2+..+Z_n|\leq|Z_1|+|Z_2|+..+|Z_n|$

(5): $|Z_1+Z_2|\geq|Z_1|-|Z_2|$ أو $|Z_1-Z_2|\geq|Z_1|-|Z_2|$

5.1 التمثيل البياني (الهندسي) للأعداد العقدية:

يمكن اعتبار العدد العقدي $z = x + iy$ كزوج مرتب من الأعداد الحقيقية الذي يمثل بنقطة $p(x, y)$ في المستوي OXY والذي يسمى بالمستوى العقدي، حيث OX يدعى بالمحور الحقيقي و OY بالمحور التخيلي.

وأيضاً كل نقطة $p(x, y)$ من هذا المستوى العقدي تمثل عدداً عقدياً وحيداً $z = x + iy$ وينتج من هذا أن المرافق $\bar{z}$ يمثل بالنقطة $p'(x,-y)$ نظيرة p بالنسبة لـ OX.

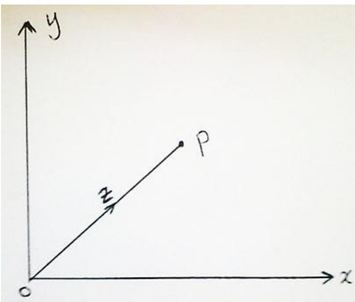


شكل (1)

6.1 التمثيل المتجهي (الشعاعي) للأعداد العقدية:

يمكن اعتبار أي عدد عقدي $Z = x + iy$ كشعاع (كمتجه) $\overrightarrow{op}$ نقطة بدئه هي نقطة الأصل o ونهايته هي النقطة $p(x, y)$.

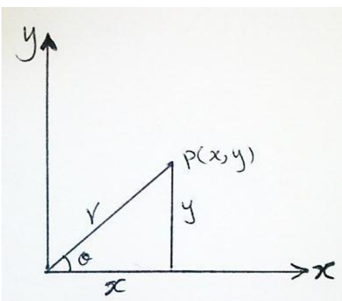
ويسمى أحياناً $\overrightarrow{op} = x + iy$ بشعاع الموضع للنقطة $p(x, y)$ كما في الشكل(2).



شكل (2)

وبالعكس كل شعاع $\overrightarrow{op}$ من المستوي العقدي يمثله عدداً عقدياً وحيداً $z = x + iy$.

شكل (3)



7.1الشكل القطبي (المثلثي) للأعداد العقدية:

إذا كانت النقطة $p(x, y)$ تمثل العدد العقدي $z = x + iy$ فإننا نجد أنه بالتحويل للإحداثيات القطبية أن: $y = r\sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$

حيث: $r=|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}$

تسمى بالقيمة المطلقة أو طويلة العدد العقدي z وتسمى θ بسعة العدد العقدي z ويرمز لها بـ $\theta=\arg(z)=\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ وهي الزاوية بين r والاتجاه الموجب لمحور السينات OX، ونكتب العدد العقدي قطبياً بالشكل:

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

وعادة العبارة $\cos\theta+i\sin\theta$ تكتب اختصاراً بالشكل $cis\,\theta$.

لأي عدد عقدي $z\neq 0$ يوجد فقط قيمة واحدة للسعة θ حيث: $0\le\theta\le 2\pi$ وهذا يمكن استخدام فترة أخرى طولها 2π مثلاً: $-\pi\le\theta\le\pi$ وأي اختيار لمجال السعة يسمى بالمدى الأساسي وتسمى قيمة θ بالقيمة الأساسية.

8.1 نظرية (دوموافر):

إذا كان لدينا:

$$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\ \&$$
$$z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

فإن:

$$z_1.z_2=r_1.r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\ ;\ r_2\neq 0$$

وتعميماً للعلاقة الأولى نجد:

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}$$

وإذا كان: $z_1=z_2=\cdots=z_n=z$

فالعلاقة تؤول إلى الشكل:

$$z^n=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

تسمى العلاقة السابقة بنظرية دوموافر.

9.1 جذور الأعداد العقدية :

يسمى أي عدد ω بأنه الجذر النوني للعدد العقدي z إذا كان $z = \omega^n$ هذا يعني $\omega = z^{\frac{1}{n}}$ وباستخدام نظرية دوموافر على اعتبار n عدداً صحيحاً نجد أن:

$$z^{\frac{1}{n}} = \{r(cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right\}$$

حيث: $\{k = 0,1,2,\cdots,n-1\}$

هذا يعني أنه يوجد n من الجذور النونية المختلفة للعدد العقدي z وذلك بفرض أن $z \neq 0$.

10.1 الشكل الأسي للأعداد العقدية (علاقة أويلر):

إن علاقة أويلر هي $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ وبالتالي يكتب العدد العقدي بالشكل:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

وطويلته $|z| = r$ حيث $r \geq 0$ وسعته تعطى بالقيمة الأساسية:

ومن أجل جميع قيم السعة:

$$z = re^{i(\theta+2\pi k)}\,;(0 \leq \theta < 2\pi\,, r > 0\,;\quad k \text{ عدد صحيح}$$

ومرافق العدد $z = re^{i\theta}$ هو العدد $\bar{z} = re^{-i\theta}$.

نتائج: إذا كان لدينا العددان العقديان $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ فإن:

(1): $z_1.z_2 = r_1.r_2.e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

(2): $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}.e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

(3): إذا كان لدينا العدد العقدي $\beta = e^{ib}$ فإن $\beta z = r.e^{i(\theta+b)}$

(4): لوغاريتم العدد السالب والعدد العقدي:

ليكن العدد السالب $-a$ حيث $(a > 0)$ عندئذ:

$$\ln(-a) = \ln\left[a.e^{i(\pi+2\pi k)}\right] = \ln a + i(\pi + 2\pi k)$$

$$\ln Z = \ln\left[r.e^{i(\theta+2\pi k)}\right] = \ln r + i(\theta + 2\pi k)$$

نتيجة: نستنتج أن هناك ثلاثة أشكال للعدد العقدي وهي:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r.e^{i\theta}$$

حيث: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$ والسعة:

$$\theta = arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right);\ \ (0 \leq \theta \leq 2\pi\ ,\ r > 0)$$

تمارين محلولة (1)

(1): برهن أن:

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

الحل:

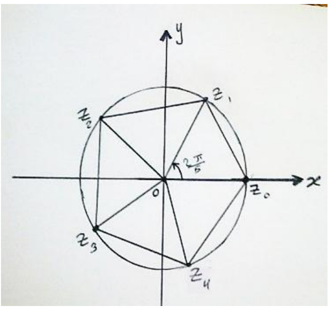
$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^4\left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^5=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^4\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^5=$$
$$=e^{-i\frac{4\pi}{3}}.e^{i\frac{5\pi}{2}}=e^{i\frac{7\pi}{6}}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

(2): أوجد الجذور الخمسة للمعادلة: $z^5=1$ ومثل أجوبتك.

الحل:

$$z^5=1=e^{2\pi ki}\Rightarrow z_k=e^{\frac{2\pi ki}{5}}\qquad ,\ k=0,1,2,3,4$$

$$k=0\quad,\quad z_0=1$$
$$k=1\quad,\quad z_1=e^{\frac{2\pi}{5}i}$$
$$k=2\quad,\quad z_2=e^{\frac{4\pi}{5}i}$$
$$k=3\quad,\quad z_3=e^{\frac{6\pi}{5}i}$$
$$k=4\quad,\quad z_4=e^{\frac{8\pi}{5}i}$$



شكل(1-1)

أي أن جذور المعادلة تقع على رؤوس مخمس منتظم مركزه o ونصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي 1.

(3): حل المعادلة: $z^4+z^2+1=0$ ومثِل الأجوبة.

الحل: بما أن:

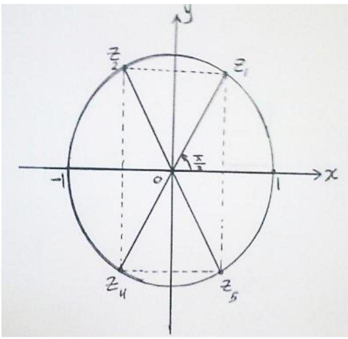
$$z^6-1=(z^2-1)(z^4+z^2+1)$$

فإن جذور المعادلة المفروضة: هي نفس جذور المعادلة $z^6 - 1 = 0$ باستثناء $z = \pm 1$ جذرا المعادلة $z^2 - 1 = 0$ وبالتالي:

$$z^6 - 1 = 0 \Longrightarrow z^6 = 1 = e^{2\pi k i} \Rightarrow z_k = e^{\frac{\pi k}{3} i}$$

حيث: $.k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$k = 0 \quad , \quad z_0 = 1$$
$$k = 1 \quad , \quad z_1 = e^{\frac{\pi}{3} i}$$
$$k = 2 \quad , \quad z_2 = e^{\frac{2\pi}{3} i}$$
$$k = 3 \ , \ z_3 = e^{\pi i} = -1$$
$$k = 4 \quad , \quad z_4 = e^{\frac{4\pi}{3} i}$$
$$k = 5 \quad , \quad z_5 = e^{\frac{5\pi}{3} i}$$



شكل(1-2)

وبالتالي:

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \, , z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \, , z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \ \, , z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

أي أن جذور المعادلة المفروضة:

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}\, i}{2} \quad , \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$$

(4): احسب قيم التراكيب التالية:

$$\ln(-4) \quad , \quad \ln\left(\sqrt{3} - i\right) \quad , \quad (-i)^{-i} \quad , \quad (1+i)^{i}$$

$$\ln(-4) = \ln\left(4 e^{\pi i}\right) = \ln 4 + \pi i$$
$$\ln\left(\sqrt{3} - i\right) = \ln\left(2 e^{\frac{-\pi}{6} i + 2\pi i}\right) = \ln 2 + \frac{11\pi}{6} i$$
$$(-i)^{-i} = e^{-i \ln(-i)} = e^{-i \ln e^{\frac{3\pi}{2} i}} = e^{-i\left(\frac{3\pi}{2} i\right)} = e^{\frac{3\pi}{2}}$$
$$(1+i)^{i} = e^{i \ln(1+i)} = e^{i \ln\left(\sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}\right)} = e^{i\left(\ln\left(\sqrt{2}\right) + \frac{\pi}{4} i\right)} =$$
$$e^{i \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} . e^{i \ln\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}} . \left[\cos\left(\ln\sqrt{2}\right) + i \sin\left(\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

(5): إن إحداثيات رؤوس مثلث هي:

$$z_1 = 1 + 2i \, , z_2 = 4 - 2i \, , z_3 = 1 - 6i$$

برهن أنه مثلث متساوي الساقين، واحسب أطوال أضلاعه.

الحل:

$$|z_1 - z_2| = |-3 + 4i| = 5$$
$$|z_1 - z_3| = |8i| = 8$$
$$|z_2 - z_3| = |3 + 4i| = 5$$

وبالتالي المثلث متساوي الساقين أطوال أضلاعه: $8\ ,\ 5\ ,\ 5$

(6): عين في المستوي العقدي z المجموعات النقطية التالية:

1): $1 \le |z - i| \le 2$

$$1 \le |z - i| \le 2 \Rightarrow 1 \le |x + iy - i| \le 2 \Rightarrow 1 \le |x + i(y - 1)| \le 2$$

$$\Rightarrow 1 \le \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \le 2 \xRightarrow{\text{بالتربيع}} 1 \le x^2 + (y-1)^2 \le 4$$

والمنطقة هي عبارة عن الحلقة الدائرية التي مركزها النقطة $(0,1)$ ونصفي قطري دائرتيها $r_1 = 1, r_2 = 2$

2): $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = 1$

$$\frac{|z-2|}{|z+2|} = \frac{1}{1} \Longrightarrow |z - 2| = |z + 2| \Longrightarrow |(x-2) + iy| = |(x+2) + iy|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \xRightarrow{\text{بالتربيع}}$$
$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 + y^2 \Longrightarrow -4x = 4x \Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

مجموعة النقاط هي المحور التخيلي OY.

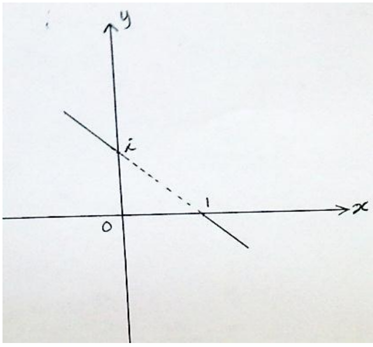
3): $\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{x+iy-1}{x+i(y-1)} = \frac{(x+iy-1)[x-i(y-1)]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(x+iy-1)(x-iy+i)}{x^2+(y-1)^2} =$$
$$\frac{x^2-ixy+ix+ixy+y^2-y-x+iy-i}{x^2+(y-1)^2} = \frac{(x^2+y^2-x-y)+i(x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \qquad \wedge \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) > 0$$

$$\Rightarrow x+y-1=0 \quad \wedge \quad x^2+y^2-x-y>0$$
$$x+y=1 \quad \wedge \quad x^2+(1-x)^2-x-(1-x)>0$$
$$x+y=1 \quad \wedge \quad 2x^2-2x>0$$
$$x+y=1 \quad \wedge \quad [x>0 \quad \text{أو} \quad x>1]$$

إذاً مجموعة النقاط هي عبارة عن المستقيم الواصل بين النقطتين $i,\ 1$ باستثناء القطعة المستقيمة المحددة بهاتين النقطتين. شكل(1-3)



$$4):\quad \frac{|z+1|}{|z-2|}>\frac{3}{2}$$

$$\frac{|z+1|}{|z-2|}>\frac{3}{2} \qquad \Rightarrow 2|z+1|>3|z-2|$$
$$\Rightarrow 2|x+1+iy|>3|x-2+iy|$$
$$\Rightarrow 4[(x+1)^2+y^2]>9[(x-2)^2+y^2]$$
$$\Rightarrow 5x^2-44x+5y^2+32<0$$
$$\Rightarrow x^2-\frac{44}{5}x+y^2+\frac{32}{5}<0$$
$$\Rightarrow (x-\frac{22}{6})^2+y^2<\frac{324}{25}=(\frac{18}{5})^2$$
$$\Rightarrow (x-4.4)^2+y^2<(3.6)^2$$

فمجموعة النقط هي عبارة عن النطاق الواقع داخل الدائرة التي مركزها $(4.4,0)$ ونصف قطرها $r=3.6$.

$$5):\quad |z-2|.|z+2|=4 \Rightarrow |x+iy-2|.|x+iy+2|=4$$
$$\Rightarrow |(x-2)+iy|.|(x+2)+iy|=4$$
$$\Rightarrow [(x-2)^2+y^2].[(x+2)^2+y^2]=16$$

$$\Rightarrow (x^2-4)^2+y^2(2x^2+8)+y^4=16$$
$$\Rightarrow x^4+2x^2y^2+y^4-8(x^2-y^2)=0$$
$$(x^2+y^2)^2=8(x^2-y^2)$$
$$r^4=8r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$r^2=8\cos 2\theta$$

نجد أن مجموعة النقط هي عبارة عن منحني اللمنسكات.

6): $|z+3|+|z-3|\le 10 \quad \Rightarrow \quad |x+3+iy|+|x-3+iy|\le 10$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}\le 10$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2+2\sqrt{(x+3)^2+y^2}.\sqrt{(x-3)^2+y^2}\le 100$$
$$\sqrt{(x+3)^2+y^2}.\sqrt{(x-3)^2+y^2}\le 41-(x^2+y^2)$$

بتربيع الطرفين نجد:

$$(x^2-9)^2+y^2(2x^2+18)+y^4\le 1681-82(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2$$
$$18(y^2-x^2)+81\le 1681-82(x^2+y^2)$$
$$64x^2+100y^2\le 1600 \Longrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}\le 1$$

مجموعة النقاط هي النطاق الواقع داخل القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ بما فيها نقاط القطع.

(7): إذا كان $|z_1|=|z_2|=1$ فأثبت أن: $w=\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}$ هو عدد حقيقي.

الحل: يكفي أن نثبت أن: $w=\overline{w}$

$$\overline{w}=\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{1+z_1.z_2}}=\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}.\overline{z_2}}$$
$$\overline{w}=\frac{z_1.z_2(\overline{z_1}+\overline{z_2})}{z_1.z_2(1+\overline{z_1}.\overline{z_2})}=\frac{z_1\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}z_1}{z_1z_2+z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2}}$$
$$=\frac{|z_1|^2.z_2+|z_2|^2z_1}{z_1z_2+|z_1|^2.|z_2|^2}=\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}=w$$

وبالتالي فإن w حقيقي.

(8): بسط التركيبين التاليين واضعاً الجواب بالشكل الجبري:

$$\frac{\cos 8x + i\sin 8x}{\cos 3x + i\sin 3x} = \frac{e^{i8x}}{e^{i3x}} = e^{i5x} = \cos 5x + \ i\sin 5x$$

$$\frac{1}{13} - \frac{i(1-i)}{2+i3} = \frac{1}{13} - \frac{i+1}{2+i3} = \frac{1}{13} - \frac{(i+1)(2-i3)}{(2+i3)(2-i3)} = \frac{1}{13} - \frac{5-i}{4+9} =$$

$$\frac{1-5+i}{13} = \frac{-4+i}{13}$$

(9): إذا كان $z = \frac{(1-i7)(2-i)}{5+i12}$ ، فاحسب $|z|\,, Im(z)\,, Re(z)$.

الحل:

$$z = \frac{(1-i7)(2-i)}{5+i12} = \frac{-5-i15}{5+i12} = \frac{(-5-i15)(5-i12)}{25+144} = \frac{-205}{169} - i\,\frac{15}{169}$$

$$\Longrightarrow Re(z) = \frac{-205}{169} \quad , \quad Im(z) = \frac{-15}{169}$$

$$|z| = \frac{\sqrt{(-205)^2+(-15)^2}}{169} = 1{,}216$$

$$\arg(z) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{15}{205}\right) = \mathrm{tg}^{-1}(0.073) = 4.185$$

تمارين غير محلولة (1)

1- بسّط التراكيب العقدية التالية واكتب الناتج بالشكل الجبري والمثلثي والأسي:

$$z=\frac{\cos 6x+i\sin 6x}{\cos 4x+i\sin 4x} \qquad z=\frac{3+4i}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})} \qquad z=2-2i+\frac{2}{1+i}$$

2- احسب الجذور التكعيبية للعدد $z=1+3i$.

3- عين في المستوي العقدي المجموعات النقطية التالية:

$$|z-4i|+|z+4i|\le 10 \qquad \arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right)=0$$

$$1<|z-i|\le 2 \qquad |z-(1-2i)|=5 \qquad z=\bar{z}$$

$$\mathrm{Im}(z)>\mathrm{Re}(z)>0 \qquad |z-1|>\mathrm{Re}(z)\ge 0 \qquad \frac{|z-2|}{|z+2|}=1$$

4- أثبت أن: $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4\cdot\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$.

5- بفرض أن رؤوس مثلث هي النقط $z_1=1-6i$ و $z_2=1+2i$ و $z_3=4-2i$.
أثبت أن هذا المثلث متساوي الساقين. احسب أطوال أضلاعه.

6- عين الإحداثيات القطبية للنقط المعرفة بالإحداثيات الديكارتية كما يلي:

$$M_1(0,5), M_2(-3,0), M_3(\sqrt{3},1), M_4\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$$

فهرس الفصل الثاني

الفصل الثاني

2.الدوال العقدية واشتقاقاتها

1.2 تعريف الدالة العقدية:

– إذا كان لكل قيمة للمتحول العقدي z توجد قيمة واحدة أو عدة قيم بالمتحول العقدي w عندئذٍ نقول إن w تكون دالة في z ونكتب $w=f(z)$ ويسمى المتحول z بالمتحول المستقل بينما يسمى w بمتحول الدالة.

– إذا وجدت لكل قيمة للمتحول المستقل z قيمة واحدة فقط للمتحول الدالة w فإننا نقول إن $w=f(z)$ دالة وحيدة القيمة وإذا وجدت أكثر من قيمة لـ w فإننا نقول إن $w=f(z)$ دالة متعددة القيم للمتحول z ويمكن اعتبار الدالة متعددة القيم كتجميع للدوال وحيدة القيمة ويسمى كل عنصر فيها بفرع الدالة ويمكن أن نعتبر عنصراً خاصاً فيها كفرع رئيسي للدالة المتعددة القيم وقيمة الدالة المقابلة لهذا الفرع كقيمة رئيسية.

2.2 الدالة العكسية:

– إذا كان $w=f(z)$ دالة تقابلية في z ، فإن الصورة العكسية $z=g(w)=f^{-1}(w)$ الوحيدة القيمة والتي نعتبر فيها z دالة في المتحول w ، تسمى بالدالة العكسية المناظرة للدالة f ، وعلى ذلك فإن $w=f(z)$ و $z=f^{-1}(w)$ يكون كل منهما دالة عكسية للأخرى.

– **أما** إذا كان $w=f(z)$ دالة غامرة في z ، فإن الصورة العكسية تعطي فروعاً (أو قيماً)عديدةً و نقتصر على فرع واحد(أو قيمة وحيدة) نسميه الفرع الرئيسي(أو القيمة الرئيسية) للدالة ، لنحصل على الدالة العكسية $z=f^{-1}(w)$ للدالة المفروضة .

– إذا كان $w=u+iv$ (حيث $u\ ;\ v$ يكونان حقيقيان) دالة وحيدة القيمة في المتحول $z=x+i\,y$ (حيث $x\,;y$ حقيقيان) فإنه يمكن أن تكتب $u+i\,v=f(x+i\,y)$

وبالتالي $v=v(x,y)$ و $u=u(x,y)$ كما يمكن أن نكتب $z=x+iy=re^{i\theta}$ و
$w=u+iv=\rho e^{i\theta}$

3.2 اشتقاق الدالة العقدية:

1.3.2 نهاية الدالة واستمرارها:

ليكن $w=f(z)$ دالة معرفةً ووحيدة القيمة في جوار النقطة $z=z_0$ باستثناء هذه النقطة، عندها نقول إن العدد L هو نهاية $f(z)$ عندما تقترب z من z_0 وتكتب $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$ إذا وجد عدداً موجباً ε بحيث يكون $|f(z)-L|\langle\varepsilon$ طالما $0\ \langle\ |z-z_0|\langle\delta$ حيث $\delta=\delta(\varepsilon)$.

لكن إذا كانت $w=f(z)$ معرفةً وتمتلك قيمة عند النقطة $z=z_0$ وكانت $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$ عندئذٍ تكون $w=f(z)$ مستمرة في النقطة z_0. وتكون الدالة مستمرةً في نطاق D إذا كانت مستمرة من كل نقطة من هذا النطاق.

مثال2–1:

أوجد قيمة النهاية : $\lim\limits_{z\to -i}\dfrac{z^2+1}{z+i}$

$$\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}=\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-i)}{(z+i)}=\lim_{z\to -i}(z-i)=-2i$$

2.3.2 المشتقة:

ليكن $w=f(z)$ دالة معرفةً في جوار النقطة z_0 من المستوي العقدي z عندئذ، نقول عن $f(z)$ إنها قابلةً للاشتقاق في z_0 إذا كانت النهاية $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ معينةً و محدودة ، عندئذٍ نسميها مشتقة الدالة $f(z)$ في النقطة z_0 ونرمز لها بـ $f'(z_0)$ أو بأحد الرموز:

$$\frac{dw}{dz}=w'=\left(\frac{df}{dz}\right)$$

بينما نرمز لمشتقة الدالة من الرتبة n بأحد الرموز:

$$\left(\frac{d^{n}w}{dz^{n}}\right)_{z=z_0}=f^{(n)}(z_0)=\left(\frac{d^{n}f}{dz^{n}}\right)_{z=z_0}$$

4.2 الدوال التحليلية:

تعريف: إذا كانت $w=f(z)$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة من منطقة R جزئية من المستوي العقدي Z (XOY) فإننا نقول إن $f(z)$ تحليلية في R، ونقول إن $f(z)$ تحليلية في نقطة z_0 إذا كانت تحليلية في جوار ما للنقطة z_0 ، وتكون الدالة تحليلية على منحن إذا كانت تحليلية في كل نقطة منه، كما يمكن أن تكون الدالة تحليلية في منطقة $D=\overline{R}$ إذا كانت تحليليةً في المنطقة R وعلى المنحني المحيط بهذه المنطقة.

1.4.2 الشرطان اللازمان لكي تكون الدالة تحليلية في نطاق:

نظرية: إذا كانت $w=f(z)=u+iv$ تحليلية في نطاق R من المستوي العقدي Z (XOY) فإن معادلتي (كوشي–ريمان) الآتيتان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x} \qquad (2)$$

محققتان في كل نقطة (x,y) من النطاق R، وبالعكس إذا كانت معادلاتي (كوشي–ريمان) محققتان والمشتقات الجزئية الواردة فيها مستمرة في كل نقطة (x,y) من R فإن الدالة $f(z)$ تحليلية في R ومشتقتها $f'(z)$ يمكن أن يعبر عنها بإحدى الصيغ التالية:

$$f'(Z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

مثال2–2: بين أن الدالة $f(z)=z^{2}.\bar{z}$ غير قابلة للاشتقاق في أية نقطة من المستوي العقدي Z (XOY)؟

الحل:

$$f(z)=z^2.\bar{z}=(x+iy)^2(x-iy)$$
$$=(x^2+2ixy-y^2)(x-iy)=(x^3-xy^2+2xy^2)+i(2x^2y-x^2y+y^3)$$
$$=(x^3+xy^2)+i(x^2y+y^3)\Rightarrow$$
$$\therefore\quad u=(x^3+xy^2)\ ;\ v=x^2y+y^3$$

نلاحظ أن v ; u قابلتان للاشتقاق في كل نقطة (x,y) من المستوي العقدي Z (XOY) ونجد أيضاً أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2\ ,\frac{\partial v}{\partial y}=x^2+3y^2\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$$

وبالتالي معادلتي (كوشي- ريمان) غير محققتين إذاً الدالة غير تحليلية وبالتالي غير قابلة للاشتقاق في أي نقطة من المستوي العقدي Z .

ملاحظة: للحصول على معادلتي (كوشي-ريمان) قطبياً نبدل الإحداثيتين (x,y) بالإحداثيتين (r,θ) فنجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\ \frac{\partial v}{\partial \theta}\qquad (I)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\ \frac{\partial v}{\partial r}\qquad (II)$$

2.4.2 التوابع التوافقية:

إذا وجدت المشتقات الجزئية الثانية لكل من v ; u بالنسبة لـ y ; x وكانت مستمرة في نطاق ما R من المستوي العقدي Z (XOY) فإننا نجد أن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ \ ,\ \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

وينتج من هذه الشروط أن كلاً من الجزئيين الحقيقي والتخيلي لدالة تحليلية يحققان معادلة لابلاس الديكارتية الآتية:

$$\nabla^2\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

حيث:

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ويسمى المؤثر ∇^2 عادة بمؤثر لابلاس والدوال $u(x,y)$ و $v(x,y)$ المحققة لمعادلة لابلاس في نطاق ما R تسمى بالدوال التوافقية ويقال إنها توافقية في R.

3.4.2 استنتاج معادلات لابلاس بالصيغة القطبية:

انطلاقاً من معادلتي (كوشي-ريمان) بالصيغة القطبية نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial\theta}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=-r\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r}=-\frac{\partial v}{\partial r}-r\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \qquad (2)$$

بما أن المشتقات الجزئية لـ$u(x,y)$ و $v(x,y)$ موجودة ومستمرة في المستوي العقدي Z، أي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial r} \qquad (3)$$

بتعويض (3) في (1) و (2) نجد:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=-\frac{\partial v}{\partial r}-r\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}=0$$

وبنفس الطريقة نحصل على المعادلة الثانية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

مثال2-3: بين أن الدالة: $u=x^2-y^2+1$ توافقية في المستوي العقدي ؟

الحل: إن الدالة المفروضة هي كثيرة حدود بالمتحولين $x\,;\,y$ فهي معينة ومستمرة وقابلة للاشتقاق ومشتقاتها الجزئية مستمرة في كل نقطة من المستوي، ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\;,\;\frac{\partial u}{\partial y}=-2y\;,\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\;,\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

إذاً u توافقية في المستوي العقدي.

- إذا كانت الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية في منطقة R من المستوي العقدي فإن الدالتين v ; u توافقيتان في المنطقة R. وذلك لأنه من معادلاتي (كوشي-ريمان) نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}\ ;\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

وبما أن المشتقات الجزئية مستمرة فرضاً فإن:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

ومنه نجد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

نسمى كلاً من الدالتين v ; u مرافقةً توافقية للأخرى ونستطيع إذا أعطينا أحدهما u مثلاً أن نجد مرافقتها التوافقية v بحيث تكون الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية وذلك بواسطة معادلتي (كوشي-ريمان).

مثال2-4: برهن أن الدالة:

$$u=x-y+1$$

توافقية في المستوي العقدي، وأوجد المرافقة التوافقية لها v بحيث تكون الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية ثم عبر عن $f(z)$ بدلالة z.

الحل: نلاحظ أن u كثيرة حدود بمتحولين y ; x فهي مستمرة وقابلة للاشتقاق ومشتقاتها الجزئية مستمرة في كل نقطة (x,y) من المستوي العقدي ونلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-1 \ \Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\therefore \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+0=0$$

وهذا يعني أن u توافقيةً في المستوى العقدي.

من معادلتي (كوشي-ريمان) نلاحظ أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=1 \ \Rightarrow\partial v=\partial y\Rightarrow v=y+\Phi(x)$$

ومن المعادلة الثانية:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow-\Phi'(x) \ =-1 \ \Rightarrow\Phi(x)=x+c\Rightarrow v=x+y+C$$

وبالتالي:

$$f(z)=u+iv=(x-y+1)+i(x+y+C)$$

تحليلية في كل نقطة (x,y) من المستوى العقدي ولإيجاد عبارة $f(z)$ بدلالة z نضع $x=z \ ; \ y=0$ في عبارة $f(z)$ فنجد:

$$f(z)=(Z+1)+i(z+C)\Rightarrow f(z)=(1+i)Z+1+iC$$

5.2 النقاط الشاذة:

تعريف: نسمي النقطة التي عندها $f(z)$ دالة غير تحليلية بالنقطة الشاذة للدالة $f(z)$ وتوجد أنواع مختلفة من النقاط الشاذة.

النقطة العادية: إذا كانت $z=a$ نقطة غير شاذة لـ $w=f(z)$ وأمكن إيجاد عدد $b\rangle 0$ بحيث لا تحوي الدائرة $|z-a|=b$ الواقعة في R على أية نقطة شاذة لـ $w=f(z)$ ، فنقول $z=a$ نقطة عادية للدالة $w=f(z)$ في المنطقة R .

6.2 دراسة الدوال العقدية الابتدائية:

1.6.2 كثيرات الحدود:

نسمي الدوال من الشكل: $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+.....+c_nz^n$ بكثيرات حدود من الدرجة n، حيث $c_0, c_1,....,c_n \neq 0$ ثوابت حقيقية أو عقدية و n عدد صحيح موجب. إن خواص هذا الدالة هي كخواص الدالة c_nz^n التحليلية من أجل جميع قيم المتحول z ومشتقتها هي: nc_nz^{n-1} وبالتالي كثيرة الحدود $f(z)$ دالة تحليلية أيضاً من أجل نقاط المتحول z في المستوي العقدي ومشتقتها تعطى بالعلاقة:

$$f'(z)=c_1+2c_2z+......+nc_nz^{n-1}$$

2.6.2 الكسور:

نسمي الدالة: $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ حيث $P(z)$ و $Q(z)$ كثيرتي حدود لا يوجد بينهما جذور مشتركة بالدالة الكسرية، نلاحظ أن هذه الدالة تحليلية من أجل جميع نقاط المستوي العقدي ما عدا النقاط التي تنعدم من أجلها $Q(z)$.

3.6.2 مستقيمات ونقاط التفرع:

تعريف: ليكن $w=f(z)$ دالة متعددة القيم نقول عن النقطة z_0 من المستوى العقدي Z (XOY)، أنها نقطة تفرع لـ w إذا تحقق الشرط التالي:

إذا رسمنا منحنياً بسيطاً مغلقاً موجهاً بعكس دوران عقارب الساعة يحتوي داخله النقطة z_0 ولا يحتوي على أية نقطة شاذة لفروع w وأخذنا على هذا المنحني نقطة بدء a حيث يأخذ w في هذه النقطة قيمة ابتدائية w_0 فإن w يغير قيمته عندما تعود النقطة Z إلى النقطة a بعد دورة كاملة واحدة فقط.

ولكي تبقى w في نفس الفرع (أي وحيدة القيمة) نرسم خطاً مستقيماً يصل المبدأ ويمتد حتى اللانهاية في أي اتجاه كان ونعتبره حاجزاً لا يمكن للنقطة z أن تتخطاه لتتم دورة كاملة ويسمى هذا الخط بخط (أو مستقيم) التفرع لـ w .

مثال2–5: أثبت أن $z=0$ نقطة تفرع لـ $w=\sqrt{z}$ ؟

الحل: نرسم دائرة حول المبدأ نصف قطرها يساوي (1) ولنأخذ النقطة a على الدائرة معينة بالزاوية α فإذا كانت النقطة z على الدائرة نجد أن:

$$z=e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)} \Rightarrow w=\sqrt{z}=e^{\frac{\theta+2k\pi}{2}i}$$

وإذا كانت z في نقطة البدء تكون $\theta=\alpha$ ويأخذ w قيمة ابتدائية وهي: $w_0=e^{\frac{\alpha+2k\pi}{2}i}$

وبعد دورة كاملة حول المبدأ تصبح $\theta=\alpha+2\pi$ ويأخذ w قيمة نهائية هي:

$$w=e^{\frac{\alpha+2\pi+2k\pi}{2}i}=w_0e^{\pi i}=-w_0$$

وبما أن w غير قيمته أي انتقل من فرع إلى الفرع الآخر فإن $z=0$ هي نقطة تفرع له.

ونلاحظ أنه إذا دارت النقطة z دورة ثانية حول المبدأ عائدة إلى النقطة a فإن w يغير قيمته مرة ثانية ويصبح $w=-(-w_0)=w_0$ أي أنه قد عاد إلى الفرع الأول وبذلك يكون للتابع المتعدد القيم $\sqrt{z}$ فرعان فقط.

الأول يتعين بالمتراجحة $\alpha\le\theta\le\alpha+2\pi$ والثاني بالمتراجحة $\alpha+2\pi\le\theta\le\alpha+4\pi$

ولكي تبقى w في نفس الفرع (أي وحيدة القيمة) نرسم خطاً مستقيماً يصل المبدأ ويمتد حتى اللانهاية في أي اتجاه كان ونعتبره حاجزاً لا يمكن للنقطة z أن تتخطاه لتتم دورة كاملة ويسمى هذا الخط بخط (أو مستقيم) التفرع لـ w .

مثال2–6: أثبت أن $z=0$ هي نقطة تفرع لـ $w=\ln z$ ؟

الحل: لنرسم دائرة حول المبدأ كما في المثال السابق ولنضع:

$$z=e^{\theta i}=e^{(\theta+2k\pi)i} \Rightarrow \ln z=(\theta+2k\pi)i$$

حيث k عدد صحيح وفي نقطة البدء a يكون: $w_0 = \ln z = i(\alpha + 2k\pi)$ وبعد دورة كاملة يأخذ w قيمة نهائية هي: $w = i(\alpha + 2\pi + 2k\pi) = w_0 + 2\pi i$ وهكذا نجد أن w أصبح على فرع آخر له فالنقطة $z = 0$ نقطة تفرع لـ w.

نلاحظ أن كل دورة حول المبدأ انتقل w من فرع إلى فرع آخر بحيث لا يعود أبداً إلى نفس الفرع فيوجد للتابع المتعدد القيم $\ln z$ عدد غير منته من الفروع والفرع الخاص لـ $\ln z$ الذي يكون فيه $\ln z$ عدداً حقيقياً عندما يكون z عدداً حقيقياً موجباً يسمى (الفرع الرئيسي لـ $\ln z$) ويتعين: $\ln z = \ln|z| + i\theta;\ 0 \le \theta < 2\pi$.

4.6.2 الدالة الجذرية $z^{\frac{1}{n}}$:

نسمي الدالة $f(z) = z^{\frac{1}{n}}$ حيث n عدد صحيح، بالجذر النوني للمتحول z وهذه الدالة ذو n قيمة مختلفة، ولإيجاد هذه القيم نفرض:

$f(z) = \rho(\cos n\phi + i\sin n\phi)$ حيث $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وحسب نظرية (دوموافر) وذلك على اعتبار أن: $z = [f(z)]^n$ ومنه نجد:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$$

ومن هذه العلاقة ينتج أن:

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} \qquad ; \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

وبالتالي:

$$f(z) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

وهذا يعطي من أجل $k = 0,1,2,\dots,n-1$، n قيمة مختلفة للدالة $f(z)$ موزعة على محيط دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها $\sqrt[n]{r}$. ونسمي قيمة $f(z)$ الموافقة للقيمة $k = 0$ بالقيمة الرئيسية (أو الفرع الرئيسي) للدالة $f(z)$ ونسمي النقطة $z = 0$ التي تأخذ حولها الدالة قيمها المختلفة بالنقطة الحرجة الجبرية (أو نقطة تفرع الدالة)، ولهذا فإن دالة الجذر النوني للمتحول z ممثلة كقيمة رئيسية لها ، تعطى بالعلاقة:

$$F(z)=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$u(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\cos\frac{\theta}{n} \qquad , \qquad v(r,\theta)=r^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\theta}{n}$$

وهذه الدالة تحليلية إذ نجد بتطبيق شرطي (كوشي–ريمان) في الإحداثيات القطبية أن:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\cos\frac{\theta}{2} \qquad , \qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{1}{n}r^{\frac{1}{n}-1}\sin\frac{\theta}{n}$$

هذا يعني أن الدالة تحليلية في المستوي العقدي Z (XOY) الذي حذف منه المحور الحقيقي $0X$ أي من أجل $r\neq 0$ (لعدم تحقق الشرطين عند $r=0$) ومشتقتها:

$$f'(z)=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}$$

5.6.2 الدالة الأسية:

هي دالة من الشكل: $f(z)=e^{z}$ ولتعيين القسم الحقيقي والتخيلي لهذا الدالة نعوض بالمساواة $z=x+iy$ فنجد:

$$f(z)=e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}.e^{iy}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$$

حيث:

$$u(x,y)=e^{x}\cos y \qquad , \qquad v(x,y)=e^{x}\sin y$$

$$|e^{z}|=e^{x},\arg(e^{z})=\tan^{-1}\left(\frac{\sin y}{\cos y}\right)=\tan^{-1}(\tan(y))=y$$

ونجد بتطبيق شرطي (كوشي– ريمان) أن الدالة e^{z} تحليلي، لأن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=e^{x}\cos y \qquad , \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}=-e^{x}\sin y$$

وتعطى مشتقة الدالة e^{z} بالعلاقة:

$$\left(e^{z}\right)'=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{x}e^{iy}=e^{x+iy}=e^{z}$$

أي أن للدالة الأسية العقدية نفس خاصة الدالة الأسية الحقيقية، ونلاحظ أن:

$$e^{\pm 2\pi i}=1, \qquad e^{\pm\pi i}=-1, \qquad e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\ e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$$

ونجد من أجل $n = 0,1,2,.....$ أن:

$$e^{z \pm 2n\pi\, i} = e^{z}$$

أي أن الدالة e^{z} دالة دورية ولها دور تخيلي هو $(2\pi i)$.

6.6.2 التابع اللوغاريتمي:

نسمي: $w = \ln z$ باللوغاريتم الطبيعي للمتحول $z = x + iy$ وهو معكوس الدالة الأسية: $z = e^{w}$ ولتعيين القسم الحقيقي والتخيلي لهذ الدالة نكتب:

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow e^{u} = r = |z| \qquad , \qquad v = \theta + 2k\pi$$

ومنه يكون:

$$\ln z = u + iv = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$

حيث $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ أي التركيب متعدد القيم.

نلاحظ أن المشتقات الجزئية للجزء الحقيقي $u = \ln r$ والتخيلي $v = \theta$ موجودة ومستمرة وهي:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial \theta} = 1$$

والدالة تحقق شرطي (كوشي- ريمان):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{1}{r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

فالدالة تحليلية في المستوي Z (XOY) الذي حذف منه المحور الحقيقي oX أي من أجل $r \neq 0$ (لعدم تحقق الشرطين عند $r = 0$)

7.6.2 الدوال القطبية و الدائرية:

وجدنا أن:

$$\left.\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i\sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i\sin z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin z &= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{aligned}$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \ , \csc z = \frac{1}{\sin z} \ , \sec z = \frac{1}{\cos z} \ , \cot z = \frac{1}{\tan z}$$

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{z} \ , chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$thz = \frac{shz}{chz} \ , \ \operatorname{csc}h\, z = \frac{1}{shz} \ , \ \operatorname{sec}h\, z = \frac{1}{chz} \ , \ \coth z = \frac{1}{thz}$$

ويمكن الانتقال من الدائري إلى القطبي وبالعكس حسب العلاقات:

$$\cos(i\,z) = chz \qquad ch(i\,z) = \cos z$$

$$\sin(i\,z) = i\,shz \qquad sh(i\,z) = i\sin z$$

ملاحظة: بما أن الدالة e^{iz} هو دالة تحليلية من أجل جميع قيم z ، يكون أيضاً كل من $\cos z, \sin z$ تحليلية أما $\tan z$, $\sec z$ فهي تحليلية من أجل جميع قيم z إلا تلك التي تعدم $\cos z$ وكذلك $\cot z$, $\csc z$ تكون تحليلية من أجل جميع قيم z إلا تلك التي تعدم $\sin z$.

8.6.2 الدوال القطبية و الدائرية العكسية:

وتكون هذه الدوال تحليلية في المستوى z الذي حذف منه مستقيما التفرع الناتجان عن نقطتي التفرع في كل حالة المميزة لهذه الدوال بالشكل:

$$w=\sin^{-1}(z)=\frac{1}{i}\ln\left[iz+\left(1-z^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\quad ;\quad z=\pm 1$$

$$w=\cos^{-1}(z)=\frac{1}{i}\ln\left[z+\left(z^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\quad ;\quad z=\pm 1$$

$$w=\tan^{-1}(z)=\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\quad ;\quad z=\pm i$$

$$w=sh^{-1}(z)=\ln\left[z+\left(z^{2}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\quad ;\quad z=\pm i$$

$$w=ch^{-1}(z)=\ln\left[z+\left(z^{2}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]\quad ;\quad z=\pm 1$$

$$w=th^{-1}(z)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\quad ;\quad z=\pm 1$$

9.6.2 الدالة الكسرية ذات البسط والمقام التحليلين:

وهي تحليلية في المستوى z باستثناء النقاط الشاذة لقيم z التي تعدم المقام دون البسط أما إذا انعدما معاً فتستخدم قاعدة لوبيتال للتأكد من إزالة الشذوذ(عدم التعيين).

تمارين محلولة(2)

(1): بين متى تكون الدالة: $f(z)=\dfrac{x+1-iy}{x^2+y^2+2x+1}$ قابلةً للاشتقاق ومتى تكون مستمرةً ؟

$$f(z)=u+iv=\frac{x+1}{x^2+y^2+2x+1}+i\frac{-y}{x^2+y^2+2x+1}\Rightarrow$$

$$u=\frac{x+1}{x^2+y^2+2x+1}\quad , \quad v=\frac{-y}{x^2+y^2+2x+1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(x+1)^2+y^2-2(x+1)^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}=\dfrac{y^2-(x+1)^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\ ,\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-2y(x+1)}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{2y(x+1)}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\quad ,\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{-(x+1)^2-y^2+2y^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}=\dfrac{y^2-(x+1)^2}{\left[(x+1)^2+y^2\right]^2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\qquad \forall(x,y)\in R^2\setminus\{(-1,0)\}$$

هذا يعني أن الدالة تقبل الاشتقاق في جميع نقاط المجموعة $\mathbb{C}$ ما عدا النقطة $z=-1+0i$ وبالتالي فهي مستمرة في $\mathbb{C}/\{(-1\ ,0)\}$ لدينا :

$$(x+1)^2+y^2=(x+1+iy)(x+1-iy)\Rightarrow f(z)=\frac{1}{x+1+iy}=\frac{1}{z+1}$$

(2): أثبت أن الدوال التالية غير تحليلية وبين متى تكون قابلة للاشتقاق:

$(i): f_1(z)=x^2-iy^2\ ,\ (ii): f_2(z)=\cos y-i\sin y$

$(i): f_1(z)=u+iv=x^2-iy^2\Rightarrow u=x^2\ ,\ v=-y^2$

الحل: إن المشتقات الجزئية لـ u,v موجودة ومستمرة في كل مكان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0\ ,\frac{\partial v}{\partial x}=0\ ;\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2y\ \Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ \Rightarrow\ x=-y$$

وبالتالي الدالة $f_1(z)$ غير تحليلية لأنه لا يوجد نطاق يحوي المستقيم $y=-x$ تكون فيه المشتقة موجودة ولكنها تقبل الاشتقاق من أجل جميع نقاط المستقيم $y=-x$ وتكون مشتقتها:

$$f_1'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x \quad \text{أو} \quad f_1'(z)=\left(\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-2y=2x$$

(ii): $f_2(z)=u+iv=\cos y-i\sin y \Rightarrow u=\cos y \ , v=-\sin y$

إن المشتقات الجزئية لـ u,v موجودة ومستمرة في كل مكان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\sin y\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\cos y$$

إن شرطي (كوشي-ريمان) تكون محققة عندما $\sin y=0\ ,\cos y=0$ وهذا غير ممكن من أجل أي نقطة في المستوي z فالدالة $f_2(z)$ غير تحليلية وغير قابلة للاشتقاق في أي نقطة من المستوي z .

(3): أثبت أن الدالة: $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ توافقية ثم أوجد مرافقتها v بحيث تكون الدالة $f(z)=u+iv$ تحليلية ثم عبر عن $f(z)$ بدلالة z :

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

وبالتالي فإن الدالة u تحقق معادلة لابلاس التفاضلية الديكارتية فهي دالة توافقية.

ولتعيين مرافقتها التوافقية v بحيث تكون: $f(z)=u+iv$ دالة تحليلية. من شرطي (كوشي- ريمان) نجد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{\partial v}{\partial y}=2\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\Rightarrow v=2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\phi_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{\partial v}{\partial x}\xrightarrow{\text{مشت } v \text{ لـ } x}\frac{2y}{x^2+y^2}=-\frac{-2\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+\phi'_1(x)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}\phi'_1(x)=0\\ \phi_1(x)=c\end{matrix}$$

$$\Rightarrow v=2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c\Rightarrow f(z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+2i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+ic$$

نبدل x بـ z و y بـ (0) فنجد:

$$f(z)=\ln z^2+ic$$

(4): أوجد معادلات (كوشي-ريمان) في الإحداثيات القطبية ثم بين أن التابعين الحقيقيين

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad , \qquad v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

هما الجزءان الحقيقي والتخيلي للدالة التحليلية:

$$f(z)=f\left(re^{i\theta}\right)=u+iv$$

ثم أوجد $f(z)$ بدلالة z.

الحل: لتكن الدالة: $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية r,θ

حيث: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ وبالتالي نجد أن:

$$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$$

حيث:

$$u(r,\theta)=u(r\cos\theta,r\sin\theta) \quad , \quad v(r,\theta)=v(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta \qquad (**)$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta \qquad (**)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\theta \qquad (*)$$

وباستخدام (كوشي–ريمان) ديكارتياً نجد:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos\theta-\dfrac{\partial v}{\partial x}\sin\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}r\sin\theta-\dfrac{\partial v}{\partial x}r\cos\theta=-r\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

معادلات (كوشي– ريمان) قطبياً.

نبرهن أن التابعين u,v المفروضان يحققان شرطي (كوشي–ريمان) قطبياً:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta\ ,\ \frac{\partial v}{\partial \theta}=\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}\Rightarrow$$

$$f(z)=u+iv=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\Rightarrow$$

$$f(z)=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}=re^{i\theta}+\frac{1}{re^{i\theta}}=z+\frac{1}{z}\Rightarrow f(z)=z+\frac{1}{z}$$

(5): أوجد الدالة التحليلية دوماً $f(z)$ التي تحقق الشروط:

$$\mathrm{Re}\{f'(z)\}=3x^2-4y-3y^2\ ,\ f(1+i)=0\ ,\ f(0)=6-2i$$

الحل:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-4y-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\Rightarrow u=x^3-4xy-3y^2x+\phi_1(y)$$
$$v=3x^2y-2y^2-y^3+\phi_2(x)\quad ,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow -4x-6xy+\phi'_1(y)=-6xy-\phi'_2(x)$$
$$\Rightarrow \phi'_1(y)=4x-\phi'_2(x)=c\Rightarrow\phi_1(y)=cy+c_1\quad,\quad \phi_2(x)=2x^2-cx+c_2$$
$$\Rightarrow f(z)=u+iv=\left(x^3-4xy-3xy^2+cy+c_1\right)+i\left(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2-cx+c_2\right)$$
$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow f(1+i)=0\Rightarrow -6+c+c_1=0\ \wedge\ 2-c+c_2=0\\&\Rightarrow f(0)=6-2i\Rightarrow c_1=6\qquad\wedge\ c_2=-2\end{aligned}\right\}\Rightarrow c=0$$
$$f(z)=x^3-4xy-3xy^2+6+i\left(3x^2y-2y^2-y^3+2x^2-2\right)$$

نبدل كل x بـ z وكل y بـ 0 فنجد أن:

$$f(z)=z^3+2iz^2+6-2i$$

(6): عين نطاق تحليلية كل من الدوال التالية :

$$w=\frac{e^{3z}}{z^3-1}+\frac{1}{2z^4}\ln\frac{1+z}{1-z}\quad (i)\qquad\qquad w=\ln\left(z^2+2z+2\right)\ (ii),$$
$$w=tg^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)+\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\ (iii)$$

الحل:

$$i)\ w=\frac{e^{3z}}{z^3-1}+\frac{1}{2z^4}\ln\frac{1+z}{1-z}$$

النقاط الشاذة للدالة الأولى هي جذور المعادلة:

$$z_k=e^{\frac{2\pi ki}{3}}\Leftarrow z^3=1\Leftarrow z^3-1=0$$

وبالتالي يوجد ثلاث نقاط شاذة لهذه الدالة هي:

$$z_0=1\,,\ z_1=e^{2\frac{\pi}{3}i}\ ,z_2=e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

والنقاط الشاذة للدالة الثانية هي حلول المعادلة $z=0\Leftarrow z^4=0$

ونقاط التفرع للدالة الثانية هي $z=\pm 1$ وبالتالي الدالة w تحليلية في المستوى z باستثناء مستقيمي التفرع والنقاط الشاذة.

$$(ii);w=\ln\left(z^2+2z+2\right)$$

نقاط التفرع لهذه الدالة هي حلول المعادلة: $z^2+2z+2=0$

$$\Rightarrow (z+1)^2+1=0 \Rightarrow (z+1)^2=i^2 \Rightarrow z+1=\pm i \qquad \Rightarrow z=-1\pm i$$

وبالتالي w تحليلية في المستوى z باستثناء مستقيمي التفرع:

$$(iii);w=tg^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)+\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\,{}^{z}\!/\!_{2}}{1-i\,{}^{z}\!/\!_{2}}+\left(z^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

نقاط التفرع للدالة اللوغاريتمية هي حلول المعادلة:

$$z=\pm\frac{2}{i} \Leftarrow 1\pm i\frac{z}{2}=0$$
$$z=\pm 2i$$

ونقاط التفرع للدالة الجذرية العامة هي حلول المعادلة:

$$z=\pm 1 \Leftarrow z^2-1=0$$

والدالة تحليلية في المستوى Z باستثناء مستقيمات التفرع.

(7): أوجد الجذور جميعها في المعادلات التالية: $chz=i \quad , \quad e^{4z}=i$

الحل:

$$e^{4z}=i \Rightarrow 4z=\ln i \Rightarrow z=\frac{1}{4}\ln i=\frac{1}{4}\ln e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow$$

$$z=\frac{1}{4}\left[\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right] \Rightarrow z=\frac{i\pi}{4}\left(2k+\frac{1}{2}\right);\ k=0,\pm 1,\pm 2,.....$$

$$chz=i \Rightarrow z=ch^{-1}i=\ln\left[i+\left(i^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\ln\left[i+(-2)^{\frac{1}{2}}\right] \Rightarrow$$

$$z=\ln\left[i+\left(2i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]=\ln\left(i\pm i\sqrt{2}\right)=\ln i\left(1\pm\sqrt{2}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$$

وبالتالي توجد مجموعتان من الحلول هما:

$$z=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\qquad ;k=0,\pm1,\pm2,....$$
$$z=\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$$

(8): أوجد فرع الدالة: $w=\sqrt{z}$ التي تأخذ القيمة $w=-i$ في النقطة $z=-1$

الحل:

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow w=\sqrt{z}=\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}}=r^{\frac{1}{2}}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi k\right)}\Rightarrow\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\pi k}$$

في النقطة $z=-1$ يكون $r=1$ ، $\theta=\pi$ نعوض فنجد:

$$-i=\sqrt{1}e^{\frac{\pi}{2}i}e^{i\pi k}\Rightarrow -i=ie^{i\pi k}\Rightarrow e^{i\pi k}=-1\Rightarrow\left(k\text{ فردي}\right)\Rightarrow w=-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

9: ما هي صورة نصف المستوي العلوي بواسطة فرع التفرع $w=\sqrt[3]{z}$ الذي تأخذ النقطة $z=i$ القيمة $w=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}$.

الحل:

$$z=re^{i\theta}\Rightarrow w=\sqrt[3]{z}=\left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+2\frac{k\pi}{3}\right)}$$

في النقطة $z=i$ يكون $r=1$ ، $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ و w يكتب بالشكل: $w=e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$$\Rightarrow e^{i\frac{5\pi}{6}}=\sqrt[3]{1}e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{2\pi k}{3}}\Rightarrow e^{i\frac{5\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi+4\pi k}{6}}\Rightarrow 5=1+4k\Rightarrow k=1$$

إذن يكون: $w=\sqrt[3]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}$

لنضع: $\phi=\dfrac{\theta}{3}+\dfrac{2\pi}{3}\ ;\ \rho=\sqrt[3]{r}\Leftarrow w=\rho e^{i\theta}$ من أجل نقاط المستوي العلوي يكون

$0\le\theta\le\pi\ ,\ r\ge0$ $\Leftarrow$ الصورة:

$$\frac{2\pi}{3}\le\phi\le\pi\qquad,\qquad\rho\ge0$$

تمارين غير محلولة(2)

الاستمرارية:

(1): ادرس استمرارية الدوال الآتية عند النقطة $z = 0$:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{Im\, z^2}{|z|^2} & if \quad z \neq 0 \\ 0 & if \quad z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{Re\, z^2}{|z|} & if \quad z \neq 0 \\ 0 & if \quad z = 0 \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} |z|^2 Im\left(\frac{1}{z}\right) & if \quad z \neq 0 \\ 0 & if \quad z = 0 \end{cases} \qquad f(z) = \begin{cases} \frac{(Re\, z)}{1-|z|} & if \quad z \neq 0 \\ 0 & if \quad z = 0 \end{cases}$$

المشتقات:

(2): أوجد قيمة المشتقة عند النقطة المحددة للدوال العقدية الآتية:

a) $f(z) = (z-i)/(z+i)$ عند النقطة $z_0 = i$.

b) $f(z) = (z-4i)^8$ عند النقطة $z_0 = 3+4i$.

c) $f(z) = (1.5\, z + 2i)/(3iz - 4)$ عند أي قيمة لـ z.

d) $f(z) = i(1-z)^n$ عند النقطة $z_0 = 0$.

e) $f(z) = (iz^3 + 3z^2)^3$ عند النقطة $z_0 = 2i$.

f) $f(z) = z^3/(z+i)^3$ عند النقطة $z_0 = i$.

علاقات كوشي ريمان:

(3): هل الدوال العقدية الآتية تحليلية أم لا ؟

1. $f(z) = iz\bar{z}$
2. $f(z) = e^{-2x}(\cos 2y - i \sin 2y)$
3. $f(z) = e^{x}(\cos y - i \sin y)$
4. $f(z) = Re(z^2) - i\, Im(z^2)$
5. $f(z) = 1/(z - z^5)$
6. $f(z) = i/z^8$
7. $f(z) = Arg\, 2\pi z$
8. $f(z) = 3\pi^2/(z^3 - 4\pi^2 z)$
9. $f(z) = \ln|z| + i\, Arg\, z$
10. $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

الدوال التوافقية:

(4): هل الدوال الآتية توافقية وإذا كان جوابك نعم، أوجد الدالة التحليلية المتوافقة:
.$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$

1. $u = x^2 + y^2$
2. $u = x\,y$
3. $v = x\,y$
4. $u = x/(x^2 + y^2)$
5. $u = \sin x \cosh y$
6. $v = (2x + 1)y$
7. $u = x^3 - 2xy^2$
8. $v = e^x \sin 2y$

علاقة لابلاس:

(5): هل تحقق الدالة $f(z) = 3\pi^2/(z^3 - 4\pi^2 z)$ علاقة لابلاس.

فهرس الفصل الثالث

الفصل الثالث

3. التكاملات العقدية ومبرهنة وصيغ كوشي التكاملية

1.3 التكامل الخطي العقدي:

تعريفه و طرق حسابه:

ليكن C منحنياً مستوياً محدداً و صقيلاً جزئياً و موجهاً بالاتجاه الموجب (أي الدوران على C معاكساً لدوران عقارب الساعة) و لتكن الدالة العقدية:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=u+iv$$

مستمرةً على C. إن التكامل الخطي العقدي لهذه الدالة على المنحني C هو:

$$\int_C f(z)dz=\int_C (u+iv)(dx+idy)=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (vdx+udy)$$

أي أنه يتألف من مجموع تكاملين خطيين حقيقيين على منحن موجه و هما موجودان لأن $f(z)$ الدالة على C وبالتالي جزئيه الحقيقي u و التخيلي v مستمران على C.

ملاحظات:

1) يمكن للمنحني C أن يكون مفتوحاً أو مغلقاً،و نرمز للتكامل على منحن مغلق بالرمز $\oint_C f(z)dz$.

2) قيمة التكامل العقدي ترتبط بمسار المكاملة ، ولا يكون التكامل مستقلاً عن المسار إلا ضمن شروط خاصة.

3) إن هذا المنحني لا يمكن أن يقطع أي مستقيم من مستقيمات تفرع الدالة(إن وجدت)إذاً الدالة غير مستمرة عليها.

خواصه:

إذا كانت $g(z), f(z)$ دالتان مستمرتان و قابلتان للتكامل على منحن C طوله L.

لتكن a,b,m ثلاث نقاط على C. نورد فيما يأتي أهم الخواص:

$$1):\quad \int_C [f(z)\pm g(z)]dz = \int_C f(z)dz \pm \int_C g(z)dz$$

$$2):\quad \int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz\ ;$$ (حيث : A ثابت)

$$3):\quad \int_a^b f(z)dz = -\int_b^a f(z)dz$$

$$4):\quad \int_a^b f(z)dz = \int_a^m f(z)dz + \int_m^b f(z)dz\ ;$$

(حيث a,b,m نقاط على C)

$$5):\quad \left|\int_C f(z)dz\right| \le ML;$$

(حيث $|f(z)|\le M$ و $M\rangle 0$ ثابت و L طول المنحني C).

2.3 مبرهنة كوشي:

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما R وكذلك على محيطها C ، عندئذٍ يكون:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

البرهان: نظراً لتعقيد البرهان في الحالة التي تكون فيها الدالة تحليلية(أي لها مشتقة في كل نقطة من R)فإننا نكتفي ببرهان المبرهنة في الحالة الخاصة التي نكون فيها $f'(z)$ مستمرة على R. لدينا:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy) \qquad (3.2.1)$$

بما أن المشتقة الأولى للدالة مستمرة و هي:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

فينتج أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين u , v مستمرة، ويمكن تطبيق مبرهنة غرين في المستوي على كل من التكاملين الخطيين الحقيقيين الموجهين في الطرف الأيمن من (3.2.1)لنحصل على:

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy \quad (3.2.2)$$

ولكن $f(z)$ تحليلية في R أي أن المشتقات الجزئية الأولى للدالتين u , v تحقق معادلتي (كوشي- ريمان) في كل نقطة من R فينعدم التكاملان في الطرف الأيمن من(3.2.2) و ينتج المطلوب.

نتائج:

1ً):المنحنيات المتكافئة لدالة تحليلية:

إن:
$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)d\,z$$

أي أنه يمكن الانتقال من منحن إلى لآخر ما دام الدالة تحليلية في المنطقة المحاطة بهذين المنحنيين $(C \subset C_1)$ ويدعى C , C_1 في هذه الحالة بالمنحنيين المتكافئين لـ $f(z)$

تعميم النتيجة السابقة:

2ً):استقلال تكامل الدالة التحليلية عن المسار:

لتكن $f(z)$ دالةً تحليليةً في منطقة بسيطة R وليكن C منحنياً مفتوحاً واقعاً تماماً في R ويصل بين النقطتين a,b ، عندئذٍ التكامل $\int_C f(z)d\,z$ مستقل عن المسار C أي

أن:
$$\int_a^b f(z)d\,z = [F(z)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث $F(z)$ الدالة الأصلية لـ $f(z)$.و بعبارة أخرى يتم حساب التكامل العقدي في هذه الحالة كما يحسب التكامل المحدد لدالة حقيقية لمتحول حقيقي.

3.3 صيغ كوشي التكاملية:

إذا كانت $f(z)$ تحليليةً على منحنياً C مستوياً محدداً و صقيلاً جزئياً و موجهاً بالاتجاه الموجب (أي الدوران على C معاكساً لدوران عقارب الساعة) وداخله و a نقطة داخل C ، فإن:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)}d\,z \quad ; \qquad (I)$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}d\,z, n = 1,2,3,\ldots \qquad (II)$$

و تعطي الصيغة الأولى قيمة الدالة في نقطة مفروضة من المستوي العقدي ، بينما تعطي الصيغة الثانية قيمة المشتقة النونية لهذه الدالة في تلك النقطة ، و ذلك عندما نعلم قيمة الدالة على منحنٍ مغلقٍ يحيط بالنقطة.

4.3 نتيجة:

إن وجود المشتقة الأولى لدالة عقدية في منطقة بسيطة الاتصال، هو شرط كافٍ لوجود واستمرار جميع المشتقات الأعلى رتبة في كل نقطة داخلية في هذه المنطقة.

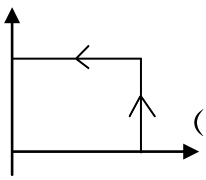
تمارين محلولة (3)

(1): احسب التكامل: $I=\oint_C |z|^2\,dz$ في الحالتين التاليتين:

(i) : C هو المربع الذي رؤوسه النقاط: $o(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1)$ ، والموجه بالاتجاه الموجب (بعكس دوران عقارب الساعة).

(ii) : C هي الدائرة $|z|=1$ والموجه بالاتجاه الموجب (بعكس دوران عقارب الساعة).

الحل: (i) :



شكل(1)

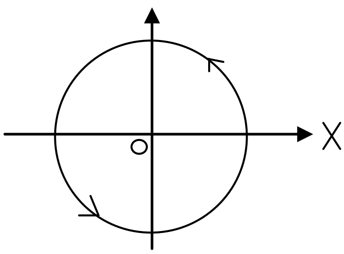
$$|z|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2 \quad ; \quad dz=dx+idy$$

$$I=\int_{OA}|z|^2\,dz+\int_{AB}|z|^2\,dz+\int_{BC}|z|^2\,dz+\int_{CO}|z|^2\,dz$$

$$I=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 i\left(1+y^2\right)dy+\int_0^1\left(x^2+1\right)dx+\int_0^1 i\left(y^2\right)dy$$

$$I=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+i\left[y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^0+i\left[\frac{1}{3}y^3\right]_1^0$$

$$=\frac{1}{3}+i\left(1+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{1}{3}i=i-1$$



شكل(2)

(ii): من أجل جميع نقط الدائرة C يكون لدينا:

$$|z|=1\Rightarrow z=e^{i\theta} \quad ;$$

$$\theta\in[0,2\pi]\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta, |z|^2=1$$

$$I=\int_0^{2\pi} i\,e^{i\theta}d\theta=\left[e^{i\theta}\right]_0^{2\pi}=0$$

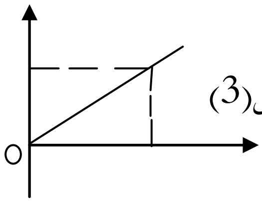
(2):احسب التكامل $I=\int_0^{1+i}\left(x-y+ix^2\right)dz$

(i) : إذا كان منحنى المكاملة هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النهايتين.

(ii) : إذا كان منحنى المكاملة يتألف من المستقيم $y=0$ يليه المستقيم $x=1$.

(iii) : إذا كان منحنى المكاملة يتألف من المستقيم $x=0$ يليه المستقيم $y=1$.

الحل: (i): الدالة: $f(z)=x-y+ix^2$ مستمر على المنحنى C المحدود والصقيل والموجه فالتكامل I موجود.



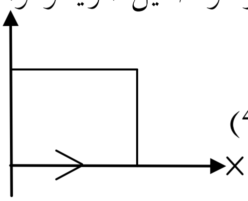
شكل(3)

من أجل جميع نقاط المنحنى C يكون لدينا:

$$y=x: x\in[0,1] \Rightarrow z=x+iy=x+ix=(1+i)x$$
$$\Rightarrow dz=(1+i)dx$$

$$\Rightarrow I=\int_0^1 (0+ix^2)(1+i)dx=i(1+i)\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}(i-1)$$

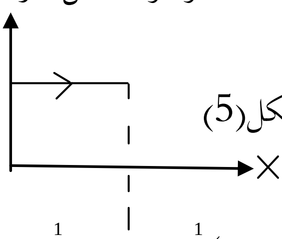
(ii) الدالة: $f(z)=x-y+ix^2$ مستمر على المنحنى C المحدود والصقيل جزئياً والموجه فالتكامل I موجود:



شكل(4)

$$I=\int_0^1 (x+ix^2)dx+i\int_0^1 (1-y+i)dy$$
$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+i\left[(1+i)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{i}{3}+i\left(1+i-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3+5i}{6}$$

(iii) : الدالة: $f(z)=x-y+ix^2$ مستمر على المنحني C المحدود والصقيل جزئياً فالتكامل I موجود:



شكل(5)

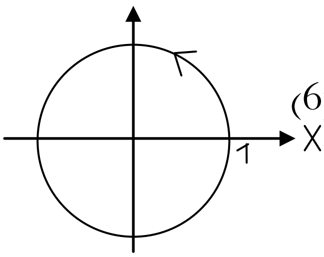
$$I=i\int_0^1 (-y)dy+\int_0^1 (x-1+ix^2)dx=i\left[\frac{-y^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x+\frac{i}{3}x^3\right]_0^1$$
$$\Rightarrow I=-\frac{i}{2}+\frac{1}{2}-1+\frac{i}{3}=-\frac{3+i}{6}$$

(3): احسب التكامل: $I=\oint_c \ln z dz$ حيث $\ln z$ هو التعيين الرئيسي للدالة اللوغاريتمية و C هو الدائرة $|z|=1$ في الحالتين:

(a) : نقطة البداية هي النقطة $z_0=1$.

(b) : نقطة البداية هي النقطة $z_0=-1$ والدوران بعكس عقارب الساعة.

الحل: (a) :الدالة $f(z)=\ln z$ مستمرة من أجل جميع نقاط المستوى العقدي باستثناء نقط مستقيم التفرع المنطلق من نقطة التفرع $z=0$ إلى آخر المستوى العقدي فحتى تكون الدالة $f(z)$ مستمرة على المنحني C الذي بدايته $z_0=1$ نأخذ مستقيم التفرع المنطلق على الجزء الموجب من المحور oX وبالتالي الدالة $f(z)$ مستمرة من أجل جميع نقط المنحني:



شكل(6) $c-\{1\}: z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi[$

والتعيين الرئيسي للدالة اللوغاريتمية هو: $\ln z=\ln r+i\theta$

ومن أجل جميع نقاط الدائرة C يكون:

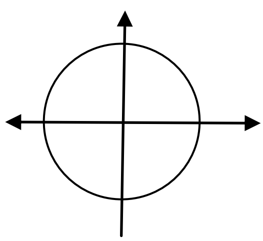
$$z=e^{i\theta}\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\ ,\ \ln z=i\theta\Rightarrow$$

$$I=\lim_{t\to 2\pi}\int_0^t (i\theta) ie^{i\theta}d\theta=-\lim_{t\to 2\pi}\int_0^t \underbrace{\theta}_{u}\underbrace{e^{i\theta}d\theta}_{dv}\Rightarrow$$

$$I=-\lim_{t\to 2\pi}\left\{\left[\frac{1}{i}\theta e^{i\theta}\right]_0^t-\frac{1}{i}\int_0^t e^{i\theta}d\theta\right\}=-\lim_{t\to 2\pi}\left\{\frac{1}{i}\theta e^{i\theta}+e^{i\theta}\right]_0^t\right\}=$$

$$=-\left\{-2\pi ie^{2\pi i}+e^{2\pi i}-1\right\}=2\pi i$$

(b) : نأخذ مستقيم التفرع منطبق على الجزء السالب من المحور oX فالدالة $f(z)=\ln z$ مستمرة من أجل جميع نقط المنحني:



شكل(7) $c-\{-1\}: z=e^{i\theta}:\theta\in[-\pi,\pi[\Rightarrow$

$$I=\lim_{t\to\pi}\int_{-\pi}^{t}(i\theta)ie^{i\theta}d\theta=-\lim_{t\to\pi}\left\{\left[\frac{1}{i}\theta\, e^{i\theta}\right]_{-\pi}^{t}+\left[e^{i\theta}\right]_{-\pi}^{t}\right\}$$

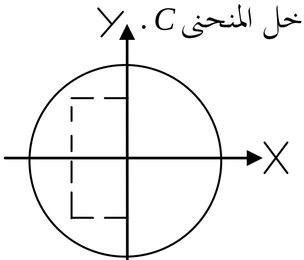
$$I=-\left[\frac{1}{i}\pi e^{i\pi}+\frac{1}{\theta}\pi\, e^{-i\pi}+e^{i\pi}-e^{-i\pi}\right]=-(i\pi+i\pi)=-2i\pi$$

(4): احسب التكامل: $I=\oint_C\frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$ حيث C هو الدائرة $|z+1-i|=2$ والموجهة بالاتجاه الموجب؟

الحل: النقاط الشاذة للدالة المكاملة هي حلول المعادلة:

$$z^2+2z+5=0\Rightarrow(z+1)^2=-4=4i^2\Rightarrow z=-1\pm2i$$

و للدالة المكاملة نقطة شاذة وحيدة هي $z=-1+2i$ تقع داخل المنحنى C.



$$I=\oint_c\frac{\frac{z+4}{(z+1+2i)}}{[z-(-1+2i)]}dz$$ شكل(8)

وبالتالي لدينا تكامل دالة كسرية بسطها $f(z)=\frac{z+4}{z+1+2i}$ دالة تحليلية على وداخل المنحني C ومقامه من الشكل $z-a$ حيث $a=-1+2i$ والمنحني C محدود وصقيل مغلق وموجه فحسب صيغة كوشي التكاملية الأولى:

$$I=2\pi if(-1+2i)=2\pi i\frac{-1+2i+4}{-1+2i+1+2i}=2\pi i\frac{3+2i}{4i}\qquad\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}(3+2i)$$

(5): احسب التكامل: $I=\oint_c\frac{(6z+3)\cos\pi z}{(z-1)(z+2)^2}dz$ حيث C هو الدائرة $|z|=3$ والموجهة بالاتجاه الموجب ؟

الحل: $$\frac{6z+3}{(z-1)(z+2)^2}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+2}+\frac{C}{(z+2)^2}$$

نضرب الطرفين بـ $z-1$ ثم نعوض عن Z بـ 1 فنجد $A=1$ ثم نضرب الطرفين بـ $(z+2)^2$ ثم نعوض عن Z بـ (-2) فنجد $C=3$:

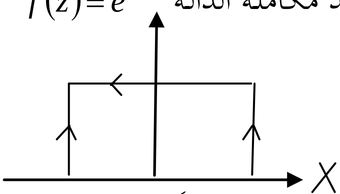
$$B=\frac{1}{1!}\left[\frac{6z+3}{z-1}\right]'_{z=-2}=\frac{6(z-1)-(6z+3)}{(z-1)^2}\Big|_{z=-2}\Rightarrow B=-1$$

$$\Rightarrow I=\oint_c \frac{\cos\pi z}{z-1}dz-\oint_c \frac{\cos\pi z}{z+2}dz+\oint_c \frac{3\cos\pi z}{(z+2)^2}dz$$

النقاط الشاذة لدالة المكاملة هي $1,-2$ وهي واقعة داخل المنحني C ونلاحظ بسط كل تكامل من هذه التكاملات هو دالة تحليلية دوماً والمقام من الشكل $(z-a)^{n+1}$ ومنحني المكاملة c محدود وصقيل ومغلق وموجه فحسب صيغ كوشي التكاملية نجد أن:

$$I=2\pi i\left[\cos\pi z\,|_{z=1}-\cos\pi z\,|_{z=-2}+\frac{3}{1!}\frac{d}{dz}\cos\pi z\,|_{z=-2}\right]\Rightarrow I=2\pi i[-1-1+0]$$
$$\Rightarrow I=-4\pi i$$

(6): احسب التكامل: $I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2x.dx$ وذلك بعد مكاملة الدالة $f(z)=e^{-z^2}$ على المنحني C المبين بالشكل(9):


شكل(9)

الحل:

الدالة $f(z)=e^{-z^2}$ تحليلية على وداخل المنحني C المحدود والصقيل جزئياً والمغلق والموجه بحسب نظرية كوشي يكون: $\oint_c e^{-z^2}dz=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-t}^{t}e^{-x^2}dx}_{I_1}+\underbrace{i\int_{0}^{1}e^{-(t+iy)^2}dy}_{I_2}+\underbrace{\int_{-t}^{t}e^{-(x+i)^2}dx}_{I_3}+\underbrace{i\int_{-t}^{t}e^{-(-t+iy)^2}dy}_{I_4}=0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}I_1=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\int_{0}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi} \quad (\text{تكامل بواسون})$$

$$0\le|I_2|=\left|\int_0^1 e^{y^2-t^2-2ity}dy\right|\le\int_0^1\left|e^{y^2-t^2-2ity}\right|dy=\int_0^1 e^{y^2-t^2}dy\le\int_0^1 e^{1-t^2}dy$$

$$\Rightarrow 0\le|I_2|\le e^{1-t^2}\xrightarrow[t\to\infty]{}0\Rightarrow \lim_{t\to\infty}I_2=0$$

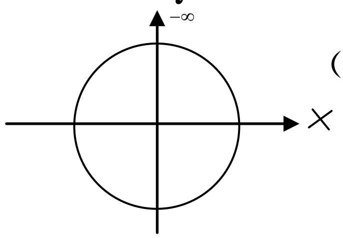
$$I_3=e\int_{t}^{-t}e^{-x^2}e^{-2ix}dx=-e\int_{-t}^{t}e^{-x^2}[\cos 2x-i\sin 2x]dx$$

$$0\le|I_4|=\left|\int_1^0 e^{y^2-t^2+2ity}dy\right|\le-\int_0^1\left|e^{y^2-t^2}e^{2ity}\right|dy=-\int_0^1 e^{y^2-t^2}dy\le-\int_0^1 e^{1-t^2}dy$$

$$\Rightarrow 0\le|I_4|\le e^{1-t^2}\xrightarrow[t\to\infty]{}\Rightarrow \lim_{t\to\infty}I_4=0$$

نأخذ النهاية من العلاقة $(*)$ عندما $t \to \infty$ نجد:

$$\sqrt{\pi}+0-e\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[\cos 2x - i\sin 2x\right]dx+0=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2x dx=\frac{\sqrt{\pi}}{e}$$



شكل(10)

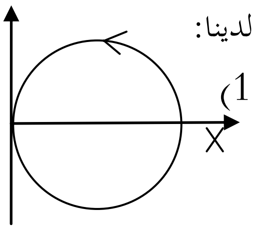
(7): احسب التكامل: $I=\oint_c \overline{z^2}dz$

في الحالتين التاليتين:

(1)- C هو الدائرة $|z|=1$ والموجهة بالاتجاه الموجب .

(2)- C هو الدائرة $|z-1|=1$ والموجهة بالاتجاه الموجب.

الحل: (1)- الدالة: $f(z)=\overline{z^2}$ مستمرة عل المنحني C المحدود والصقيل والموجه فالتكامل I موجود من أجل جميع نقط الدائرة $C(1,0)$ فيكون لدينا:



شكل(11)

$$|z|=1 \Rightarrow z=e^{i\theta}:\theta\in[0,2\pi] \Rightarrow z^2=e^{2i\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{z^2}=e^{-2i\theta} \quad , dz=ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=i\int_0^{2\pi} e^{-2i\theta}e^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta=-\left[e^{-i\theta}\right]_0^{2\pi}=0$$

(2)- الدالة: $f(z)=\overline{z^2}$ مستمرة على المنحني C المحدود والصقيل والموجه فالتكامل I موجود من أجل جميع نقط الدائرة C فيكون لدينا:

$$|z-1|=1 \Rightarrow z=1+e^{i\theta}:\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2=\left(1+e^{i\theta}\right)^2=1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta} \Rightarrow \overline{z^2}=1+2e^{-i\theta}+e^{-2i\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}\right)e^{i\theta}d\theta=i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\theta}+2+e^{-i\theta}\right)d\theta=$$

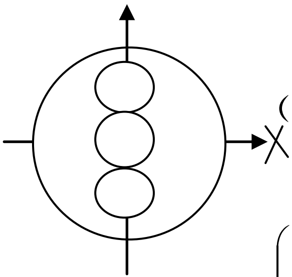
$$=\left[2i\theta+2i\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=(2\pi+4)i \quad : \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(8): احسب التكامل: $I=\oint_C \frac{4z^2-iz+4}{z(z^2+1)}dz$ حيث C الدائرة $|z|=2$ والموجه بالاتجاه الموجب؟

الحل: النقاط الشاذة للدالة المكاملة هي حلول المعادلة:

$$z\left(z^2+1\right)=0 \Rightarrow z_1=i, z_2=0, z_3=-i$$

وجميع هذه النقاط تقع داخل المنحنى C نحيط هذه النقاط بدوائر C_3, C_2, C_1 مراكزها z_3, z_2, z_1 على الترتيب وأنصاف أقطارها صغيرة بحيث لا تتقاطع مثنى مثنى مع بعضها ولا يتقاطع أياً منها مع C عندئذٍ يكون:



شكل(12)

$$I=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}+\oint_{C_3}$$

$$I=\oint_{C_1}\left(\frac{\frac{9z^2-iz+4}{z(z+i)}}{z-i}\right)dz+\oint_{C_2}\left(\frac{\frac{9z^2-iz+4}{z^2+1}}{z}\right)dz+\oint_{C_3}\left(\frac{\frac{9z^2-iz+4}{z(z-i)}}{z+i}\right)dz$$

نلاحظ أن البسط في كل من التكاملات الثلاث هو دالة تحليلية على وداخل منحنى المكاملة الخاص به والمقام من الشكل $(z-a)$ ومنحنيات المكاملة محددة وصقلية ومغلقة ووجهة فحسب صيغة كوشي التكاملية الأولى نجد:

$$I=2\pi i\left[\left.\frac{9z^2-iz+4}{z(z+i)}\right|_{z=i}+\left.\frac{9z^2-iz+4}{z^2+1}\right|_{z=0}+\left.\frac{9z^2-iz+4}{z(z-i)}\right|_{z=-i}\right]$$

$$I=2\pi i\left(\frac{-9+1+4}{-2}+\frac{4}{1}+\frac{-9-1+4}{-2}\right)=2\pi i\,(2+4+3)=18\pi i$$

$$\Rightarrow I=18\pi i$$

تمارين غير محلولة(3)

تمرين: احسب قيمة كلاً من التكاملات التالية ، بعد التأكد من وجود كلٍ منها:

1. احسب قيمة التكاملين: $\oint_C \frac{\cos 2z}{z^2(z+3)}dz$ و $\oint_C \tan z\, dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z| = 2$.

2. احسب قيمة التكامل: $\oint_C \left(z^2 e^{\frac{1}{\pi z}} + \frac{ze^z}{z^4-\pi^4}\right) dz$ حيث إن C هو الدائرة $4x^2 + y^2 = 16$.

3. احسب قيمة التكامل: $\oint_\gamma \frac{1}{(z-1)(z+2)^2} dz$ حيث إن γ هو الدائرة $|z| = \frac{1}{2}$ أو $|z| = \frac{3}{2}$ أو $|z| = 3$.

4. احسب قيمة التكامل: $\oint_C \frac{z+1}{z^2(z-2i)} dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z| = 1$ أو $|z-2i| = 1$ أو $|z-2i| = 4$.

5. احسب قيمة التكامل: $\oint_C z^3 e^{-1/z^2} dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z| = 5$ أو $|z+i| = 2$ أو $|z-3| = 1$.

6. احسب قيمة التكامل: $\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2} dz$ حيث إن C هو الدائرة $|z| = 3$.

7. احسب التكامل: $\oint_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} dz$ حيث إن C هو المستطيل:
$y = -\frac{1}{2},\quad y = 1,\quad x = 1,\quad x = -2$.

فهرس الفصل الرابع

الفصل الرابع

4. المتسلسلات (Series)

نخصص هذا الفصل أساساً لدراسة تمثيل الدوال التحليلية على صورة متسلسلات وسنبرهن مبرهنات تبين لنا وجود مثل هذا التمثيل كما أننا سنعطى طرائقاً مبسطةً لمعالجة المتسلسلات.

1.4 تقارب المتتاليات والمتسلسلات convergence of sequences and series

يقال إن للمتتالية اللانهائية: $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ من الأعداد المركبة نهاية z، إذا كان لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon > 0$، يوجد عدد صحيح موجب $n_0 > 0$ بحيث:

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad n > n_0$$

والتفسير الهندسي لمفهوم النهاية، هو أنه يمكننا دائماً اختيار عدد صحيح موجب n مهما كان كبيراً بحيث تكون جميع النقط z_n، حيث $n > n_0$ من هذه المتتالية قريبة قرباً كافياً وكيفما نشاء من النقطة z.

سنترك للقارئ برهان أنه إذا كانت لمتتالية ما نهاية، فإن هذه النهاية لابد وأن تكون وحيدة، والمتتالية التي لها نهاية z يطلق عليها متتالية تقاربية convergent (أو إنها تؤول إلى z) ونعبر عن ذلك رمزياً، بأن نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad (1)$$

والمتتالية التي ليس لها نهاية تسمى متتالية تباعدية divergent.

مبرهنة : 4-1-1: إذا كان $(n = 1,2,\cdots)$ $z_n = x_n + iy_n$ و $z = x + iy$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad (2)$$

إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad , \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad (3)$$

الإثبات:الشرط اللازم: لإثبات المبرهنة نفرض أولا صحة (2) ثم نبرهن تحقق الشرط (3) وفقاً للشرط (2) فإنه لكل عدد حقيقي موجب معطى ε يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث:

$$|x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon \quad \text{طالما} \quad n > n_0$$

لكن:

$$|x_n - x| \le |x_n - x + i(y_n - y)| \quad \& \quad |y_n - y| \le |x_n - x + i(y_n - y)|$$

وهذا ينتج بالضرورة:

$$|x_n - x| < \varepsilon \qquad \& \qquad |y_n - y| < \varepsilon$$

لجميع $n > n_0$ وهذه الشروط (3) المطلوب استيفائها.وبالعكس:

الشرط الكافي: لنفرض الآن صحة الشروط (3) نعلم أنه لكل عدد حقيقي موجب معطى ε يوجد عددان صحيحان موجبان n_1, n_2 بحيث:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{طالما} \qquad n > n_1$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{طالما} \qquad n > n_2$$

وعليه فإن:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

طالما كان $n > n_0$ حيث n_0 أكبر العددين الصحيحين n_1, n_2 ، لكن:

$$|x_n + i\, y_n - (x + iy)| \le |x_n - x| + |y_n - y|$$

ومن ثم فإن $|z_n - z| < \varepsilon$ طالما $n > n_0$ والشرط (2) المطلوب تحققه.

يقال للمتسلسلة اللانهائية:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

حيث كل من z_n عدد مركب أنها تؤول إلى العدد s إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية partial sums تقاربية ونهايتها s في هذه الحالة نقول إن s هو مجموع sum المتسلسلة اللانهائية قيد البحث ونعبر عن ذلك بأن نكتب:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$$

وحيث إن نهاية أي متتالية تقاربية تكون وحيدة فإننا نستنتج أن أي متسلسلة تقاربية لا يمكن أن يكون لها أكثر من مجموع.

يقال لمتسلسلة لانهائية إنها تباعدية divergent إذا لم تكن تقاربية.

مبرهنة : 4-1-2:إذا كان $(n = 1,2,\cdots)$ $z_n = x_n + iy_n$ و $s = x + iy$ فإن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s \qquad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \qquad \& \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

الإثبات:ليكن s_n مجموع الحدود الأولى التي عددها n من المتسلسلة (4) نلاحظ الآن:

$$s_n = X_n + iY_n \qquad (5)$$

حيث:

$$X_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \& \qquad Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (6)$$

الآن فالشرط (4) متحقق إذا وفقط إذا كان: $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ وعلى ضوء العلاقة (6) فضلاً عن المبرهنة السابقة فإن هذا الشرط يكون متحققاً إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \& \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y \qquad (7)$$

وهذا يعني أن الشرطين (4) و(7) شرطان متكافئان وحيث إن X_n و Y_n هما المجاميع الجزئية للمتسلسلتين الواردتين في (5) فإننا نكون بذلك قد أثبتنا المبرهنة.

لإثبات أن مجموع متسلسلة ما هو العدد s سنجد أنه من الملائم في كثير من الحالات استخدام ما نطلق عليه الباقي remainder بعد حدود عددها n والباقي $R_n(z)$ معرف كالآتي:

لاحظ أن: $|s_n - s| = |R_n(z) - 0|$ وعليه فإنه وفقاً للتعريف الأول لنهاية متتالية يكون للنهاية (7) وجود إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0 \qquad (8)$$

وعليه فإن مجموع متسلسلة تقاربية هو العدد s إذا وفقط إذا كانت متتالية البواقي تقاربية ونهايتها الصفر.

نشير هنا إلى متسلسلات القوى تلعب دوراً هاماً في نظرية المتغيرات المركبة. ومتسلسلات القوى هي متسلسلات على الصورة:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

أو:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

حيث $a_0,\ z_0,\ a_n$ أعداد (ثوابت) مركبة وحيث z هو أي عدد مركب داخل منطقة معينة لمثل هذه المتسلسلات التي تشتمل على متغير z. سنرمز لكل من المجموع والمجاميع الجزئية والبواقي بالرموز $R_n(z),\ s_n(z),\ s(z)$ على التعاقب.

تمارين: 4-1-1

1 برهن بطريقتين مختلفتين تقارب المتتالية التي حدها العام:

$$z_n = -2 + i\,\frac{(-1)^n}{n^2}$$

2 ليكن $r_n\ ,\ \theta_n$ هما المقياس والقيمة الأساسية لسعة العدد المركب z_n لكل n في التمرين (1) بين أن المتتالية $r_n\ (n = 1,2,\cdots)$ متتالية تقاربية وبأن المتتالية $\theta_n\ (n = 1,2,\cdots)$ متتالية تباعدية.

3 استخدم الباقي $R_n(z)$ لبرهان أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$$

حيث z هو أي عدد مركب بحيث $|z| < 1$.

4 في الصيغة المعطاة في التمرين (3) ضع $z = re^{i\theta}$ حيث $0 < r < 1$ ومن ثم برهن أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r \sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^{\,2}}$$

5 برهن إذا وجد لمتتالية ما نهاية فإن هذه النهاية تكون وحيدة.

6 إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ فبرهن أن: $\sum_{n=1}^{\infty} z'_n = s'$.

7 إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ فبرهن أن: $\sum_{n=1}^{\infty} c\, z_n = c\, s$.

8 برهن إذا كان z هو نهاية للمتتالية $(n = 1,2,\cdots)$ z_n فإنه يوجد عدد حقيقي موجب m بحيث $|z_n| < m$ لجميع n.

اقتراح: لاحظ أنه يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث:

$$|z_n| \le |z| + |z_n - z| < |z| + 1$$

طالما كان $n > n_0$.

9 برهن أنه إذا كان z نهاية للمتتالية التقاربية $(n = 1,2,\cdots)$ z_n وكان $|z_n| \le m$ لجميع n فإن $|z| \le m$.

اقتراح: لاحظ أن الفرض $|z| > m$ يستلزم وجود عدد صحيح موجب n_0 بحيث $|z - z_n| < |z| - m$ طالما كان $n > n_0$ ومن ثم استخدام المتباينة $|z| - |z_n| \le |z - z_n|$ للحصول على التناقض بأن $|z_n| > m$ طالما كان $n > n_0$.

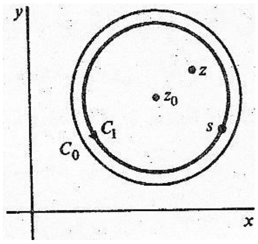
2.4 متسلسلة تايلور

نبرهن الآن واحدة من أهم مبرهنات هذا الباب، ألا وهي مبرهنة تايلور.

مبرهنة 4-2-1: لتكن f دالة تحليلية لجميع نقاط داخلية الدائرة c_0 التي مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 عند أي نقطة z في داخلية c_0 يكون:

$$f(\quad) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots \qquad (1)$$

وهذا يعني أن متسلسلة القوى أعلاه متسلسلة تقاربية مجموعها $f(z)$ طالما كان $|z-z_0| < r_0$.



الشكل: 4–1

مفكوك $f(z)$ المعطى بالصيغة (1) هو متسلسلة تايلور للدالة $f(z)$ حول النقطة z_0 ونشير إلى أن هذا المفكوك هو متسلسلة تايلور المعروفة في مبادئ علم التفاضل والتكامل وذلك عندما تكون جميع حدود المفكوك أعدادا حقيقية.

لبرهان المبرهنة نعتبر أي نقطة ثابتة z في داخلية الدائرة c_0 إذا كان $|z-z_0| = r$ فإن $r < r_0$. إذا كانت s أي نقطة على الدائرة c_1 مركزها z_0 ونصف قطرها r_1 حيث $r < r_1 < r_0$ فإن: $|s-z_0| = r_1$ (شكل: 4–1) حيث إن z نقطة في داخلية c_1 وإن f تحليلية لجميع نقاط الدائرة c_1 وداخليتها فإنه يمكننا استخدام صيغة تكامل كوشي، وعليه يكون:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c1}\frac{f(s)ds}{s-z} \qquad (2)$$

حيث c_1 موجهة في الاتجاه الموجب الآن:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0}\,\frac{1}{1-(z-z_0)/(s-z_0)}$$

وحيث إنه لأي عدد مركب c لا يساوي 1 يكون:

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} + \frac{c^n}{1-c}$$

فإننا نحصل على:

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0} \times \left\{1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \cdots + \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^{n-1} + \frac{1}{1-(z-z_0)/(s-z_0)}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n\right\}$$

وعليه فإن:

$$\frac{f(s)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} + \frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0) + \cdots + \frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1} + \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}(z-z_0)^n$$

نكامل الآن كل حد من هذه الحدود حول c_1 موجهاً في الاتجاه المضاد لعقارب الساعة. إذا قسمنا كلا من طرفي المعادلة –بعد إجراء هذه التكاملات– على $2\pi i$ واستخدامنا الصيغة (2) فضلاً عن الصيغ الآتية للتكامل:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

فإننا نحصل على:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1} + R_n(z) \qquad (3)$$

حيث:

$$R_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_{c1} \frac{f(s)ds}{(s-z)(s-z_0)^n} \qquad (4)$$

حيث إن $|z-z_0| = r$ و $|s-z_0| = r_1$ يكون:

$$|s-z| \geq |s-z_0| - |z-z_0| = r_1 - r$$

وعليه فإذا أخذنا M لتكون القيمة العظمى للدالة $f(s)$ على c_1 فإن الصيغة (4) تعطى:

$$|R_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi} \cdot \frac{M\, 2\pi\, r_1}{(r_1-r)r_1^n} = \frac{M\, r_1}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

وحيث إن $\frac{r}{r_1} < 1$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$$

وعليه فإنه عند أي نقطة z في داخلية c_0 تكون نهاية مجموع n من حدود الطرف الأيمن للمعادلة (3) هو $f(z)$ وذلك عندما تؤول n إلى اللانهاية ومعنى هذا أنه إذا كانت f تحليلية في داخلية دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 فإن: $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور على الصورة:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \qquad (5)$$

عندما: $|z - z_0| < r_0$.

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $z_0 = 0$ فإننا نحصل على متسلسلة ماكلورين:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \qquad (6)$$

عندما: $|z| < r_0$.

3.4 ملاحظات وأمثلة:

عندما تكون f دالة تحليلية لجميع نقط داخلية دائرة مركزها z_0 فإن متسلسلة تايلور حول حول z_0 والممثلة بالطرف الأيمن من معادلة (1) تكون تقاربية بكل تأكيد ومجموعها $f(z)$ لكل نقطة z في داخلية هذه الدائرة وهذا يعني أننا لانحتاج إجراء اختبار تقارب للمتسلسلة. وفي الواقع فإن مبرهنة تايلور تبين أن هذه المتسلسلة تقاربية ونهايتها هي $f(z)$ داخل دائرة مركزها z_0 ونصف قطرها هو المسافة بين z_0 وأقرب نقطة z_1 تكون عندها الدالة f غير تحليلية، وسنبين لاحقاً أن هذه الدائرة هي أكبر دائرة مركزها z_0 تكون في داخليتها هذه المتسلسلة تقاربية وتكون نهايتها $f(z)$ لجميع النقاط z في داخليتها.

في المثال الأول سنعطي مفكوك ماكلورين للدالة $f(z) = e^x$ في هذه الحالة $f^{(n)}(z) = e^z$ وبالتالي $f^{(n)}(0) = 1$ وحيث إن e^z تحليلية عند كل نقطة z فإننا نحصل على:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (1)$$

عندما $|z| < \infty$.

لاحظ أنه عندما تكون z حقيقية فإن المفكوك (1) يصبح:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

وهذه المفكوك صحيح لأي عدد حقيقي x بنفس الطريقة يمكننا إثبات أن:

$$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (2)$$

عندما $|z| < \infty$.

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (3)$$

عندما $|z| < \infty$.

$$\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad (4)$$

عندما $|z| < \infty$.

$$\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \ \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (5)$$

عندما $|z| < \infty$.

ومثال آخر لمتسلسلة ماكلورين هو المفكوك الآتي الذي يمكن الحصول عليه بسهولة:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \ z^n \qquad (6)$$

عندما $|z| < 1$.

بوضع z^2 بدلا من z في هذا المفكوك فإننا نحصل على:

عندما $|z| < 1$.

وذلك لأن $|z^2| < 1$ طالما $|z| < 1$ بوضع $z = -c$ فإن المفكوك (6) يعطى لنا مجموع المتتالية (المتسلسلة) الهندسية اللانهائية حيث c هو أساس هذه المتوالية أي أن:

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^n + \cdots = \frac{1}{1-c} \qquad \text{عندما} \qquad |c| < 1$$

عندما يكون $z \neq 0$ فإن مشتقات الدالة $f(z) = z^{-1}$ هي:

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n \ n! \ z^{-n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

وعليه فإن $f^{(n)}(1) = (-1)^n \ n!$ ومنه نجد أن متسلسلة تايلور لهذه الدالة حول $z = 1$ هي:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n \qquad (8)$$

وحيث إن الدالة $\frac{1}{z}$ تحليلية عند كل نقطة $z \neq 0$ فإن المفكوك المعطى بالمعادلة (8) يكون صحيحاً طالما $|z-1| < 1$.

كمثال آخر سنوجد مفكوك الدالة:

$$f(z)=\frac{1+2z}{z^2\,z^3}=\frac{1}{z^2}(2-\frac{1}{1+z})$$

في صورة متسلسلة تحوي قوى z الموجبة والسالبة سواء لاحظ أنه لا يوجد متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z)$ المعطاة أعلاه وذلك لأن هذه الدالة ليست تحليلية عند $z=0$ ومن ناحية أخرى فقد أمكننا إيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1+\mathrm{z})$ (معادلة (6)) وعليه فإنه عندما يكون $0<|z|<1$ نجد أن:

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3}=\frac{1}{z^2}(2-1+z-z^2+z^3-\cdots)$$
$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-\cdots)$$

تمارين:1-3-4

1 أثبت أن: $e^z=e+e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$ عندما $|z|<\infty$.

2 أثبت أن:

(أ) : $\frac{1}{z^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(z+1)^n$ عندما $|z+1|<1$.

(ب) : $\frac{1}{z^2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,(n+1)(\frac{z-2}{2})^n$ عندما $|z-2|<2$.

3 أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\cos z$ حول النقطة $z=\pi/2$.

4 أوجد متسلسلة تايلور للدالة $\sinh z$ حول النقطة $z=\pi i$.

5 ما هي أكبر دائرة تكون في داخليتها متسلسلة ماكلورين للدالة $\tanh z$ متسلسلة تقاربية وذات نهاية $\tanh z$ لجميع النقاط z في داخلية هذه الدائرة؟ اكتب الحدين الأوليين غير الصفرين من هذه المتسلسلة.

6 إذا كان $0<|z|<4$ فبرهن أن:

$$\frac{1}{4z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

7 استخدام التعويض $z = z - 1$ في متسلسلة ماكلورين (6) للحصول على تمثيل للدالة $1/z$ في صورة متسلسلة تقاربية في قوى $z - 1$ وذلك عندما $|z - 1| < 1$ لاحظ أنه يتعين أن تكون نتيجتك متفقة مع متسلسلة تايلور المذكورة في المعادلة (8) من نفس الفقرة.

8 استخدام التعويض $z = z - 1$ في المفكوك (6) وكذلك شرط صلاحية هذا المفكوك لتحصل على مفكوك له وجود للدالة $(1 + z)^{-1}$ في جميع القوى السالبة للعدد المركب z وذلك لجميع $|z| > 1$.

الإجابة: $(1 + z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-1}$.

9 إذا كان $z \neq 0$ فبرهن أن:

$$\frac{\sin(z^2)}{z^4} = \frac{1}{z^2} - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \frac{z^{10}}{7!} + \cdots$$

10 - أوجد تمثيلاً للدالة:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$$

على صورة متسلسلة تقاربية نهايتها $f(z)$ تحوي قوى $z - 1$ الموجبة والسالبة وذلك لجميع النقاط z التي تحقق $0 < |z - 1| < 2$

الإجابة: $f(z) = \frac{-1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+1}}$

4.4 متسلسلة لوران

لتكن c_1, c_2 دائرتين متحدتي المركز. إذا كان المركز مشترك لهاتين الدائرتين هو z_0 وكانت انصاف أقطارهما r_1, r_2 بحيث $r_2 > r_1$ (انظر الشكل4-2) فإن مبرهنة لوران تنص على:

مبرهنة:4-1-1: إذا كانت f دالة تحليلية على كل من c_1, c_2 وعند كل نقطة من نقاط داخلية المنطقة الحلقية بين هاتين الدائرتين، فإن الدالة $f(z)$ يكون لها عند كل نقطة z من نقاط هذه المنطقة تمثيل على صورة المفكوك الآتي:

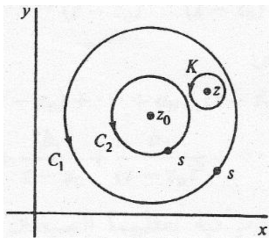
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z0)^n} \qquad (1)$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0,1,2,\cdots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1,2,3,\cdots) \quad (3)$$

مع مراعاة أن مسار كل من التكاملين موجهاً في اتجاه مضاد لدوران عقرب الساعة.



الشكل: 4–2

المتسلسلة السابقة نطلق عليها متسلسلة لوران. إذا كانت f دالة تحليلية على c_1 وعند كل نقطة لاتساوي z_0 من نقاط داخلية c_1 فإنه يمكن جعل r_2 صغيراً كيفما نشاء وفي هذه الحالة يكون المفكوك (1) صحيحاً عندما $0 < z - z_0 < r_1$ إذا كانت f تحليلية عند جميع النقاط c_1 وداخليتها فإن الدالة:

تكون تحليلية على الدائرة c_2 وعند جميع نقاط داخليتها وذلك لأن $-n + 1 \leq 0$ وعليه فإن قيمة التكامل المعطى بالصيغة (3) هي الصفر، ويؤول بذلك المفكوك (1) إلى متسلسلة تايلور.

وحيث إن الدالتين $f(z)/(z - z_0)^{-n+1}$ و $f(z)/(z - z_0)^{n+1}$ تحليليتان عند جميع نقط المنطقة الحلقية $r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$ فإنه يمكن استخدام منحني مغلق

بسيط c حول هذه الحلقة وموجها في الاتجاه الموجب ليكون مساراً للتكامل بديلاً للمسارين $c_1,\ c_2$ ووفقاً لذلك فإن متسلسلة لوران يمكن كتابتها على الصورة:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n \quad ; \quad r_2 < |z-z_0| < r_1 \qquad (4)$$

حيث:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(s)ds}{(s-z_0)^{n+1}} \quad ; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (5)$$

وبطبيعة الحال فإن بعض هذه الثوابت ينعدم في بعض الحالات الخاصة وعلى سبيل المثال فالدالة:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^{\,2}} \qquad (|z-1| > 0)$$

لها مفكوك على الصورة (4) حيث $z_0 = 1$ وفي هذه الحالة يكون $c_{-2} \neq 1$ حين تنعدم بقية الثوابت الأخرى، وهذا متفق تماماً مع الصيغة (5) التي يكون فيها c أي منحني مغلق بسيط يحوي النقطة $z_0 = 1$ وموجها في الاتجاه الموجب.

الثوابت التي نجدها في المفكوك (4) يمكن الحصول عليها بطرق أخرى لاتستخدم فيها الصيغة (5) وعلى سبيل المثال فكل من المفكوكين:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \quad ; \quad (|z| > 0)$$

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \quad ; \quad (|z| > 0)$$

يمكن الحصول عليه من مفكوك ماكلورين للدالة e^z وسنرى لاحقاً تفرد مثل هذين التمثيلين، وعليه فإن كلاً منهما هو متسلسلة لوران عندما $z_0 = 0$.

والآن لبرهان النظرية نلاحظ ابتداءً أنه إذا كانت z نقطة من المنطقة الحلقية فإن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)ds}{s-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)ds}{s-z} \qquad (6)$$

هذه المعادلة صحيحة على ضوء الملاحظات الواردة سابقاً والخاصة بصيغة تكامل كوشي التي يكون فيها مسار التكامل هو الحدود الموجهة لنطاق متعدد الترابط.

ولتبيان التفصيلات في حالتنا الخاصة هذه نعتبر دائرة k حول النقطة z موجهة في الاتجاه الموجب، وبحيث تكون k واقعة بأكملها داخل النطاق الحلقي (شكل: 4-2) إذا

استخدمنا الآن مبرهنة (كوشي- جورسيه) في صورتها الأعم والتي تشمل الدوال التحليلية في منطقة مغلقة داخليتها نطاق متعدد الترابط فإننا نحصل على:

$$\int_{c_1}\frac{f(s)ds}{s-z}-\int_{c_2}\frac{f(s)ds}{s-z}-\int_{k}\frac{f(s)ds}{s-z}=0$$

ووفقاً لصيغة تكامل كوشي فإن قيمة التكامل الثالث (الذي مساره k) هي $2\pi i\, f(z)$ ومنه نجد أن المعادلة (6) متحققة.

استرشاد ببرهان مبرهنة تايلور، فإننا يمكن أن نكتب الدالة المكاملة في التكامل الأول (حول c_1) من المعادلة (6) على الصورة:

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s-z_0}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0)+\cdots+\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1}+ (z-z_0)^n\frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n}$$

أمابالنسبة للتكامل الآخر من نفس المعادلة (6) فإننا نلاحظ أن:

$$-\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(z-z_0)-(s-z_0)}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}} \qquad (7)$$

ومنها نحصل على المتساوية:

$$-\frac{f(s)}{s-z}=f(s)\frac{1}{z-z_0}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-1}}\frac{1}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

$$+\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\frac{1}{(z-z_0)^n}+\frac{1}{(z-z_0)^n}\frac{(s-z_0)^{\,n}f(s)}{z-s} \qquad (8)$$

وعليه فإن المعادلة (6) تكتب من جديد بالشكل:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+R_n(z)+ \frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+Q_n(z)$$

حيث a_n ، b_n أعداد مركبة تعطيها الصيغتان (2)، (3) وحيث:

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^{\,n}}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(s)ds}{(s-z)(s-z_0)^{\,n}}$$

$$Q_n(z)=\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^n}\int_{c_1}\frac{(s-z_0)^n\,f(s)ds}{z-s}$$

إذا كان $r = |z - z_0|$ فإن $r_2 < r < r_1$ الآن لإثبات أن $R_n(z)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى اللانهاية اتبع نفس الخطوات المناظرة والتي اتبعت في استخلاص نظرية تايلور إذا كانت M هي القيمة العظمى لقيم الدالة $|f(s)|$ على c_2 فإن:

$$|Q_n(z)| \leq \frac{M\, r_2}{r - r_2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^n$$

ومنه نرى أن $Q_n(z)$ تؤول إلى الصفر عندما يؤول n إلى اللانهاية وبهذا يكتمل برهان مبرهنة لوران.

5.4 خواص أخرى للمتسلسلات

إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad (1)$$

من الأعداد المركبة $z_n = x_n + iy_n$ متسلسلة تقاربية، فإننا نعلم أن كلا من المتسلسلتين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \& \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n \qquad (2)$$

تكون متسلسلة تقاربية. ولما قلنا أن الشرط اللازم لتقارب متسلسلة لا نهائية حدودها أعداد حقيقية هوأن يؤول الحد الذي رتبته n إلى الصفر عندما يؤول n إلى اللانهاية ومنه تقترب z_0 من الصفر ، ومن هذا نجد أن الشرط:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0 \qquad (3)$$

لازم لتقارب المتسلسلة (1) ومن ذلك يتضح أن حدود أي متسلسلة تقاربية من الأعداد المركبة تكون مجموعة محدودة بمعنى أنه يوجد عدد حقيقي ثابت M بحيث $|z_n| < M$ لجميع الأعداء الموجبة n.

نفرض أن المتسلسلة (1) مطلقة التقارب بمعنى أن متسلسلة الأعداد الحقيقية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

تكون تقاربية يتضح لنا الآن من اختبار المقارنة لمتسلسلات الأعداد الحقيقية أن كلاً من المتسلسلين:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

تكون متسلسلة تقاربية وعليه فإن كلا من المتسلسلتين (2) تكون مطلقة بالتقارب ولما كان التقارب المطلق لمتسلسلة أعداد حقيقية يستلزم بالضرورة تقارب المتسلسلة نفسها فإننا نستنتج أن كلا من المتسلسلتين (2) تكون متسلسلة تقاربية لكننا نعلم أن تقارب المتسلسلتين (2) يعني تقارب المتسلسلة (1) من ذلك يتبين لنا أن التقارب المطلق لمتسلسلة أعداد مركبة يستلزم بالضرورة تقارب المتسلسلة نفسها.

سنثبت الآن مبرهنة هامة خاصة بتقارب متسلسلات القوى. وهذه المبرهنة تماما كنتائج أخرى عديدة تأتي في السياق، يمكن تطبيقها على متسلسلة القوى العامة من الشكل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

ولكننا سنكتفي ببرهان النظرية في الحالة التي تكون فيها $z_0 = 0$ وبرهان الحالة العامة هو في الأساس نفس البرهان المستخدم هنا ذلك أن الكثير من النتائج التي نحصل عليها يمكن تعميمها بمجرد وضع $z - z_0$ بدلاً من z في بعض الصيغ.

6.4 مبرهنة:متسلسلة القوى

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (4)$$

التقاربية عند $z = z_1 \neq 0$ تكون مطلقة التقارب لكل قيمة للعدد المركب z تحقق $|z| < |z_1|$.

لما كانت المتسلسلة تقاربية فإن مجموعة الحدود $a_n z_1^n$ تكون محدودة وعليه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث نكتب:

$$|a_n z_1^n| < M \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$|z| < |z_1| \qquad \text{حيث} \qquad \frac{z}{z_1} = k$$

$$|a_n z^n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n < M\, k^n$$

الآن فالمتسلسلة التي حدودها هي الأعداد الحقيقية الموجبة $M\, k^n$ هي متسلسلة هندسية تقاربية وذلك لأن $k < 1$ وعليه يمكننا استخدام اختبار المقارنة في نظرية المتسلسلات ذات الحدود الحقيقية لنستنتج أن المتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

متسلسلة تقاربية، وبهذا نكون قد استكملنا برهان النظرية.

يتضح لنا من المبرهنة السابقة أنه توجد دائرة مركزها نقطة الأصل بحيث تكون داخليتها منطقة تقارب لمتسلسلة القوى (4) وأكبر دائرة مركزها نقطة الأصل بحيث تكون المتسلسلة (4) تقاربية عند كل نقطة من نقاط داخليتها تسمى دائرة التقارب للمتسلسلة. وبطبيعة الحال فإن المتسلسلة لا يمكن أن تكون تقاربية عند أي نقطة z_2 خارج هذه الدائرة وذلك وفقا للنظرية السابقة التي تنص على أنه إذا كانت المتسلسلة تقاربية عند z_2 فإنها تكون تقاربية عند كل نقطة من داخلية دائرة مركزها نقطة الأصل ومارة بالنقطة z_2 وهذا يخالف تعريفنا لدائرة التقارب.

إذا استبدلنا z بالنقطة $z - z_0$ في (4) فإننا نحصل على المتسلسلة.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (5)$$

المناقشة السابقة تبين لنا على الفور أنه إذا كانت المتسلسلة (5) تقاربية عند z_1 فإنها لابد وأن تكون مطلقة التقارب عند كل نقطة z في داخلية الدائرة التي مركزها z_0 والمارة بالنقطة z_1 وهذا يعني أنها مطلقة التقارب عندما

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

وبنفس الطريقة إذا كانت المتسلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

تقاربية عند $z = z_1$ فإنها تكون بالضرورة مطلقة بالتقارب عند كل نقطة z في خارجية الدائرة التي مركزها z_0 والمارة بالنقطة z_1. وهذا يعني أن خارجية دائرة ما مركزها z_0 هي منطقة تقارب هذه المتسلسلة.

7.4 التقارب المنتظم

لتكن c_1 هي الدائرة $|z| = r_1$ ولتكن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة قوى حول $z_0 = 0$ تقاربية لجميع نقاط داخلية c_1 نستخدم هذه المتسلسلة لتعريف الدالة التالية والتي نطاق تعريفها هو:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad ; \quad |z| < r_1 \qquad (1)$$

سنعتبر الآن دالة الباقي التالية والمعرفة على نفس نطاق تعريف $S(z)$:

$$R_n(z) = S(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \qquad (2)$$

وحيث إن متسلسلة القوى التقاربية عند أي قيمة ثابتة للعد المركب z والذي يحقق المتباينة $|z| < r_1$ فإننا نعلم أن الباقي $R_n(z)$ يؤول إلى الصفر لمثل هذه القيمة للعدد المركب z وذلك عندما يؤول N إلى اللا نهاية وهذا يعني أنه لأي قيمة معطاة للعدد المركب z بحيث $|z| < r_1$ يوجد عدد صحيح موجب N_ε مناظراً لأي عدد حقيقي موجب ε بحيث:

$$N > N_\varepsilon \quad \text{طالما} \quad R_n(z) < \varepsilon \qquad (3)$$

وبطبيعة الحال فإن الشرط (3) يكون متحققاً إذا أخذنا z بحيث $|z| \le |z_2|$ و $|z_2| < r_1$.

ومن ناحية أخرى فإنه يمكننا برهان أن أي عدد حقيقي موجب ε يناظره قيمة مفردة مختارة للعدد N_ε يكون معها الشرط (3) متحققاً بغض النظر عن القيمة المختارة للعدد المركب z في القرص الدائري المغلق $|z| \le |z_2|$ وفي مثل هذه الحالة التي نحن بصددها والتي يكون فيها اختيارنا للعدد N_ε يعتمد فقط على ε وليس على أي اختيار معين للنقطة z في المنطقة المعطاة، يسمى التقارب تقارباً منتظماً في هذه المنطقة.

ولبرهان التقارب المنتظم لمتسلسلة القوى أعلاه في المنطقة $|z| \le |z_2|$ نلاحظ في البداية أنه لأي عددين موجبين N, m بحيث $m > N$ يكون:

$$\sum_{n=N}^{m} a_n z^n \le \sum_{n=N}^{m} |a_n||z|^n \le \sum_{n=N}^{m} |a_n||z_2|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n||z_2|^n \qquad (4)$$

ونهاية المجموع الأخير عندما يؤول m إلى اللا نهاية هي الباقي:

$$Q_N = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z_2|^n \qquad (5)$$

بعد N حداً من متسلسلة القيم المطلقة لحدود المتسلسلة (1) عندما $z = z_2$ ونعلم من نظرية البند السابق أن المتسلسلة (1) تكون مطلقة التقارب عندما $z = z_2$ نلاحظ الآن أن Q_N هو باق لمتسلسلة تقاربية، وعليه فإن Q_N يؤول إلى الصفر عندما يقترب N من اللانهاية ومعنى هذا أنه لأي عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد صحيح N_ε بحيث

$Q_n < \varepsilon$ طالما $N > N_\varepsilon$ وكذلك فإن حدود المتسلسلة التي يكون Q_n باق لها هي حدود غير سالبة وبالتالي فإن:

$$\sum_{n=N}^{m} |a_n z_2|^n \leq Q_N$$

إذا فوفقاً للعلاقة (4) يكون:

$$\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right| \leq Q_N \qquad (6)$$

لكل عدد صحيح m أكبر من N ولكننا – وفقاً للمعادلة (2)– نعلم أن:

$$R_N(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} a_n z^n$$

وعليه يكون:

$$N > N_\varepsilon \quad \text{طالما} \quad |R_N(z)| \leq Q_N < \varepsilon \qquad (7)$$

الآن N_ε لا تعتمد على z في النطاق $|z| \leq |z_2|$ ولذلك فإن التقارب يكون تقارباً منتظماً.

مبرهنة:4–7–1:متسلسلة القوى (1) منتظمة التقارب لجميع النقاط z على وفي داخلية أي دائرة تقع في داخلية دائرة تقارب المتسلسلة.

المجموع الجزئي:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n$$

للمتسلسلة (1) هو كثير حدود في z وبالتالي فهو يمثل دالة متصلة عند أي نقطة z_2 نختارها في داخلية الدائرة C_1 نبرهن الآن أن المجموع $S(z)$ يمثل أيضاً دالة متصلة عند z_2 وهذا يعني أنه لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث:

$$|z - z_2| < \delta \quad \text{طالما} \quad |S(z) - S(z_2)| < \varepsilon \qquad (8)$$

لإثبات ذلك نلاحظ أولاً أن المعادلة:

$$S(z) = S_N(z) + R_N(z)$$

تستلزم أن:

$$|S(z) - S(z_2)| = |S_N(z) - S_N(z_2) + R_N(z) - R_N(z_2)|$$

أي أن:

$$|S(z) - S(z_2)| \leq |S_N(z) - S_N(z_2)| + |R_N(z)| + |R_N(z_2)| \qquad (9)$$

إلا أن التقارب المنتظم الذي تبيناه آنفاً يقتضي وجود عدد صحيح M_ε بحيث:

$$|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{طالما} \qquad N > M_\varepsilon$$

حيث z أي نقطة تنتمي إلى قرص مغلق مركزه نقطة الأصل ونصف قطره أكبر من $|z_2|$ وأصغر من نصف القطر r_1 للدائرة C_1. وعلى وجه التخصيص فإن المتباينة $|R_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ تكون متحققة لجميع النقاط المنتمية إلى جوار $|z - z_2| < \delta$ للنقطة z_2 والذي يمكن اختياره صغيراً صغراً كافياً بحيث يقع داخل القرص المغلق المعنى.

ومن ناحية أخرى فإن كثير الحدود $S_N(z)$ تكون متصلة عند z_2 لأي قيمة للعدد N وإذا أخذنا $N = M_\varepsilon + 1$ على وجه التخصيص فإنه يمكننا اختيار قيمة صغيرة صغراً كافياً للعدد الحقيقي δ بحيث:

$$|S_N(z) - S_N(z_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{طالما} \qquad |z - z_2| < \delta$$

ومن ذلك يتضح أن الشرط (8) يكون متحققاً إذا أخذنا $N = M_\varepsilon + 1$ في المتباينة (9) وبهذا الشكل نكون قد برهنا أن متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة في المتغير المركب z عند كل نقطة من نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة.

والآن إذا وضعنا العدد $z - z_0$ أو معكوسه $1/(z - z_0)$ بدلاً من z فإنه يمكننا مباشرة تعميم النتائج السابقة، وذلك بعد إجراء التعديلات الواضحة لتشمل المتسلسلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

وعلى سبيل المثال إذا كانت المتسلسلة الثانية تقاربية في الحلقة $r_1 \le |z - z_0| \le r_2$ فإنها تكون منتظمة التقارب عند جميع نقاط هذه الحلقة وإن مجموعها يكون دالة متصلة في المتغير المركب z عند جميع نقاط هذه المنطقة.

8.4 تكامل وتفاضل متسلسلات القوى

لقد بينا سابقاً أن أي متسلسلة قوى تمثل دالة متصلة(مستمرة) S عند جميع نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة.وسنبين أن S هي في الواقع دالة تحليلية على داخلية دائرة التقارب.

مبرهنة:$4-8-1$:(**موريرا**):إذا كانت f دالة متصلة (مستمرة)عند جميع نقط نطاق بسيط الترابط D ، و كان التكامل لـ f على منحنٍ بسيطٍ مغلقٍ c داخل D معدوماً،أي:

$$\oint_c \; f(z)dz = 0$$

فإن f تكون تحليلية عند جميع نقط D .(تقبل دون إثبات).

مبرهنة:$4-8-2$: ليكن c منحنياً في داخلية دائرة تقارب متسلسلة القوى:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad (1)$$

ولتكن g أي دالة مستمرة (أو متصلة) عند جميع نقاط c. المتسلسلة التي نحصل عليها بضرب كل حد من حدود متسلسلة القوى في $g(z)$ تكون قابلة للتكامل حداً حداً على امتداد c، أي أن:

$$\int_c g(z)\, S(z)\, dz = \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_c g(z)\, z^n\, dz \qquad (2)$$

حيث إن المجموع $S(z)$ لمتسلسلة القوى يمثل دالة مستمرة (أو متصلة) ، فإن تكامل حاصل الضرب:

$$g(z)\, S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n\, g(z)\, z^n + g(z)\, R_N(z)$$

حيث $R_N(z)$ هو باقي المتسلسلة بعد N حداً، له وجود ولما كان كل حد من حدود هذا المجموع المحدود هو دالة متصلة فوق المنحني c فإنه يكون بطبيعة الحال قابلاً للتكامل على امتداد c وبالتالي فإن تكامل $g(z)\, R_N(z)$ له وجود ويكون:

$$\int_c g(z) s(z) dz =$$
$$\sum_{n=0}^{n-1} a_n \int_c g(z)\, z^n\, dz + \int_c g(z) R_n(z) dz \qquad (3)$$

لتكن M القيمة العظمى للدالة $|g(z)|$ فوق c وليكن L هو طول c وحيث إن متسلسلة القوى المعطاة منتظمة التقارب، فإنه يمكننا إيجاد عدد حقيقي N_ε مناظراً لكل عدد حقيقي موجب معطى ε بحيث:

$$N > N_\varepsilon \quad \text{طالما} \quad |R_N(z)| < \varepsilon$$

وذلك لجميع نقاط المنحني c.

وحيث إن كلا من ε و N_ε لايعتمد على z فإننا نجد أن:

$$N > N_\varepsilon \quad \text{طالما} \quad \left|\int_c g(z)R_N(z)dz\right| < M\,\varepsilon\,L$$

إذن فمن معادلة (3) يكون:

$$\int_c g(z)S(z)dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_c g(z)\, z^n dz$$

وهي تماماً المعادلة (2) المطلوب برهانها.

إذا كانت $g(z) = 1$ لكل نقطة z من نقاط أي منحني مغلق بسيط c في داخلية دائرة تقارب المتسلسلة المعطاة، فإن:

$$\int_c g(z)z^n dz = \int_c z^n\, dz = 0 \quad ; \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

وبالتالي فإننا نحصل من معادلة (2) على:

$$\int_c S(z)dz = 0$$

لأي منحني مغلق بسيط في داخلية دائرة التقارب ووفقاً لمبرهنة موريرا فإن الدالة S تكون تحليلية على داخلية دائرة التقارب. وهذه النتيجة التي توصلنا إليها هي منطوق المبرهنة التالية:

مبرهنة:4-8-3: أي متسلسلة قوى تمثل دالة تحليلية لجميع نقاط داخلية دائرة تقارب هذه المتسلسلة.

كثيراً ماتستخدم مبرهنة (4-8-2) لبرهان تحليلية الدوال أو لحساب النهايات ولتوضيح ذلك سنبرهن أن الدالة:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & ; \ (z \neq 0) \\ 1 & ; \ (z = 0) \end{cases}$$

دالة شاملة (أي أنها تحليلية عند كل نقطة من نقط المستوي العقدي)حيث إن متسلسلة ماكلورين لدالة الجيب تؤول إلى $\sin z$ لجميع z فإن المتسلسلة:

$$1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} \qquad (4)$$

التي نحصل عليها بضرب كل حد من حدود مفكوك ماكلورين للدالة $\sin z$ في $1/z$ هي متسلسلة تقاربية مجموعها $f(z)$ حيث $z \neq 0$ لكن المتسلسلة (4) تؤول إلى $f(0)$ عندما يؤول العدد المركب z إلى الصفر وبالتالي فإن الدالة $f(z)$ تمثلها متسلسلة القوى التقاربية (4) لجميع z وهذا يعني أن الدالة $f(z)$ دالة شاملة. وحيث إن f مستمرة عند $z = 0$ و $\frac{\sin z}{z} = f(z)$ عندما $z \neq 0$ يكون:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = 1 \qquad (5)$$

وهي نتيجة نعرفها سلفاً ذلك أن النهاية في (5) هي تعريف مشتقة الدالة $\sin z$ عند $z = 0$.

لاحظنا سابقاً أن متسلسلة تايلور لدالة f حول نقطة z_0 هي متسلسلة تقاربية نهايتها $f(z)$ عند كل نقطة z في داخلية دائرة مركزها z_0 ومارة بأقرب نقطة z_1 لا تكون عندها f تحليلية ووفقاً للمبرهنة (2) نعلم أنه لاتوجد دائرة مركزها z_0 وأكبر من هذه الدائرة بحيث تكون المتسلسلة تايلور للدالة f تقاربية وتؤول إلى $f(z)$ عند كل نقطة z من نقاط الداخلية هذه الدالة الأكبر وسبب هذا هو أن وجود مثل هذه الدائرة يسلتزم بالضرورة أن تكون f تحليلية عند z_1 ممايخالف الفرض.

وعلى أية حال فإنه يجب مراعاة أنه حتى بفرض عدم وجود دائرها مركزها z_0 بحيث تؤول متسلسلة تايلور للدالة f إلى $f(z)$ عند كل نقطة من نقاط داخلية هذه الدائرة فإنه من المحتمل أن تكون متسلسلة تايلور نفسها متسلسلة تقاربية عند كل نقطة من نقاط داخلية هذه الدائرة فعلى سبيل المثال الدائرة $|z| = 1$ هي أكبر دائرة مركزها نقطة الأصل تكون في داخليتها متسلسلة ماكلورين للدالة $f(z) = e^z(z-1)/(z-1)$ تقاربية ونهايتها $f(z)$ لجميع z حيث $|z| < 1$ ومع هذا فإن هذه المتسلسلة تكون تقاربية لجميع نقاط المستوي المركب.

المبرهنة التالية هي بشكل ما قرينة للمبرهنة (4-8-1).

مبرهنة:4-8-4: متسلسلة القوى (1) يمكن اشتقاقها حداً حداً بمعنى أن لكل نقطة z من نقاط داخلية دائرة تقارب المتسلسلة يكون:

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1} \qquad (6)$$

لإثبات المبرهنة نأخذ أي نقطة z في داخلية دائرة تقارب المتسلسلة ونعتبر منحنياً مغلقاً بسيطاً c داخل هذه الدائرة ومطوقاً للنقطة z اعتبر الدالة:

$$g(s)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(s-z)^2} \qquad (7)$$

المعرفة عند كل نقطة s من نقاط c وداخليته يكون:

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

تحليلية عند كل نقطة من نقاط c وداخليته يكون:

$$\int_c g(s)\, S(s)\, ds=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{S(s)}{(s-z)^2}ds=S'(z)$$

وذلك باستخدام التمثيل التكاملي للمشتقة. وفضلاً عن ذلك فإن:

$$\int_c g(s)\, S^n(s)\, ds=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{S^n(s)}{(s-z)^2}ds=\frac{d}{dz}z^n;\ \ (n=0,1,2,\cdots)$$

وعليه فوفقاً لمعادلة (2) يكون:

$$S'(s)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz} z^n=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}$$

وذلك مع مراعاة أن s تلعب هنا دور z في المعادلة (2) بإن الدالة $g(s)$ هي المعطاة بالمعادلة (7) وبهذا نكون استكملنا برهان المبرهنة.

يمكن بسهولة تعميم نتائج ما وجدناه لتشمل المتسلسلات التي تحتوي قوى $(z-z_0)$ الموجبة أو السالبة.

تمارين: (4-1-1)

1- بإيجاد متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1-z)$ بين أن:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}\ \ ,\quad \frac{2}{(1-z)^3}=\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2}\quad (|z|<1)$$

2- أوجد مفكوكاً بدلالة قوى $z-1$ للدالة $1/z$ بإيجاد مشتقات هذا المفكوك أوجد مفكوكاً بدلالة قوى $z-1$ للدالة $1/z^2$. ثم أوجد دائرة تقارب كل من التمثيلين.

3- اجر تكامل متسلسلة ماكلورين للدالة $1/(1+s)$ حول منحني في داخلية دائرة تقارب هذه الدالة من $s=0$ إلى $s=z$ للحصول على التمثيل الآتي:

$$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} \quad ; \qquad (|z|<1)$$

4- برهن أن الدالة f دالة شاملة إذا كان $f(z) = (e^{cz}-1)/z$ عندما $z \neq 0$ و$f(0)=c$.

5- أوجد مفكوك $\sinh z$ بدلالة قوى $z-\pi i$ ومن ثم أثبت أن:

$$\lim_{x\to\pi i}\frac{\sinh z}{z-\pi i} = -1$$

6- إذا كان $f(z) = z^{-1}\log(z+1)$ حيث $z \neq 0$ $f(0)=1,$ برهن أن f تحليلية لجميع النقاط النطاق $|z|<1$.

7- إذا كان $\cos z\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^{-1}$ $f(z) =$ حيث $z^2 \neq \frac{\pi^2}{4}$ و$f(\mp\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{\pi}$، فبرهن أن f دالة شاملة.

8- لتكن f دالة تحليلية عند z_0 و $f(z_0)=0$. استخدم المتسلسلات لبرهان النهاية:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

لاحظ في نفس الوقت أن هذه النهاية يمكن الحصول عليها مباشرة من تعريف $f'(z_0)$.

9- لتكن f,g دالتان تحليليتان عند z_0 و $f(z_0)=g(z_0)=0$، بينما $g'(z_0)\neq 0$. برهن أن:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

10- إذا كانت f دالة تحليلية عند z_0 و $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m)}(z_0) = 0$،
برهن أن الدلة:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}} & (z \neq z_0) \\ \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & (z = z_0) \end{cases}$$

تكون تحليلية عند z_0.

9.4 المتسلسلات العقدية

1.9.4 المتسلسلات العقدية وتقاربها:

تعريف:4-9-1: لتكن (z_n) متتالية من الأعداد العقدية نسمي العبارة التالية:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots$$

متسلسلة عقدية لانهائية، ونرمز لها بالرمز $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ أو $\sum Z_n$.

معظم التعاريف والنظريات في المتسلسلات الحقيقية تنطبق على العقدية، والكثير من خواص المتسلسلات المتقاربة في التحليل الحقيقي هي أيضاً صحيحة في التحليل العقدي، ونذكر منها مايلي:

1- إذا كانت المتسلسلة $\sum Z_n$ متقاربة، فإن: $\lim_{n\to\infty} Z_n = 0$

2- إذا كانت ا المتسلسلة $\sum Z_n$ متقاربة أو (متباعدة)، فإن المتسلسلة $\sum a Z_n$ متقاربة (أو متباعدة) حيث $a \neq 0$ مقدار ثابت.

3- إضافة أو حذف عدد منته من الحدود للمتسلسلة لا يغير من تقاربها أو تباعدها.

4- إذا كان $w_n = u_n + i v_n$، فإن $\sum w_n$ متقاربة $\Leftrightarrow$ $\sum u_n$ و $\sum v_n$ متقاربتان.

5- تسمى المتسلسلة $\sum a_n(z)$ متقاربة مطلقاً، إذا كانت المتسلسلة $\sum |a_n(z)|$ متقاربة، وإذا كانت المتسلسلة $\sum a_n(z)$ متقاربة مطلقاً، فهي متقاربة وإذا كانت المتسلسلة $\sum a_n(z)$ متقاربة وغير متقاربة مطلقاً فإنها تدعى متقاربة شرطياً.

6- مجموع وتفاضل وجداء متسلسلتين متقاربتين مطلقاً هو متسلسلة متقاربة مطلقاً.

7- إذا كانت المتسلسلة متقاربة مطلقاً، فإن تجميع بعض حدودها أو تغيير ترتيب حدودها، لا يغير مجموعها.

2.9.4 طرائق اختبار التقارب:

يتم اختبار تقارب المتسلسلات العقدية بالطرق نفسها المستعملة في المتسلسلات الحقيقية وأهمها:

3.9.4 اختبار النسبة لـ (دالامبير):

إذا كانت: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}(z)}{a_n(z)}\right| = \ell$ فإن المتسلسلة $\sum a_n(z)$ متقاربة مطلقاً من أجل $\ell < 1$، و المتسلسلة متباعدة من أجل $\ell > 1$ أما من أجل $\ell = 1$ فقد تكون المتسلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة.

4.9.4 اختبار كوشي:

إذا كانت: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z)|} = \ell$ فإن المتسلسلة $\sum a_n(z)$ متقاربة مطلقاً من أجل $\ell < 1$، و المتسلسلة متباعدة من أجل $\ell > 1$ ، أما من أجل $\ell = 1$ فقد تكون المتسلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة.

5.9.4 متسلسلات القوى (أو المتسلسلات الصحيحة):

كل متسلسلة من الشكل $\sum a_n (z-a)^n$ تدعى متسلسلة قوة (أو متسلسلة صحيحة)

ومن أجل $a=0$ تأخذ متسلسلة القوى الشكل $\sum a_n z^n$ وإن متسلسلة القوة

$\sum a_n (z-a)^n$ متقاربة دوماً من أجل النقطة $z=a$، وإذا كانت المتسلسلة

$\sum a_n (z-a)^n$ غير متقاربة في المستوي العقدي بأكمله، ومتقاربة في نقاط أخرى غير

النقطة $z=a$ عندئذ يوجد عدد حقيقي $r\rangle 0$، بحيث تكون المتسلسلة متقاربة من أجل $|z-a|<r$ ومتباعدة من أجل $|z-a|>r$ أما من أجل $|z-a|=r$ فقد تكون المتسلسلة متقاربة وقد تكون متباعدة. ونسمي الدائرة $|z-a|=r$ بدائرة تقارب المتسلسلة ونسمي r بنصف قطر دائرة التقارب، ونحسبه من القانون: $r=\dfrac{1}{\ell}$.

إذا كانت المتسلسلة متقاربة في كل نقطة من المستوي العقدي، فإننا نقول إن نصف قطر دائرة تقاربها يساوي الـ ∞.

وإذا كانت المتسلسلة متقاربة في النقطة $z=a$ فقط، فإننا نقول إن نصف قطر دائرة تقاربها يساوي الصفر (0)، ويمكننا تعيين نصف قطر دائرة التقارب بواسطة اختبار دالمبير أو كوشي.

6.9.4 خواص متسلسلات القوى:

إن متسلسلة القوى متقاربة إطلاقاً وبانتظام في كل نقطة تقع داخل دائرة تقاربها، ونستطيع في هذه المنطقة اشتقاق المتسلسلة حداً فحداً، أو مكاملتها حداً فحداً على أي منحني يقع ضمن تلك المنطقة. ومن الواضح أن مجموع المتسلسلة هو دالة مستمرة في كل نقطة داخل دائرة تقاربها.

مثال:$4-9-1$: أوجد نصف قطر دائرة التقارب المتسلسلة $\sum \dfrac{Z^n}{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\cdot\frac{n(n+1)}{|z|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}|z|<1$$

$$\Rightarrow |z|<\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1=r$$

إذن نصف قطر دائرة تقارب المتسلسلة يساوي الـ (1) .

ونصف قطر دائرة التقارب المتسلسلة $\sum n^n z^n$.

الحل:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|an|}=\lim_{n\to\infty}n|z|<1\Rightarrow |z|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}n}=\frac{1}{\infty}=0=r$$

إذن نصف قطر دائرة التقارب للمتسلسلة يساوي الصفر.

10.4 متسلسلة (تايلور) ومتسلسلة (ماكلوران):

1.10.4 مبرهنة (تايلور):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية ضمن منطقة ما R من المستوي العقدي و a نقطة داخل R و C دائرة مركزها a وتقع بأكملها ضمن R فإن لـ$f(z)$ نشراً وفق سلسلة (تايلور) من الشكل:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\dots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+(z-a)^n f_n(z)+\dots$$

حيث $f_n(z)$ هو تابع تحليلي داخل C وذلك من أجل كل نقطة z داخل C. أو من الشكل:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-a)^n$$

2.10.4 مبرهنة (ماكلوران):

من أجل الحالة الخاصة في نشر (تايلور) عندما $a=0$ ، نحصل على نشر (ماكلوران) للدالة $f(z)$ التحليلية ضمن المنطقة R ويعطى بالشكل:

$$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

3.10.4 منشورات بعض الدوال الشهيرة وفق متسلسلة (ماكلوارن):

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$shz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$chz=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\qquad;(|z|<1)$$

$$\ln(1-z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{n+1}\qquad;(|z|<1)$$

$$(1+z)^{-1}=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\qquad;(|z|<1)$$

$$(1-z)^{-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\qquad;(|z|<1)$$

$$\frac{1}{(1-z)^N}=(1-z)^{-N}=1+Nz+\frac{N(N+1)}{2!}z^2+\dots;(|z|<1)$$

(حيث N صحيح أو كسري موجب).

مثال: 4-9-2: أوجد نشر سلسلة تايلور للدالة: $f(z)=\sin z$ حول النقطة $z=\frac{\pi}{4}$

.

الحل: لنضع $z-\frac{\pi}{4}=t$ فنجد:

$\sin z=\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t+\cos t)$ وسلسلتي (ماك – لوران) للدالتين $\sin t$ و $\cos t$ هما:

$$\left.\begin{array}{l}\sin t=\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}........\\ \cos t=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\frac{t^6}{6!}+.....\end{array}\right\rangle\Rightarrow$$

$$\sin z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{t}{1!}-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+.....\right)$$

$$\sin z=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{1!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+.....\right]$$

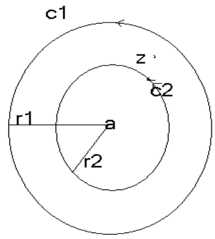
وبواسطة اختبار النسبة (دالامبير) نجد أن السلسلة متقاربة من أجل كل نقطة z من المستوي العقدي.

4.10.4 مبرهنة (لوران):

لتكن الدائرتين المتمركزتين المعينتين بالمعادلتين:

$$c_1;|z-a|=r_2\quad,\quad c_2;|z-a|=r_1$$

على الترتيب، فإذا كانت الدالة $f(z)$ تحليلية على هاتين الدائرتين، وفي المنطقة المحصورة بينهما،فإن لـ $f(z)$ نشراً وفق متسلسلة لوران ضمن الحلقة: $r_2<|z-a|<r_1$ من الشكل:



$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+.....+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+....$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}(z-a)^{-n}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

وذلك من أجل كل نقطة z واقعة ضمن الحلقة $r_2<|z-a|<r_1$ حيث:

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2}\frac{f(z)}{(z-a)^{-n+1}}dz \quad ; \quad (n\geq 1)\ \&\ a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \ ; \ (n\geq 0)$$

ملاحظة: إيجاد منشور لوارن لدالة مفروضة داخل حلقة ما باستخدام النظرية السابقة عسير جداً لذلك نوجد النشر بطريقة أخرى (حسب نشر ماكلوران) ثم العودة إلى منشور لوارن كما في المثال التالي:

مثال: 4-9-3: أوجد منشور متسلسلة لوران للدالة: $f(z)=\frac{2}{(z+1)(z+3)}$ في المنطقة $1<|z|<3$.

الحل: لدينا: $f(z)=\frac{2}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}$

نلاحظ أن الدالة $\frac{1}{z+3}$ تحليلية ضمن الحلقة $1<|z|<3$ وبالتالي من أجل $|z|<3$ يكون نشر (لوران) لهذه الدالة هو نشر (ماكلوران) من الشكل:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}-\frac{z^3}{3^3}+...\right)=\frac{1}{3}-\frac{z}{3^2}+\frac{z^2}{3^3}-\frac{z^3}{3^4}+....$$

أما الدالة $\frac{1}{z+1}$ لها نقطة شاذة $z=-1$ ومن أجل $|z|>1$ يكون $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ وبالتالي فإن الدالة تحليلية بالنسبة لـ $t=\frac{1}{z}$ في المنطقة $|t|<1$ ونشر هذه الدالة وفق (ماكلوران) هو:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\right)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+....\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4+..}$$

وبالتالي نشر الدالة $f(z)$ وفق سلسلة لوران ضمن المنطقة $1<|z|<3$ هو:

$$\frac{2}{(z+1)(z+3)}=\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}+....-\frac{1}{3}+\frac{z}{3^2}-\frac{z^2}{3^3}+....\right)$$

11.4 النقاط الشاذة:

- نقول عن النقطة z_0 من المستوي العقدي، إنها نقطة شاذة للدالة $w=f(z)$ إذا كانت هذه الدالة غير تحليلية في تلك النقطة.
- نقول عن النقطة الشاذة z_0 للدالة $f(z)$، إنها نقطة معزولة، إذا كان هناك جوار لـ z_0 لا يحتوي على أية نقطة شاذة أخرى لـ$f(z)$، وإذا كان من غير الممكن إيجاد مثل هذا الجوار، قلنا إن هذه النقطة الشاذة غير معزولة.

مثال: 4-9-4: النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة لكل من الدوال:

$$z^2\cos\frac{1}{z}\quad,\quad \sin\frac{1}{z}\quad,\quad e^{\frac{1}{z}}\quad,\quad \frac{\sin z}{z}\quad,\quad \frac{1}{z^3}\quad,\quad \frac{1}{z}$$

والنقطة $z=i$ هي نقطة شاذة للدالة: $\frac{2z+1}{z^2+1}$.

مثال: 4-9-5:النقطة $z=0$ هي نقطة شاذة معزولة لكل من الدوال:

$$e^{\frac{1}{z}}\quad,\quad \frac{1}{z(z-1)}\quad,\quad \frac{1}{z^2}$$

أما بالنسبة للدالة $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ فالنقطة $z=0$ هي نقطة شاذة غير معزولة وذلك لأن لهذه الدالة عدداً غير منته من النقاط الشاذة وهي $z=\dfrac{1}{k\pi}$ حيث ($k\neq 0$ صحيح).

1.11.4 أنواع النقاط الشاذة:

– نقول عن النقطة الشاذة z_0 للدالة $f(z)$ إنها نقطة قابلة للحذف (أو للإزالة) إذا كانت النهاية: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ معينة.

مثال: 4–9–6: النقطة $z=0$، نقطة شاذة قابلة للحذف (أو للإزالة) للدالة: $\dfrac{\sin z}{z}$.

النقطة $z=i$، نقطة شاذة قابلة للحذف (أو للإزالة) للدالة: $\dfrac{z-i}{z^2+1}$.

النقطة الشاذة $z=0$ للدالة $e^{\frac{1}{z}}$ ليست قابلة للحذف لأن $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ غير معينة.

تعريف الأقطاب: نقول عن النقطة الشاذة z_0 للدالة $f(z)$، إنها قطباً من الدرجة n، إذا كانت: $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)$ معينة ولا تساوي الصفر.
وفي حالة $n=1$ نقول إن z_0 قطباً بسيطاً للدالة.

مثال: 4–9–7: للدالة $\dfrac{1}{z}$ قطباً بسيطاً هو $z=0$ وللدالة $\dfrac{1}{z^n}$ قطباً من الدرجة n هو $z=0$ وبشكل عام إذا كانت الدالة، من الشكل $\dfrac{1}{(z-a)^n}$، فإن $z=a$ قطباً من الدرجة n.

نقول عن النقطة الشاذة z_0 للدالة $f(z)$، إنها أساسية إذا لم تكن قابلة للحذف أو قطباً أو نقطة تفرع.

مثال: 4-9-8: النقطة $z=1$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $e^{\frac{1}{z-1}}$ والنقطة $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة $\sin\frac{1}{z}$.

2.11.4 تصنيف النقاط الشاذة:

لتكن $z=a$ نقطة شاذة للدالة $f(z)$، ولتكن معزولة فرضاً. فإذا كانت c_2 دائرة مركزها a ونصف قطرها ε صغيراً جداً ينتهي إلى الصفر و c_1 دائرة ثانية مركزها a ونصف قطرها r بحيث $r>\varepsilon$ ولا تحتوي على أية نقطة شاذة غير النقطة $z=a$ للدالة $f(z)$، عندئذ تكون هذه الدالة تحليلية ولها نشراً وفق متسلسلة لوران في كل نقطة z تقع في المنطقة المحصورة بين الدائرتين c_2 , c_1، وهنا نميز الحالات الآتية:

1- إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران معدوماً، فإن النقطة $z=a$ قابلة للحذف (للإزالة).

2- إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسلة لوران يتألف من عدد منتهي من الحدود، أي بالشكل:
$$\frac{a_{-1}}{z-a}+.....+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$
حيث $a_{-n}\neq 0$ فإن النقطة الشاذة $z=a$ هي قطباً للدالة من الدرجة n.

3- إذا كان القسم الرئيسي لمتسلسة لوران يتألف من عدد غير منتهي من الحدود، فإن النقطة الشاذة $z=a$ هي نقطة شاذة أساسية.

تعريف: إذا كانت $z=a$ نقطة شاذة للدالة $f(z)$، فإن الثابت a_{-1} أي أمثال الحد $\frac{1}{z-a}$ من نشر متسلسلة لوران لـ$f(z)$ في جوار النقطة الشاذة $z=a$، يدعى راسب الدالة $f(z)$ في النقطة $z=a$.

مثال: 4-9-9: أثبت أن $z=0$ قطباً من الدرجة الخامسة للدالة: $f(z)=\frac{1}{z^5}e^{z^3}$

.

لدينا من أجل $|z|>0$:

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\left(1+\frac{z^3}{1!}+\frac{z^6}{2!}+\frac{z^9}{3!}+....\right)=\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}z+\frac{1}{3!}z^4+......$$

نلاحظ أن رئيسي متسلسلة لوران يتألف من عددٍ منتهٍ من الحدود و بالتالي ، $z=0$ تكون قطباً من الدرجة الخامسة للدالة $f(z)$ والراسب في هذه النقطة يساوي الصفر، أي : $a_{-1}=0$.

مثال: 4-9-10: أثبت أن $z=0$ هي نقطة شاذة أساسية للدالة: $f(z)=\frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}$

لدينا من أجل $|z|>0$:

$$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!}.\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}.\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6!}.\frac{1}{z^5}+.....\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^5}+.........$$

نلاحظ أن رئيسي متسلسلة لوران يتألف من عددٍ غير منتهٍ من الحدود و بالتالي ، $z=0$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ والراسب في هذه النقطة هو : $a_{-1}=1$.

تمارين محلولة (4)

1) : ادرس تقارب المتسلسلات العقدية الآتية:

$$1):\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}\qquad 2):\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}\qquad 3):\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$$

الحل:

1): بتطبيق اختبار النسبة لدالامبير على المتسلسلة: $\sum_{n+0}^{\infty}\frac{n}{(2i)^n}$ ، نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(2i)^n}{(2i)^{n+1}n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\left|\frac{1}{2i}\right|=\frac{1}{2}<1$$

فالمتسلسلة متقاربة.

2): نلاحظ أن سلسلة القيم المطلقة للمتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$ هي: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

وبالتالي المتسلسلة الناتجة متقاربة، هذا يعني أن المتسلسلة المفروضة متقاربة مطلقاً ومنه فهي متقاربة.

3): $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{chn}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$$

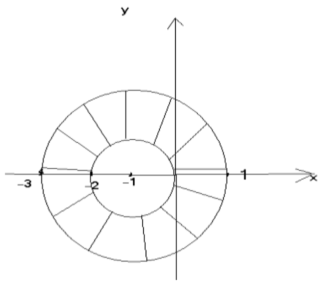
ولكن $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^n$ متسلسلة هندسية أساسها $q=\frac{1}{2e}<1$ ، فهي متقاربة.

بينما $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ متسلسلة هندسية أساسها $q=\frac{e}{2}>1$ ، فهي متباعدة.

فالمتسلسلة المفروضة متباعدة.

2): أوجد نشر متسلسلة لوران للدالة: $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ في المناطق الآتية:

$1^{\prime}$). $1<|z+1|<2$ $\qquad$ $2^{\prime}$). $0<|z+1|<1$



شكل(1)

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}$$

1ً): الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $1<|z+1|<2$ وبالتالي $\frac{1}{z+2}$ تحليلية في المنطقة $|z+1|>1$ أي في المنطقة $\left|\frac{1}{z+1}\right|<1$ ومنه نجد:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+1+1}=\frac{1}{z+1}.\frac{1}{1+\frac{1}{z+1}}$$

$$=\frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z+1}\right)^n \qquad ;\left|\frac{1}{z+1}\right|<1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z+1)^{n+!}} \qquad ;|z+1|>1$$

$\frac{1}{z+3}$ تحليلية في المنطقة $|z+1|<2$ أي في المنطقة $\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$ وبالتالي فإن:

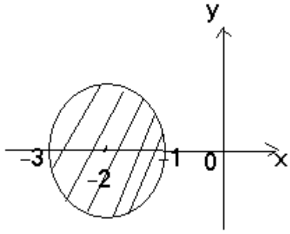
$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z+1+2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z+1}{2}\right)^n \quad ;\left|\frac{z+1}{2}\right|<1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \quad ;|z+1|<2$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(z+1)^{n+!}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \quad ;\quad 1<|z+1|<2$$

$$\Rightarrow f(z)=....-\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{4}(z+1)-\frac{1}{8}(z+1)^2+... \quad ;\quad 1<|z+1|<2$$

2ً): الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $0<|z+2|<1$



شكل(2)

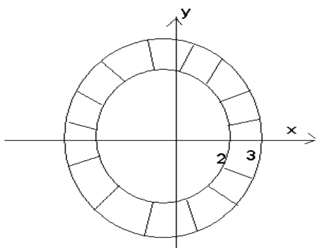
$$f(z)=\frac{1}{z+2}\cdot\frac{1}{1+z+2}=\frac{1}{z+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^n$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+2)^{n-1}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{z+2}}_{\text{رئيسي}}\underbrace{-1+(z+2)-(z+2)^2+\ldots}_{\text{تحليلي}}\ ;\quad 0<|z+2|<1$$

وبالتالي النقطة الشاذة $z=-2$ تكون قطباً بسيطاً للدالة $f(z)$.

3): أوجد متسلسلة لوران للدالة: $f(z)=\dfrac{5z-12}{(z-3)(z-2)}$ في المنطقة $2<|z|<3$.



شكل(3)

الحل:

$f(z)=\dfrac{3}{z-3}+\dfrac{2}{z-2}$ الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $2<|z|<3$ ، لأن: $\dfrac{3}{z-3}$ تحليلية في المنطقة $|z|<3$ ومنه:

$$\frac{3}{z-3}=-\frac{1}{1-\frac{z}{3}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \qquad ;\left|\frac{z}{3}\right|<1$$

$$\frac{2}{z-2}=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n} \qquad ;\left|\frac{2}{z}\right|\langle 1$$

$$\Rightarrow \frac{2}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+1}} \qquad ;|z|>2$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{3^{n}} \qquad ;2<|z|<3$$

$$\Rightarrow f(z)=....+\frac{1}{z^{2}}+\frac{2}{z}-1-\frac{1}{3}z-\frac{1}{9}z^{2}-... \qquad ;2<|z|<3$$

4): أوجد متسلسلة لوران للدالة: $f(z)=\dfrac{1}{e^{z}-1}$ حول النقطة $z_0=0$.

الحل: إن $z_0=0$ نقطة شاذة لـ $f(z)$ وبالتالي:

$$f(z)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2}}{n!}-1}=\frac{1}{z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+....}=\frac{1}{z}.\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^{2}}{3!}+....} \qquad ;0<|z|<\infty$$

$$=\frac{1}{z}[1-(1+\frac{z}{2!}+\frac{2^{2}}{3!}+.......)+(1+\frac{z}{2!}+\frac{z^{2}}{3!}+.....)^{2}+...]$$

$$=\frac{1}{z}(1-\frac{z}{2}+\frac{z^{2}}{12}+....)=\underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{رئيسي}}\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z+......}_{\text{تحليلي}}$$

وبالتالي فإن النقطة $z_0=0$ قطباً بسيطاً لـ$f(z)$ ، وقيمة الراسب فيها يساوي الـ (1) .

5): أوجد نشر لوارن للدوال الآتية في حلقة مركزها النقطة الشاذة $z_0=0$، مبيناً في كل حالة نوع الشذوذ:

$$f_1(z)=\frac{z-\sin z}{z^{3}} \qquad , \qquad f_2(z)=(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}$$

الحل:

$$f_1(z)=\frac{1}{z^3}\left(z-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \qquad ;0<|z|<\infty$$

$$=\frac{1}{z^3}(z-z+\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{6!}+\frac{z^7}{7!}-.........)=\underbrace{\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-............}_{\text{تحليلي}}$$

والقسم الرئيسي لنشر (لوران) معدوماً، هذا يعني $z_0=0$ نقطة شاذة قابلة للإزالة.

$$f_2(z)=(z+\frac{1}{z})e^{\frac{1}{z}}=(z+\frac{1}{z}).\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} \qquad ;0<|z|<\infty$$

$$=(z+\frac{1}{z})(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+....)=\underbrace{\frac{\frac{3}{2}}{z}+\frac{\frac{7}{6}}{z^2}+...}_{\text{رئيسي}}+\underbrace{1+z}_{\text{تحليلي}}$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي لنشر (لوران) يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود، هذا يعني $z_0=0$ نقطة شاذة أساسية.

6): عين وصنف جميع النقاط الشاذة للدوال:

$$f_1(z)=\sin\frac{1}{z} \quad , \qquad f_2(z)=\frac{z+i}{(z^2+1)^2} \qquad , \qquad f_3(z)=\frac{1}{chz}$$

الحل:

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}.\frac{1}{z^{2n+1}} \qquad ;\ 0<|z|<\infty$$

$$\Rightarrow f_1(z)=\underbrace{\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-...}_{\text{رئيسي}}$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي لنشر (لوران) يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود، بالتالي لـ $f_1(z)$ نقطة شاذة أساسية هي $z_0=0$.

النقطة الشاذة للدالة $f_2(z)$ هي حلول المعادلة:

$$z^2+1=0 \;\Rightarrow\; z=\pm i$$

وبما أن:

$$\lim_{z\to -i}(z+i)\,f_2(z)=\lim_{z\to -i}\frac{1}{(z-i)^2}=-\frac{1}{4}\neq 0$$

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2\,f_2(z)=\lim_{z\to i}\frac{z+i}{(z+i)^2}=-\frac{i}{2}\neq 0$$

وبالتالي $z=-i$ قطباً بسيطاً، $z=i$ قطباً من الدرجة الثانية.

النقاط الشاذة للدالة $f_3(z)$ هي حلول المعادلة $chz=0$

$$\Rightarrow \frac{e^z+e^{-z}}{2}=0 \Rightarrow \qquad e^z=-e^{-z}=e^{-z+\pi i} \quad \Rightarrow z=-z+\pi i+2\pi k i$$

$$\Rightarrow z_k=\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)i \qquad ; \qquad k=0\,,\pm 1\,,\pm 2\,.........$$

وبتطبيق قاعدة لوبيتال:

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)\,f_3(z)=\lim_{z\to z_k}\frac{z-z_k}{chz}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{z\to z_k}\frac{1}{shz}=\frac{1}{shz_k}$$

$$=\frac{2}{e^{2z_k}-e^{-2z_k}}=\frac{2}{e^{(\pi/2+\pi k)i}-e^{-(\pi/2+\pi k)i}}=\frac{2}{i(-1)^k+i(-1)^k}=-i(-1)^k\neq 0$$

هذا يعني، جميع النقاط الشاذة لـ $f_3(z)$ أقطاب بسيطة.

7): ادرس تقارب المتسلسلات التالية:

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n} \qquad , \qquad (2)\sum_{n=0}^{\infty}e^{in} \qquad , \qquad (3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin in}{3^n}$$

الحل:

(1): نطبق اختبار النسبة لدالامبير على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(in)^n}$ ، فنجد أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{[i(n+1)]^{n+1}}-\frac{(in)^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underset{n\to\infty}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}=\frac{1}{e}<1$$

فالمتسلسلة متقاربة.

:(2) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in}$

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} |e^{in}| = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ فالمتسلسلة المفروضة متباعدة.

:(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin in}{3^n}$

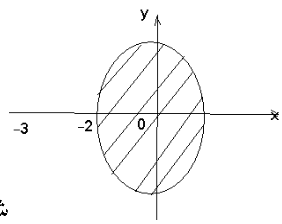
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin in}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{inshn}{3^n} = \frac{i}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\left(e^n - e^{-n}\right)}{3^n} \Rightarrow \frac{n\left(e^n - e^{-n}\right)}{3^n} \leq \frac{ne^n}{3^n}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^n}{3^n}$ متقاربة وذلك حسب دالامبير لأن:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{ne^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} . \frac{e}{3} = \frac{e}{3} < 1$$

وبالتالي حسب اختبار المقارنة ينتج تقارب المتسلسلة المفروضة.

8): أوجد نشر متسلسلة لوران للدالة: $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+3)}$ في المنطقة الآتية:



شكل(4)

1- $|z| < 2$ 2- $0 < |z+3| < 1$

الحل: $f(z) = \frac{1}{(z+2)} - \frac{1}{z+3}$

1- الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $|z| < 2$ وبالتالي: $\frac{1}{z+2}$ تحليلية في المنطقة $|z| < 2$

وبالتالي:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} . \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \quad ; \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad ; \quad |z| < 2$$

$\frac{1}{z+3}$ تحليلية في المنطقة $|z|<2$ هذا يعني في المنطقة $|z|<3$ وبالتالي:

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n \qquad ;\left|\frac{z}{3}\right|<1$$

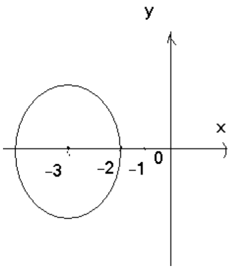
$$\Rightarrow \frac{1}{z+3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad ;|z|<3$$

وبالتالي هذا النشر صحيح في المنطقة $|z|<2$ المحتواة في المنطقة $|z|<3$:

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}} \qquad ; \qquad |z|<2$$

$$\Rightarrow f(z)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)z+........=\frac{1}{6}-\frac{5}{36}z+.......;|z|<2$$

ً2– الدالة $f(z)$ تحليلية في المنطقة $0<|z+3|<1$ شكل(5)



$$f(z)=\frac{1}{z+3}.\frac{1}{z+3-1}=-\frac{1}{z+3}.\frac{1}{1-(z+3)}$$

$$=-\frac{1}{z+3}.\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad ;0<|z+3|<1$$

$$\Rightarrow f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^{n-1} \quad =\underbrace{-\frac{1}{z+3}}_{\text{رئيسي}} \quad \underbrace{-1-(z+3)-...}_{\text{تحليلي}} \quad ;0<|z+3|<1$$

وبالتالي $z=-3$ قطباً بسيطاً لـ $f(z)$.

تمارين غير محلولة(4)

1- أوجد نشر متسلسلة لوران للدالة: $f(z)=\dfrac{9}{z(z-3)^2}$ في المنطقة $1<|z-1|<2$.

2- أوجد نشر متسلسلة لوران للدالة: $\left[f(z)=z^2 e^{1/z}\right]$ حول النقطة $z_0=0$.

3- أوجد نشر متسلسلة لوارن في حلقة مركزها النقطة الشاذة $z_0=0$ مبيناً في كل حالة نوع الشذوذ، للدوال الآتية:

$$f_1(z)=\frac{1}{sh^2 z} \quad , \quad f_2(z)=\frac{e^{2z}-1}{z^4}$$

4- عين وصنف جميع النقاط الشاذة للدوال:

$$f_1(z)=\frac{1}{\cos z} \quad , \quad f_2(z)=\tan z \quad , \quad f_3(z)=\frac{1}{chz}$$

فهرس الفصل الخامس

الفصل الخامس

5. مبرهنة الرواسب وحساب التكاملات

1.5 الرواسب وطرق حسابها

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل الدائرة C وعلى محيطها باستثناء النقطة $z = a$ مركز الدائرة C التي قد تكون قطباً أو نقطة شاذة أساسية أو نقطة قابلة للحذف،فإن لـ $f(z)$ نشراً وحيداً على شكل متسلسلة لوران حول النقطة $z = a$ وقد قلنا أن الثابت a_{-1} في المتسلسلة وهو أمثال الحد $\frac{1}{z-a}$ يدعى راسب الدالة $f(z)$ في النقطة $z = a$.ويمكن الحصول على هذا الراسب من العبارة:

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-a)^{-n+1}}$$

ومن هذه العبارة، نجد أن:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z)dz \quad \Rightarrow \quad \oint_c f(z)dz = 2\pi i\ (a_{-1})$$

فمعرفة راسب الدالة في النقطة الشاذة يمكننا من حساب التكامل على منحن بسيط مغلق حول هذه النقطة الشاذة وتكون الدالة تحليلية على هذا المنحني وداخله، باستثناء النقطة الشاذة المذكورة.

ومن أجل حساب الراسب للدالة $f(z)$ في النقطة الشاذة $z = a$ نميز الحالات الآتية:

(1): لا يوجد راسب للدالة في النقطة الشاذة $z = \infty$ القابلة للحذف أو نعتبر أن الراسب فيها يساوي الصفر.

(2): إذا كانت النقطة $z = a$ قطباً بسيطاً للدالة $f(z)$، فإن الراسب هو:

$$a_{-1} = Res(f, a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

(3): إذا كانت النقطة $z=a$ قطباً بسيطاً للدالة: $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$، فإن الراسب هو:
$Res(f,a)=\frac{P(a)}{q'(a)}$ حيث $P(a)\neq 0$ و $q'(a)$ هي مشتقة $q(z)$ في النقطة $z=a$.

(4): إذا كانت $z=a$ قطباً من الدرجة n، فإن الراسب هو:

$$Res(f,a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

(5): إذا كانت النقطة $z=a$ نقطة شاذة أساسية للدالة $f(z)$ فإن حساب الراسب في هذه النقطة يتم عن طريق نشر لوران لهذه الدالة حول تلك النقطة، ويكون $Res(f,a)$ هو أمثال الحد $\frac{1}{z-a}$ في نشر لوران.

مثال 5-1-1: أوجد راسب الدالة: $f(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ في النقطة $z=i$.

الحل: نلاحظ أن $z=i$ قطباً من الدرجة الثانية لـ $f(z)$ وذلك لأن:

$$\lim_{z\to i}\ (z-i)^2\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}=\frac{-1}{4}\neq 0$$

وبالتالي فإن:

$$Res(f,i)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}[(z-i)^2 f(z)]$$
$$=\lim_{z\to i}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]'=\lim_{Z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{1}{4i}=\frac{-i}{4}$$

مثال 5-1-2: أوجد راسب الدالة $f(z)=ze^{1/z^2}$ في النقطة $z=0$.

الحل: النقطة $z=0$ شاذة لـ $f(z)$ ولننشر وفق لوران:

$$f(z)=ze^{1/z^2}=z\left(1+\frac{1}{1!}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^4}+\cdots\right)=z+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

فالنقطة $z=0$ شاذة أساسية للدالة، لأن القسم الرئيسي للوران يتألف من عدد غير منته من الحدود. وراسب هذه الدالة في تلك النقطة يساوي أمثال الحد $\frac{1}{z}$ أي يساوي الـ (1).

2.5 مبرهنة الرواسب:

لتكن $f(z)$ دالةً تحليليةً داخل وعلى منحن بسيط مغلق C باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة $a_1, a_2, \cdots, a_n$ تقع داخل C فإن:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} Res(f, a_i)$$

حيث $Res(f, a_i)$ هو راسب $f(z)$ في النقط a_i.

نتيجة: إذا كانت $f(z)$ تحليلية في المستوي العقدي الممدد باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} Res(f, a_i) = 0 \qquad ; \qquad a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n = \infty$$

مثال5-2-1: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_C \frac{1+\sin(\pi z)}{z(1-z)^2} dz$$

حيث C المربع الذي رؤوسه: $-3 \pm 3i \qquad ; \qquad 3 \pm 3i$

الحل: إن للدالة المكاملة قطباً بسيطاً $z = 0$ وقطباً من الدرجة الثانية $z = 1$ والقطبان يقعان داخل المربع C وبالتالي:

$$Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \left[\frac{1+\sin(\pi z)}{z(1-z)^2}\right] = 1$$

$$Res(f, 1) = \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{1+\sin(\pi z)}{z}\right) =$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{\pi z \cos(\pi z) - 1 - \sin(\pi z)}{z^2} = -(1+\pi)$$

وحسب نظرية الرواسب نجد أن:

$$I = \int_C \frac{1+\sin(\pi z)}{z(1-z)^2} dz = 2\pi i(1 - 1 - \pi) = -2\pi^2 i$$

3.5 حساب تكاملات حقيقية محدودة بواسطة الرواسب:

بعض الأنواع الشهيرة لهذه التكاملات وطرق حسابها:

[1]: التكاملات من الشكل:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \emptyset(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$$

لتكن الدائرة $C: |z| = 1$ ولنضع $z = e^{i\theta}$ فنجد أن:

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}\ ,\quad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}\ ,\quad d\theta = \frac{d\theta}{i\theta}$$

عندئذٍ، يصبح التكامل من الشكل:

$$I_1 = \oint_C f(z)dz$$

مثال5-3-1: احسب قيمة التكامل: $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\cos\theta}$ حيث $0 < |a| < 1$.

الحل: نضع $z = e^{i\theta}$ فنجد:

$$I = \frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{az^2+2z+a}$$

للدالة المكاملة قطبين بسيطين هما:

$$z_1 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2}\quad ,\ z_2 = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2}$$

بما أن: $z_1 z_2 = 1$، فإن واحد فقط من القطبين ألا وهو: $z_1 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2}$

يكون واقعاً داخل الدائرة $C\ ;\ |Z| = 1$، ومنه:

$$Res(f, z_1) = \frac{1}{2az_1+2} = \frac{1}{2\sqrt{1-a^2}}$$

ومنه:

$$I = \frac{2}{i}2\pi i\frac{1}{2\sqrt{1-a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

[2]: التكاملات من الشكل:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

لحساب هذا النوع من التكاملات نأخذ الدالة $f(z)$ ونكاملها على طول منحن مغلق C يتألف من القطعة المستقيمة المنطبقة على المحور الحقيقي oX، الواصلة بين نقطة البداية $z = -R$ ونقطة النهاية $z = R$ ومن نصف الدائرة $|z| = R$ العلوي في المستوي العقدي. حيث R كبيرة جداً وتنتهي إلى الـ ∞.

إن حساب هذا النوع من التكاملات ممكن، إذا حقق التابع $f(z)$ الشرطين الآتيين:

(1): أن تكون $f(z)$ تحليلية في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة المعزولة $\sum_{i=1}^{n} a_i$ لـ $f(z)$ كأقطاب بسيطة واقعة فوق المحور الحقيقي oX وأقطاب بسيطة أخرى $\sum_{i=1}^{n} b_i$ واقعة على المحور الحقيقي oX ونضع على المنحني C أنصاف دوائر: $C_1(b_1,\delta), C_2(b_2,\delta), \cdots, C_m(b_m,\delta)$ بحيث نتجنب المرور على الأقطاب الواقعة على المحور الحقيقي oX.

(2): $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

عندها نجد:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$$
$$= 2\pi i \sum_{y_i>0} Res\,(f, a_i) + \pi i \sum_{y_i=0} Res\,(f, b_i)$$

مثال5-3-2: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

بما أن الدالة المكاملة زوجية، عندئذٍ يمكن كتابة التكامل بالشكل:

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

لنأخذ الدالة المكاملة المقابلة بدلالة z من الشكل: $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ ونكاملها على طول المنحني C المذكور في التكامل $[I_2]$، ومن ثم نلاحظ أن النقاط الشاذة للدالة هي جذور المعادلة:

$$z^4 + 1 = 0 \implies z^4 = -1 = e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i} \implies$$
$$z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi}{4}i} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, 3$$

وبالتالي لدينا الجذور الأربعة:

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}i} \;,\; z_1 = e^{\frac{3\pi}{4}i} \;,\; z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i} \;,\; z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

لنتأكد من تحقق الشرطين:

(1): نلاحظ أن الجذران z_1, z_2 فقط يقعان في النصف العلوي من المستوي العقدي وبالتالي $f(z)$ تحليلية في النصف العلوي من المستوي العقدي، باستثناء القطبين البسيطين z_1, z_2.

:(2) $$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$$

وبالتالي:

$$2I = 2\pi i[Res(f,z_1) + Res(f,z_2)]$$

حيث:

$$Res(f,z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{\frac{-3\pi}{4}i} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}(1+i)$$
$$Res(f,z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{\frac{-9\pi}{4}i} = \frac{1}{4}e^{\frac{-\pi}{4}i} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

ومنه:

$$2I = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

مثال 5-3-3:احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

لنأخذ الدالة المكاملة المقابلة بدلالة z: $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$ ونكاملها على طول المنحني C المذكور في التكامل $[I_2]$، ومن ثم نلاحظ أن النقاط الشاذة للدالة هي جذور المعادلة:

$$z^3 + 1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1 = e^{\pi i} = e^{(2k+1)\pi i}$$
$$\Rightarrow z_k = e^{(2k+1)\frac{\pi}{3}i}\ ;\ \ k = 0,1,2$$

وبالتالي لدينا الجذور الثلاثة:

$$z_0 = e^{\frac{\pi i}{3}}\left(0X \text{ فوق}\right)\ ,z_1 = e^{\pi i} = -1\left(0X \text{ على}\right)\ ,z_2 = e^{\frac{5\pi i}{3}}\left(0X \text{ تحت يهمل}\right)$$

لنتأكد من تحقق الشرطين:

(1): نلاحظ أن الجذر z_0 هو القطب البسيط الوحيد الواقع في النصف العلوي من المستوي العقدي وz_1 قطب بسيط آخر واقعاً على المحور الحقيقي oX وبالتالي $f(z)$ تحليلية في النصف العلوي من المستوي العقدي، باستثناء القطبين البسيطين z_0, z_1.

:(2) $$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^3} = 0$$

وبالتالي:

$$I = 2\pi i[Res(f,z_0)] + \pi i[Res(f,z_1)]$$

ولكن:

$$Res(f,z_0)=\frac{1}{3z_0^2}=\frac{1}{3}e^{\frac{-2\pi}{3}i}=\frac{-1}{6}(1+i\sqrt{3})$$
$$Res(f,z_1)=\frac{1}{3z_1^2}=\frac{1}{3}e^{-2\pi i}=\frac{1}{3}$$

وبالتالي:

$$I=2\pi i\left[\frac{-1}{6}(1+i\sqrt{3})\right]+\pi i\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

[3]: التكاملات من الشكل:

$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\begin{cases}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{cases}dx$$

يمكن حساب هذا النوع من التكاملات، إذا حقق $f(z)$ الشرطين:

(i) : أن تكون $f(z)$ تحليلية فوق المحور oX من المستوي العقدي z باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة، كأقطاب بسيطة $\sum_{i=1}^{n}a_i$ فوق oX وأخرى $\sum_{i=1}^{n}b_i$ على oX ونضع على C، المذكور في التكامل $[I_2]$، أنصاف دوائر $C_1(b_1,\delta),\cdots,C_m(b_m,\delta)$ بحيث $\delta\to 0$ بحيث نتجنب الأقطاب على oX.

(ii): أن تكون $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$.

ومنه ينتج:

$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos\alpha x\,dx=Re\left[2\pi i\sum_{yi>0}Res\left(e^{i\alpha z}f,a_i\right)+\pi i\sum_{yi=0}Res\left(e^{i\alpha z}f,b_i\right)\right]$$
$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin\alpha x\,dx=Im\left[2\pi i\sum_{yi>0}R\left(e^{i\alpha z}f,a_i\right)+\pi i\sum_{yi=0}Res\left(e^{i\alpha z}f,b_i\right)\right]$$

مثال5-3-4:احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos 3x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{1+x^2}dx$$

الحل: الدالة $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ تحقق الشرطين (i)، (ii) ونجد أن لها قطبين بسيطين $z_{1,2}=\pm i$ ونلاحظ أن: $z=i$ هو القطب الوحيد الواقع فوق المحور الحقيقي oX والآخر $z=-i$ واقعاً تحت المحور الحقيقي oX لذلك يهمل، ومنه:

$$Res(e^{3iz}f(z),i)=\frac{e^{-3}}{2i}\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 3x}{1+x^2}dx=Re\left(\pi i\frac{e^{-3}}{2i}\right)=\frac{\pi}{2e^3}$$

مثال5-3-5:احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin\alpha x}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\alpha x}{(x^2+a^2)^2}dx\,;\ (a>0\,,\alpha>0$$

الحل: الدالة $f(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$ يحقق الشرطين (i)، (ii) ولها قطباً وحيداً من الدرجة الثانية في النصف العلوي من المستوي العقدي وهو: $z=ai$ ومنه:

$$Res\left(e^{i\alpha z}f(z),ai\right)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[(z-ai)^2\frac{ze^{\alpha iz}}{(z-ai)^2(z+ai)^2}=\frac{\alpha e^{-\alpha a}}{4a}\right.$$

$$\Rightarrow I_2=Im\left[\frac{1}{2}\left(2\pi i\frac{\alpha e^{-\alpha\, a}}{8a}\right)\right]=\frac{\alpha\pi}{8a\,e^{\alpha\, a}}$$

مثال5-3-6: احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 3x}{x(1+x^2)}dx$$

الحل:

$$f(z)e^{i\alpha z}=\frac{e^{i3z}}{z(1+z^2)}\xrightarrow{\text{أقطابه}}\begin{cases}z_1=0\ \left(\text{على المحور } oX\right)\\ z_2=i\ \left(\text{فوق } oX\right)\\ z_3=-i\ \left(\text{تحت } oX \text{ لذلك يهمل}\right)\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}Res\left(e^{i3z}f,i\right)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{i3z}}{z(z-i)(z+i)}=\frac{-1}{2e^3}\\ Res\left(e^{i3z}f,0\right)=\lim_{z\to 0}\frac{ze^{i3z}}{z(1+z^2)}=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$I=Im[2\pi i\,Res\left(e^{i3z}f,i\right)+\pi i Res\left(e^{i3z},0\right)]\Longrightarrow$$

$$I=Im\left[2\pi i\left(\frac{-1}{2e^3}\right)+\pi i(1)\right]\Longrightarrow\ I=\pi\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$

[4]: التكاملات من الشكل:

$$I_4 = \int_0^{+\infty} x^{p-1} f(x) dx$$

حيث $f(x)$ دالة كسرية جبرية عادية وp عدد حقيقي كسري.فإذا كان p حقيقياً كسرياً وكانت $f(x)$ دالةً كسرية جبرية عادية، تحقق الشروط الثلاثة الآتية:

1) $\lim_{x\to 0}[x^p f(x)] = 0$; 2) $\lim_{x\to\infty}[x^p f(x)] = 0$; 3) مقامها $\neq 0, \forall x > 0$

فإن:

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi} \sum_{i=1}^{n} Res[z^{p-1} f(z), ai] ;$$

(حيث a_i أقطاب الدالة العقدية $z^{p-1} f(z)$).

مثال5-3-7:احسب قيمة التكامل الحقيقي:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{x+1} dx$$

الحل: نلاحظ أن: $p - 1 = -\frac{1}{4}$، ومنه: $p = \frac{3}{4}$ والدالة: $f(x) = \frac{1}{x+1}$

تحقق شروط الحالة [4]:

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x+1} = 0; \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x+1} = 0$، والمقام لا ينعدم من أجل أي $x > 0$، ولهذا

فإن:

$$Res(f,-1) = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)z^{-\frac{1}{4}}}{(z+1)} = (-1)^{-\frac{1}{4}} = \left(e^{i\pi}\right)^{-\frac{1}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} ; \left(e^{i\pi} = -1\right)$$

وحسب الحالة [4] يكون:

$$I = \frac{-\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{-\pi}{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)} e^{-i\pi} = \pi\sqrt{2}$$

$$e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \cos(\pi) - i\sin(\pi) = -1$$

تمارين محلولة (5)

تمرين:[1]: بين نوع كل نقطة شاذة واحسب الراسب فيها، للدوال الآتية:

$$f_1(z)=\frac{z^2}{z^4+16}\ ,\ f_2(z)=\frac{ze^z}{z^4-z^2}\ ,\ f_3(z)=\frac{1}{\sin z\,\mathrm{sh}\,z}$$

الحل:

* النقاط الشاذة لـ $f_1(z)$ هي حلول المعادلة:

$$\left.z^4+16=0\Rightarrow z^4=-16=16\,e^{(\pi+2\pi k)i}\right\}\Rightarrow\ z_k=2e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)i}$$

وبالتالي لـ $f_1(z)$ أربع نقاط شاذة هي:

$$z_0=2\,e^{\frac{\pi}{4}i}\ ,\ z_1=2\,e^{\frac{3\pi}{4}i}\ ,\ z_2=2\,e^{\frac{5\pi}{4}i}\ ,\ z_3=2\,e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

وبما أن:

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f_1(z)=\lim_{z\to z_k}z^2\frac{z-z_k}{z^4+16}=\frac{z_k^2}{4z_k^3}=\frac{1}{4z_k}\neq 0$$

فجميع النقاط الشاذة لـ $f_1(z)$ أقطاب بسيطة والرواسب فيها هي:

$$Res(f_1,z_0)=\frac{1}{4z_0}=\frac{1}{8e^{\frac{\pi i}{4}}}=\frac{1}{8}e^{\frac{-\pi i}{4}}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8\sqrt{2}}(1-i)$$

$$Res(f_1,z_1)=\frac{1}{4z_1}=\frac{1}{8}e^{\frac{-3\pi i}{4}}=-\frac{1}{8\sqrt{2}}(1+i)$$

$$Res(f_1,z_2)=\frac{1}{4z_2}=\frac{1}{8e^{\frac{5\pi i}{4}}}=\frac{1}{8}e^{\frac{-5\pi i}{4}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}(-1+i)$$

$$Res(f_1,z_3)=\frac{1}{4z_3}=\frac{1}{8e^{\frac{7\pi i}{4}}}=\frac{1}{8}e^{\frac{-7\pi i}{4}}=\frac{1}{8\sqrt{2}}(1+i)$$

* النقاط الشاذة لـ $f_2(z)$ هي حلول المعادلة:

$$z^4-z^2=0\Rightarrow z^2(z^2-1)=0\Rightarrow z_1=0\ ,z_2=1\ \ ,z_3=-1$$

بما أن:

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f_2(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2e^z}{z^2(z^2-1)}=\ -1\neq 0$$

فإن: $z_1=0$ قطباً بسيطاً لـ $f_2(z)$ والراسب فيه هو:

$$Res(f_2,0)=\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f_2(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2e^z}{z^2(z^2-1)}=\ -1$$

و $z_2=1$ قطباً بسيطاً لـ $f_2(z)$ لأن:

$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f_2(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)e^z}{z^2(z-1)(z+1)}=\frac{e}{2}\neq 0$$

والراسب فيه هو:

$$Res(f_2,1)=\lim_{z\to z_2}(z-z_2)f_2(z)=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)e^z}{z^2(z-1)(z+1)}=\frac{e}{2}$$

و $z_3=-1$ قطباً بسيطاً لـ $f_2(z)$ لأن:

$$\lim_{z\to z_3}(z-z_3)f_2(z)=\lim_{z\to -1}\frac{(z+1)ze^z}{z^2(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2e}\neq 0$$

والراسب فيه هو:

$$Res(f_2,-1)=\lim_{z\to z_3}(z-z_3)f_2(z)=\lim_{z\to -1}\frac{(z+1)ze^z}{z^2(z-1)(z+1)}=\frac{1}{2e}$$

* النقاط الشاذة لـ $f_3(z)$ هي حلول المعادلة:

$$\sin z\cdot \mathrm{sh}\, z=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\sin z=0\Rightarrow z=k\pi\ ;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ \mathrm{sh}\, z=0\Rightarrow \frac{e^z-e^{-z}}{2}=0\Rightarrow e^z=e^{-z}\Rightarrow z=-z+2\pi ki\Rightarrow\\ z=k\pi i;k=0,\pm1,\pm2,\cdots\end{cases}$$

وبما أن:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^2f_3(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z\ \mathrm{sh}\, z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\ \frac{z}{\mathrm{sh}\, z}=1.1=1\neq 0$$

فإن $z=0$ قطباً من الرتبة الثانية لـ $f_3(z)$ والراسب فيه:

$$Res(f_3,0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z^2}{\sin z\ \mathrm{sh}\, z}\right)'=$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{2z\sin z\ \mathrm{sh}\, z-(\cos z\ \mathrm{sh}\, z+\sin z\ \mathrm{ch}\, z)z^2}{\sin^2 z\ \mathrm{sh}^2 z}$$

ونظراً لصعوبة إيجاد هذه النهاية نلجأ إلى منشور لوران لـ $f_3(z)$ بجوار النقطة $z=0$

$$f_3(z)=\frac{1}{\sin z\ \mathrm{sh}\, z}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}=$$

$$\frac{1}{\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)\left(z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots\right)}$$

$$f_3(z)=\frac{1}{z^2}\frac{1}{\left(1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\cdots\right)\left(1+\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}+\cdots\right)}=\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{60}z^4-\frac{1}{36}z^4+\cdots\right)}=$$
$$\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{90}z^4+\cdots}=\frac{1}{z^2}[1+\left(1-\frac{1}{90}z^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{90}z^4+\cdots\right)^2+$$
$$\cdots]=\frac{1}{z^2}+\text{جزء تحليلي}$$

وبالتالي فإن النقطة الشاذة $z=0$ قطباً من الدرجة الثانية والراسب فيها:

$$Res(f_3,0)=0$$

وبما أن:

$$\lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)f_3(z)=\lim_{z\to k\pi}\frac{1}{\operatorname{sh} z}\frac{z-k\pi}{\sin z}=\frac{1}{(-1)^k\operatorname{sh} k\pi}=\frac{(-1)^k}{sh\ k\pi}\neq 0\ ;$$
$$k=\pm1\,,\pm2,\cdots$$

فجميع النقاط الشاذة $z_k=k\pi$ حيث $k=\pm1\,,\pm2,\cdots$ أقطاب بسيطة لـ $f_3(z)$ والراسب في كل منها هو:

$$Res(f_3,k\pi)=\frac{(-1)^k}{\operatorname{sh} k\pi}\qquad;\qquad k=\pm1,\pm2,\cdots$$

وبما أن:

$$\lim_{z\to k\pi i}(z-k\pi i)f_3(z)=\lim_{z\to k\pi i}\frac{1}{\sin z}\frac{z-k\pi i}{\operatorname{sh} z}=\frac{1}{\sin k\pi i}\frac{1}{\operatorname{ch} k\pi i}=$$
$$\frac{1}{i\operatorname{sh} k\pi}\frac{1}{(-1)^k}=\frac{(-1)^k}{i\operatorname{sh} k\pi}\neq 0$$

فجميع النقاط الشاذة $z_k=k\pi i$ حيث $k=\pm1\,,\pm2,\cdots$ هي أقطاب بسيطة لـ $f_3(z)$ والراسب فيها هو:

$$Res(f_3,k\pi i)=\frac{(-1)^k}{i\operatorname{sh}(k\pi)}\quad;\quad k=\pm1\,,\pm2,\cdots$$

تمرين:[2]: برهن ما يلي مستعيناً بالرسم، وبعد التأكد من تحقق شروط استخدام مبرهنة الرواسب:

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2\sin^2 z}dz=\pi i$$

البرهان: النقاط الشاذة لـ $f(z)$ هي حلول المعادلة:

$$z^2\sin^2 z=0\Rightarrow z_k=k\pi\quad;\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

ولكن $z=0$ تقع داخل المنحني C الذي يحيط بالمنطقة R والمنحني C محدود وصقيل وموجه و$f(z)$ تحليلية في R باستثناء النقطة الشاذة $z=0$ داخل R، فحسب مبرهنة الرواسب:

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2\sin^2 z}dz=2\pi i\, Res(f,0)$$

ولكن $z=0$ قطباً من المرتبة الثالثة لـ $f(z)$ لأن:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)^3 f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z(e^z-1)}{\sin^2 z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}.\frac{e^z-1}{\sin z}=1\neq 0$$

ولنوجد الراسب لـ $f(z)$ في النقطة $z=0$ وذلك بالاعتماد على منشور لوران لـ $f(z)$ في جوار $z=0$، فنجد:

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z^2\sin^2 z}=2\frac{e^z-1}{z^2(1-\cos 2z)}$$

$$=2\frac{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{(z^2(\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\frac{(2z)^6}{6!}-\cdots)}\qquad=\frac{1}{z^3}\,\frac{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\cdots}{1-\frac{1}{3}z^2+\frac{2}{45}z^4-\cdots}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\cdots\right)\frac{1}{1-\left(\frac{1}{3}z^2-\frac{2}{45}z^4+\cdots\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\cdots\right)\left[1+\left(\frac{1}{3}z^2-\frac{2}{45}z^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}z^2-\frac{2}{45}z^4+\cdots\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{15}z^4+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^3}\left(1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}+\frac{1/2}{z^2}+\frac{1/2}{z}+\text{جزء تحليلي}$$

وبالتالي $z=0$ قطباً من الدرجة الثالثة والراسب فيه هو: $Res(f,0)=\frac{1}{2}$

$$\oint_{|z|=1}\frac{e^z-1}{z^2\sin^2 z}dz=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\pi i$$

تمرين:[3]: احسب قيمة التكامل:

$$I=\oint_C z^2\cos\frac{1}{z-1}dz$$

حيث: $C;\ |z-1|=1$ دائرة موجهة بالاتجاه الموجب.

الحل: $z=1$ هي النقطة الشاذة الوحيدة لـ $f(z)$ و واقعة داخل المنحني C الموجه والمحدد والصقيل والمغلق و$f(z)$ تحليلية على وداخل C باستثناء النقطة الشاذة $z=1$ الواقعة داخل C، فحسب نظرية الرواسب نجد:

$$I=2\pi i\,Res(f,1)$$

ولنوجد منشور لوران لـ $f(z)$ بجوار $z=1$:

$$f(z)=z^2\cos\frac{1}{z-1}=[(z-1)+1]^2\cos\frac{1}{z-1}$$
$$=[(z-1)^2+2(z-1)+1]\left[1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{24(z-1)^4}-\cdots\right]$$
$$=(z-1)^2+2(z-1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{z-1}-\frac{11/24}{(z-1)^2}+\cdots$$

إذاً $z=1$ شاذة أساسية والراسب فيها $Res(f,1)=-1$ وبالتالي:

$$I=2\pi i(-1)=-2\pi i$$

تمرين:[4]: احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$$

الحل: الدالة المكاملة كسرية جبرية عادية في $(\cos\theta\,,\sin\theta)$ كما أن:

$$5+4\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{-5}{4}\quad;\quad\left(\text{المعادلة مستحيلة}\right)$$

والدالة محدودة في مجال المكاملة، فالتكامل I موجود. نفرض أن:

$$z=e^{i\theta}\ ;\ \ \theta\in[0,2\pi]\Rightarrow dz=ie^{i\theta}d\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin^2\theta=\left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^2=\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\ ,\ \cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$$

$$\Rightarrow I=\oint_{|z|=1}\frac{\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}}{5+2\frac{z^2+1}{z}}\cdot\frac{dz}{iz}=\frac{i}{4}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z^2+5z+2)}dz=$$
$$\frac{i}{4}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(2z+1)(z+2)}dz$$

وللدالة المكاملة قطبين: $z_1=-\frac{1}{2}\left(\text{بسيط}\right);\ z_2=0\left(\text{مضاعف}\right)$ واقعين داخل دائرة الوحدة $|z|=1$، فحسب نظرية الرواسب نجد :

$$I=\frac{i}{4}2\pi i\sum_{k=1}^{2}Res(f,z_k)$$

$$Res\left(f,-\frac{1}{2}\right)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z)=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\left(z^2-1\right)^2}{2z^2(z+2)}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$$

$$Res(f,0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}[z^2f(z)]'=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z(z^2-1)(2z^2+5z+2)-(4z+5)(z-1)^2}{(2z^2+5z+2)^2}=\frac{-5}{4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{-\pi}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

تمرين:[5]: احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4-6x^2+25}$$

الحل: الدالة المكاملة $f(x)=\frac{1}{x^4-6x^2+25}$ هي دالة زوجية، وبالتالي:

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4-6x^2+25}$$

فالنقاط الشاذة لـ $f(z)=\frac{1}{z^4-6z^2+25}$ هي حلول المعادلة:

$$z^4-6z^2+25=0\Rightarrow(z^2-3)^2+16=0$$
$$\Rightarrow(z^2-3)^2=16i^2\Rightarrow z^2=3\pm 4i$$

نفرض $z=x+iy$ هو جذر لهذه المعادلة عندئذٍ:

$$(x+iy)^2=3\pm 4i\Rightarrow(x^2-y^2)+2ixy=3\pm 4i$$
$$\Rightarrow x^2-y^2=3\,,xy=\pm 2\Rightarrow y=\pm\frac{2}{x}\Rightarrow x^2-\frac{4}{x^2}=3$$
$$\Rightarrow x^4-3x^2-4=0\Rightarrow(x^2-4)(x^2+1)=0\ \Rightarrow x=\pm 2$$

وبالتالي يوجد للمعادلة أربعة جذور هي:

$$z_{1,2}=2\pm i\quad,\ z_{3,4}=-2\pm i$$

وبالتالي $f(z)$ تحليلية في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء القطبين البسيطين $z_{1,3}$ وبالتالي:

$$I=\frac{1}{2}2\pi i\sum_{y_k>0}Res(f,z_k)=\pi i\left(\frac{1}{4z_1^2-12z_1}+\frac{1}{4z_3^2-12z_3}\right)=$$
$$\frac{\pi i}{4}\left[\frac{1}{z_1(z_1^2-3)}+\frac{1}{z_3(z_3^2-3)}\right]$$
$$\therefore I=\frac{\pi i}{4}\left[\frac{1}{4i(2+i)}+\frac{1}{4i(2-i)}\right]=\frac{\pi}{20}$$

تمرين:[6]: بين نوع كل نقطة شاذة واحسب الراسب فيها، لكلٍ من الدالتين:

$$f_1(z)=\frac{1}{(z+1)^2}\ ,\ f_2(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^3}$$

الحل:

- النقاط الشاذة لـ $f_1(z)$ هي النقطة الوحيدة $z=-1$ وبما أن:

$$\lim_{z\to -1}[(z+1)^2 f_1(z)]=1$$

فإن $z=-1$ قطب من الدرجة الثانية والراسب فيه هو:

$$Res(f,-1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}[(z+1)^2 f_1(z)]'=0$$

- النقاط الشاذة لـ $f_2(z)$ هي النقطة الوحيدة $z=0$ ، وبما أن:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)\,f_2(z)=\ \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2 z}{z^2}=2\neq 0$$

فإن $z=0$ قطباً بسيطاً لـ $f_2(z)$ والراسب فيه:

$$\lim_{z\to 0}(z-0)\,f_2(z)=\ \lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2 z}{z^2}=2\neq 0$$

تمرين:[7]: برهن ما يلي مستعيناً بالرسم وبعد التأكد من تحقق شروط استخدام نظرية الرواسب:

$$\oint_\Gamma \frac{z^2-4z+2}{ze^{1/z}}dz=13\pi i\quad ;\ (\text{المربع}\ \Gamma\ ;\ -1\pm i\ ,1\pm i\ )$$

إن $z=0$ هي نقطة شاذة للدالة المكاملة وهي واقعة داخل المربع Γ المحدود والصقيل جزئياً والموجه والمغلق والذي يحيط بالمنطقة R حيث الدالة المكاملة تحليلية في R باستثناء النقطة الشاذة $z=0$ داخل R، فحسب نظرية الرواسب نجد:

$$\oint_\Gamma \frac{z^2-4z+2}{ze^{1/z}}dz=2\pi i\ Res(f,0)$$

لنوجد منشور لوران لـ $f(z)$ في جوار $z=0$:

$$f(z)=\frac{z^2-4z+2}{ze^{1/z}}=\frac{z^2-4z+2}{z(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots)}=$$

$$(z-4+\frac{2}{z})\left[1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots\right)+(\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}+\cdots)^2+\cdots\right]$$

$$\Rightarrow f(z)=\left(z-4+\frac{2}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)=z-5+\frac{13/2}{z}+\cdots$$

بما أن منشور لوران لـ $f(z)$ في جوار $z=0$ يتألف من عددٍ غير منتهٍ من الحدود، فإن النقطة الشاذة $z=0$ أساسية لـ $f(z)$ والراسب فيها، أمثال الحد: $\frac{1}{z}$ وهو:

$$Res(f,0)=\frac{13}{2}$$
$$\Rightarrow \oint_{\Gamma}\frac{z^2-4z+2}{ze^{1/z}}dz=2\pi i\left(\frac{13}{2}\right)=13\pi i$$

تمرين:[8]: احسب قيمة التكامل: $I=\oint_c \operatorname{ctan}^2 z dz$، حيث $C:|z|=1$ دائرة موجهة بالاتجاه الموجب.

الحل: النقط الشاذة للدالة المكاملة $f(z)=\frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}$ هي حلول المعادلة:

$$\sin^2 z=0\Rightarrow z_k=k\pi\ ;\ k=0\ ,\pm1\ ,\pm2\ ,\cdots$$

ولكن $z=0$ تقع داخل المنحني C المحدود والصقيل والمغلق والموجه والدالة $f(z)$ تحليلية على وداخل المنحني C باستثناء النقطة الشاذة $z=0$، فحسب نظرية الرواسب نجد:

$$I=2\pi i\,Res(f,0)$$

ولكن $z=0$ قطباً من الدرجة الثانية لـ $f(z)$ وذلك لأن:

$$\lim_{z\to0}(z-0)^2 f(z)=\lim_{z\to0}\cos^2 z\cdot\lim_{z\to0}\left(\frac{z}{\sin z}\right)^2=1\neq0$$
$$\Rightarrow Res(f,0)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to0}[z^2f(z)]'=\lim_{z\to0}[z^2\operatorname{ctan}^2 z]'=$$
$$\lim_{z\to0}[2z\operatorname{ctan}^2 z-2z^2\operatorname{ctan} z(1+\operatorname{ctan}^2 z)]$$

ونظراً لصعوبة إيجاد هذه النهاية، نوجد منشور لوران لـ $f(z)$ بجوار $z=0$:

$$f(z)=\operatorname{ctan}^2 z=\frac{1}{\sin^2 z}-1=\frac{2}{1-\cos 2z}-1=\frac{2}{\frac{(2z)^2}{2!}-\frac{(2z)^4}{4!}+\cdots}-1$$
$$=\frac{1}{z^2-\frac{1}{3}z^4+\cdots}-1=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^2+\cdots}-1$$
$$=\frac{1}{z^2}\left[\left(1+\frac{1}{3}z^2+\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}z^2+\cdots\right)^2+\cdots\right]-1=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{3}+\cdots=$$
$$\frac{1}{z^2}+\text{جزء تحليلي}$$

بالتالي $z=0$ قطباً من الدرجة الثانية لـ $f(z)$ والراسب فيه:

$$Res(f,0)=0\Rightarrow I=2\pi i(0)=0$$

تمرين:[9]: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos \pi x}{x^2+2x+5} dx$$

الحل: الدالة $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$ دالة كسرية جبرية عادية وتحقق $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
كما أن المقام $f(x)$ لا ينعدم. والنقاط الشاذة للدالة $e^{i\pi z}f(z)$ هي حلول المعادلة:

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow (z+1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = -1 \pm 2i$$

وبالتالي $f(z)$ تحليلية في النصف العلوي من المستوي العقدي باستثناء القطب البسيط $z = -1 + 2i$.

$$\Rightarrow I = Re\{2\pi i \, Res[e^{i\pi z} f(z), \;\; z = -1 + 2i]\}$$

$$= Re\left\{2\pi i \frac{(-1+2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{2(-1+2i)+2}\right\} = Re\left[2\pi i \frac{(-1+2i)(-e^{-2\pi})}{4i}\right] = \frac{\pi}{2e^{2\pi}}$$

تمرين:[10]: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+2)(x+3)} dx \;; \quad 0 < p < 2$$

الحل: الدالة $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+3)}$ دالة كسرية جبرية عادية ومقامها لا ينعدم أي من أجل $x > 0$.

$$\lim_{x\to 0} x^p f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^p}{(x+2)(x+3)} = 0 \quad ;(\text{عندما } p > 0)$$

$$\lim_{x\to \infty} x^p f(x) = \lim_{x\to \infty} \frac{x^p}{(x+2)(x+3)} = 0 \quad ;(\text{عندما } p < 2)$$

وبالتالي هذين الشرطين محققين معاً لأن $0 < p < 2$ والنقاط الشاذة لـ $z^{p-1}f(z)$ هما القطبين البسيطين: $z_1 = -2 \;\;,\;\; z_2 = -3$.

$$\Rightarrow I = \frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi} \sum_{k=1}^{2} Res\,(z^{p-1}\, f(z)\,, z_k)$$

$$\therefore I = \frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi}[(-2)^{p-1} - (-3)^{p-1}] =$$

$$\frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi}(-1)^{p-1}[2^{p-1} - 3^{p-1}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-\pi}{\sin p\pi} e^{-ip\pi}[-e^{ip\pi}][2^{p-1} - 3^{p-1}] \Rightarrow \frac{\pi}{\sin p\pi}[2^{p-1} - 3^{p-1}]$$

تمارين غير محلولة (5)

التكامل لا يملك أقطاباً على المحور الحقيقي:

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx \quad ; \quad (a,b>0)$

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx$

6. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}\,dx \quad ; \quad (a,b>0\,, a\neq b)$

التكامل من الشكل $e^{imz}Q(z)$

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx \quad ; \quad (a,b>0)$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx \quad ; \quad (a,b>0)$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3\sin mx}{x^4+a^4}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

أثبت أن التكامل الآتي يحقق العلاقة

12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n\sin(\pi/2n)} \quad ; \quad (n=1,2,3,\cdots)$

التكامل يملك أقطاباً حقيقية

13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin \pi x}{x(1-x^2)}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}\,dx \quad ; \quad (b>0)$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}\,dx \quad ; \quad (a \geq 0 \ , \ b \geq 0)$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx \quad ; \quad (a,b>0)$

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \quad ; \quad \left(Hint: f(z) = \left[e^{2iz}-1\right]/z^2\right)$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx \ ;\left(Hint: f(z) = \left[e^{3iz}-3e^{iz}+2\right]/z^3\right)$

20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax}{1-x^4}\,dx \quad ; \quad (a>0)$

22. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1-x^4}\,dx$

التكامل يمتلك نقاط تفرعية

23. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x^2+1}\,dx \quad ; \quad (-1<\alpha<1)$

24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(x^2+1)^2}\,dx \quad ; \quad (-1<\alpha<3 \ , \ \alpha \neq 1)$

25. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+x+1}\,dx \quad ; \quad (0<\alpha<2)$

26. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(x+1)} \quad ; \quad (0 < \alpha < 1)$

27. $\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}}{x^3+1}\, dx$

28. $\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(x^2+1)^2}\, dx \quad ; \quad (-1 < \alpha < 3)$

فهرس الفصل السادس

الفصل السادس

6. الراسم الحافظ للزاوية الموجهة

Conformal Mapping

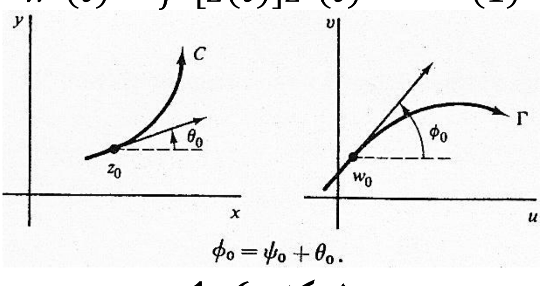
في هذا الباب سنقدم مفهوم الراسم الحافظ للزاوية الموجهة ثم نستنبط بعض النتائج المتعلقة بسلوك الدوال التي تكون توافقية في داخلية منطقة ما وقابلة للاشتقاق على حد هذه المنطقة تحت تغيير المتغيرات يتعين بمثل هذه الرواسم. وفي هذا الفصل سنعطي بعض التطبيقات لهذه النتائج.

1.6 خواص أساسية Base Properties

دعنا نفحص التغيرات الناتجة في اتجاهات المنحنيات المارة بنقطة z_0 تحت تأثير التحويلة $w = f(z)$ عندما تكون الدالة f تحليلية عند $z = 0$ و $f'(z_0) \neq 0$.

نفرض أن C قوس أملس مار بالنقطة z_0. إذا كان $z(t) = x(t) + iy(t)$، $a \leq t \leq b$ تمثيلاً بارامترياً للقوس C فإن: $w(t) = f[z(t)]$، $a \leq t \leq b$، يكون تمثيلاً بارامترياً للقوس Γ صورة C بالتحويلة $w = f(z)$. نعلم أن:

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t) \qquad (1)$$



الشكل: 6–1

إذن، عندما يقع القوس C في نطاق يحوي النقطة z_0 وتكون فيه الدالة f تحليلية و $f'(z) \neq 0$ فإن الصورة Γ للقوس C تكون أيضاً قوساً أملساً. وعلاوة على ذلك، فإننا نحصل من المعادلة (1) على العلاقة:

$$\arg w'(t) = \arg f'[z(t)] + \arg z'(t) \qquad (2)$$

زاوية ميل خط موجه مماس للقوس C عند النقطة $z_0 = z(t_0)$، $a < t_0 < b$، هي أي قيمة θ_0 من قيم $\arg z'(t_0)$. إذا كانت ψ_0 إحدى قيم $\arg f'(z_0)$ فإن المقدار:

$$\emptyset_0 = \psi_0 + \theta_0$$

يكون قيمة من قيم $\arg w'(t_0)$ وذلك تبعاً للمعادلة (2) وبالتالي تكون هذه القيمة هي زاوية ميل الخط الموجه المماس للقوس C عند النقطة $w_0 = f(z_0)$ (شكل 6-1). إذن، عندما تكون دالة f تحليلية عند نقطة ما z_0 و$f'(z_0) \neq 0$ فإن الخط الموجه المماس لقوس أملس C عند z_0 يدور بزاوية مقدارها:

$$\psi_0 = \arg\ f'(z_0) \qquad (3)$$

تحت تأثير التحويلة $w = f(z)$.

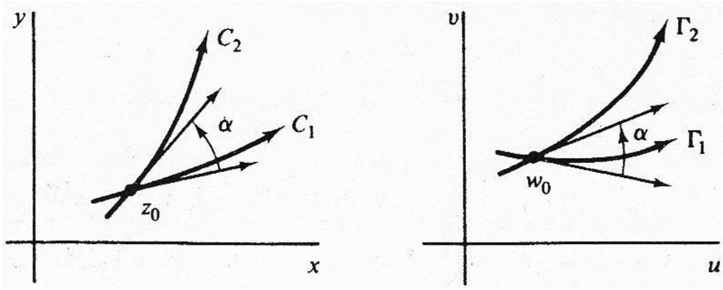
افرض أن C_1, C_2 قوسان أملسان ماران بالنقطة z_0 وأن θ_2 وθ_1 هما زاويتا ميلي المستقيمين الموجهين المماسين للقوسين C_1, C_2 على الترتيب عند z_0. مما ذكر أعلاه ينتج أن:

$$\emptyset_1 = \psi_0 + \theta_1 \qquad \& \qquad \emptyset_2 = \psi_0 + \theta_2$$

هما زاويتا ميلي المستقيمين الموجهين المماسين للصور Γ_1, Γ_2، للقوسين C_1, C_2 على الترتيب عند النقطة $w_0 = f(z)$ إذن، $\emptyset_2 - \emptyset_1 = \theta_2 - \theta_1$ ، أي أن الزاوية $\emptyset_2 - \emptyset_1$ من Γ_1 إلى Γ_2 لها نفس مقدار واتجاه الزاوية $\theta_2 - \theta_1$ من C_1 إلى C_2. هاتان الزاويتان يرمز لهما بالرمز في (الشكل 6-2).

يقال لراسم يحفظ مقدار واتجاه الزاوية بين أي قوسين أملسين مارين بنقطة معينة إنه **راسم حافظ للزاوية الموجهة** conformal mapping عند هذه النقطة. ما سبق استنباطه يمكن صياغته في النظرية التالية.

مبرهنة: 6-1-1: عند كل نقطة z تكون f عندها تحليلية وبحيث $f'(z) \neq 0$ يكون الراسم $w = f(z)$ حافظاً للزوايا الموجهة.



الشكل: 6–2

فيما يلي عندما نقول راسم حافظ للزوايا الموجهة أو تحويلة حافظة للزوايا الموجهة فإننا سنعني الرسم بدالة تحليلية معرفة على نطاق لا تنعدم مشتقة الدالة عند أي من نقطه.

يقال للراسم الذي يحفظ مقدار الزاوية وليس بالضرورة اتجاهها إنه راسم حافظ للزوايا Isogonal. التحويلة $w = z$ انعكاس بالنسبة للمحور الحقيقي وهي تحويلة حافظة للزوايا ولكنها ليست حافظة للزوايا الموجهة. وإذا أتبعت هذه التحويلة بتحويلة حافظة للزوايا الموجهة فإن التحويلة الناتجة $w = f(\bar{z})$ تكون أيضاً حافظة للزوايا ولكن ليست حافظة للزوايا الموجهة.

افرض أن f ليست دالة ثابتة وتحليلية عند نقطة ما z_0. إذا كانت $f(z_0)$ فإن z_0 يقال لها نقطة حرجة Critical Point للدالة f. فمثلاً النقطة z_0 نقطة حرجة للتحويلة:

$$w = z^2$$

هذه التحويلة ترسم الشعاع $\theta = C$ الذي رأسه النقطة $z = 0$ فوق الشعاع $\emptyset = 2C$ الذي رأسه النقطة $w = 0$. من هذا نرى أن مقدار الزاوية بين أي شعاعين رأساهما النقطة الحرجة $z = 0$ يتضاعف تحت تأثير هذه التحويلة.

وبصفة عامة، يمكن تبيان أنه إذا كانت z_0 نقطة حرجة للتحويلة $w = f(z)$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث يكون مقدار صورة الزاوية بين قوسين أملسين مارين بالنقطة z_0 بالتحويلة $w = f(z)$ يساوي m من المرات مقدار الزاوية بين القوسين.

العدد الصحيح m أصغر عدد صحيح موجب بحيث $f^{(m)}\,(z_0) \neq 0$. وسنترك تفاصيل إثبات ذلك كتمارين للقارئ.

2.6 خواص إضافية وأمثلة Further properties and Examples

إذا كانت صورتا منحنيين براسم حافظ للزوايا الموجهة متعامدين فإن هذين المنحنيين لابد وأن يكونا متعامدين. وعلى سبيل الخصوص، إذا كانت التحويلة:

$$u + iv = f(x + iy)$$

حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة (x_0, y_0) وإذا كانت $u_0 + iv_0 = f(x_0 + iy_0)$ فإن المنحنيات المستوية $u_0(x, y)$ ،$v_0(x, y)$ ترسم إلى الخطوط المستقيمة المتعامدة $u = u_0\ ,\ v = v_0$، على الترتيب. وبالتالي لا بد وأن تكون هذه المنحنيات المستوية متعامدة.

خاصية أخرى لتحويلة $w = f(z)$ حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة z_0 يمكن الحصول عليها عند أخذ مقياس $f'(z)$ في الإعتبار. من تعريف المشتقات نعلم أن:

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

من هذا يتضح أن الطول $|z - z_0|$ للقطعة المستقيمة الصغيرة التي إحدى نقطتي نهايتيها z_0 يزيد أو ينقص تقريباً بالمعامل $|f'(z_0)|$ تحت تأثير التحويلة $w = f(z)$ وذلك لأن $|f(z) - (z_0)|$ هو طول القطعة المستقيمة المناظرة في المستوى المركب w.

بالإضافة إلى ذلك فإن صورة منطقة صغيرة في جوار ما للنقطة z_0 يكون لها تقريباً نفس شكل المنطقة الأصلية. كل من زاوية الدوران ψ_0 المعطاة بالمعادلة (3) والمعامل القياسي $|f'(z_0)|$ لتحويلة حافظة الزوايا الموجهة يتغير عموماً من النقطة لأخرى وبالتالي فإن منطقة كبيرة قد ترسم إلى منطقة لا تحمل أي نوع من التشابه مع المنطقة الأصلية.

التحويلة $w = f(z)$ الحافظة للزوايا الموجهة عند نقطة z_0 لها معكوس محلي Local inverce هناك. أي أنه إذا كانت $w_0 = f(z_0)$ فإنه يوجد نطاقين مستطيلين R, S مراكزهما عند z_0, w_0 على تركيب بحيث تناظر كل نقطة $w \in R$ نقطة وحيدة $z \in R$ تحقق $w = f(z)$ التحويلة العكسية، التي يرمز لها بالرمز $z = g(w)$، تحليلية عند w_0 ومشتقتها هناك تعطى بالصيغة:

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \qquad (1)$$

تحقق وجود مثل هذه الدالة العكسية ينتج مباشرة من نتيجة في حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية. وسنذكر هنا هذه النتيجة ونترك تفصيلات تطبيقاتها للتمارين. افرض أن الدالتين:

$$u = u\,(x, y),\;\; v = v\,(x, y) \qquad (2)$$

متصلتين في جوار ما لنقطة (x_0, y_0) في المستوى XOY وأن لهما مشتقات جزئية أولى متصلة عند جميع نقط هذه الجوار. هاتين الدالتين تمثلان تحويلة إلى المستوى $U0V$ ونفرض بالإضافة إلى أن جاكوبي التحويلة:

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{vmatrix} = u_x(x, y)v_y(x, y) - v_x(x, y)u_y\,(x, y)$$

لا ينعدم (x_0, y_0) وبالتالي إذا كان $u_0 = u(x_0, y_0)$ و $v_0 = v(x_0, y_0)$ فإنه يوجد نطاقان مستطيلان R, S مركزيهما (u_0, v_0)، (x_0, y_0) على الترتيب بحيث تناظر كل نقطة $S \in (u, v)$ نقطة وحيدة $R \in (x, y)$ بحيث $u = u(x, y)$ و $v = v(x, y)$ وهذا يمكننا من تعريف الدوال العكسية

$$x = x\,(u, v) \;\;,\;\; y = y\,(u, v) \qquad (3)$$

على S هذه الدوال متصلة ولها مشتقات جزئية أولى متصلة تحقق الشروط:

$$\left.\begin{aligned} x_u\,(u,v) &= \frac{1}{J\,(x\,,y)} v_y\,(x\,,y) \\ x_v\,(u,v) &= -\frac{1}{J\,(x\,,y)} u_y\,(x\,,y) \\ y_u\,(u,v) &= -\frac{1}{J\,(x\,,y)} v_x\,(x\,,y) \\ y_v\,(u,v) &= \frac{1}{J\,(x\,,y)} u_x\,(x\,,y) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

حيث النقطة $(u\,,v)\,,(x\,,y)$ مرتبطة بالمعادلات $(2), (3)$.

لاحظ أنه بالرغم من أن التحويلة الحافظة للزوايا الموجهة أحادية في جوار ما لكل نقطة من نطاق تعريفها إلا أنها لا تكون بالضرورة أحادية في نطاق التعريف بأكمله.

كمثال على ذلك الدالة $w = z^2$ الحافظة للزوايا الموجهة في نطاق $1 < |z| < 2$ والتي لا تكون في هذا النطاق.

لاحظ أن كل من الدوال البسيطة التي درسناها في الفصل الثاني تحليلية في نطاق ما. وبالتالي فإن التحويلات المعرفة بهذه الدوال تكون حافظة للزوايا الموجهة عند كل نقطة تكون عندها الدالة تحليلية وليست نقطة حرجة. وكمثال توضيحي، التحويلية:

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy$$

حافظة للزوايا عند النقطة $z = 1+i$ حيث يتقاطع المستقيمان $y = x \;,\; x = 1$ الخط المستقيم $y = x$ يرسم إلى الشعاع $u = 0 \;,\; v \ge 0$ ويرسم الخط المستقيم $x = 1$ إلى المنحني الذي يمثل وسيطياً بالمعادلات: $u = 1 - y^2 \;,\; v = 2y$.

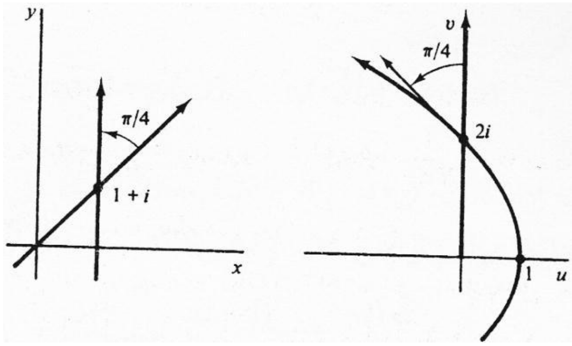
هذا المنحني الأخير هو القطع المكافئ $v^2 = -4(u-1)$، انظر الشكل 6-3.

إذا اعتبر اتجاه تزايد y على أنه الاتجاه الموجب لكلا المستقيمين في المستوى المركب Z فإن مقياس الزاوية الموجهة من الخط المستقيم $y = x$ إلى الخط المستقيم $x = 1$ يساوي $\frac{\pi}{4}$.

عندما $y > 0$ فإن تزايد y على امتداد الخط المستقيم $y = x$ يستتبعه تزايد v على امتداد الخط المستقيم $u = 0$، وذلك لأن $v = 2y^2$ وبالتالي يكون الاتجاه الموجب لصورة المستقيم $y = x$ إلى أعلى عندما $y > 0$. وهذا صحيح أيضاً بالنسبة للقطع المكافئ،

كما يتضح من ا لمعادلة البارامترية الثانية $v = 2y$. من هذا يمكننا استنباط أن مقياس الزاوية الموجهة من صورة المستقيم $y = x$ إلى صورة المستقيم $x = 1$ عند النقطة $w = 2i$ (هذه النقطة هي صورة النقطة $z = 1+i$) يساوي $\frac{\pi}{4}$ كما هو مطلوب.

لاحظ أن زاوية الدوران التحويلية $w = z^2$ عند النقطة $z = 1+i$ هي إحدى قيم $\arg[2(1+i)]$ أو $\frac{\pi}{4}$ المعامل القياسي عند هذه النقطة يساوي $2\sqrt{2}$.



الشكل: 6–3

3.6 تمارين غير محلولة:

1- عين زاوية الدوران عند النقطة $z = 2+i$ بالتحويلية $w = z^2$ وضح بيانياً زاوية الدوران لمنحني خاص. أثبت أن المعامل القياسي لهذه التحويلة عند النقطة المعطاة يساوي $2\sqrt{5}$.

2- عين زاوية الدوران بالتحويلة $w = \dfrac{1}{z}$

(أ) عند النقطة $z = 1$.

(ب) عند النقطة $z = i$.

الأجوبة: (أ) π (ب) صفر

3- أثبت أن صور المستقيمين $y = x - 1$, $y = 0$ بالتحويلة $w = 1/z$ هي الدائرة $u^2 + v^2 - u - v = 0$ والخط المستقيم $v = 0$ على الترتيب ارسم هذه المنحنيات وعين الاتجاهات المتناظرة عليها وتحقق من هذه التحويلة تكون حافظة للزوايا الموجهة عند النقطة $z = 1$.

4- أثبت أن زاوية الدوران عند النقطة الغير صفرية $z_0 = r_0.\exp(i\theta_0)$ بالتحويلة $w = z^n$ حيث n عدد صحيح موجب، تساوى $(n-1)\theta_0$ عين المعامل القياسي لهذه التحويلة عند النقطة المعطاة.

الإجابة: nr_0^{n-1}

5- أثبت أن التحويلة $w = \exp z$ حافظة للزوايا الموجهة عند جميع النقط في المستوى المركب.

6- أثبت أن التحويلة $w = \sin z$ حافظة للزوايا الموجهة عند جميع النقط عدا $z = (2n-1)/\frac{\pi}{2}$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

7- افرض أن $w = f(z)$ تحويلة حافظة للزوايا الموجهة عند z_0 اكتب $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ واستخدم نتائج حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية لإثبات أن الدالة f يكون لها معكوس محلي g عند z_0 وتحليلي عند $f(z_0)$.

إقتراح: عبر أولاً عن التحويلة $w = f(z)$ بدلالة معادلتي (2) البند السابق لتبيان أن الجاكوبي لا ينعدم عند (x_0, y_0)، استخدم معادلتي كوشي-ريمان لإثبات أن قيمته عند النقطة z_0 تساوي $|f'(z_0)|^2$. بعد ذلك عرف g بدلالة معادلتي (3) البند السابق واستخدم الشروط (4) لإثبات أن المشتقات الجزئية الأولى لهاتين الدالتين تحقق معادلتي كوشي—ريمان عند النقطة (u_0, v_0).

8- أثبت أنه إذا كانت $z = g(w)$ المعكوسة المحلية للتحويلة $w = f(z)$ الحافظة للزوايا الموجهة عند النقطة z_0 فإن $g'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$.

حيث $w_0 = f(z_0)$ لاحظ وجود $g'(w_0)$ ويتحقق من تمرين (7) وأن الصيغة المعطاة أعلاه تبين أن g تكون في الواقع حافظة للزوايا الموجهة عند w_0.

إقتراح: اكتب $g[f(z)] = z$ ثم طبق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقات الدوال المحصلة.

9- أوجد المعكوسة المحلية للتحويلة $w = \exp z$ عند النقطة.

(أ) $z_0 = 0$

(ب) $z_0 = 2\pi i$.

ثم حقق صيغة (1) البند السابق لتفاضل المعكوسة المحلية التي حصلنا عليها في التمرين (8).

الأجوبة : (أ) $\text{Log}w$ (ب) $\text{Log}w + 2\pi i$.

10- افرض أن z_0 نقطة حرجة للدالة f وأن m أصغر عدد صحيح موجب بحيث $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ افرض أن Γ هي صورة القوس الأملس C بالتحويلة $w = f(z)$ كما هو موضح بالشكل 6-1. أثبت أن زاويتي الميل تحققان الآن العلاقة:

$$\phi_0 = m\theta_0 + \arg\left[f^{(m)} z_0\right]$$

ومن ثم أثبت أنه إذا كانت α ترمز للزاوية بين القوسين الأملسين C_1, C_2 كما هو موضح بشكل 6-2 فإنه الزاوية المناظرة بين الصورتين، هي $\beta = m\alpha$.

اقتراح: من مفكوك تايلور للدالة f عند z_0 نحصل على العلاقة:

$$\arg\left[f(z) - f(z_0)\right] = m\arg(z - z_0) + \arg\left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \ldots\right]$$

ثم نستخدم حقيقة أن زاوية ميل القوس C. عند z_0 وزاوية ميل صورته Γ عند $f(z_0)$ هما نهايتي $\arg(z - z_0)$, $\arg\left[f(z) - f(z_0)\right]$ على الترتيب عندما تقترب z من z_0 على امتداد القوس C.

4.6 المرافقات التوافقية Harmonic Conjugates

لاحظنا في السابق أنه إذا كانت:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

دالة تحليلية في نطاق ما D، فإن الدالة الحقيقية $v(x, y)$ تكون المرافق التوافقي للدالة الحقيقية $u(x, y)$ أي أن، الدالتين $v(x, y)$، $u(x, y)$ توافقيتان في D وتحقق مشتقاتهما الجزئية الأولى معادلتي كوشي-ريمان:

$$u_x(x,y) = v_y(x,y), \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y) \qquad (1)$$

عند جميع نقط D.

ستبين الآن أنه إذا كانت $u(x,y)$ دالة توافقية معطاة معرفة على نطاق بسيط الترابط D فإنه يوجد دائماً مرافق توافقي لها. لإثبات ذلك، سنعتبر أولاً التكامل الخطي:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(r,t)dr + u_r(r,t)dt \qquad (2)$$

حيث مسار التكامل أي منحني يقع في D ويصل النقطة الثابتة $(x_0,\ y_0)$ بنقطة متغيرة (x,y) سنستخدم r,t كمتغيرات التكامل وذلك للتميز بينهما وبين المتغيرات التي تظهر في الحد الأعلى للتكامل (2) تولدت من حقيقة أنه إذا كانت v مرافقة توافقية للدالة v فإن:

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx\, dy$$

وحيث إن u توافقية على D فإنها تحقق معادلة لابلاس:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0.$$

التي ينتج منها أن المشتقة الجزئية للدالة $-u_y(x,y)$ بالنسبة للمتغير y تساوي المشتقة الجزئية للدالة $u_x(x,y)$ بالنسبة للمتغير x أي أن الدالة المكاملة في التكامل (2) تفاضل تام. من هذا يتضح أن التكامل (2) لا يعتمد على المسار المختار وبالتالي يعرف دالة حقيقية:

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_t(r,t)dr + u_r(r,t)dt \qquad (3)$$

في المتغيرين x,y (الحد الأعلى للتكامل).

بقي الآن أن نثبت أن $v(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$ من صيغ التفاضل للتكاملات الخطية ذات حد أعلى متغير للتكامل، بحساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية، نحصل على:

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y), \qquad v_y\,(x,y) = u_x(x,y) \qquad (4)$$

المعادلتان (4) هما معادلتا كوشي-ريمان (1). وحيث إن المشتقات الجزئية الأولى للدالة $u(x,y)$ مستمرة فيتضح من (4) أن المشتقات الجزئية الأولى للدالة $v(x,y)$ مستمرة

أيضاً. وبالتالي فإن $u(x,y)+iv(x,y)$ تكون دالة تحليلية في النطاق D، وهذا بدوره يثبت أن v مرافق توافقي للدالة u.

الدالة v المعرفة بالصيغة (3) ليست بالطبع هي المرافق التوافقي الوحيد للدالة u. وذلك لأن الدالة $v(x,y)+c$، حيث c ثابت اختياري حقيقي، مرافق توافقي أيضاً للدالة u.

لتوضيح ما ذكر أعلاه، اعتبر الدالة $u(x,y)=xy$ التوافقية على المستوي XOY بأكمله. من المعادلة (3)، الدالة:

$$v(x,y)= \int_{(0,0)}^{(x,y)} -r\,dr+t\,dt$$

مرافق توافقي للدالة $u(x,y)$ يمكن إيجاد قيمة هذا التكامل بالتجربة، كما يمكن كذلك إيجاد قيمته بمكاملته أولاً على المسار الأفقي من نقطة الأصل إلى النقطة $(x,0)$ ثم مكاملته بعد ذلك على امتداد المسار الرأسي من $(x,0)$ إلى النقطة (x,y) وعموماً فإن ناتج هذا التكامل هو:

$$v(x,y)=-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{2}\,\mathrm{y}^2,$$

والدالة التحليلية المناظرة هي:

$$f(z)=xy-\frac{i}{2}\,(x^2-\,y^2)=\,-\frac{i}{2}\,z^2$$

5.6 تحويلات الدوال التوافقية Transformations of Harmonic Functons

تعتبر مسألة إيجاد دالة توافقية في نطاق معين وتحقق خواصاً محددة على حد هذا النطاق من المسائل الأساسية في الرياضيات التطبيقية. إذا كانت قيم الدالة محددة على حد النطاق فإن المسألة تعرف بمسألة شروط حدية من النوع الأول أو مسألة ديريخلت Drichlet problem وإذا كانت قيم مشتقة الدالة في الاتجاه العمودي محددة على حد النطاق فإن المسألة تعرف بمسألة شروط حدية من النوع الثاني أو مسألة نويمان

Neumann problem. تعديلات في هذه الأنواع من الشروط الحدية أو مزيج منها قد تظهر كذلك.

كل دالة تحليلية تمدنا بزوج من الدوال التوافقية. فعلى سبيل المثال، حيث إن الدالة $-ie^{iz}$ شاملة فإن مركبتها.

$$H(x,y) = e^{-y}\sin x \ , \quad G(x,y) = -\,e^{-y}\cos x \quad (1)$$

تكونان توافقيتان عند جميع النقط. الدالة H تحقق الشروط:

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = 0 \quad (2)$$

$$H(0,y) = 0 \ , \quad H(\pi,y) = 0 \quad (3)$$

$$H\,(x,0) = \sin x \ , \quad \lim_{y\to\infty} H(x,y) = 0 \quad (4)$$

وعليه فهي تشكل مسألة ديريخليه للشريحة $0 < x < \pi\,,\ y > 0$ بالطبع، نفس الدالة تحقق شروطاً حدية أخرى لنفس النطاق ولنطاقات أخرى. فعلى سبيل المثال، مشتقتها في الاتجاه العمودي $H_x(x,y)$ تنعدم على الخط المستقيم $x = \pi/2$.

أحياناً يمكن اكتشاف حل مسألة معطاة وذلك بالتعرف على كونها الجزء الحقيقي أو التخيلي لدالة تحليلية. ولكن نجاح هذا الأسلوب يعتمد على بساطة المسألة كما يتوقف كذلك على إلمامنا بالأجزاء الحقيقية والتخيلية لقدر كبير من الدوال التحليلية. سنعطى الآن إضافة هامة تساعد على حل هذه المسائل.

مبرهنة:6-5-1: نفرض أن الدالة التحليلية:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ترسم نطاق D_2 في المستوى المركب z فوق نطاق D_w في المستوى المركب w إذا كانت $h(u,v)$ دالة توافقية على D_w فإن الدالة:

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

تكون توافقية في D_z.

الإثبات: الذي سنقدمه للمبرهنة المعطاة سيكون للحالة التي فيها النطاق D_w بسيط الترابط، وهذه في الواقع هي الحالة التي تقابلنا غالباً في التطبيقات. تذكر أن، وذلك

حسب البند السابق، كل دالة توافقية $h(u,v)$ معطاة يناظرها مرافق توافقي $g(u,v)$ ، إذن الدالة:

$$\Phi(w) = h(u,v) + \ ig(u,v)$$

تكون توافقية في النطاق D_W حيث إن الدالة $f(z)$ تحليلية في النطاق D_z فإن الدالة المركبة $\Phi[f(z)]$ تكون أيضاً تحليلية في النطاق D_{z} وبالتالي فإن الجزء الحقيقي $h[u(x,y),v(x,y)]$ لهذه الدالة المركبة يكون دالة توافقية في النطاق D_{z}.

ويجب أن ننوه إلى إثبات المبرهنة المعطاة في الحالة العامة التي لا يكون فيها النطاق D_{W} بالضرورة بسيط الترابط يمكن كتابته وذلك باستخدام قاعدة السلسلة للمشتقات الجزئية، وسنترك التفاصيل للقارئ كتمرين.

مثال:6-5-1: الدالة $h(u,v) = e^{-v} \sin u$ توافقية في النطاق D_{W} المكون من جميع نقط نصف المستوى العلوى $v > 0$ تحت تأثير التحويلة:

$$w = z^2$$

نجد أن $v = 2xy, u = x^2 - y^2$ وبالإضافة إلى ذلك نجد أن النطاق D_{z} في المستوى المركب z المكون من جميع نقط الربع الأول $x > 0, y > 0$ من المستوى ترسم فوق النطاق D_{W} ، إذن الدالة:

$$H(x,y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

تكون توافقية في النطاق D_{z}.

مثال:6-5-2: لنعتبر الدالة $h(u,v) = v$ التوافقية على الشريحة $-\frac{\pi}{2} < v < \pi/2,$ ونلاحظ أن التحويلية $w = \log z$ ترسم نصف المستوى الأيمن $x > 0$ فوق تلك الشريحة بكتابة:

$$\log z \ = \log\sqrt{x^2+y^2} \ + i \arctan\frac{y}{x},$$

حيث: $-\frac{\pi}{2} < \arctan t < \frac{\pi}{2}$، فإننا نجد أن الدالة:

$$H(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

تكون توافقية في النصف المستوى $x > 0$.

6.6 تحويلات الشروط الحدية Transformations of Boundary Conditions

أن يكون لدالة ما أو مشتقاتها في الاتجاه العمودي قيماً معينة على امتداد حد نطاق معين تكون الدالة فيه توافقية تمثل الشروط الحدية الأكثر شيوعاً، وذلك رغم أنها ليست الأنواع الهامة الوحيدة من الشروط الحدية. سنبين في هذا البند أن أنواعاً معينة من هذه الشروط لا تتغير بالتغير الناشئ للمتغيرات عن تحويلات حافظة للزوايا الموجهة. في الباب التالي سنقوم باستخدام نتائج هذا البند للحصول على حلول لمسائل الشروط الحدية. الأسلوب الذي سيستخدم في الباب التالي هو تحويل أي مسألة شروط حدية معطاة في المستوى XOY إلى مسألة أبسط في المستوى $U0V$ ثم استخدام نظريات هذا البند والبند السابق لكتابة حل المسألة الأصلية بدلالة الحل الذي حصلنا عليه في المسألة المبسطة.

نفرض أن:

$$f(z) = [u(x,y), v(x,y)] \qquad (1)$$

دالة توافقية ترسم قوس C في المستوى المركب z فوق قوس Γ في المستوى المركب w وافرض أن دالة ما معرفة على Γ اكتب:

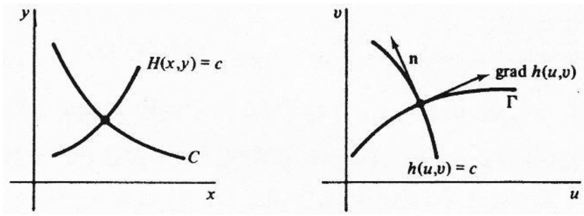
$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

ونفرض أن c أي عدد حقيقي. من الواضح أنه إذا كانت $h(u,v) = c$ على Γ فإن $H(x,y) = c$ على C.

بالإضافة إلى ذلك افرض أن $f(z)$ تحويلة حافظة للزوايا الموجهة على C وأن $h(u,v)$ قابلة للاشتقاق على Γ إذا انعدمت المشتقة dh/dn، للدالة $h(u,v)$ في الاتجاه العمودي على امتداد Γ فإن مشتقة الدالة $H(x,y)$ في الاتجاه العمودي تنعدم على امتداد C. لإثبات ذلك نذكر القارئ بما درسته في حساب التفاضل والتكامل للمتغيرات الحقيقية من أن متجه ميل Gradient الدالة $h(u,v)$ تكون في اتجاهه المشتقة الاتجاهية للدالة h أكبر ما يمكن. و يمكن التعبير عن هذه بدلالة مشتقتى الدالة h للمتغيرين u, v على الصورة:

$$\text{grad}\, h(u,v) = h_u(u,v) + ih_v(u,v).$$

قيمة $\operatorname{grad} h(u,v)$ هي القيمة العظمى للمشتقة الاتجاهية ، ومركبة $\operatorname{grad} h(u,v)$ في أي اتجاه هي المشتقة الاتجاهية للدالة h في الاتجاه. من المعلوم كذلك أن متجه ميل الدالة $h(u,v)$ عند نقطة ما عمودي على المنحني المستوى $h(u,v)=c$ المار بتلك النقطة.



الشكل: 6–4

اعتبر الآن أي نقطة على Γ حيث إن dh/dn عند تلك النقطة هي مركبة متجهة ميل الدالة $h(u,v)$ عند النقطة المذكورة في اتجاه عمودي على Γ وحيث إن $\frac{dh}{dn}=0,$ فإنه ينتج أن متجه الميل لا بد وأن يكون مماساً للمنحي Γ (الشكل: 6–4). ولكن متجه الميل عمودي على المنحني المستوي $h(u,v)=c$ المار بتلك النقطة، وبالتالي لابد وأن يكون 1 عمودياً على هذا المنحني المستوي. حيث إن $w=f(z)$ تحويلة حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة تقاطع C مع $H(x,y)=c$ فلابد وأن يتعامد المنحنيان. وبالتالي فإن مركبة متجهة ميل الدالة $H(x,y)$ في اتجاه عمودي على المنحى C تنعدم. أي أن مشتقة الدالة $H(x,y)$. في اتجاه العمود تنعدم عند كل نقطة من نقط C. فيما ذكرناه أعلاه نلاحظ أننا افترضنا أن $\operatorname{grad} h(u,v)\neq 0$ إذا كان $\operatorname{grad} h(u,v)=0$. فينتج أن: $\operatorname{grad} H(x,y)=0$، وبالتالي dh/dn والمشتقة المناظرة للدالة H في اتجاه العمود تنعدمان.

سنلخص فيما يلي هذه النتائج ونضعها في صورة تجعل من الممكن الاستفادة منها فيما يلي في التطبيقات:

مبرهنة:6–5–2: نفرض أن:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

دالة تحليلية ترسم قوس C في المستوى المركب z فوق القوس Γ في المستوى المركب w افرض كذلك أن $f(z)$ حافظة للزوايا الموجهة على C وأن $h(u,v)$ دالة قابلة للاشتقاق على Γ إذا حققت الدالة $h(u,v)$ أي من الشرطين:

$$\frac{dh}{dn} = 0 \quad \text{أو} \quad h = c$$

على طول Γ فإن الدالة:

$$H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$$

تحقق الشرط المناظر على طول C.

أي شرط حدي مختلف عن النوعين الواردين في النظرية يمكن تحويله إلى شرط يختلف جوهرياً عن الشرط الأصلي. في أي حالة يمكن الحصول على شروط حدية جديدة للمسألة المحولة وذلك بتحويلات خاصة. ومن المفيد أن نلاحظ أنه تحت تأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة تكون النسبة بين المشتقة الموجهة للدالة H على امتداد C في المستوى المركب z والمشتقة الموجهة للدالة h على امتداد الصورة Γ عند النقطة المناظرة في المستوى المركب w تساوي $|f'(z)|$. عادة هذه النسبة لا تكون ثابتة على امتداد قوس معطى.

تمارين غير محلولة(6)

1- استخدم صيغة (3) بند (المرافقات التوافقية) لإيجاد مرافق توافقي للدالة التوافقية:

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$$

عبر عن الدالة التحليلية الناتجة بدلالة المتغير المركب z.

2- افرض أن $u(x,y)$ دالة توافقية في نطاق بسيط الترابط D أثبت أن المشتقات الجزئية من جميع الرتب للدالة u تكون متصلة عند جميع نقط D.

3- صورة القطعة المستقيمة $x = 0, 0 \leq y \leq \pi$ بالتحويلة $w = e^z$ هي نصف الدائرة $u^2 + v^2 = 1, v \geq 0$ كذلك، الدالة:

$$h(u,v) = 2 - u + \frac{u}{u^2+v^2}$$

توافقية، وبالتالي قابلة للاشتقاق، لجميع نقط المستوى المركب w عدا نقطة الأصل وقيمتها تساوي اثنين على نصف الدائرة. اكتب $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$ حسب التغير المشار إليه للمتغيرات وأثبت مباشرة أن $H = 2$ على امتداد القعة المستقيمة. هذا يوضح المبرهنة المعطاة في بند (تحويلات الشروط الحدية).

4- صورة الجزئين الموجبين من محوري الاحداثيات في المستوى المركب z مع نقطة الأصل بالتحويلة $w = z^2$ هي محور الاحدثيات u اعتبر الدالة التوافقية:

$$h(u,v) = e^{-u}\cos v$$

ولاحظ أن مشتقتها في الاتجاه العمودي على امتداد محور الاحداثيات u تنعدم، أي أن $h_v(u,0) = 0$. أثبت مباشرة أن مشتقة الدالة $H(x,y)$ في الاتجاه العمودي، كما هو معرف في النظرية ببند (تحويلات الشروط الحدية)، تنعدم على امتداد الأجزاء الموجبة من المحورين في المستوى المركب z لاحظ أن التحويلة $w = z^2$ ليست حافظة للزوايا الموجهة عند نقطة الأصل.

5- استخدم الدالة التوافقية:

$$h(u,v) = 2v + e^{-u}\cos v$$

بدلاً من الدالة $h(u,v)$ المعطاة بتمرين (4) لإثبات أن $h_v(u,v) = 2$ بينما $H_y(x,0) = 4x$ على امتداد الجزء الموجب من محور OX, $H_x(0,y) = 4y$ على امتداد الجزء الموجب من محور $0Y$. أي أن الشرط من النوع $\frac{dh}{dn} = c$ لا يحول بالضرورة إلى شرط من النوع $dH/dn = c$.

6- أثبت أنه إذا كانت دالة ما $H(x,y)$ حلاً لمسألة نويمان، فإن $H(x,y) + c,$ حيث c أي عدد حقيقي ثابت، تكون أيضاً حلاً لتلك المسألة.

7- افرض أن الدالة التوافقية $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ترسم نطاقاً D_Z في المستوى المركب z فوق نطاق D_w في المستوى المركب w أثبت أنه إذا كانت $h(u,v)$ دالة توافقية معرفة على D_w وكان:

$$H(x,y) = \ h[u(x,y), v(x,y)]$$

فإن:

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = [h_{uu}(u,v) + h_{vv}(u,v)]|f'(z)|^2$$

من هذا نستنتج أن الدالة $H(x,y)$ توافقية في D_Z.

8- افرض أن P دالة في المتغير u, v وتحقق معادلة بواسون:

$$P_{uu}(u,v) + P_{vv}(u,v) = \Phi(u,v)$$

في نطاق D_w من المستوى المركب w حيث Φ دالة معطاة. أثبت أنه إذا كانت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. دالة تحليلية ترسم نطاقاً D_z فوق النطاق D_w، فإن الدالة: $P(x,y) = P[u(x,y), u(x,y)]$، تحقق معادلة بواسون:

$$P_{xx}(x.y) + P_{yy}(x,y) = \varPhi[u(x,y), v(x,y)]|f'(z)|^2$$

9- افرض أن $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ دالة تحليلية تعرف راسماً للزوايا الموجهة من نطاق D_z في المستوى المركب z فوق نطاق D_w في المستوى المركب w

افرض أن $h(u,v)$ دالة توافقية معرفة على D_w. واكتب $H(x,y) = h[u(x,y), v(x,y)]$.

(أ) أثبت أنه تحت تأثير تغيير المتغيرات الموضح يكون:

$$|\text{grad } H(x,y)| = |\text{grad } h(u,v)||f'(z)|$$

(ب) لماذا تساوى الزاوية عند نقطة في D_z بين قوس C والمتجه $\text{grad } H(x,y)$ الزاوية عند النقطة المناظرة في D_w بين الصورة Γ للقوس C والمتجه $\text{grad } h(u.v)$.

(جـ) باستخدام نتائج الجزئين (أ) و(ب) أثبت أنه كان σ يمثل مسافة على امتداد C وكان τ يمثل مسافة على امتداد Γ فإن المشتقة الموجهة تحقق:

$$\frac{dH}{do} = \frac{dh}{dr}|f'(z)|$$

فهرس الفصل السابع

الفصل السابع

7. تطبيقات الرواسم الحافظة للزوايا الموجهة

سنقوم الآن باستخدام الرواسم الحافظة للزوايا الموجهة لحل عدد من المسائل الفيزيائية التي تشتمل على معادلات لابلاس في متغيرين مستقلين. وبالتحديد فإننا سنعالج مسائل تتعلق بالتوصيل الحراري Heat conduction، وجهد الكهرباء الساكنة Electrostatic potential، وسريان سائل Fluid flow. حيث إن الهدف من هذه المسائل هو توضيح طرق الحل، فإننا سنتعرض لمسائل بسيطة قدر الإمكان.

1.7 درجات الحرارة المستقرة

:Steady Temperatures

في نظرية التوصيل الحراري يعرف الفيض الحراري Flux of heat خلال سطح مغلف لجسم مصمت عند نقطة على هذا السطح على أنه كمية الحرارة السارية في اتجاه العمودي للسطح عند تلك النقطة في وحدة الزمن لوحدة المساحة. أي أن الفيض الحراري يكون مقيساً بوحدات مثل سعرات حرارية في الثانية للسنتيمتر المربع. وسنرمز هنا للفيض بالرمز Φ وهو يتناسب مع مشتقة درجة الحرارة T في اتجاه العمودي عند النقطة على السطح:

$$\Phi = -K\frac{dT}{dn} \qquad (K>0) \qquad (1)$$

الثابت K يسمى التوصيل الحراري Thermal conductivity لمادة الجسم المصمت الذي يفترض أنه متجانس.

سنعين عند كل نقطة من نقط الجسم المصمت إحداثيات كارتيزية لفراغ ثلاثي البعد، وسنقتصر اهتمامنا على تلك الحالات التي تكون فيها درجة الحرارة دالة في المتغير y, x

فقط. حيث إن T لا تتغير مع تغير الإحداثيات على امتداد المحور العمودي على المستوي XOY، فإن الفيض الحراري يكون في هذه الحالة ثنائي البعد موازياً لهذا المستوي. بالإضافة إلى ذلك، سنفترض أن السريان يكون في حالة استقرار بمعنى أن T لا تتغير مع الزمن.

سنفترض كذلك أنه لا توجد طاقة حرارية متولدة أو مفقودة خلال الجسم المصمت. أي أنه لا يوجد منابع أو مصارف للحرارة هناك. أيضاً، دالة الحرارة $T(x,y)$ وجميع مشتقاتها الجزئية من الرتبتين الأولى والثانية تكون متصلة عند كل نقطة داخلية للجسم المصمت. هذا التقرير والصيغة (1) للفيض الحراري هنا فرضان من فروض النظرية الرياضية للتوصيل الحراري. وهذان الفرضان يمكن استخدامهما كذلك عند كل نقطة داخل جسم مصمت يحوي توزيع متصل للمنابع والمصارف.

اعتبر الآن عنصراً داخلياً للجسم المصمت. هذا العنصر يكون على شكل متوازي مستطيلات قاعدته مستطيل في المستوي $X0Y$ طولاً ضلعيه Δx و Δy وطول حرفه في اتجاه العمودي للمستوى $X0Y$ يساوي الوحدة (الشكل: $7-1$) المعدل الزمني لسريان الحرارة في اتجاه اليمين من خلال الوجه الأيسر يساوي $-KT_x(x,y)\,\Delta y$ وفي اتجاه اليمين من خلال الوجه الأيمن يساوي $-KT_x(x,+\Delta x,y)\,\Delta y$ بطرح معدل السريان الأول من الثاني نحصل على معدل فقدان الحرارة من العنصر خلال هذين الوجهين. هذا المعدل المحصل يمكن كتابته:

$$-K\left[\frac{T_x(x+\Delta x,y)-T_x(x,y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y$$

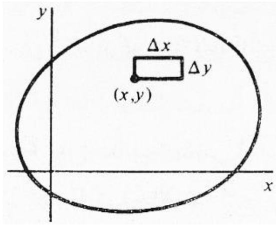
أو

$$-K\,T_{xx}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad (2)$$

إذا كانت Δx متناهية في الصغر. جميع الكميات هنا بالطبع تقريبية وتزداد دقة التقريب كلما زادت Δx و Δy صغراً.

باتباع نفس الأسلوب نجد أن محصلة ومعدل فقدان الحرارة خلال الوجهين العلوي والسفلي للعنصر تعطى بالصيغة.

$$-K\,T_{yy}(x,y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad (3)$$



الشكل: 7–1

الحرارة تسري إلى داخل أو إلى خارج العنصر من خلال هذه الأوجه الأربعة فقط، ودرجات الحرارة في العنصر نفسه تكون مستقرة. إذن مجموع التعبيرين (2)، (3) يساوي صفر أي أن:

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0 \qquad (4)$$

من هذا نرى أن دالة الحرارة تحقق معادلة لابلاس عند كل نقطة داخلية من نقط الجسم المصمت.

بالنظر إلى معادلة (4) وحقيقة اتصال دالة الحرارة ومشتقاتها الجزئية، نستنتج أن T تكون دالة توافقية في المتغيرين y, x في النطاق الممثل لداخلية الجسم المصمت.

السطوح $T(x,y)=c$ حيث c أي ثابت حقيقي، هي متساويات درجة الحرارة (أو سطوح تساوي الحرارة) Isotherms (بمعنى أن لكل ثابت c تكون درجة الحرارة على السطح $T(x,y)=c$ متساوية عند كل نقطة من نقطة) للجسم المصمت يمكن كذلك النظر إلى متساويات درجة الحرارة هذه على أنها منحنيات في المستوي $X0Y$، وذلك حيث أن $T(x,y)$ يمكن النظر إليها على أنها درجة الحرارة لصفيحة رقيقة من المادة في هذا المستوي حيث أوجه الصفيحة معزولة حرارياً. متساويات درجة الحرارة هي نفسها المنحنيات المستوية للدالة T.

متجه ميل الدالة T يكون عمودياً على متساوي درجة الحرارة عند كل نقطة من نقطة، والفيض الحراري الأعظم عند نقطة ما يكون في اتجاه متجه الميل عند تلك النقطة. إذا كانت $T(x,y)$ ترمز لدرجات الحرارة في صفيحة رقيقة وكانت S مرافق توافقي للدالة T، فإن متجه ميل الدالة T يكون متجه مماس للمنحني $S(x,y)=c$ عند كل نقطة

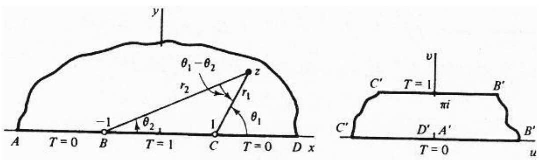
تكون عندها الدالة $T(x,y)+i\,S(x,y)$ حافظة للزوايا الموجهة. المنحنيات $S(x,y)$ تسمى خطوط الفيض (أو خطوط السريان) Lines of flow.

إذا انعدمت مشتقة درجة الحرارة في الاتجاه العمودي dT/dn على امتداد أي جزء من حدود الصفيحة، فإن الفيض الحرارية خلال هذا الجزء يساوي صفر. أي أن هذا الجزء يكون معزولاً حرارياً وبالتالي يكون خطاً من خطوط الفيض.

الدالة T قد ترمز أيضاً لتركيز مادة تنتشر خلال جسم مصمت. في هذه الحالة تعرف K بثابت الانتشار. جميع ما ذكرناه أعلاه واشتقاق معادلة (4) ينطبق بالمثل لحالة الانتشار المستقر.

2.7 درجات الحرارة المستقرة في نصف المستوي

دعنا نوجد صيغة لدرجات الحرارة المستقرة $T(x,y)$ في شريحة رقيقة نصف لا نهائية $y\ge 0$ وجهيها معزولين وحافتها $y=0$ تحفظ عند درجة الحرارة صفر فيما عدا الجزء $-1<x<1,\ y=0$ الذي تحفظ درجة حرارته عند درجة الحرارة واحد (الشكل: 7-2) الدالة $T(x,y)$ تكون محدودة، وهذا الشرط طبيعي إذا ما اعتبرنا الصفيحة المعطاة على أنها الحالة النهائية للصفيحة $0\le y\le y_0$ التي تحفظ حافتها العليا عند درجة حرارة ثابتة عندما تزداد y_0. في الحقيقة فإنه يكون من المقبول فيزيائياً أن نشترط أن تقترب $T(x,y)$ من الصفر عندما تقترب y من ما لا نهاية.



$$w=\log\frac{z-1}{z+1}\left(\frac{r_1}{r_2}>0,\ -\frac{\pi}{2}<\theta_1-\theta_2<\frac{3\pi}{2}\right)$$

الشكل: 7–2

مسألة الشروط الحدية المطلوب حلها يمكن صياغتها على النحو التالي:

$$T_{xx}\ (x,y)\ +\ T_{yy}\ (x,y)=0 \qquad (-\infty<x<\infty, y>\ 0) \qquad (1)$$

$$T(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{و} \quad |x| < 1, \\ 0 & \quad\quad |x| > 1; \end{cases} \qquad (2)$$

أيضاً $|T\ (x,\ y)\ | < M$ حيث M ثابت ما موجب.

وهذه هي مسألة دريشلت للنصف العلوي من المستوي XOY. أسلوبنا في الحل هو الحصول على مسألة جديدة من مسائل دريشلت لمنطقة في المستوي UOV. هذه المنطقة ستكون صورة نصف المستوي بتحويلة تحليلية في النطاق $y > 0$ والتي تكون حافظة للزوايا الموجهة على امتداد $y = 0$ فيما عدا عند النقطتين $(\pm 1,0)$ حيث تكون الدالة غير معرفة. وسيكون أمراً بسيطاً أن نكتشف دالة توافقية محدودة تحقق المسألة الجديدة. بعد ذلك سنستخدم نظريتي الباب السابق لتحويل حل المسألة في المستوي $U0V$ إلى حل للمسألة الأصلي في المستوي $X0Y$. وبالتحديد سيتم تحويل دالة توافقية في المتغيرين u,v إلى دالة توافقية في المتغيرين x,y كما أن الشروط الحدية في المستوي $U0V$ ستحفظ على أجزاء مناظرة من الحدود في المستوي $X0Y$. ولا يجب أن يكون هناك أي لبس إذا ما استخدمنا نفس الرمز T ليرمز لدالتي درجة الحرارة المختلفين في المستويين دعنا نكتب $z+1= r_1\ \exp\ (i\theta_2)$ و $z+1= r_2\ e\ \ (i\theta_2)$، حيث $-\pi/\ 2\ \theta_k\ < 3\pi\ /2$ و $k=1,2$ التحويلة.

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} = Log \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \qquad (3)$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2} > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \right)$$

معرفة على النصف العلوي $y \geq 0$ من المستوي، فيما عدا عند النقطتين $z = \pm 1$، وذلك حيث إن $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$ في هذه المنطقة (الشكل: 7-2) الآن قيمة اللوغاريتم في (3) تكون القيمة الأساسية عندما $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$، ونلاحظ أن النصف العلوي $y > 0$ من المستوي يرسم فوق الشريحة $0 < \upsilon < \pi$ في المستوي المركب w. وبكل تأكيد فإن هذا الشكل هو الذي أوحى إلينا اختيار التحويلة (3) هنا القطعة المستقيمة من محور السينات التي نقطتا نهايتيها $z = 1,\ z = -1$ حيث

$\theta_1 - \theta_2 = \pi$ ترسم فوق الحافة العليا من الشريحة، أما بقية محور السينات، حيث $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ، فيرسم فوق الحافة السفلى. من الواضح أن الشروط المطلوبة بأن تكون التحويلة تحليلية وحافظة للزوايا الموجهة تكون متحققة بالنسبة للتحويلة.

من الواضح أن دالة المتغيرين u, v التوافقية والمحدودة والتي تساوي صفر عند جميع نقط الحافة $v = 0$ من الشريحة وتساوي الوحدة عند جميع نقط الحافة $\theta = \pi$ هي:

$$T = \frac{1}{\pi}\theta ; \tag{4}$$

هذه الدالة توافقية وذلك حيث أنها الجزء التخيلي من الدالة الشاملة w/π . بالتحويل إلى الاحداثيات y, x باستخدام المعادلة.

$$w = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i\arg\frac{z-1}{z+1} \tag{5}$$

فإننا نجد أن:

$$w = \arg\left(\frac{x-1+iy}{x+1+iy}\right) = \arg\left[\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}\right]$$

أو

$$\theta = \arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

ومدى معكوس دالة الظل هنا من صفر إلى π وذلك حيث إن:

$$\arg\frac{z-1}{z+1} = \theta_1 - \theta_2$$

و $0 \le \theta_1 - \theta_2 \le \pi$ الصيغة (4) تأخذ الآن الصورة:

$$T = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) \quad (0 \le \arctan t \le \pi) \tag{6}$$

حيث إن الدالة (4) توافقية في الشريحة $0 < v < \pi$ وحيث إن التحويلة (3) تحليلية في نصف المستوي $y > 0$ فإنه يمكننا تطبيق النظرية ببند (تحويلات الدوال التوافقية) لاستنباط أن الدالة (6) توافقية في نصف المستوي هذا. الشروط الحدية لكلتا الدالتين التوافقيين واحدة على الأجزاء المتناظرة من الحدود وذلك لأنهم من النوع $T = c$ الذي سبق معالجته في (المبرهنة) ببند (تحويلات الشروط الحدية) وبالتالي فإن الدالة المحدودة

(6) هي الحل المطلوب للمسألة الأصلية. ويمكننا بالطبع أن نتحقق مباشرة من أن الدالة (6) تحقق معادلة لابلاس وأن لها قيم تؤول إلى تلك القيم المشار إليها بالشكل: 7-2 عندما تقترب النقطة (x, y) من محور السينات من أعلى.

متساويات درجة الحرارة $T(x, y) = c\,(0 < c\ 1)$ هي الدوائر:

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{\tan \pi c}\, y = 1$$

التي تقع مراكزها على محور العينات والمارة بالنقطتين $(\pm 1{,}0)$

أخيراً، يجب أن نلاحظ أنه حيث إن ناتج ضرب دالة توافقية في مقدار ثابت يكون أيضاً دالة توافقية، فإن الدالة:

$$T = \frac{To}{\pi} \arctan\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right) \qquad (0 \le \arctan\, t \le \pi)$$

تمثل درجات الحرارة المستقرة في نصف المستوي المعطى عند إبدال الشرط الحدي أن درجة الحرارة تساوي الوحدة على امتداد الحافة $-1 < x < 1,\ y = 0$ بالشرط الحدي أن درجة الحرارة على امتداد نفس الحافة تكون ثابتة وتساوي T_0.

3.7 مسألة ذات صلة بالمسألة السابقة A Related Problem

اعتبر بلاطة نصف لا نهائية في الفراغ الثلاثي البعد محدودة بالمستويات: $x = \pm\pi/2$ و $y = 0$. حفظ السطحين الأوليين عند درجة حرارة صفر وحفظ السطح الأخير عند درجة حرارة 1. هدفنا هو إيجاد صيغة لدرجة الحرارة $T(x, y)$ عند أي نقطة داخلية من نقط البلاطة. المسألة هي أيضاً إيجاد درجات الحرارة في صفيحة رقيقة على صورة شريحة نصف لا نهائية $-\pi/2 \le x \le \pi/2\ ,\ y \ge 0$ بافتراض أن وجهي الصفيحة معزولان تماماً (الشكل: 7-3).

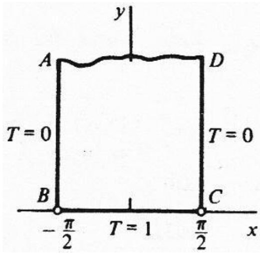
مسألة الشروط الحدية المطلوب حلها هنا:

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right) \qquad (1)$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \qquad (y > 0) \qquad (2)$$

$$T(x,0) = 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (3)$$

حيث $T(x,y)$ محدودة.



الشكل: 7-3

إن الراسم:

$$w = \sin\ z \qquad (4)$$

يحول مسألة الشروط الحدية أعلاه إلى مسألة الشروط الحدية التي صيغت في البند السابق (الشكل: 7-2) إذن بالرجوع إلى الحل (6) بالبند السابق يمكننا أن نكتب:

$$T = \frac{1}{\pi}\ \arctan\left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}\right) \qquad (0 \le \arctan\ t \le \pi) \qquad (5)$$

تغيير المتغيرات المعطى بالمعادلة (4) يمكن كتابته:

$$u = \sin\ \ x\ \ \cosh y, \qquad v = \cos\ \ x\ \ \sinh y;$$

وبذلك تصبح الدالة التوافقية (5):

$$T = \frac{1}{\pi}\ \arctan\left(\frac{2\cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1}\right)$$

ويجب ملاحظة أن المقام هنا يختزل إلى $\sinh^2 y - \cos^2 x$ وبالتالي فإنه يمكن كتابة الكسر على الصورة:

$$\frac{2\cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} = \frac{2\cos\ x / \sinh y}{1 - (\cos\ x\ / \sinh y)^2} = \tan\ 2\alpha$$

حيث $\tan\alpha = \cos\ \ x / \sinh y$ إذن $\pi T = 2\alpha$ وصيغتنا للدالة T تصبح:

$$T = \frac{2}{\pi}\ \arctan\left(\frac{\cos x}{\sinh y}\right) \qquad \left(0 \le \arctan\ t \le \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6)$$

مدى معكوس دالة الظل هنا من صفر إلى $\pi/2$ ذلك حيث أن سعتها غير سالبة.

الآن، حيث إن الدالة $\sin z$ شاملة والدالة (5) توافقية في نصف المستوي $v > 0$ فإن الدالة (6) تكون توافقية في الشريحة $-\pi/2 < x < \pi/2 \,, y > 0$ أيضاً، الدالة (5) تحقق الشروط لابتدائية $T = 1$ عند $|u| < 1$ و $T = 0 \,,\ v = 0$ عندما $|v| > 1$ و $v = 0$ الدالة (6) تحقق إذن الشروط الحدية (2) و(3) بالإضافة إلى ذلك، فإن $|T(x,y)| \le 1$ عند كل نقطة من نقط الشريحة. الصيغة (6) إذن هي صيغة درجة الحرارة التي نبحث عنها.

متساويات درجة الحرارة $T(x,y) = c$ في البلاطة هي السطوح.

$$\cos x = \tan\frac{\pi c}{2}\sinh y$$

التي يمر كل منها بالنقطتين $(\pm\pi/2, 0)$ في المستوي XOY. إذا كان K التوصيل الحراري، فإن الفيض الحراري إلى داخل البلاطة من خلال السطح الواقع في المستوي $y = 0$ يكون:

$$-KT_y(x,0) = \frac{2K}{\pi\cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

وإن الفيض الحراري إلى خارج البلاطة من خلال السطح الواقع في المستوي $x = \pi/2$ يكون:

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2K}{\pi\sinh y} \qquad (y > 0)$$

مسألة الشروط الحدية التي عرضنا لها في هذا البند يمكن حلها أيضاً باستخدام طريقة فصل المتغيرات. وطريقة فصل المتغيرات مباشرة أكثر، ولكنها تعطى الحل على صورة متسلسلة لا نهائية.

4.7 درجات الحرارة في ربع مستوى جزء من أحد حافتيه معزول حرارياً

دعنا نوجد درجات الحرارة المستقرة في صفيحة رقيقة مكونة من ربع المستوي إذا كانت القطعة المستقيمة عند نهاية إحدى الحافتين معزولة حرارياً وإذا كانت درجة حرارة بقية

هذه الحافة محفوظة عند درجة حرارة ثابتة وإذا كانت الحافة الثانية محفوظة عند درجة حرارة ثابتة أخرى. الأوجه معزولة وبالتالي فإن المسألة تكون ثنائية البعد.

مقياس درجة الحرارة ووحدة الطول يمكن اختيارهما بحيث تأخذ مسألة الشروط الحدية لدالة درجة الحرارة T الصورة.

$$T_{xx}(x,y)+T_{yy}(x,y)=0 \qquad (x>0,\ y>0) \qquad (1)$$

$$T_y(x,0)=0 \quad \text{طالما} \quad 0<x<1 \qquad (2)$$

$$T(x,0)=1 \quad \text{طالما} \quad x>1$$

$$T(0,y)=0 \qquad (y>0) \qquad (3)$$

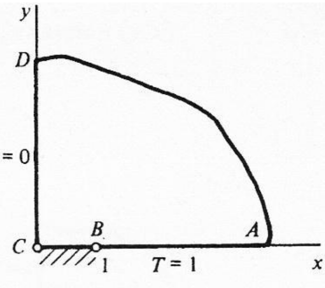
حيث الدالة $T(x,y)$ محدودة في ربع المستوي المشار إليه. الصفيحة وشروطها الحدية موضحين لاحقاً بالشكل: 7-4.

الشروط (2) تشير إلى قيمة المشتقة للدالة T في الاتجاه العمودي على جزء من خط حدي وقيمة الدالة نفسها على بقية هذا الخط الحدي. طريقة فصل المتغيرات السابق ذكرها في نهاية البند السابق ليست ملائمة لهذا النوع من المسائل الذي يحوي شروطاً مختلفة النوع على امتداد نفس الخط الحدي.

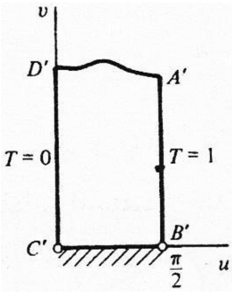
كما أشرنا التحويلة.

$$z=\sin\ w \qquad (4)$$

تكون راسماً أحادياً من الشريحة $0\le u\le \pi/2\ ,\ v\ge 0$ فوق ربع المستوي $x\ge 0,\ y\ge 0$. لاحظ الآن أن تحقق وجود دالة عكسية لهذه الدالة يكون مؤكداً وذلك بالنظر إلى حقيقة أن التحويلة المعطاة تكون تناظراً أحادياً. حيث إن $\sin w$ حافظة للزوايا الموجهة لجميع نقط الشريحة فيما عدا عند النقطة $w=\pi/2$ فإن التحويلة العكسية لابد وأن تكون حافظة أيضاً للزوايا الموجهة لجميع نقط ربع المستوي فيما عند النقطة $z=1$. هذه التحويلة العكسية ترسم القطعة المستقيمة $0<x<1, y=0$ من حدود ربع المستوي فوق قاعدة الشريحة وترسم بقية حدود ربع المستوي فوق جوانب الشريحة كما هو موضح بالشكل: 7-5.



الشكل: 7–4



الشكل: 7–5

حيث إن التحويلة العكسية (4) تكون حافظة للزوايا الموجهة في ربع المستوي، فيما عدا عندما $z = 1$، فإن الحل للمسألة المعطاة يمكن الحصول عليه بإيجاد دالة توافقية في الشريحة تحقق الشروط الحدية المعطاة بالشكل: 7–5 لاحظ أن هذه الشروط الحدية هي من النوع $T = c$ و $dT/dn = 0$.

من الواضح أن دالة درجة الحرارة T المطلوبة لمسألة الشروط الحدية الجديدة هي:

$$T = \frac{2}{\pi} u, \tag{5}$$

حيث الدالة $2u/\pi$ هي بالطبع الجزء الحقيقي للدالة الشاملة $2w/\pi$ يجب علينا الآن التعبير عن T بدلالة المتغيرين y, x.

للحصول على u بدلالة y, x يجب أولاً أن نلاحظ أن معادلة (4) تعطى:

$$x = \sin u \cosh v, \qquad y = \cos u \sinh v\,; \tag{6}$$

وبالتالي:

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1 \tag{7}$$

عند حل هذه المعادلة الأخيرة للحصول على u يكون من المناسب أن نلاحظ أن لكل قيمة ثابتة للمقدار $u-$ بؤرتي القطع الزائد (7) تقعان عند النقطتين $(\pm 1,0)$ في المستوي XOYوأن طول المحور القاطع يساوي $2\sin u$. وبذلك يكون الفرق بين بعدي البؤرتين عن نقطة (x, y) من نقط جزء القطع الزائد الواقع في الربع الأول من المستوي هو:

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sin u$$

بالنظر إلى معادلة (5) تكون دالة درجة الحرارة المطلوبة في المستوي xoy هي:

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}] \qquad (8)$$

حيث مدى دالة الجيب العكسية من صفر إلى $\pi/2$ وذلك لأن $0 \le u \le \pi / 2$.

إذا أردنا أن نتحقق من أن هذه الدالة تحقق الشروط الحدية (2) فإنه يجب أن نتذكر أن $\sqrt{(x+1)^2}$ يرمز للمقدار $x-1$ طالما $x > 1$ وللمقدار $1-x$ طالما $0 < x < 1$، أي أن الجذور التربيعية دائماً موجبة. لاحظ أيضاً أن درجة الحرارة عند أي نقطة من نقط الجزء المعزول من الحافة السفلى للصفيحة هي:

$$T\ (x,0) = \frac{2}{\pi} \arcsin x$$

من معادلة (5) يمكننا أن نرى أن مستويات درجة الحرارة $T(x,y)$ هي الأجزاء الواقعة في الربع الأول من القطاعات الزائدة المتحدة البؤر (7) حيث $u = \pi c/2$. حيث إن الدالة $2v/\pi$ مرافق توافقي للدالة (5) فإن خطوط الفيض هي أرباع القطاعات الناقصة المتحدة البؤر التي نحصل عليها بجعل v ثابتة في المعادلات (6).

تمارين غير محلولة(1−7)

1- في مسألة الصفيحة النصف لا نهائية الموضحة على اليسار بشكل (7−2) أوجد مرافق توافقي لدالة الحرارة $T(x,y)$ من معادلة (5) ببند (2.7) ومن ثم أوجد خطوط سريان الحرارة. بين أن هذه الخطوط تتكون من النصف العلوي لمحور الصادات، والأنصاف العليا لدوائر معينة على كل من جانبي هذا المحور. وكذلك الدوائر التي تقع مراكزها على القطعة المستقيمة AB أو القطعة المستقيمة CD من محور السينات.

2- بين أنه إذا لم يكن من المطلوب أن تكون الدالة T الواردة ببند (2.7) محدودة، فإن الدالة التوافقية (4) بنفس البند يمكن إحلالها بالدالة التوافقية.

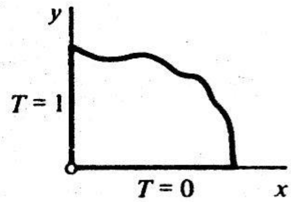
$$T = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi}w + A\cosh w\right) = \frac{1}{\pi}\upsilon + A\sinh u \sin v$$

حيث A ثابت اختياري حقيقي. من ذلك استنتج أن حل مسألة دريشلت للشريحة الموضحة بشكل (7−2) في المستوي UOV لن يكون وحيداً في تلك الحالة.

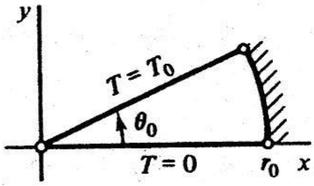
3- افترض استبعاد الشرط أن تكون الدالة T محدودة في مسألة درجات الحرارة في البلاطة النصف لا نهائية ببند (3.7) (شكل 7−3) بين أن بالإمكان الحصول إذن على عدد لا نهائي من المحلول وذلك باعتبار تأثير إضافة الجزء التخيلي للدالة $A \sin z$ للحل الذي حصلنا عليه هناك، حيث A ثابت اختياري حقيقي d.

4- استخدم الدالة $\log z$ للحصول على صيغة لدرجات الحرارة المستقرة المحدودة في صفيحة على شكل ربع المستوي $x \geq 0 , y \geq 0$ إذا كان وجهاها معزولين تماماً وكانت درجات حرارة حوافها هي $T(x,0)=0$ و $T(0,y)=1$ شكل (7−6) أوجد متساويات درجة الحرارة وخطوط الفيض وارسم بعضاً منها.

الإجابة: $T = (2/\pi)\arctan(y/x)$



الشكل: 7–6



الشكل: 7–7

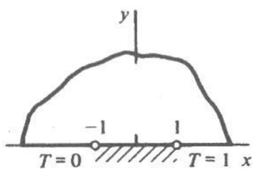
5- أوجد درجات الحرارة المستقرة في جسم مصمت على شكل وتد أسطواني طويل إذا كانت المستويات التي تحده وهي $\theta = 0$ و $\theta = \theta_0$، محفوظة عند درجات الحرارة الثابتة صفر و T_0 على الترتيب وكان سطحها $r = r_0$ معزولاً تماماً (الشكل 7–7).

الإجابة: $T = (T_0 / \theta_0) \arctan (y / x)$

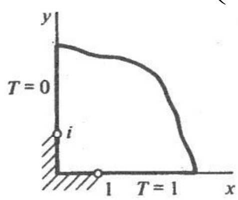
6- أوجد درجات الحرارة المستقرة المحدودة $T(x, y)$ في الجسم المصمت النصف لا نهائي $y \geq 0$ إذا كانت $T = 0$ على الجزء $x < -1, y = 0$ من الحدود وكانت $T = 1$ على الجزء $x > 1, y = 0$ وإذا كانت الشريحة $1 < x < 1, y = 0$ من الحدود معزولة (شكل 7–8).

الإجابة: $$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} [\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$



الشكل: 7–8



الشكل: 7–9

7- أوجد درجات الحرارة المستقرة المحدودة في الجسم المصمت $x \geq 0, y \geq 0$ إذا حفظت السطوح المحددة للجسم عند درجات حرارة ثابتة فيما عدا الشرائح المعزولة المتساوية في العرض عند الزاوية، كما هو موضح بشكل (7–9).

الإجابة:

$$T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} \right]$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin t \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

8- حل مسألة دريشلت التالية للشريحة النصف لا نهائية (شكل 7–10).

$$H_{xx}(x,y) + H_{yy}(x,y) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}, y > 0 \right)$$

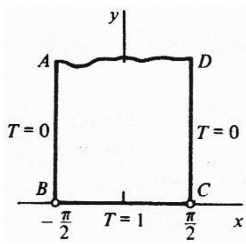
$$H(x,0) = 0 \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$H(0,y) = 1, \qquad H\left(\frac{\pi}{2}, y \right) = 0 \qquad (y > 0)$$

حيث: $0 \leq H(x,y) \leq 1$.

إقتراح: هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بالتمرين رقم (4).

الإجابة: $H = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\tanh y}{\tan x} \right)$.



الشكل: 7–10

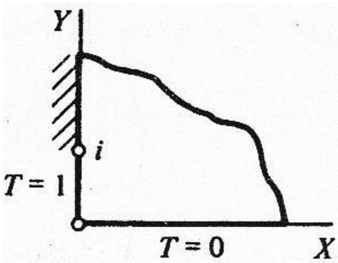
9- اشتق صيغة لدرجات الحرارة $T(r,\theta)$ في صفيحة نصف دائرية $r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi$ ذات أوجه معزولة إذا كان $T = 1$ على امتداد الحافة النصف قطرية $\theta = 0$ وكان $T = 0$ على الجزء الباقي من الحدود:

إقتراح: هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بالتمرين رقم (8).

الإجابة: $T = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r}{1+r}\cot\frac{\theta}{2}\right)$.

10- حل مسألة الشروط الحدية للصفيحة $X \geq 0, Y \geq 0$ في المستوي z إذا كانت الأوجه معزولة وكانت الشروط الحدية كما هو موضح بشكل (7-11)

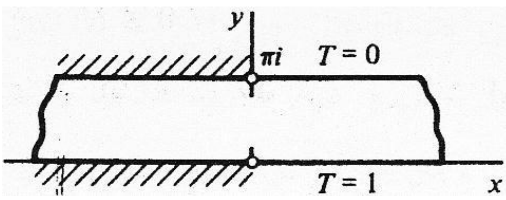
إقتراح: باستخدام الراسم $z = i/Z$ حول هذه المسألة إلى المسألة التي سبق طرحها ببند (4.7) (شكل 7-4).



الشكل: 7-11

11- الأجزاء $x<0, y=\pi$ و $x<0, y=0$ من حواف صفيحة لا نهائية $0 \leq y \leq \pi$ معزولة حرارياً، وكذلك أوجه الصفيحة. الشروط $T(x,\pi)=0$ و $T(x,0)=1$ متحققة طالما كان $x>0$ (شكل 7-12). أوجد درجات الحرارة المستقرة في الصفحة.

اقتراح: هذه المسألة يمكن تحويلها إلى تلك المعطاة بالتمرين (6).



الشكل: 7-12

12- صفيحة رقيقة ناقصية الشكل في المستوي UOV ذات أوجه معزولة حرارياً. درجة الحرارة على جزء القطع الناقص من حدودها تكون $T = 1$ درجة الحرارة على امتداد

القطعة المستقيمة $v = 0$,$-1 < u < 1$ تكون $T = 0$ وبقية الحدود على امتداد محور الإحداثيات u معزولة حرارياً. أوجد خطوط سريان الحرارة.

13- إذا كانت الدالة $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ متصلة في منطقة مغلقة محدودة R وكانت تحليلية ولكن ليست ثابتة في داخلية R فإن الدالة $u(x, y)$ تأخذ قيمها العظمى والصغرى على حدود R، وليس بأي حال من الأحوال في داخلية R باعتبار $u(x, y)$ على أنها درجات حرارة مستقرة اذكر تفسيراً فيزيائياً يوضح لماذا لابد أن تكون خاصية القيم العظمى والصغرى تلك صحيحة.

5.7 جهد الكهرباء الساكنة Electrostatic Potential

في مجال لقوى كهرباء ساكنة تكون شدة المجال Field intensity عند نقطة ما متجهاً يمثل القوة المبذولة على وحدة شحنات موجبة موضوعة عند تلك النقطة. جهد Potential الكهرباء الساكنة يكون دالة قياسية في احداثيات الفراغ بحيث تكون مشتقتها الاتجاهية عند أي نقطة في اتجاه ما هي المعكوس الجمعي لمركبة شدة المجال في هذا الاتجاه.

مقدار قوة الجذب أو التنافر التي تؤثر بها جسم مشحون ساكن على جسيم مشحون ساكن آخر يتناسب طردياً مع حاصل ضرب شحنتي الجسيمان ويتناسب عكسياً مع مربع البعد بينهما. من قانون التربيع العكسي هذا يمكن إثبات أن الجهد عند نقطة الناشئ من جسيم مشحون مفرد في الفراغ، يتناسب عكسياً مع البعد بين النقطة والجسيم في أي منطقة خالية من الشحنات من الممكن إذن أن نبين أن الجهد الناشئ من شحنات موزعة خارج تلك المنطقة يحقق معادلة لابلاس للفراغ الثلاثي البعد.

إذا كانت الشروط هي أن الجهد V يكون ثابتاً على كل مستوى مواز للمستوى XOY فإن في المناطق الخالية من الشحنات يكون الجهد V دالة توافقية في المتغيرين x, y فقط:

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0$$

متجه شدة المجال عند أي نقطة يكون مواز للمستوى xoy ومركبته السينية والصادية هما $-V_x(x, y)$ و $-V_y(x, y)$ على الترتيب. هذا المتجه هو إذن المعكوس الجمعي لمتجه ميل الدالة $V(x, y)$.

السطح الذي تكون عليه الدالة $V(x, y)$ ثابتة يسمى متساوي الجهد Equipotential المركبة المماسية لمتجه شدة المجال عند نقطة ما على سطح موصل تنعدم في الحالة الساكنة وذلك حيث أن الشحنات حرة في أن تتحرك على مثل هذا السطح. إذن $V(x, y)$ تكون ثابتة على امتداد سطح جسم موصل وأن هذا السطح يكون متساوي الجهد Equipotential.

إذا كان U مرافق توافقي للدالة V. فإن المنحنيات $U(x,y)=c$ في المستوي XOY تسمى خطوط الفيض Flux lines. عندما يتقاطع أحد هذه المنحنيات مع منحني متساوي الجهد في نقطة تكون عندها مشتقة الدالة التحليلية $V(x,y)+iU(x,y)$ لا تساوي صفر، فإن المنحنيان يكونان متعامدين عند تلك النقطة وتكون شدة المجال مماسة لخط الفيض هناك.

مسائل الشروط الحدية للجهد V هي نفس المسائل الرياضية لدرجات الحرارة المستقرة T، وكما في حالة درجات الحرارة المستقرة تكون طرق المتغيرات المركبة المستخدمة قاصرة على المسائل الثنائية البعد. فعلى سبيل المثال، المسألة التي طرحت ببند (3.7) (شكل 7–3) يمكن صياغتها على أساس أن المطلوب هو إيجاد جهد الكهرباء الساكنة الثنائي البعد في الفراغ الخالي $-\pi/2<x<\pi/2\,, y>0$ المكون من المستويات الموصلة $x=\pm\pi/2$ و $y=0$ ، والمعزولة له عند تقاطعاتها إذا ما حفظ السطحين الأولين عند جهد صفر وحفظ السطح الثالث عند جهد مقداره الوحدة. مثل هذا النوع من المسائل يظهر كثيراً في مجال دراسة الإلكترونيات إذ كان فراغ الشحنة داخل أنبوبة مفرغة صغيراً، فإنه يمكن أحياناً اعتبار أن الفراغ حر من الشحنة ويمكن افتراض أن الجهد هناك يحقق معادلة لابلاس.

الجهد في حالة السريان المستقر للكهرباء في صفيحة مستوية موصولة تكون أيضاً دالة توافقية عند النقد الخالية من المنابع والمصارف. جهد الجاذبية مثال آخر لدالة توافقية في الفيزياء.

6.7 الجهد في فراغ أسطواني:

صنعت أسطوانة دائرية قائمة طويلة ومجوفة من لوح رقيق من مادة موصلة، وقسمت الأسطوانة إلى جزئين متساويين على امتداد راسمين من رواسمها. فصل بين هذين الجزئين بوساطة شرائط رقيقة من مادة عازلة واستخدما كقطبين أحدهما استخدم كأرضي جهده صفر وحفظ الآخر عند جهد مختلف ثابت. سنأخذ محاور الإحداثيات ووحدات الطول

وفرق الجهد كما هو موضح بشكل (7-13) ومن ثم فإننا نعبر عن جهد الكهرباء الساكنة $V(x,y)$ على أي مقطع من الفراغ المحتوي يقع بعيداً عن نهايتي الاسطوانة كدالة توافقية داخل الدائرة $x^2+y^2=1$ في المستوي XOY، وأيضاً $V=0$ على النصف العلوي من الدائرة و$V=1$ على النصف السفلي من الدائرة.

سبق أن قدمنا تحويلة خطية كسرية ترسم نصف المستوي العلوي فوق داخلية دائرة الوحدة التي مركزها نقطة الأصل، وترسم الجزء الموجب من المحور الحقيق فوق نصف الدائرة العلوي، وترسم الجزء السالب من المحور الحقيقي فوق نصف الدائرة السفلى. بوضع w,z كل مكان الآخر، فإننا نجد أن معكوس التحويلة.

$$z=\frac{i-w}{i+w} \tag{1}$$

يعطينا مسألة جديدة للدالة V في نصف مستوى كما هو موضح بشكل (7-14) لاحظ الآن أن الجزء التخيلي للدالة.

$$\frac{1}{\pi}\log w=\frac{1}{\pi}\log\rho+\frac{i}{\pi}\phi \qquad (\rho>0,\ 0\le\phi\le\pi) \tag{2}$$

يكون دالة محدودة في v,u تأخذ القيم الثابتة المطلوبة على الجزئين $\phi=\pi$ و$\phi=0$ من محور الإحداثيات OU. الدالة التوافقية المطلوبة لنصف المستوي تكون إذن:

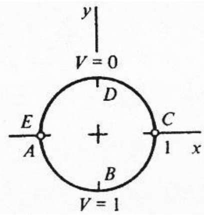
$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{v}{u}, \tag{3}$$

حيث قيم معكوس دالة الظل تقع بين صفر وπ معكوسة التحويلة (1) هي:

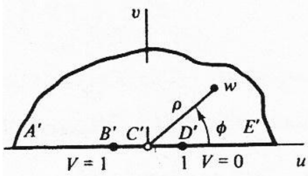
$$w=i\,\frac{1-z}{1+z} \tag{4}$$

ومنها يمكن التعبير عن v,u بدلالة y,x بذلك تصبح معادلة (3):

$$V=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-x^2-y^2}{2y}\right) \quad (0\le\arctan t\le\pi) \tag{5}$$



الشكل: 7–13



الشكل:7–14

الدالة (5) هي دالة الجهد للفراغ المغلف بالأقطاب الاسطوانية وذلك حيث إنها توافقية داخل الدائرة وتأخذ القيم المطلوبة على أنصاف الدوائر. إذا أردنا أن نتحقق من هذا الحل فإننا يجب أن نلاحظ أن:

$$\lim_{t\to 0} \arctan t = 0 \quad (t>0) \qquad \text{و} \qquad \lim_{t\to 0} \arctan t = \pi \quad (t<0)$$

المنحنيات المتساوية الجهد $V(x,y)$ في النقطة الدائرية تكون أقواس من الدوائر:

$$x^2 + y^2 + 2y \tan \pi c = 1$$

التي يمر كل منها بالنقطتين $(\pm 1,0)$ كذلك القطعة المستقيمة من محور السينات الواقعة بين هاتين النقطتين هي منحني متساوي الجهد $V(x,y) = 1/2$. مرافق توافقي U للدالة V هو $(-1/\pi)\log \rho$ وهو عبارة عن الجزء التخيلي للدالة $\left(-\frac{i}{\pi}\right)\log w$ بأخذ معادلة (4) في الاعتبار فإنه يمكن كتابة U على الصورة.

$$U = -\frac{1}{\pi}\log \left|\frac{1-z}{1+z}\right|$$

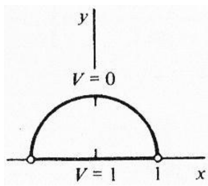
من هذه المعادلة يمكن أن نرى أن خطوط الفيض $U(x,y) = c$ تكون أقواس من دوائر مراكزها على محور السينات. القطعة المستقيمة من محور الصادات المحصورة بين القطبين تكون أيضاً خط فيض.

تمارين غير محلولة(7−2)

1− الدالة التوافقية (3) ببند (6.7) تكون محدودة في نصف المستوي $v \geq 0$ وتحقق الشروط الابتدائية المبينة بشكل (7−14) أثبت أنه إذا أضيف الجزء التخيلي للدالة Ae^{w} حيث A أي ثابت حقيق للدالة (3) فإن الدالة الناتجة تحقق جميع الشروط عدا أن تكون الدالة محدودة.

2− أثبت أن التحويلة (4) ببند (6.7) ترسم النصف العلوي للمنطقة الدائرية الموضحة بشكل (7−13) فوق الربع الأول من المستوي المركب w وترسم القطر CE فوق الجزء الموجب من محور الاحداثيات v. ومن ثم أوجد جهد الكهرباء الساكنة V في الفراغ المحدود بنصف الاسطوانة $x^2+y^2=1, y\geq 0$ والمستوي $y=0$ عندما $V=0$ على السطح الاسطواني و$V=1$ على السطح المستوي (شكل 7−15)

الإجابة: $V=\dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{2y}\right)$.



الشكل 7−15

3− أوجد جهد الكهرباء الساكنة $V(r,\theta)$ في الفراغ $0<r<1, 0<\theta<\pi/4$ المحدود بنصفي المستويين $\theta=0$ و$\theta=\pi/4$ والجزء $\theta\leq\theta\leq\pi/4$ من السطح الاسطواني $r=1$ عندما $V=1$ على الحدود المستوية و$V=0$ على الحد الاسطواني. (انظر تمرين (2) تحقق من أن دالتك تحقق هذه الشروط الحدية.

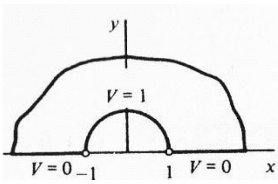
4− لاحظ أن جميع أفرع الدالة $\log z$ لها نفس المركبة الحقيقة التي تكون توافقية عند جميع النقط عدا نقطة الأصل، ثم اكتب صيغة لدالة جهد الكهرباء الساكنة $V(x,y)$

في الفراغ المحصور بين سطحين أسطوانيين $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=r_0^2$ حيث $r_0 \neq 1$ متحدي المحور وموصلين إذا $V=0$ على السطح الأول و$V=1$ على السطح الثاني.

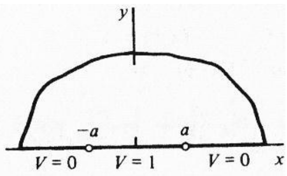
الإجابة: $$V=\frac{\log\,(x^2+y^2)}{2\log r_0}$$

5- أوجد جهد الكهرباء الساكنة المحدود $V(x,y)$ في الفراغ $y>0$ المحدود بمستوى لا نهائي موصل $y=0$ إذا كانت إحدى شرائحه $(-a<x<a, y=0)$ معزولة عن بقية المستوي وحفظت عند جهد $V=1$ بينما $V=0$ على بقية المستوي تحقق من أن دالتك تحقق الشروط الحدية المعطاة.

الإجابة: $$v=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right)(0\le \arctan t\le \pi)$$



الشكل 7–17



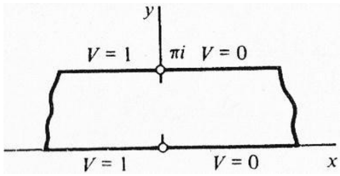
الشكل 7–16

6- اشتق صيغة لجهد الكهرباء الساكنة في الفراغ الموضح بشكل (7–17) والمحدود بنصفي مستويين ونصف أسطوانة إذا كانت $V=1$ على السطح الأسطواني وكانت $V=0$ على السطحين المستويين. ارسم بعض المنحنيات المتساوية الجهد في المستوي XOY.

الإجابة: $$V=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$$

7- أوجد الجهد V في الفراغ بين المستويين $y = 0$ و $y = \pi$ إذا كان $V = 0$ على الجزء من كلا المستويين بحيث $x > 0$ وكان $V = 1$ على الجزئين بحيث $x < 0$ (شكل 7-18) تأكد من أن نتيجتك تحقق الشروط الحدية.

الإجابة : $v = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin y}{\sinh x}\right)(0 \le \arctan t \le \pi)$



الشكل 7-18

8- اشتق صيغة لجهد الكهرباء الساكنة V في الفراغ الداخلي لاسطوانة طويلة $r = 1$ إذا كان $V = 0$ على الربع الأول $(r = 1, 0 < \theta < \pi/2)$ للسطح الاسطواني و $V = 1$ على بقية السطح الاسطواني $(r = 1, \pi/2 < \theta < 2\pi)$. بين أن $V = ¾$ على محور الاسطوانة. تحقق من أن الصيغة التي حصلت عليها تحقق الشروط الحدية.

9- أوجد دالة حرارة $T(x, y)$ توافقية في النطاق المظلل من المستوي XOY والتي تأخذ القيم $T = 0$ على نصف الدائرة ABC و $T = 1$ على امتداد القطعة المستقيمة DEF تحقق من أن دالتك تحقق الشروط الحدية المطلوبة (انظر تمرين (2)).

10- يمكن حل مسألة ديريخلت.

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0 \qquad (0 < x < a, 0 < y < b)$$

$$V(x,0) = 0 \ , V(x, b) = 1 \qquad (0 < x < a)$$

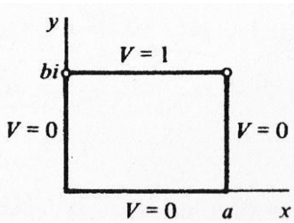
$$V(0, y) = V(a, y) = 0 \qquad (0 < y < b)$$

للدالة $V(x, y)$ في مستطيل شكل 7-19 باستخدام طريقة فصل المتغيرات. الحل هو:

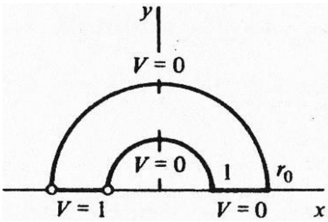
$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh(m\pi y/a)}{m\sinh(m\pi b/a)}\sin\frac{m\pi x}{a}\quad(m=2n-1)$$

مع افتراض قبول هذه الصيغة أوجد الجهد $V(r,\theta)$ في الفراغ $1<r<r_o\ ,0<\theta<\pi$ إذا كان $V=1$ على جزء الحدود حيث $\theta=\pi$ و$V=0$ على بقية الحدود.

الإجابة:
$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\alpha_n\theta}{\sinh\alpha_n\pi}\frac{\sin(\alpha_n Logr)}{2n-1}\left[\alpha_n=\frac{(2n-1)\pi}{Log\,r_o}\right]$$



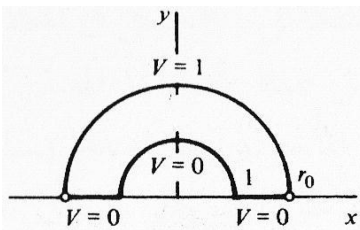
الشكل 7–19



الشكل 7–20

11– بمعاونة الصيغة التي حصلنا عليها في تمرين (10) للدالة $V(x,y)$ في المستطيل أوجد دالة الجهد $V(r,\theta)$ للفراغ $1<r<r_o,\ 0<\theta<\pi$ إذا كان $V=1$ على جزء الحدود بحيث $r=r_o,\ 0<\theta<\pi$ وكان $V=0$ على الجزء الباقي من الحدود شكل 7–21.

الإجابة:
$$V=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^m-r^{-m}}{r_o^m-r_o^{-m}}\frac{\sin m\theta}{m}\ (m=2n-1)$$



الشكل 7–21

7.7 السريان ثنائي البعد لسائل

تلعب الدوال التوافقية دوراً هاماً في دراسة ديناميكا الموائع وديناميكا الهواء. مرة أخرى سنعتبر فقط المسائل المتعلقة بالحالات الثنائية البعد المستقرة. بمعنى أننا سندرس فقط الحالات التي يفترض فيها أن تكون حركة السائل متماثلة في جميع المستويات الموازية للمستوى XOY، وسرعة السائل تكون موازية للمستوى XOY ولا تتوقف على الزمن.

بهذا يكون من الكافي أن نعتبر فقط حركة صفيحة رقيقة من السائل في المستوي XOY.

سنفترض أن المتجه الممثل للعدد المركب $V = p + iq$ يرمز لسرعة نقطة مادية من السائل عند أي نقطة (x, y) أي أن المركبة السينية والمركبة الصادية لمتجه السرعة هما $p(x, y)$ و $q(x, y)$ على الترتيب. عند النقط الداخلية لمنطقة من مناطق لاسريان، لا يوجد فيها منابع أو مصارف للسائل سيفترض أن الدالتين $p(x, y)$ و $q(x, y)$ وكذلك مشتقاتهما الجزئية الأولى جميعها متصلة.

يعرف جريان Circulation السائل على امتداد أي منحني C على أنه التكامل الخطي، بالنسبة لطول القوس σ للمركبة المماسية $V_T(x, y)$ لمتجه السرعة على امتداد C:

$$\int_{c} V_T(x, y)\, d\sigma \tag{1}$$

النسبة بين الجريان على امتداد C وطول المنحني C يكون بالتالي سرعة متوسطة للسائل على امتداد هذا المنحني. سبق أن شاهدنا في حساب التفاصيل والتكامل للمتغيرات الحقيقة أن التكاملات التي على الصورة (1) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\int_{c} p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy \tag{2}$$

عندما يكون C منحني مغلق بسيط يقع في نطاق بسيط الترابط للسريان لا يحوي أي منابع أو مصارف، فإن نظرية جرين تسمح لنا بأن نكتب:

$$\int_{c} p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = \int\int_{R} [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dx\, dy \tag{3}$$

حيث R هي المنطقة المغلقة المحدودة بالمنحني C.

من أجل إيجاد تفسير فيزيائي للدالة المكاملة في الطرف الأيمن من معادلة (3) دعنا نفترض أن C دائرة نصف قطرها r ومركزها عند النقطة (x_0, y_0) وموجهة في اتجاه ضد عقرب الساعة. بذلك يمكننا الحصول على سرعة متوسطة على امتداد C وذلك بقسمة الجريان على $2\pi r$، ونحصل على السرعة الزاوية المتوسطة المناظرة للسائل حول محور الدائرة بقسمة تلك السرعة المتوسطة على r.

$$\frac{1}{\pi^2} \iint_R \frac{1}{2}[q_x(x,y) - p_y(x,y)]\, dx\, dy$$

هذه الصيغة تمثل قيمة متوسطة للدالة:

$$\omega(x,y) = \frac{1}{2}[q_x(x,y) - p_y(x,y)] \tag{4}$$

على النطاق الدائري المحدود بالمنحني C نهايتها عندما تؤول r إلى الصفر هي قيمة ω عند النقطة (x_0, y_0) إذن الدالة $\omega(x,y)$ التي تسمى دوران Rotation السائل تمثل نهاية السرعة الزاوية لعنصر دائري من السائل عندما تنكمش الدائرة إلى مركزها (النقطة (x, y)).

إذا كانت $\omega(x,y) = 0$ عند كل نقطة في نطاق ما، فإن السريان يقال له سريان لا دوراني Irrotational في هذا النطاق. سنعتبر هنا فقط السريانات اللادورانية وسنفترض كذلك أن السائل غير قابل للانضغاط Incompressible. وأنه عديم اللزوجة Free from viscosity.

افرض أن D نطاق بسيط الترابط يكون فيه السريان لا دواري إذ كان C أي منحني مغلق بسيط في D فإنه ينتج من معادلة (3) أن الجريان حول C يساوي صفر، أي أن:

$$\int_c p(x,y)dx + q(x,y)]\, dy = 0$$

وبالتالي، إذا كانت (x_0, y_0) أي نقطة ثابتة في D، فإنه يمكننا تعريف الدالة:

$$\phi(x,y) = \int_{(xo,yo)}^{(x,y)} p(r,t)\, dr + q(r,t)\, dt \tag{5}$$

على النطاق D استخدمنا هنا الرمزين r,t ليرمزا لمتغيرات التكامل وذلك لنفرق بين متغيرات التكامل والحدود العليا للتكامل، التكامل في المعادلة (5) لا يتوقف على المسار المأخوذ بين نقطتي حدي التكامل طالما كان هذا المسار منحنيا محتوى في D. وذلك راجع إلى أن الفرق بين التكاملين المأخوذين على امتداد مسارين مختلفين هو التكامل على امتداد مسار مغلق، والتكامل الأخير لابد وأن يساوي صفر.

حيث إن التكامل الخطي (5) لا يتوقف على المسار فإن الدالة المكاملة بهذا التكامل تكون المشتقة التامة للدالة $\phi(x,y)$ أي أن:

$$p(x,y) = \phi_x(x,y) \ , \quad q(x,y) = \phi_y(x,y) \qquad (6)$$

متجه السرعة $V = p + iq$ هو إذن متجه الدالة ϕ والمشتقة الاتجاهية للدالة ϕ في أي اتجاه تمثل مركبة السريان في هذا الاتجاه.

الدالة $\phi(x,y)$ تسمى جهد السرعة Velocity potential من الواضح من معادلة (5) أن $\phi(x,y)$ تتغير بمقدار ثابت جمعي عندما تتغير نقطة الإسناد (x_0,y_0).

المنحنيات المستوية $\phi(x,y) = c$ تسمى متساويات الجهد Equipotentials.

حيث إن متجه السرعة V هو متجه ميل الدالة $\phi(x,y)$ فإنه ينتج أن V يكون عمودياً على أي منحني متساوي الجهد عند أي نقطة لا يكون عندها V هو المتجه الصغرى.

تماماً كما في حالة سريان الحرارة، الشرط أن السائل غير القابل للانضغاط يدخل إلى أو يخرج من عنصر للحجم فقط بالسريان خلال حدود هذا العنصر يتطلب أن الدالة $\phi(x,y)$ لابد وأن تحقق معادلة لابلاس.

$$\phi_{xx}(x,y) \ + \ \phi_{yy}(x,y) = 0$$

في نطاق يكون فيه السائل حراً من المنابع أو المصارف نظراً لاتصال الدالتين q,p ومشتقاتهما الجزئية الأولي ومعادلات (6) فإنه ينتج أن المشتقات الجزئية الأولى والثانية للدالة ϕ تكون متصلة في مثل هذا النطاق. وبالتالي فإن جهد السرعة ϕ يكون دالة توافقية في ذلك النطاق.

8.7 دالة التيار The Stream Function

من البند السابق يمكن كتابة متجه السرعة.

$$V = p(x,y) + i\,q(x,y) \qquad (1)$$

لنطاق بسيط الترابط يكون فيه السريان لادوراني على الصورة

$$V = \phi_x\,(x,y) \;+ i\phi_y\,(x,y) \qquad (2)$$

حيث ϕ جهد السرعة.

عندما لا يكون متجه السرعة هو المتجه السرعة هو المتجه الصغرى، فإنه يكون عمودياً على منحني متساوي الجهد مار بالنقطة (x,y) إذا كان بالإضافة إلى ذلك، $\psi(x,y)$ مرافق توافقي للدالة $\phi(x,y)$ فإن متجه السرعة يكون مماساً للمنحني $\psi(x,y)=c$ المنحنيات $\psi(x,y)=c$ تسمى خطوط التيار Streamlines للسريان محل الدراسة، كما أن الدالة ψ تسمى دالة التيار Stream function. فعلى سبيل الخصوص، الحد الذي لا يستطيع سائل أن يسري من خلاله خط تيار.

الدالة التحليلية $F(z)= \phi(x,y) \;+ i\psi(x,y)$ تسمى الجهد المركب Complex potential للسريان لاحظ أن:

$$F'(z)= \phi_x\,(x,y) \;+ i\psi_x\,(x,y)$$

أو باستخدام معادلتي كوشي – ريمان:

$$F'(z)= \phi_x\,(x,y) \;+ i\phi_y\,(x,y)$$

بهذا تصبح الصيغة (2) للسرعة: $V = \overline{F`(Z)}$ يعطى مقياس السرعة بالصيغة:

$$|V| = |F`(Z)|$$

حسب معادلة (3) ببند (المرافقات التوافقية) إذا كانت ϕ توافقية في نطاق بسيط الترابط D، فإنه يمكن كتابة مرافق توافقي للدالة ϕ هناك على الصورة.

$$\psi(x,y)=\int_{(xo,yo)}^{(x,y)} -\phi_t(r,t)\,dr+\phi_r(r,t)\,dt$$

حيث التكامل لا يتوقف على المسار. بمعاونة المعادلات (6) ببند (المرافقات التوافقية) يمكننا إذن أن نكتب:

$$\psi(x,y)=\int_c -q(r,t)\,dr+p(r,t)\,dt \qquad (4)$$

حيث C أي منحني في D من (x_0,y_0) إلى (x,y).

سبق أن رأينا في حساب التفاصيل والتكامل للمتغيرات الحقيقة أن الطرف الأيمن من معادلة (4) يمثل التكامل بالنسبة لطول القوس σ، على امتداد C للمركبة العمودية $V_N(x,y)$ للمتجه الذي مركبته السينية والصادية هما $p(x,y)$ و $q(x,y)$ على الترتيب إذن الصيغة (4) يمكن كتابتها على الصورة.

$$\psi(x,y)=\int_c V_N(x,y)d\sigma \qquad (5)$$

فيزيائياً الدالة $\psi(x,y)$ تمثل المعدل الزمني لسريان السائل على امتداد C. وأكثر تحديداً، الدالة $\psi(x,y)$ ترمز لمعدل السريان بالحجم خلال سطح ارتفاعه الوحدة قائماً على المنحني C وعمودياً على المستوي $X0Y$.حيث إن ψ وϕ دالتان توافقيتان في المستوي $X0Y$، فإن نتائج بندي (4.6) و(5.6) يمكن استخدامها أي أن التحويلة.

$$z=f(w)=x(u,\upsilon)+iy(u,\upsilon),$$

حيث f دالة تحليلية تحول $\phi(x,y)$ و $\psi(x,y)$ إلى الدالتين التوافقيتين v,u على الترتيب. هاتين الدالتين الجديدتين يمكن اعتبارهما على أنهما جهد السرعة ودالة التيار على الترتيب، لسريان في المنطقة الجديدة في المستوي u,v. يحول أي خط تيار أو حد طبيعي $\psi(x,y)$ في المستوي$X0Y$ إلى خط تيار أو حد طبيعي $\psi[x(u,\upsilon)\ ,\ y(u,\upsilon)]=c$ في المستوي UOV.

تحت فروضنا بأن السريان يكون لا دوراني ومستقر لسوائل ذات كثافة منتظمة ρ، فإنه يمكن إثبات أن ضغط السائل $P(x,y)$ يحقق الحالة التالية من معادلة برنولي:

$$\frac{P}{\rho}+\frac{1}{2}|V|^2=c \qquad (6)$$

حيث c ثابت.

لاحظ أن الضغط يكون أكبر ما يمكن عندما يكون مقياس السرعة $|V|$ أقل ما يمكن.

9.7 السريان حول زاوية

عندما يعطى الجهد المركب بالدالة

$$F(z) = Az \tag{1}$$

حيث A ثابت حقيق موجب، فإن:

$$\phi(x,y) = Ax \ , \ \psi(x,y) = Ay \tag{2}$$

خطوط التيار $\psi(x,y) = c$ هي الخطوط الأفقية $y = c/A$ وتكون السرعة عند أي نقطة.

$$V = \overline{F`(Z)}$$

لاحظ هنا أن نقطة (x_0, y_0) يكون عندها $\psi(x,y) = 0$ تكون نقطة على محور السينات إذا أخذت النقطة (x_0, y_0) على أنها نقطة الأصل، فإن $\psi(x,y)$ تكون معدل السريان خلال أي منحني مرسوم من نقطة الأصل للنقطة (x,y) (شكل 7-22) السريان يكون منتظماً وفي اتجاه اليمين. ويمكن النظر إلى هذا السريان على أنه السريان المنتظم في نصف المستوي العلوي الذي حده محور السينات أو على السريان المنتظم بين خطين مستقيمين متوازيين $y = y_1$ و $y = y_2$

لتعيين سريان في ربع المستوي $v \geq 0$, $u \geq 0$ فإنه يجب ملاحظة أن التحويلة:

$$z = w^2 \tag{3}$$

ترسم ربع المستوي فوق النصف العلوي من المستوي $X0Y$، وبحيث ترسم حدود ربع المستوي فوق محور السينات بأكمله حيث إن $y = 2uv$ فإن دالة التيار $\psi(x,y) = Ay$ للسريان في نصف المستوي تناظر دالة التيار.

$$\psi(u,v) = 2Auv \tag{4}$$

للسريان في ربع المستوي وهذه الدالة لابد وأن تكون بالطبع توافقية في ربع المستوي وتأخذ قيماً صفرية على الحدود.

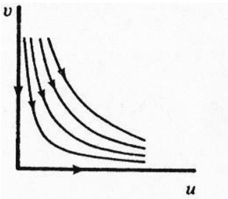
خطوط التيار في ربع المستوي هي فروع القطاعات الزائدة القائمة (الشكل 7-23): $2Auv = c$ والجهد المركب هو الدالة $F(w) = Aw^2$ وتكون سرعة السائل:

$$V = \overline{F`(w)} = 2A(u - i\upsilon)$$

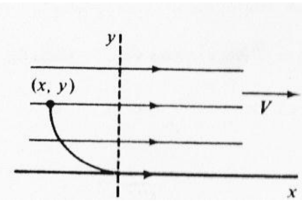
مقياس السرعة:

$$|V| = 2A\sqrt{u^2 + \upsilon^2}$$

يتناسب طردياً مع بعد النقطة المادية عن نقطة الأصل. قيمة دالة التيار (4) يمكن النظر إليها هنا على أنها معدل السريان خلال قطعة مستقيمة تمتد من نقطة الأصل للنقطة (u, v) في مثل هذا النوع من المسائل يكون دائماً من الأبسط أن نكتب أولاً الجهد المركب كدالة للمتغير المركب في المنطقة الجديدة. بعد ذلك يمكن الحصول على دالة التيار والسرعة من دالة الجهد.



الشكل: 7–23



الشكل: 7–22

الدالة Ψ تميز سرياناً محدداً في منطقة ما. السؤال عما إذا كان وجود مثل هذه الدالة المناظرة لمنطقة معطاة وجود مفرد. فيما عدا أن يكون الاختلاف ربما بمعامل ثابت أو ثابت جمعي، لن يكون محل دراسة هنا،. في بعض الأمثلة التي سترد فيما بعد والتي تكون فيها السرعة منتظمة بعيداً عن العائق، حيث توجد منابع ومصارف، فإن الظروف الفيزيائية تشير إلى أن السريان يعين دون نظير بالشروط المعطاة في المسألة.

ويجب ملاحظة أن مجرد تحديد قيم دالة توافقية على حد منطقة ما لا يعنى أنها تعين دائماً دون نظير، حتى ولو بمعامل ثابت. فعلى سبيل المثال رأينا أعلاه أن الدالة $\psi(x, y) = Ay$ تكون توافقية في نصف المستوي $y > 0$ ولها قيم صفرية على الحدود. الدالة $\psi_1(x, y) = Be^x \sin y$ تحقق أيضاً نفس هذه الشروط. ومع ذلك فإن خط التيار $\psi_1(x, y) = 0$ لا يتكون فقط من الخط $y = 0$ ولكن من الخطوط المستقيمة $y = n\pi$، حيث $n = 1,2,\cdots$ هنا الدالة $F_1(z) = Be^z$ هي الحد

المركب للسريان في الشريحة بين المستقيمين $y = 0$ و$y = \pi$، كلا الحدين اللذان يصنعان خط التيار $\psi_1(x, y) = 0$ إذا كان $B > 0$ فإن السائل يسري إلى اليمين على امتداد الحد السفلي وإلى اليسار على امتداد الحد العلوي.

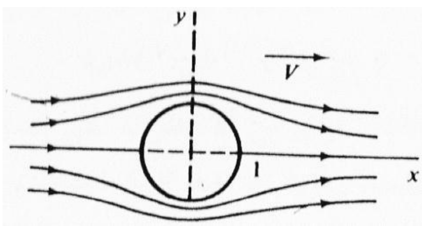
10.7 السريان حول اسطوانة

افترض أن اسطوانة طويلة دائرية نصف قطرها الوحدة وضعت في جسم كبير من سائل يسري بسرعة منتظمة، بحيث يكون محور الاسطوانة عمودياً على اتجاه السريان. لتعيين السريان المستقر حول الاسطوانة فإننا سنمثل الاسطوانة بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$ ونفترض أن السريان بعيداً عنها يكون موازياً لمحور السينات (شكل 7–24) التماثل يوضح أن جزء محور السينات خارج الدائرة يمكن اعتباره حد، وبالتالي فإنه يتعين علينا أن نعتبر فقط الجزء العلوي من الشكل على أنه منطقة السريان.

حد هذه المنطقة للسريان، المكون من النصف العلوي للدائرة وجزئي محور السينات الواقعين خارج الدائرة، يرسم بالتحويلة:

$$w = z + \frac{1}{z} \tag{1}$$

فوق محور الاحداثيات u بأكمله



الشكل 7–24

المنطقة ترسم فوق نصف المستوي $v \geq 0$ كما هو موضح بالشكل، والجهد المركب لسريان منتظم في نصف المستوي هذا هو:

$$F(w) = Aw$$

حيث A ثابت حقيقي. إذن الجهد المركب للمنطقة حول الدائرة هو:

$$F(z) = A\left(z + \frac{1}{z} \right) \tag{2}$$

السرعة

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\overline{z}^{2}} \right) \tag{3}$$

تقترب من A كلما زاد $|Z|$، أي أن السريان يكون منتظماً تقريباً ويكون موازياً لمحور السينات عند النقط البعيدة عن الدائرة.

من الصيغة (3) نرى أن $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$ وبالتالي فإن هذه الصيغة نفسها تمثل أيضاً سرعان السريان في المنطقة السفلى حيث يكون النصف السفلي للدائرة خط تيار.

من معادلة (2) نرى أن دالة التيار للمسألة المعطاة تكون بدلالة الاحداثيات القطبية:

$$\psi(r,\theta) = A\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\theta \tag{4}$$

خطوط التيار: $A\left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\theta = c$

تكون متماثلة بالنسبة لمحور الصادات وتكون خطوطها التقريبية موازية لمحور السينات.

لاحظ أنه عندما $c = 0$ فإن خط التيار يتكون من الدائرة $r = 1$ وجزئي محور السينات بحيث $|x| \geq 1$.

تمارين غير محلولة (7–3)

1- بين لماذا يمكن الحصول على مركبتي السرعة من دالة التيار بالعلاقات.

$$p(x,y)=\psi_y(x,y), \qquad q(x,y)=\psi_x(x,y)$$

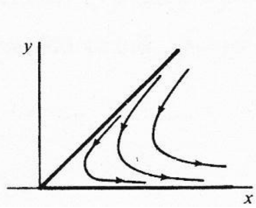
2- عند نقطة داخلية من نقاط منطقة سريان في ظل الشروط التي افترضناها، لا يمكن أن يكون ضغط السائل أقل من الضغط عند جميع النقط الأخرى في جوار لتلك النقطة.

3- لسريان حول الزاوية الموضحة ببند (9.7) ما هي النقطة في المنطقة $x \geq 0, y \geq 0$ التي يكون عندها ضغط السائل أكبر ما يمكن؟

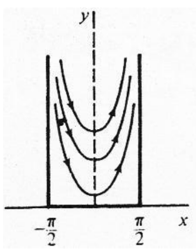
4- بين أن مقياس سرعة السائل عند نقط على السطح الاسطواني ببند (10.7) يساوي $2|A\sin\theta|$ وأن ضغط السائل على الاسطوانة يكون أكبر ما يمكن عند النقطتين $z=\pm 1$ وأصغر ما يمكن عند النقطتين $z=\pm i$.

5-أوجد الجهد المركب للسريان حول اسطوانة $r=r_0$ إذا كانت السرعة v تقترب من ثابت حقيقي A عندما تبتعد النقطة عن الاسطوانة.

6- أوجد دالة التيار $\psi(r,\theta)=Ar^4\sin 4\theta$ لسريان في المنطقة الزاوية $0 \leq \theta \leq \pi/4$ (الشكل 7–25) وارسم واحداً أو اثنين من خطوط التيار في داخل المنطقة.



الشكل 7–25



الشكل 7–26

7- أوجد الجهد المركب $F(z) = A \sin z$ لسريان داخل المنطقة نصف اللانهائية $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ و $y \ge 0$ (شكل 7-26). اكتب معادلات خطو التيار.

8- أثبت أنه إذا كان جهد السرعة هو $\phi(r,\theta) = A \log r \,(A > 0)$ لسريان في المنطقة $r \ge r_0$ فإن خطوط التيار تكون هي الأشعة $\theta = c$ ،$r \ge r_0$ ويكون معدل السريان إلى الخارج خلال كل دائرة كاملة حول نقطة الأصل مساوياً $2\pi A$ مناظراً لمنبع له نفس هذه القوة عند نقطة الأصل.

9- أوجد الجهد المركب $F(z) = A(z^2 + z^{-2})$ لسريان في المنطقة $0 \le \theta \le \pi/2,\ r \ge 1$ اكتب صيغتين للدالتين V و ψ لاحظ كيف يتغير مقياس السرعة $|V|$ على امتداد حدود المنطقة وتحقق من أن $\psi(x, y) = 0$ على الحدود.

10 – افرض أن السريان عند بعد لا نهائي من الاسطوانة التي نصف قطرها الوحدة ببند (10.7) يكون منظماً في اتجاه يصنع زاوية α مع محور السينات أي أن:

$$\lim_{|z| \to \infty} V = A \exp(i\alpha) \qquad (A > 0)$$

أوجد الجهد المركب.

الإجابة: $F(z) - A[z \exp(-i\alpha) + z^{-1} \exp(i\alpha)]$

11- التحويلة $z = w + 1/w$ ترسم الدائرة $|w| = 1$ فوق القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتها $z = -2$ و $z = 2$ وترسم النطاق خارج هذه الدائرة فو بقية المستوي المركب z. اكتب:

$$z - 2 = r_1 \exp(i\theta_1), \qquad z + 2 = r_2 \exp(i\theta_2),$$

و
$$(z^2 - 4)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \qquad (0 \le \theta_1 < 2\pi,\ 0 \le \theta_2 < 2\pi);$$

بذلك تكون الدالة $(z^2 - 4)^{1/2}$ وحيدة القيمة وتحليلية عند ميع نقط المستوي عدا عند نقط الفرع القاطع المكون من القطعة المستقيمة من محور السينات التي نقطتا نهايتيها

$z=\pm 2$ أثبت أن معكوس التحويلة $z=w+1/w$، بحيث $|w|>1$ لكل نقطة z لا تنتمي للفرع القاطع يمن كتابتها على الصورة.

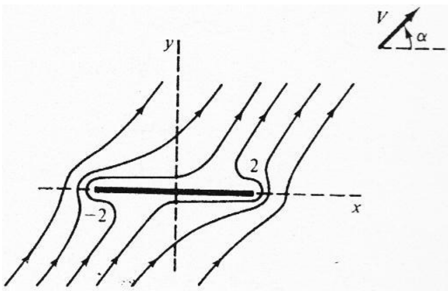
$$w=\frac{1}{2}[z+(z^2-4)^{1/2}]=\frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta}{2}+\sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2$$

وبالتالي فإن كل من التحويلة وتحويلتها العكسية تلك تشكل تناظراً أحادياً بين النقط في النطاقين.

12- بمعاونة النتائج التي حصلنا عليها بتمريني (10) و(11) اشتق الصيغة:

$$F(z)=A[z\cos\alpha-i(z^2-4)^{1/2}\sin\alpha]$$

التي تعين الجهد المركب للسريان المستقر حول صفيحة طويلة عرضها أربعة ومقطعها القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتها $z=\pm 2$ كما في (الشكل 7-27)، بفرض أن سرعة السائل عند نقطة على بعد لا نهائي من الصفيحة تساوي $A\exp(i\alpha)$ الفرع $(z^2-4)^{1/2}$ هو الفرع الذي سبق وصفه بتمرين (11) و $A>0$.



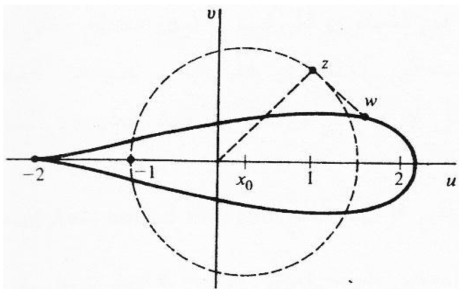
الشكل: 7–27

13- أثبت أنه إذا كان $\sin\alpha\neq 0$ بتمرين (12)، فإن مقياس سرعة السائل على امتداد القطعة المستقيمة التي نقطتا نهايتيها $z=\pm 2$ يكون لا نهائي عند نقطتي النهاية ويساوي $A/\cos\alpha$ عند النقطة المتوسطة.

14- من أجل التبسيط، دع $0<\alpha\leq\pi/2$ بتمرين (12) من ثم أثبت أن سرعة السائل على امتداد الجانب العلوي من القطعة المستقيمة الممثلة للصفيحة بالشكل 7-27

تساوي صفر عند النقطة $x = 2\cos\alpha$ وأن السرعة على امتداد الجانب السفلي من القطعة المستقيمة تساوي صفر عند النقطة $x = -2\cos\alpha$.

15- دائرة مركزها عند نقطة x_0 على محور السينات، حيث $0 < x_0 < 1$ ومارة بالنقطة $z = -1$ حولت بالتحويلة $w = z + 1/z$ يمكن أن نرسم هندسياً نقطاً غير صفرية مفردة $z = \exp(i\theta)$ وذلك بإضافة المتجه $r^{-1} = \exp(-i\theta)$ للمتجه z. وضح برسم بعض النقط أن صورة الدائرة تكون من نوع البورفيل الموضح بالشكل 7–28 وأن النقط الخارجية للدائرة ترسم فوق النقط الخارجية للبروفيل هذه حالة خاصة من بروفيل جناح جووسكى:



الشكل: 7–28

16- (أ) أثبت أن راسم الدائرة بتمرين 15 يكون حافظاً للزوايا الموجهة فيما عدا عند النقطة $z = -1$.

(ب) افرض أن الأعداد المركبة:

$$\tau = \lim_{\Delta Z \to o} \frac{\Delta w}{|\Delta w|} \quad \text{و} \quad t = \lim_{\Delta Z \to o} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}$$

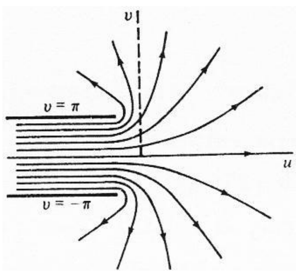
تمثل متجهات وحدة مماسة لقوس موجه عند $z = -1$ وصورة ذلك القوس على الترتيب بالتحويلة $w = z + 1/z$ أثبت أن $\tau = -t^2$ ومن ثم أثبت أن بروفيل جوكووسكى المبين بشكل 7–28 له قرنة cusp (نقطة التقاء قوسين) عند النقطة $w = -2$ وأن الزاوية بين المماسين عند القرنة تساوي صفر.

17- معكوس التحويلة $w = z + 1/z$ التي استخدمت في التمرين (15) سبق إعطائها، مع وضع w, z كل مكان الآخر، بتمرين (11). أوجد الجهد المركب للسريان حول الجناح الذي قدمناه بتمرين (15) عندما تكون السرعة v للسائل على بعد لا نهائي من نقطة الأصل ثابتاً حقيقياً A.

18- لاحظ أن التحويلة:

$$w = e^z + z$$

ترسم كل من الجزئين الموجب والسالب من الخط المستقيم $y = \pi$ فوق الشعاع $u \le -1, v = \pi$. بالمثل الخط المستقيم $y = -\pi$ يرسم فوق الشعاع $v = -\pi$ و$u \le -1$ ، وترسم الشريحة $-\pi \le y \le \pi$ فوق المستوي المركب w. لاحظ أيضاً أن التغير في الاتجاهات $\arg(dw/dz)$، الناتج عن هذه التحويلة يقترب من الصفر عندما تؤول x إلى $-\infty$. أثبت أن خطوط التيار لسائل يسري خلال القناة المفتوحة المكونة بالشعاعين في المستوي المركب w (الشكل 7–29) هي صور الخطوط المستقيمة $y = c$ في الشريحة. خطوط التيار هذه تمثل أيضاً منحنيات متساوية الجهد لمجال الكهرباء الساكنة بالقرب من حافة مكثف ذي لوحين متوازيين.



الشكل: 7–19

فهرس الفصل الثامن

الفصل الثامن

8. تحويلة شفارتز– كريستوفل

سنقوم في هذا الباب بإيجاد تحويلة، تعرف بتحويلة شفارتز–كريستوفل، ترسم محور X والنصف العلوي من المستوى المركب z فوق مضلع مغلق بسيط وداخليته في المستوى المركب w. وسنعطى كذلك في هذا الباب تطبيقات هذه التحويلة في حل مسائل تتعلق بسريان سائل أو مسائل في نظرية جهد الكهرباء الساكنة.

1.8 رسم المحور الحقيقي فوق مضلع mapping the real axis onto a polygon

سنمثل متجه الوحدة المماس لقوس أملس موجه c عند نقطة z_0 بالعدد المركب t.

افرض أن القوس Γ هو صورة c بالتحويلة $w = f(z)$، إن العدد المركب τ يمثل متجه الوحدة المماس للقوس Γ عند النقطة المناظرة $w_0 = f(z_0)$. سنفرض أن f تحليلية عند z_0 وأن $f'(z_0) \neq 0$. طبقاً لبند (1.6)،

وبصفة خاصة، إذا كانت c قطعة مستقيمة من محور x موجهة في الاتجاه الموجب أي إلى اليمين، فإن $\arg t = 0, t = 1$ عند كل نقطة $z_0 = x$ من نقط c. في هذه الحالة تؤول المعادلة (1) إلى:

إذا كانت $f'(z)$ ذات سعة ثابتة على امتداد تلك القطعة المستقيمة فينتج أن $\arg \tau$ تكون ثابتة، أي أن صورة القطقة المستقيمة c تكون أيضاً قطعة مستقيمة Γ من خط مستقيم.

دعنا الآن نوجد تحويلة $w = f(z)$ ترسم المحور x بأكمله فوق مضلع له n من الأضلاع وحيث $x_1 , x_2 , \cdots , x_{n-1}$ و$z = \infty$ هي نقط على محور x التي تكون صورها رؤوس المضلع، حيث:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$$

رؤوس المضلع هي النقط $w_j = f(x_j)$، حيث $w_n = f(\infty), j = 1, 2, \cdots, n-1$
يتعين للدالة f المنشودة أن تكون بحيث إن $\arg f'(z)$ تقفز من قيمة ثابتة ما لقيمة ثابتة أخرى عند النقط $z = x_j$ عندما تتحرك z على المحور x.

إذا اختيرت الدالة f بحيث:

$$f'(z) = A(z - x)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (3)$$

حيث A عدد مركب ثابت وكل k_j عدد حقيقي ثابت، فإن سعة $f'(z)$ تتغير تبعاً للأسلوب المذكور أعلاه عندما تتحرك z على المحور الحقيقي. ذلك أن سعة الدالة (3) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots - k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}) \qquad (4)$$

عندما $z = x$ و $x < x_1$:

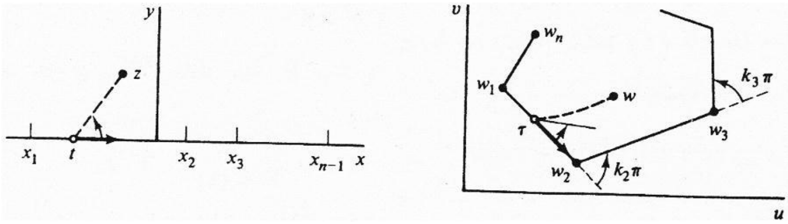
$$\arg(z - x_1) = \arg(z - x_2) = \cdots = \arg(z - x_{n-1}) = \pi$$

عندما $x_1 < x < x_2$ فإن $\arg(z - x_1) = 0$ وتكون كل االسعات الأخرى مساوية للعدد π. إذن طبقاً للمعادلة (4)، تزداد سعة $f'(z)$ فجائياً بزاوية مقدارها $k_1\pi$ عندما تتحرك z إلى اليمين مارة بالنقطة $z = x_1$. وتقفز قيمتها مرة أخرى بالمقدار $k_2\pi$ عندما تتحرك z مارة بالنقطة x_2، إلخ.

طبقاً للمعادلة (2)، فإن متجه الوحدة τ يكون ثابت الاتجاه عندما تتحرك z من x_{j-1} إلى x_j وبالتالي فإن w تتحرك في هذا الاتجاه الثابت على طول خط مستقيم.

ويتغير اتجاه τ فجائياً بالزاوية $k_j\pi$ عند النقطة w_j (صورة النقطة x_j) (شكل 8-1).

هذه الزوايا $k_j\pi$ هي الزوايا الخارجية للمضلع الذي يرسم بالنقطة w.



الشكل: 8-1

يمكن أن تحدد الزوايا الخارجية للمضلع لتقع بين $-\pi$ و π، أي أن $-1<k_j<1$ سنفترض أن أضلاع المضلع لا تتقاطع مع بعضها على الإطلاق وأن المضلع موجه في الاتجاه الموجب (أي ضد عقرب الساعة). بذلك يكون مجموع الزوايا الخارجية لمضلع مغلق يساوي 2π، وأن الزاوية الخارجية عند الرأس w_n (صورة النقطة $z=\infty$) تحقق العلاقة:

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1+k_2+\ldots+k_{n-1})\pi$$

إذن الأعداد k_j لابد وأن تحقق الشروط:

$$k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}+k_n = 2\,, \qquad -1<k_j<1$$

حيث $j=1,2,\ldots,n$.

لاحظ أن $k_n=0$ إذا كان: $k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}=2$

في هذه الحالة لا يتغير اتجاه τ عند w_n، وبالتالي لا تكون w_n رأساً للمضلع، ويكون للمضلع $n-1$ من الأضلاع.

فيما يلي سنقوم بتبيان تحقق وجود دالة f تعطى مشتقتها بالصيغة (3).

2.8 تحويلة شفارتز-كريستوفل The Schwarz- Christoffel Tranformation

في الصيغة:

$$f'(z) = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\ldots(z-x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad (1)$$

لمشتقة دالة ترسم محور x فوق مضلع، افرض أن المعاملات $(z-x_j)^{-k_j}$ تمثل أفرع دوال قوى فروعها القاطعة تمتد تحت هذا المحور. ولكي نكون أكثر تحديداً، سنكتب:

$$(z-x_j)^{-k_j} = |z-x_j|^{-k_j}\exp(-ik_j\theta_j) \qquad (2)$$

حيث $\theta_j = \arg(z - x_j)$ و $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta_j < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ و $j = 1,2,...,n-1$ بهذا تكون $f'(z)$ تحليلية عند جميع نقط نصف المستوي $y \geq 0$ عدا عند نقط التفرع x_j (هذه النقط عددها $n-1$).

إذا كانت z_0 نقطة في هذا النطاق، الذي سنرمز له بالرمز R، الذي تكون فيه الدالة تحليلية، فإن الدالة:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f'(s)\,ds \qquad (3)$$

تكون وحيدة القيمة وتحليلية فوق نفس النطاق R، حيث مسار التكامل من z_0 إلى z أي منحني يقع في داخلية R. بالإضافة إلى ذلك فإن: $F'(z) = f'(z)$.

لتعريف الدالة F عند النقطة $z = x_1$ بحيث تكون متصلة عندها، نلاحظ أولاً أن $(z - x_1)^{-k_1}$ هو العامل الوحيد في (1) الذي لا يكون تحليلياً عند x_1. وعليه إذا كانت $\phi(z)$ حاصل ضرب بقية العوامل في (1)، فإن $\phi(z)$ تكون تحليلية عند x_1 وأنها تمثل عند جميع نقط القرص المفتوح $|z - x_1| < r_1$ بمتسلسلة تايلور حول x_1.

وبالتالي يكون:

$$\begin{aligned} f'(z) &= (z - x_1)^{-k_1}\phi(z) \\ &= (z - x_1)^{-k_1}\left[\phi(x_1) + \phi'(x_1)(z - x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z - x_1)^2 + \ldots\right], \end{aligned}$$

أو:

$$f'(z) = \phi(x_1)(z - x_1)^{-k_1} + (z - x_1)^{1-k_1}\psi(z) \qquad (4)$$

حيث $\psi\overline{(z)}$ تحليلية، وبالتالي متصلة، عند جميع نقط القرص المفتوح. حيث إن $1 - k_1 > 0$، فإن الحد الأخير في الطرف الأيمن من (4) يمثل بالتالي دالة متصلة في المتغير z عند جميع نقط النصف العلوي للقرص المفتوح، حيث $\operatorname{Im} z \geq 0$، وذلك إذا أخذنا قيمة هذا الحد مساوياً للصفر عند $z = x_1$ من هذا ينتج أن التكامل:

$$\int_{Z_1}^{z} (s - x_1)^{1-k_1}\psi(s)\,ds$$

للحد الأخير على امتداد منحني من Z_1 إلى z، حيث Z_1 والمنحني يقعان في نصف القرص، يكون دالة متصلة للمتغير z عند $z = x_1$ التكامل:

$$\int_{Z_1}^{z} (s - x_1)^{-k_1} ds = \frac{1}{1-k_1}\left[(z - x_1)^{1-k_1} - (Z_1 - x_1)^{1-k_1}\right]$$

على امتداد نفس المسار يمثل أيضاً دالة متصلة للمتغير z عند x_1 وذلك إذا ما عرفنا قيمة التكامل هناك على أنها نهاية التكامل عندما تقترب z من x_1 في نصف القرص.

وبالتالي فإن تكامل الدالة (4) على امتداد المسار المذكور من Z_1 إلى z يكون دالة متصلة عند $z = x_1$، وهكذا يكون أيضاً التكامل (3) حيث إنه يمكن كتابته على أنه تكامل على امتداد منحني في R من z_0 إلى Z_1 بالإضافة إلى التكامل من Z_1 إلى z.

ما ذكر أعلاه يمكن تطبيقه عند كل من النقط $x_j, j = 1,2,....,n-1$، وبذلك تصبح F متصلة عند كل نقطة من نقاط المنطقة $y \geq 0$.

باستخدام المعادلة (1) يمكننا إثبات أنه لعدد موجب R كبير بقدر كاف يوجد عدد ثابت موجب M بحيث إن:

$$|f'(z)| < \frac{M}{|z|^{2-k_n}} \quad \text{طالما} \quad |z| > R \qquad (5)$$

وذلك إذا كانت $\operatorname{Im} z \geq 0$ حيث إن $2 - k_n > 1$، فإن خاصية الترتيب هذه للدالة المكاملة في المعادلة (3) تضمن تحقق وجود نهاية للتكامل عندما تؤول z إلى ما لا نهاية، أي أنه يوجد عدد w_n بحيث:

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = W_n \qquad (\operatorname{Im} z \geq 0) \qquad (6)$$

وسنترك تفاصيل إثبات ذلك لتمريني (10)، (11) من بند (5.8).

الدالة الراسمة والتي تعطى مشتقتها الأولى بالصيغة (1) يمكن كتابتها على الصورة $f(z) = F(z) + B$ حيث B ثابت مركب. بذلك تكون التحويلة الناشئة هي:

$$w = A\int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2}...(s - x_{n-1})^{-k_{n-1}} ds + B \qquad (7)$$

هذه التحويلة تعرف بتحويلة شفارتز-كريستوفل تكريماً للرياضيين الألمانيين هـ.أ شفارتز H. A. Schwarz ‏(1843–1921) وإ.ب كريستوفل E. B. Christoffel ‏(1829–1900) والتي اكتشفها كل منهما مستقلاً عن الآخر.

التحويلة (7) متصلة عند جميع نقط نسف المستوي $y \geq 0$، وهي كذلك حافظة للزوايا الموجهة على نفس النطاق عدا عند النقط x_j. ويجب ملاحظة أننا قد افترضنا أن الأعداد k_j تحقق الشروط (5) من (بند 1.8). بالإضافة إلى ذلك، فإننا سنفترض أن الثوابت x_j, k_j تكون بحيث لا تتقاطع أضلاع المضلع، أي أن المضلع يكون منحنياً مغلقاً بسيطاً. وبالتالي، تبعاً لبند (1.8)، فعندما تتحرك النقطة z على محور السينات في الاتجاه الموجب فإن صورتها w تتحرك على المضلع بالاتجاه الموجب كذلك، وبالتالي يوجد تناظر أحادي بين نقط محور السينات ونقط المضلع P. تبعاً للشرط (6)، فإن الصورة w_n للنقطة $z = \infty$ يتحقق وجودها وهي $w_n = W_n + B$.

إذا كانت z نقطة داخلية لنصف المستوى العلوي $y \geq 0$، وكانت x_0 أي نقطة مختلفة عن كل من النقط x_j على محور السينات، فإن الزاوية من المتجه t عند x_0 إلى المتجه الممثل بالقطعة المستقيمة الواصلة بين x_0، z تكون موجبة وأقل من π (شكل 8-1) عند الصورة w_0 للنقطة x_0، الزاوية المناظرة من المتجه τ إلى المتجه الممثل لصورة القطعة المستقيمة الواصلة بين x_0، z يكون لها نفس القيمة. من هذا ينتج أن صور نقط داخلية نصف المستوى تقع على يسار أضلاع المضلع مأخوذة في اتجاه ضد عقرب الساعة. سنترك للتمارين إثبات أن هذه التحويلة تناظر أحادي بين النقط الداخلية لنصف المستوى ونقط داخلية المضلع.

إذا أعطينا مضلعاً ما P، دعنا نعين عدد الثوابت في تحويلة شفارتز-كريستوفل بحيث يرسم محور السينات فوق المضلع P. لهذا الغرض يمكننا كتابة $B = 0, A = 1, z_0 = 0$ ونتطلب أن يرسم محور السينات فوق مضلع ما P' مشابه للمضلع P. يمكن بعد ذلك تعديل حجم ووضع المضلع P' ليناسبا حجم ووضع المضلع P وذلك باختيار مناسب للثوابت A, B.

الأعداد k_j تعين جميعها من الزوايا الخارجية عند رؤوس المضلع P. يبقى بعد ذلك أن نختار الثوابت x_j وعددها $n-1$. صورة محور السينات هي مضلع ما P' له نفس زوايا المضلع P. ولكن إذا كان من الضروري أن يتشابه المضلعان P'، P، فلا بد وأن تكون النسبة بين طول أي ضلع من أضلاع المضلع P' ونظيره في المضلع P ثابتة (هذه الأضلاع الموصولة عددها $n-2$). هذا الشرط يعبر عنه بدلالة $n-3$ من المعادلات في $n-1$ من المجاهيل الحقيقية x_j. وبالتالي فإنه يمكن اختيار عددين من الأعداد x_j أو علاقتين بينهما عشوائياً بشرط أن يكون لهذه المعادلات (عددها $n-3$) في المجاهيل الباقية (وعددها $n-3$) حلولاً حقيقية.

عندما تمثل نقطة نهائية $z=x_n$ على محور السينات، بدلاً من نقطة اللانهاية، النقطة التي صورتها الرأس w_n فإنه ينتج مما ذكرناه في البند السابق أن تحويلة شفارتز– كريستوفل تأخذ الصورة:

$$w=A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\ldots(s-x_n)^{-k_n}\,ds+B \qquad (8)$$

حيث $k_1+k_2+\ldots+k_n=2$ الأسس k_j تتعين من الزوايا الخارجية للمضلع. ولكن في هذه الحالة يوجد n من الثوابت الحقيقية x_j التي لا بد وأن تحقق المعادلات المذكورة أعلاه وعددها $n-3$. وبالتالي فإنه يمكن اختيار ثلاثة أعداد x_j أو ثلاثة شروط على هذه الأعداد عشوائياً في التحويلة (8) التي ترسم محور السينات فوق مضلع معطى.

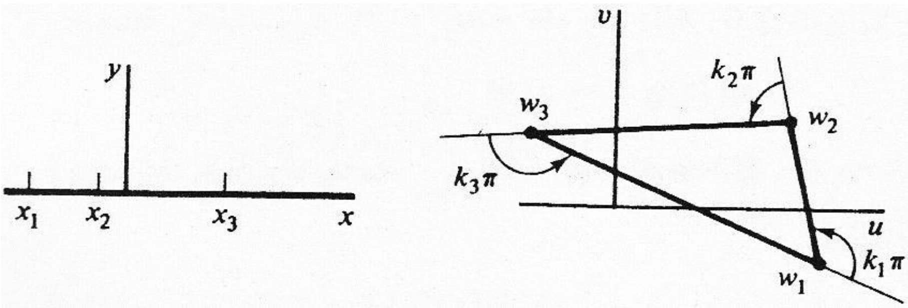
3.8 المثلثات والمستطيلات Triangles And Rectangles

كما رأينا فإنه يعبر عن تحويلة شفارتز–كريستوفل بدلالة النقط x_j وليس بدلالة صورها رؤوس المضلع. مما سبق نعلم كذلك أنه يمكن اختيار ثلاث نقط منها على الأكثر عشوائياً، وبالتالي فإذا كان للمضلع المعطى من ثلاثة أضلاع فإنه يتحتم تعيين بعض النقط x_j وذلك للحصول على المضلع المعطى، أو أي مضلع مشابه له، كصورة لمحور السينات. واختيار شروط ملائمة لتعيين هذه الثوابت يتطلب عادة مهارة.

قيد آخر على استخدامنا للتحويلة يرجع إلى التكامل الناشئ. فكثيراً ما يكون هذا التكامل غير ممكن حسابه بدلالة عدد محدود من الدوال الأولية. في مثل هذه الحالات قد يصبح حل المسائل باستخدام التحويلة من الصعوبة بمكان.

إذا كان المضلع مثلثاً رؤوسه عند النقط w_1, w_2, w_3 (شكل 8–2) ، فإن التحويلة المطلوبة يمكن كتابتها على الصورة:

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}(s-x_3)^{-k_3}\,ds + B \qquad (1)$$



الشكل: 8–2

حيث: $k_1 + k_2 + k_3 = 2$ والعلاقة بين كل k_j والزاوية الداخلية θ_j هي:

$$k_j = 1 - \frac{1}{\pi}\theta_j \qquad\qquad (j = 1,2,3)$$

وقد اعتبرنا هنا جميع النقط $j = 1,2,3, x_j$ ، على أنها نقط نهائية على محور السينات، ويمكن تخصيص قيم اختيارية لكل منها. الثوابت المركبة A, B، المصاحبة لحجم ووضع المثلث، يمكن تعيينها بحيث يرسم نصف المستوى العلوي فوق المنطقة المثلثة المعطاة.

إذا أخذنا الرأس w_3 على أنه صورة نقطة اللانهاية، فإن التحويلة تصبح:

$$w = A\int_{z_0}^{z}(s-x_1)^{-k_1}(s-x_2)^{-k_2}\,ds + B \qquad (2)$$

حيث يمكن إعطاء قيم حقيقية اختيارية للثابتين x_1, x_2 .

التكاملان في معادلتي (1)، (2) لا يمثلان دوالاً بسيطة إلا إذا كان المثلث منحلاً بحيث يكون رأس أو رأسين من رؤوسه عند اللانهاية. التكامل في معادلة (2) يصبح تكاملاً

ناقصياً عندما يكون المثلث متساوي الأضلاع أو عندما يكون مثلثاً قائم الزاوية وإحدى زواياه تساوي $\pi/3$ أو $\pi/4$.

للمثلث المتساوي الأضلاع يكون $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$ لذلك يكون من المناسب كتابة $x_1 = -1$ و $x_2 = 1$ و $x_3 = \infty$ واستخدام معادلة (2) حيث $A = 1, B = 0, z_0 = 1$ بذلك تصبح التحويلة:

$$w = \int_1^z (s+1)^{-2/3}(s-1)^{-2/3}\,ds \qquad (3)$$

صورة النقطة $z = 1$ هي بالطبع $w = 0$، أي أن $w_2 = 0$ عندما $z = -1$ في التكامل، فإنه يمكننا كتابة $s = x$، وبالتالي $\arg(x+1) = 0, x+1 > 0, -1 < x < 1$، بينما $|x-1| = 1-x$، $\arg(x-1) = \pi$، إذن:

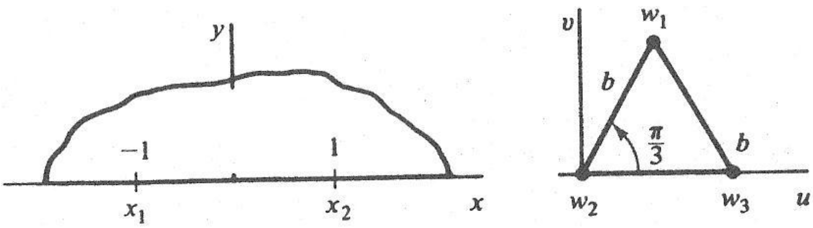
$$w = \int_1^{-1} (x+1)^{-2/3}(1-x)^{-2/3}\exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)dx = \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{2/3}} \qquad (4)$$

وهذا التكامل الأخير يختزل إلى التكامل المستخدم في تعريف دالة بيتا، افرض أن b ترمز لقيمة هذا التكامل وهي قيمة موجبة:

$$b = 2\int_0^1 \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{2/3}} = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \qquad (5)$$

إذن الرأس w_1 هو النقطة (شكل: 8–3).

$$w_1 = b\exp\frac{\pi i}{3} \qquad (6)$$



الشكل: 8–3

الرأس w_3 يقع على الجزء الموجب من محور u وذلك لأن:

$$w_3 = A\int_1^{\infty}(x+1)^{-2/3}(x-1)^{-2/3}dx = \int_1^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^{2/3}}$$

ولكن قيمة w_3 تمثل أيضاً بالتكامل (3) عندما تؤول z إلى ما لانهاية على امتداد الجزء السالب من محور السينات أي أن:

$$w_3 = \int_{1}^{-1} (|x+1|)(|x-1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) dx + \int_{-1}^{-\infty} (|x+1|)\,(|x-1|)^{-2/3} . \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) dx$$

إذن على ضوء المعادلة (4).

$$w_3 = w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) \int_{-1}^{-\infty} (|x+1|)(|x-1|)^{-2/3} dx$$

$$= b \exp \frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right) \frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}}$$

$$w_3 = b \exp \frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)$$

بحل هذه المعادلة الأخيرة للحصول على w_3 نجد أن:

$$w_3 = b \qquad (7)$$

بهذا نكون قد حققنا أن صورة محور السينات هي المثلث المتساوي الأضلاع الموضح بالشكل (8–3) والذي طول ضلعه b من الممكن كذلك التحقق من أن:

$$w = (b/2) \exp\,(\pi i/3) \quad \text{عندما} \quad z = 0$$

عندما يكون المضلع مستطيلاً فإن $k_j = 1/2$ لكل j إذا اخترنا $\pm a\,,\, \pm 1$. تمثل النقط x_j التي صورها رؤوس المستطيل وبكتابة:

$$g(z) = (z+a)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-a)^{-1/2}$$

حيث $0 \le \arg\,(z - x_j) \le \pi$ فإن تحويلة شفارتز– كريستوفل تصبح:

$$w = -\int_0^z g(s)\,ds \qquad (9)$$

وذلك فيما عدا التحويلة $W = Aw + B$ لتعديل حجم ووضع المستطيل التكامل (9) يساوي التكامل الناقصي.

$$\int_0^z (1-S^2)^{-1/2}(1-K^2S^2)^{-1/2} ds \qquad \left(K = \frac{1}{a}\right)$$

مضروباً في مقدار ثابت ولكن الصيغة (8) للدالة المكاملة توضح بجلاء الأفرع المناسبة لدوال الغير قياسية المعنية.

عندما نحاول تعيين رؤوس المستطيل عندما $a > 1$ كما هو موضح بشكل (4–8) $x_4 = a\ , x_3 = 1\ \ , x_2 = -1\ \ , x_1 = -a\ ,$ جميع الرؤوس الأربعة يمكن التعبير عنها بدلالة عددين موجبين b, c يعتمدان على القيمة a على النحو التالي:

$$b = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^3-x^2)}} \qquad (10)$$

$$c = \int_0^1 g(x)dx = \int_1^0 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}} \qquad (11)$$

عندما $-1 < x < 0$ فإن:

$$\arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi\ , \arg(x+a) = \arg(x+1) = 0$$

إذن: $g(x) = \left[\exp(-\pi i/2)^2 |g(x) = -\|g(x)\|\right.$

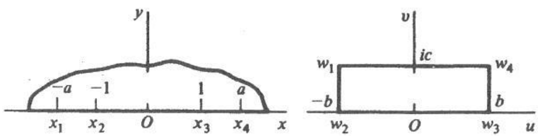
وعندما $-a \langle\ x\ \langle -1$ فإن: $g(x) = \left[\exp(-\pi/2)^3 |g(x)\right| = i|g(x)|$

$$w_1 = -\int_0^{-a} g(x)dx = -\int_0^{-1} g(x)dx - \int_{-1}^{-a} g(x)dx = -\int_0^{-1} |g(x)dx| - i\int_{-1}^{-a} |g(x)dx = -b + ic$$

وسيترك للقارئ كتمرين مهمة إثبات أن:

$$w_2 = -b\ \ , w_3 = b\ \ , w_4 = b + ic \qquad (12)$$

وبذلك يكون وضع وأبعاد المستطيل كما هو موضح بالشكل (4–8).



الشكل: 8–4

4.8 المضلعات المنحلة Degenerate Polygons

سنقوم الآن بتطبيق تحويلة شفارتز–كريستوفل على بعض المضلعات المنحلة التي تمثل التكاملات بالنسبة لها دوالاً بسيطة ولتوضيح ذلك، سنبدأ ببعض التحويلات المألوفة.

أولاً: دعنا نرسم نصف المستوى $y \geq 0$ فوق الشريحة نصف اللانهائية.

$$-\frac{\pi}{2} \leq u \geq \frac{\pi}{2} \qquad\qquad v \geq 0$$

سنعتبر الشريحة على أنها الصورة النهائية لمثلث رؤوسه w_1, w_2, w_3 شكل (8-5) عندما يؤول الجزء التخيلي للعدد w_3 إلى ما لا نهاية.

القيم النهائية للزوايا الخارجية هي: $k_1\pi = k_2\pi = \frac{\pi}{2}\ ,\ k_3\pi = \pi$.

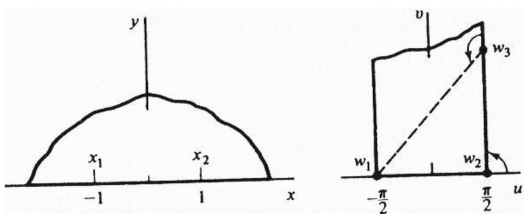
نختار النقط $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = \infty$ لتكون النقط التي صورها الرؤوس وبالتالي فإن مشتقة الدالة الراسمة يمكن كتابتها على الصورة:

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2} = A'\left(1-z^2\right)^{-1/2}$$

إذن $W = A' \sin^{-1} z + B$ إذا كتبنا $A' = 1/a$ و $B = b/a$ فإن:

$$z = \sin\left(aw - b\right)$$

هذه التحويلة من المستوى المركب w إلى المستوى المركب z تحقق الشروط $z = -1$ عندما $w = -\pi/2$ و $z = 1$ عندما $w = \pi/2$ وذلك إذا كان $a = 1$ و $b = 0$ وبالتالي فإن التحويلة الناتجة تكون: $z = \sin w$ التي سبق وأن تحققنا من أنها ترسم الشريحة فوق نصف المستوى.



الشكل: 8-5

5.8 الشريحة اللانهائية:

اعتبر الشريحة $|V| = \infty$ على أنها الوضع النهائي لمعين رؤوسه عند النقط $w_2, w_1 = \pi i$ ، $w_4, w_3 = 0$ عندما تتحرك النقطتين w_4, w_2 مسافة لا نهائية إلى اليسار وإلى اليمين على الترتيب (شكل 8-6). في الوضع النهائي تصبح الزوايا الخارجية:

$$k_1\pi = 0\,, \qquad k_2\pi = \pi \qquad , \qquad k_3\pi = 0 \qquad , \qquad k_4\pi = \pi$$

سنختار $x_2 = 0\,, x_3 = 1\,, x_4 = \infty,$ ونترك x_1 لنعينها. مشتقة دالة راسم شفارتز- كريستوفل تصبح:

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^0 z^{-1}(z-1)^0 = \frac{A}{z}$$

وبالتالي فإن:

$$w = A\log z + B$$

ولكن $B = 0$ وذلك حيث إن $w = 0$ عندما $z = 1$. الثابت A لا بد وأن يكون حقيقياً حيث إن النقطة w تقع على المحور الحقيقي عندما $z = x$ و $x > 0$ النقطة $w = \pi i$ صورة النقطة $z = x_1$، حيث x_1 عدد سالب. إذن:

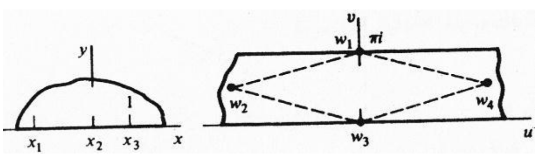
$$\pi i = A\log x_1 = A\log|x_1| + A\pi i$$

بمساواة الأجزاء الحقيقية والتخيلية في الطرفين نجد أن $|x_1| = 1$ و $A = 1$ وبالتالي فإن التحويلة تصبح:

$$w = \log z$$

كما أن $x_1 = -1$ ونعلم أن هذه التحويلة ترسم نصف المستوي فوق الشريحة.

الطريقة التي استخدمت في هذا البند والبند السابق ليست دقيقة وذلك لأن القيم النهائية للزوايا والإحداثيات لم تقدم بطريقة منهجية. فقد استخدمت القيم النهائية كلما بدا لنا من المناسب أن نفعل ذلك. ولكن إذا فحصنا الراسم الذي حصلنا عليه، فليس من الضروري أن نبرر خطوات اشتقاقنا للدالة الراسمة. الطريقة الشكلية التي استخدمت هنا أقصر وأقل صعوبة من الطرق الدقيقة.



الشكل: 8–6

تمارين غير محلولة (8–1)

1– في التحويلة (1) بند (3.8) ضع $B = z_0 = 0$ و

$$A = \exp\frac{3\pi i}{4}, \quad x_1 = -1\,, \; x_2 = 0\,, \; x_3 = 1 \quad k_1 = \frac{3}{4} \;, \; k_2 = \frac{1}{2} \;, \; k_3 = \frac{3}{4}$$

وذلك لرسم محور السينات فوق مثلث قائم الزاوية ومتساوي الساقين. أثبت أن رؤوس هذا المثلث هي النقط:

$$w_1 = bi \;, \qquad w_2 = 0 \;, \qquad w_3 = b$$

حيث b الثابت الموجب:

$$b = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{-3/4} x^{-1/2} dx$$

كذلك أثبت أن $2b = B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ حيث B هي دالة بيتا.

2– استنتج الصيغ (12) في بند (3.8) لبقية رؤوس المستطيل الموضح بشكل (8–4).

3– أثبت أنه عندما $0 < a < 1$ في صيغتي (8)، (9) ببند (3.8) فإن رؤوس المستطيل تكون كما هو موضح بشكل (8–4) حيث b, c تأخذ الآن القيم:

$$b = \int_0^a |\, g(x) |\, dx \;, \qquad c = \int_a^1 |\, g(x) |\, dx$$

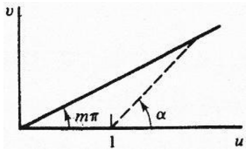
4– أثبت أن الحالة الخاصة: $w = i\int_0^z (s+1)^{-1/2}(s-1)^{-1/2} s^{-1/2} ds$ من تحويلة شفارتز– كريستوفل (7) ببند (3.8) ترسم محور السينات فوق المربع الذي رؤوسه:

$$w_1 = bi \;, \qquad w_2 = 0 \;, \qquad w_3 = b \;, \qquad w_4 = b + ib$$

حيث العدد الموجب b يعطى بدلالة دالة بيتا كالتالي:

$$b = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

5- استخدم تحويلة شفارتز-كريستوفل للحصول على التحويلة $w = z^m$، حيث $0 < m < 1$ التي ترسم نصف المستوى $y \geq 0$ فوق المنطقة الزاوية $0 \leq \arg w \leq m\pi$ والنقطة $z = 1$ فوق النقطة $w = 1$ اعتبر المنطقة الزاوية على أنها الصورة النهائية للمثلث الموضح بشكل (8-7) عندما تؤول الزاوية α إلى الصفر.



الشكل: 8-7

6- عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقي تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد محور u بأكمله. عندما تقطع z القطعة المستقيمة $0 \leq x \leq 1, y = 0$ على المحور الحقيقي الموجب تتحرك صورتها w إلى اليسار على امتداد الشعاع $u \geq 1\,, v = \pi i$ وعندما تتحرك z إلى اليمين على جزء المحور الحقيقي الموجب بحيث $x \geq 1$ تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد نفس الشعاع $u \geq 1\,, v = \pi i$.

لاحظ التغير في اتجاه حركة w عند صورتي النقطتين $z = 1, z = 0$ هذه التغيرات تجعلنا نختار مشتقة الدالة الراسمة لتكون:

$$f'(z) = k(z-0)^{-1}(z-1)$$

حيث k ثابت ما، وبالتالي نحصل على الدالة الراسمة:

$$w = \pi i + z - \log z$$

ويمكن التحقق من أن هذا الراسم يرسم نصف المستوي $\operatorname{Re} z > 0$ كما هو موضح بالشكل.

7- عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد جزء المحور الحقيقي السالب بحيث $x \leq -1$ تتحرك صورتها إلى اليمين على امتداد المحور الحقيقي السالب في المستوى المركب w.

وعندما تتحرك z على امتداد القطعة المستقمية $y=0$, $-1\le x\le 0$ من المحور الحقيقي ثم تتحرك على امتداد القطعة المستقيمة $y=0$, $0\le x\le 1$ تتحرك صورتها w في اتجاه زيادة v على امتداد القطعة المستقيمة $u=0\,,0\le v\le 1$ ثم في اتجاه تناقص v على امتداد نفس القطعة المستقيمة. وأخيراً. عندما تتحرك z إلى اليمين على امتداد جزء المحور الحقيقي الموجب بحيث $x\ge 1$ تتحرك صورتها إلى اليمين على امتداد المحور الحقيقي الموجب في المستوى المركب w. لاحظ التغيرات في اتجاه حركة w عند صور النقط $z=-1$, $z=0$, $z=1$ من هذا نحصل على دالة راسمة مشتقتها:

$$f'(z)=k(z+1)^{-1/2}(z-0)^{1}(z-1)^{-1/2}$$

حيث k ثابت ما. أوجد الدالة الراسمة:

$$w=\sqrt{z^2-1}$$

حيث $0<\arg\sqrt{z^2-1}<\pi$ باستخدام الرواسم المتعاقبة $w=\sqrt{W}\,,W=Z-1,Z=z^2$

تحقق من أن التحويلة المحصلة ترسم نصف المستوى $\operatorname{Re} z>0$ فوق نصف المستوى $\operatorname{Im} w>0$ مع قطع على امتداد القطعة المستقيمة $u=0$, $0<v\le 1$.

8- معكوسة التحويلة الخطية الكسرية: $Z=\dfrac{i-z}{i+z}$

نرسم القرص $|Z|\le 1$، بحيث تكون حافظة للزوايا الموجهة وذلك عدا عند النقطة $Z=-1$ فوق نصف المستوي $\operatorname{Im} z\ge 0$. افرض أن Z_j نقط على الدائرة $|Z|=1$ صورها النقط $z=x_j(j=1,2,....,n)$ والتي استخدمت في تحويلة شفارتز- كريستوفل (8) بند (2.8) بين -دون تعيين أفرع الدوال الغير القياسية- أن:

$$\frac{dw}{dZ}=A'(Z-Z_1)^{-k_1}(Z-Z_2)^{-k_2}...(Z-Z_n)^{-k_n}$$

حيث A' ثابت ما. ومن ثم بين أن التحويلة:

$$w=A'\int_0^z (S-Z_1)^{-k_1}(S-Z_2)^{-k_2}...(S-Z_n)^{-k_n}\,dS+B$$

ترسم داخلية الدائرة $|Z|=1$ فوق داخلية مضلع رؤوسه صور النقط Z_j الواقعة على الدائرة.

9- في التكامل بتمرين (8)، افرض أن الأعداد $Z_j(j=1,2,....,n)$، هي الجذور النونية للوحدة. اكتب $w=\exp(2\pi i/n), Z_1=1, Z_2=w,.....Z_n=w^{n-1}$ افرض كذلك أن كل من الأعداد $k_j(j=1,2,....,n)$ يساوي $2/n$ بهذا يصبح التكامل بتمرين (8):

$$w=A'\int_0^z \frac{dS}{\left(S^n-1\right)^{2/n}}+B$$

أثبت أنه عندما تكون $A'=1$, $B=0$، فإن هذه التحويلة ترسم داخلية دائرة الوحدة $|Z|=1$ فوق داخلية مضلع منتظم عدد أضلاعه n ومركزه النقطة $w=0$.

اقتراح: صورة كل من النقط $Z_j(j=1,2,....n)$ هي رأس مضلع ما زاويته الخارجية عند هذا الرأس تساوي $2\pi/n$ اكتب:

$$w=\int_0^1 \frac{dS}{\left(S^n-1\right)^{2/n}}$$

متخذاً مسار التكامل ليكون على امتداد المحور الحقيقي الموجب من $Z=0$ إلى $Z=1$ مع ملاحظة أننا سنأخذ القيمة الأساسية للجذر النوني للمقدار $\left(S^n-1\right)^n$ من ثم أثبت أن صور النقط $Z_2=w,....,Z_n=w^{n-1}$ هي النقط $\omega w_1,.....\omega^{n-1}w_1$ على الترتيب. بعد ذلك تحقق من أن المضلع يكون منتظماً ومركزه $w=0$.

10- احصل على متباينة (5) بند (2.8)

اقتراح: افرض أن R أكبر من أي من الأعداد $|x_j|(j=1,2,....n)$ لاحظ أنه إذا كانت R كبيرة كبراً كافياً فإن المتباينات $|z|/2<|z-x_j|<2|z|$ تتحقق لكل x_j عندما $|z|>R$ ثم استخدم معادلة (1) بند (2.8) مع الشروط (5) بند (1.8).

11- في بند (2.8)، استخدم الشروط (5) والشروط الكافية لتحقق وجود تكاملات معتلة للدوال الحقيقية لإثبات أن $F(x)$ لها نهاية ما w_n عندما تؤول x إلى ما لا نهاية،

حيث $F(z)$ معرفة بمعادلة (3) من ذلك البند. أثبت كذلك أن تكامل الدالة $f'(z)$ فوق كل قوس من نصف الدائرة $|z|=R, \operatorname{Im} z \ge 0$ يقترب من الصفر عندما تؤول R إلى ∞ ومن ثم استنتج أن:

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = W_n \qquad\qquad (\operatorname{Im} z \ge 0)$$

كما هو مذكور بمعادلة (6) هناك.

12- طبقاً لما سبق يمكن استخدام الصيغة:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

لتعيين عدد أصفار دالة g بداخلية منحني بسيط مغلق C موجه في الاتجاه الموجب عندما يقع C في نطاق بسيط الترابط D تكون فيه $g(z)$ تحليلية ولا تنعدم $g'(z)$ فيه على الإطلاق في تلك الصيغة اكتب $g(z)=f(z)-w_0$ ، حيث $f(z)$ الدالة الراسمة لتحويلة شفارتز-كريستوفل (7) بند (2.8)، والنقطة w_0 إما أن تكون نقطة داخلية أو خارجية للمضلع P الذي يكون صورة لمحور x، إذن $f(x) \ne w_0$ افرض أن المنحني C يتكون من النصف العلوي لدائرة $|z|=R$ وقطعة مستقيمة $-R<x<R$ من محور x تحوي جميع النقط x_j $j=1,2,....,n-1,$ فيما عدا قطعة مستقيمة صغيرة حول كل نقطة x_j تستبدل بالنصف العلوي من دائرة $|z-x_j|=r_j$ قطرها تلك القطعة المستقيمة.

إذن عدد النقط z الداخلية للمنحني C بحيث $f(z)=w_0$ هو:

$$N_C = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-w_0}dz$$

لاحظ أن $f(z)-w_0$ تقترب من النقطة الغير صفرية $W_n - w_0$ عندما $|z|=R$ وعندما تؤول R إلى ∞، متذكراً في ذلك خاصية الترتيب (5) بند (2.8) للدالة $|f'(z)|$ افرض أن الأعداد r_j تؤول إلى الصفر وأثبت أن عدد النقط في النصف العلوي من المستوى المركب z التي يكون عندها $f(z)=w_0$ يكون:

$$N = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{f'(x)}{f(x)-w_0}dx$$

استنتج أن $N = 1$ إذا كانت w_0 نقطة داخلية للمضلع P وأن $N = 0$ إذا كانت w_0 نقطة خارجية للمضلع P، وذلك حيث إن:

$$\int_P \frac{dw}{w-w_0} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x)-w_0}\,dx$$

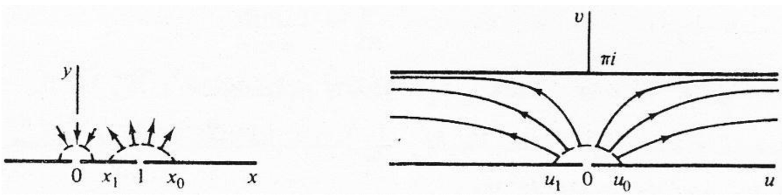
ومن ثم أثبت أن الراسم لنصف المستوى $\operatorname{Im} z > 0$ فوق داخلية P يكون أحادياً.

6.8 سريان سائل في مجرى من خلال شق

Fluid Flow In a Channel Through a Slit

سنقدم الآن مثالاً آخر عن السريان المستقر المثالي الذي سبق لنا التعرض له في الباب التاسع. هذا المثال سيساعدنا في أن نبين أن المنابع والمصارف يمكن أن توضح في مسائل سريان سائل.

اعتبر السريان المستقر الثنائي البعد لسائل بين مستويين متوازيين $v=\pi, v=0$ إذا كان السائل يتدفق من خلال شق ضيق بطول الخط المستقيم في المستوى الأول والذي يكون عمودياً على المستوي uov عند نقطة الأصل (شكل 8–8). افرض أن معدل سريان السائل في المجرى من خلال الشق يساوي Q من وحدات الحجم لوحدة الزمن لكل وحدة من وحدات عمق المجرى، حيث العمق مقيس في الاتجاه العمودي للمستوي uov. بذلك يكون معدل السريان إلى الخارج عند كل النهايتين يساوي $Q/2$.



الشكل: 8–8

التحويلة $w=\log z$ التي سبق اشتقاقها في البند السابق، راسم أحادي من النصف العلوي للمستوى المركب z فوق الشريحة في المستوى المركب w. التحويلة العكسية.

$$z=e^{w}=e^{u}e^{iv} \qquad (1)$$

ترسم إذن الشريحة فوق نصف المستوى، التحويلة (1) ترسم محور الإحداثيات u فوق النصف الموجب من محور الإحداثيات x، وترسم الخط المستقيم $v=\pi$ فوق النصف السالب من نفس المحور. بذلك يكون حد الشريحة قد رسم فوق حد نصف المستوى.

النقطة $z=1$ هي صورة النقطة $w=0$ صورة نقطة ما $w=u_0$، حيث $u_0>0$، هي نقطة $z=x_0$ حيث $x_0>1$ معدل سريان السائل على امتداد منحني يصل النقطة $w=u_0$ بنقطة (u,v) في الشريحة هو دالة تيار $\psi(u,v)$ للسريان (بند (8.7)) إذا كان

u_1 عدداً حقيقياً سالباً، فإن معدل السريان في المجرى من خلال الشق يمكن كتابته على الصورة:

$$\psi(u_1,0)=Q$$

الآن، فبتأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة، تحول الدالة ψ إلى دالة في المتغيرين x,y تمثل دالة تيار للسريان في المنطقة المناظرة من المستوى المركب z، أي أن معدل السريان متساوٍ على امتداد منحنيات متناظرة في المستويين، كما اتبعنا في الباب التاسع، سنستخدم نفس الرمز ψ ليرمز لدالتي التيار المختلفتين في المستويين. وحيث إن صورة النقطة $w=u_1$ تكون نقطة $z=x_1$ حيث $0<x_1<1$، فإن معدل السريان على امتداد أي منحنى يصل النقطتين $z=x_1, z=x_0$ ويقع في النصف العلوي من المستوى المركب z يساوي أيضاً Q. وبالتالي فإنه يوجد منبع عند النقطة $z=1$ مساوٍ للمنبع $w=0$.

ما أتبع أعلاه يمكن استخدامه بصفة عامة لإثبات أن: تحت تأثير تحويلة حافظة للزوايا الموجهة فإن كل منبه أو مصرف عند نقطة معطاة يناظر منبع أو مصرف مساوٍ له عند صورة تلك النقطة.

عندما يؤول $\operatorname{Re} w$ إلى $-\infty$، تقترب صورة النقطة w من النقطة $z=0$ وأي مصرف قوته $Q/2$ عند النقطة الأخيرة يناظر المصرف الذي يبعد بعداً لا نهائياً إلى اليسار في الشريحة. لتطبيق ما ذكر أعلاه في هذه الحالة، نعتبر معدل السريان على امتداد منحنى يصل إلى الحدين $v=0$ و $v=\pi$ للجزء الأيسر من الشريحة وكذلك السريان على امتداد صورة هذا المنحنى في المستوى المركب z.

المصرف عند نهاية الطرف الأيمن للشريحة يحول إلى مصرف عند نقطة اللانهاية في المستوى المركب z.

دالة التيار ψ للسريان في النصف العلوي من المستوى المركب z لا بد وأن تكون في هذه الحالة دالة ذات قيم ثابتة على امتداد كل جزء من الأجزاء الثلاثة من محور السينات. بالإضافة إلى ذلك فإن قيمتها لا بد وأن تزيد بمقدار Q عندما تتحرك النقطة z حول

النقطة $z = 1$ من الموضع $z = x_0$ للموضع $z = x_1$، ولا بد أن تنقص قيمتها بمقدار $Q/2$ عندما تتحرك z حول نقطة الأصل بطريقة مناظرة الدالة:

$$\psi(x, y) = \frac{Q}{\pi}\left[\arg(z-1) - \frac{1}{2}\arg z\right]$$

تحقق هذه المتطلبات، بالإضافة إلى ذلك. فهذه الدالة توافقية في نصف المستوى $\operatorname{Im} z > 0$ وذلك لأنها الجزء التخيلي من الدالة:

$$F(z) = \frac{Q}{\pi}\left[\log(z-1) - \frac{1}{2}\log z\right] = \frac{Q}{\pi}\log\left(z^{1/2} - z^{-1/2}\right)$$

الدالة F دالة جهد مركب للسريان في النصف العلوي من المستوى المركب z. وحيث إن $z = e^{w}$، فإن الدالة:

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\log\left[e^{w/2} - e^{-w/2}\right]$$

تكون دالة جهد مركب للسريان في المجرى.

بإهمال ثابت جمعي، يمكننا كتابة:

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\log\left(\sinh\frac{w}{2}\right) \qquad (2)$$

لاحظ أننا استخدمنا نفس الرمز F للدلالة على ثلاث دوال مختلفة، مرة في المستوى المركب z ومرتان في المستوى المركب w.

متجه السرعة $\overline{F'(w)}$ يعطى بالعلاقة:

$$V = \frac{Q}{2\pi}\coth\frac{\overline{w}}{2} \qquad (3)$$

من هذا نرى أن:

$$\lim_{|u|\to\infty} V = \frac{Q}{2\pi}$$

كذلك، النقطة $w = \pi i$ نقطة ركود Stagnation Point أي أن السرعة عندها تساوي صفر، وبالتالي فإن ضغط السائل على امتداد الحائط $v = \pi$ للمجرى يكون أكبر ما يمكن عند النقط المقابلة للشق.

دالة التيار $\psi(u,v)$ للمجرى هي الجزء التخيلي للدالة $F(w)$ المعطاة بالمعادلة (2) وبذلك تكون خطوط السريان Streamlines، $\psi(u,v)=c$ هي المنحنيات:

$$\frac{Q}{\pi}\log\left(\sinh\frac{w}{2}\right)=c$$

وهذه المعادلة تؤول إلى :

$$\tan\frac{v}{2}=k\tanh\frac{u}{2} \qquad (4)$$

حيث k ثابت حقيقي. (شكل 8-8) يوضح بعض خطوط السريان.

7.8 السريان في مجرى ذي نتوء Flow In a Channel With An Offset

لزيادة إيضاح استخدام تحويلة شفارتز-كريستوفل، دعنا نوجد الجهد المركب لسريان سائل في مجرى به تغير فجائي في العرض (شكل 8-9). سنعتبر وحدة للطول بحيث يكون عرض الجزء الأكبر عرضاً من المجرى يساوي π من الوحدات، وبالتالي فإن عرض الجزء الأضيق من المجرى يساوي $h\pi$، حيث $0<h<1$.

افرض أن الثابت الحقيقي V_0 يرمز لسرعة السائل بعيداً عن النتوء في الجزء الأكبر عرضاً، أي أن:

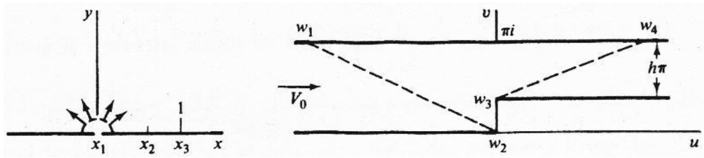
$$\lim_{u\to\infty}V=V_0$$

حيث المتغير المركب V يمثل متجه السرعة. معدل السريان لوحدة العمق خلال المجرى، أو قوة المنبع على اليسار وقوة المصرف على اليمين، يكون إذن:

$$Q=\pi V_0 \qquad (1)$$

يمكن اعتبار مقطع المجرى على أنه الوضع النهائي للشكل الرباعي الموضح بالشكل والذي رؤوسه النقط w_1,w_2,w_3,w_4، عندما يتحرك الرأس w_1 إلى اليسار مسافة لا نهائية ويتحرك الرأس w_4 إلى اليمين مسافة لا نهائية كذلك. في الوضع النهائي تصبح الزوايا الخارجية:

$$k_1\pi=\pi\,, \qquad k_2\pi=\frac{\pi}{2}\,, \qquad k_3\pi=-\frac{\pi}{2}\,, \qquad k_4\pi=\pi$$



الشكل: 8-9

إذا كتبنا $x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = \infty$ وتركنا x_2 لنعينها، حيث $0 < x_2 < 1$، فإن مشتقة الدالة الراسمة تصبح:

$$\frac{dw}{dz} = Az^{-1}(z - x_2)^{-1/2}(z-1)^{1/2} \qquad (2)$$

من أجل تبسيط تعيين الثوابت x_2, A هنا، سنشرع مباشرة في استخدام الجهد المركب للسريان. منبه السريان في المجرى والواقع إلى أقصى اليسار يناظر منبعاً مساوياً عند $z = 0$ (بند (6.8)). الحد الكامل لمقطع المجرى هو صورة محور السينات.

ووفقاً لمعادلة (1)، فإن الدالة

$$F(z) = V_0 \log z = V_0 \log r + iV_0\theta \qquad (3)$$

تكون دالة الجهد للسريان في النصف العلوي من المستوى المركب z مع وجود المنبع المطلوب عند نقطة الأصل. لاحظ أن المصرف على يمين المجرى لا بد وأن يناظر مصرفاً عند نقطة اللانهاية في المستوى المركب z.

المرافق المركب للسرعة V في المستوى المركب w يمكن كتابته على الصورة:

$$\overline{V(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dw}$$

وبالتالي فباستخدام معادلتي (2)، (3)، يمكننا أن نكتب:

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{A}\left(\frac{z - x_2}{z - 1}\right)^{1/2} \qquad (4)$$

في الوضع النهائي للنقطة w_1 والمناظر للنقطة $z = 0$، تكون السرعة هي الثابت الحقيقي V_0 بذلك ينتج من معادلة (4) أن:

$$V_0 = \frac{V_0}{A}\sqrt{x_2}$$

عند الوضع النهائي للنقطة w_4 والمناظر للنقطة $z = \infty$ ، سنرمز للسرعة بالعدد الحقيقي V_4. قد يبدو لنا الآن ظاهرياً، أنه عندما تتحرك قطعة مستقيمة رأسية لتعبر الجزء الضيق من المجرى مسافة لا نهائية إلى اليمين، فإن V تقترب من V_4 عند كل نقطة من نقط تلك القطعة المستقيمة. يمكننا التحقق من أن هذا التخمين Conjecture حقيقة واقعة وذلك بإيجاد w كدالة في z أولاً من معادلة (2)، ولكن، حتى نوجز المناقشة، سنفترض صحة هذه الحقيقة، إذن، وحيث أن السريان مستقر فإن:

$$\pi h V_4 = \pi V_0 = Q$$

أي أن $V_4 = V_0 / h$ يجعل z تؤول إلى ما لا نهاية في معادلة (4)، نجد أن:

$$\frac{V_0}{h} = \frac{V_0}{A}$$

إذن:

$$A = h \quad , \qquad x_2 = h^2 \qquad (5)$$

و

$$V(w) = \frac{V_0}{h}\left(\frac{z-h^2}{z-1}\right)^{1/2} \qquad (6)$$

من معادلة (6) يمكننا أن نرى أن مقياس السرعة $|V|$ يصبح لا نهائياً عند الحافة w_3 للنتوء وذلك حيث إنه صورة النقطة $z = 1$. أيضاً، الحافة w_2 نقطة ركود، وهي نقطة تحقق $v = 0$. بذلك يكون ضغط السائل على امتداد حد المجرى أكبر ما يمكن عند w_2 وأصغر ما يمكن عند w_3.

لإيجاد العلاقة بين الجهد والمتغير w، لا بد أن نكامل معادلة (2) التي يمكن كتابتها الآن على الصورة:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{z}\left(\frac{z-1}{z-h^2}\right)^{1/2} \qquad (7)$$

بالتعويض بمتغير جديد s، حيث:

$$\frac{z-h^2}{z-1} = s^2$$

يمكننا أن نبين أن معادلة (7) تؤول إلى:

$$\frac{dw}{ds}=2h\left(\frac{1}{1-s^2}-\frac{1}{h^2-s^2}\right)$$

إذن:

$$w=h\log\frac{1+s}{1-s}-\log\frac{h+s}{h-s} \qquad (8)$$

ثابت التكامل هنا يساوي صفراً وذلك لأن $s=0$، ومن ثم $w=0$، عندما $z=h^2$ بدلالة s، يصبح الجهد F المعطى بمعادلة (3)

$$F=V_0\log\frac{h^2-s^2}{1-s^2};$$

وبالتالي فإن:

$$s^2=\frac{\exp(F/V_0)-h^2}{\exp(F/V_0)-1} \qquad (9)$$

بالتعويض عن s كما هي معطاة بهذه المعادلة في معادلة (8)، نحصل على علاقة ضمنية تعطى الجهد F كدالة للمتغير المركب w.

8.8 جهد الكهرباء الساكنة حول حافة صفيحة موصلة

Electrostatic Potential About An Edge Of a Conducting Plate

ليكن لدينا صفيحتان موصلتان متوازيتان ممتدتان لا نهائياً حفظ جهد الكهرباء الساكنة لهما عند $V=0$ وصفيحة ثالثة نصف لا نهائية موازية لهما وموضوعة في وسط المسافة بينهما حفظ جهد الكهرباء الساكنة لها عند $V=1$. سنختار نظاماً للإحداثيات ووحدة للطول بحيث تقع الصفائح الثلاث في المستويات $v=0$, $v=\pi$, $v=\pi/2$ (شكل 8-10). دعنا نعين دالة الجهد $V(u,v)$ في المنطقة الواقعة بين هذه الصفائح.

مقطع هذه المنطقة في المستوي UOV في صورته النهائية يكون الشكل الرباعي المحدد بالمستقيمات المنكسرة الموضحة بالشكل، وذلك عندما تتحرك النقطتان w_1, w_3 إلى الخارج يميناً وتتحرك النقطة w_4 إلى الخارج يساراً. بتطبيق تحويلة شفارتز–كريستوفل هنا، سنفترض أن النقطة x_4، المناظرة للرأس w_4، هي نقطة اللانهاية.

سنختار $x_1=-1, x_3=1$ وندع x_2 كنقطة مطلوب تعيينها. القيم النهائية للزوايا الخارجية للشكل الرباعي هي:

$$k_1\pi=\pi \qquad , \qquad k_2\pi=-\pi \qquad , \qquad k_3\pi=k_4\pi=\pi$$

إذن:

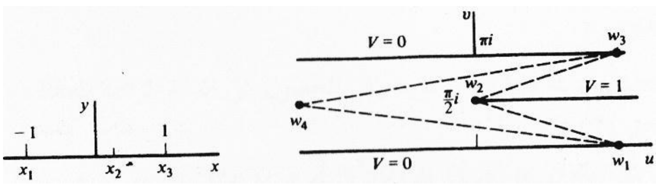
$$\frac{dw}{dz}=A(z+1)^{-1}(z-x_2)(z-1)^{-1}=A\frac{z-x_2}{z^2-1}=\frac{A}{2}\left(\frac{1+x_2}{z+1}+\frac{1-x_2}{z-1}\right)$$

وبالتالي فإن التحويلة من النصف العلوي للمستوى المركب z إلى الشريحة المقسومة في المستوى المركب w تكون:

$$w=\frac{A}{2}\left[(1+x_2)\log(z+1)+(1-x_2)\log(z-1)\right]+B \qquad (1)$$

افرض أن A_1, A_2, B_2 هي الأجزاء الحقيقية والتخيلية للثابتين A, B على الترتيب. عندما $z=x$ تقع النقطة w على حدود الشريحة المقسومة، وطبقاً لمعادلة (1) نحصل على:

$$\begin{aligned}u+iv=\frac{1}{2}(A_1+iA_2)\{&(1+x_2)[\log|x+1|+i\arg(x+1)]\\&+(1-x_2)[\log|x-1|+i\arg(x-1)]\}+B_1+iB_2\end{aligned} \qquad (2)$$



الشكل: 8–10

لتعيين الثوابت هنا، نلاحظ أولاً أن الوضع النهائي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4, w_1 هو محور الإحداثيات u. هذا الخط هو صورة جزء محور السينات الواقع على يسار النقطة $x_1=-1$، وهذا راجع إلى أن القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4, w_3 هي صورة جزء محور السينات الواقع على يمين $x_3=1$، والضلعان الآخران للشكل الرباعي هما صورتا القطعتين المستقيمتين الباقيتين من محور السينات.

إذن عندما $v=0$ وتؤول u إلى ما لا نهاية من خلال قيم موجبة، تقترب النقطة المناظرة x إلى النقطة $z=-1$ من اليسار. إذن:

$$\arg(x+1)=\pi \quad , \qquad \arg(x-1)=\pi$$

وتؤول $\log|x+1|$ إلى $-\infty$ وأيضاً، حيث إن $-1<x_2<1$، فإن الجزء الحقيقي للمقدار داخل الأقواس المزدوجة في معادلة (2) يؤول إلى $-\infty$. وحيث إن $v=0$ فإنه ينتج أن $A_2=0$، وفيما عدا ذلك فإن الجزء التخيلي للطرف الأيمن يصبح لانهائياً. بمساواة الأجزاء التخيلية في الطرفين، نجد أن:

$$0=\frac{1}{2}A_1[(1+x_2)\pi+(1-x_2)\pi]+B_2$$

إذن:

$$-\pi A_1=B_2 \quad , \qquad A_2=0 \qquad (3)$$

الوضع النهائي للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_2, w_1 هو الشعاع $v=\pi/2\,, u\geq 0$. النقط الواقعة على هذا الشعاع هي صور النقط $z=x$ حيث $-1<x\leq x_2$، وبالتالي فإن:

$$\arg(x+1)=0 \quad , \qquad \arg(x-1)=\pi$$

بمساواة الأجزاء التخيلية في طرفي معادلة (2) عند هذه النقط، نجد أن:

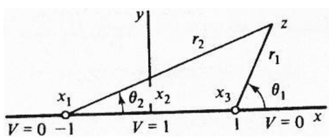
$$\frac{\pi}{2}=\frac{A_1}{2}(1-x_2)\pi+B_2 \qquad (4)$$

وأخيراً، فإن الأوضاع النهائية لنقط القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين w_4, w_3 هي النقط $u+\pi i$، وهذه النقط هي صور النقط x حيث $x>1$ بمساواة الأجزاء التخيلية في معادلة (2) عند هذه النقط نجد أن: $\pi=B_2$

إذن، من معادلتي (3)، (4)، نجد أن:

$$A_1=-1, \qquad x_2=0$$

وبالتالي فإن $x=0$ هي النقطة التي صورتها الرأس $w=\pi i/2$، وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة (2) ومساواة الأجزاء الحقيقية نجد أن $B_1=0$.



الشكل: 8–11

بذلك تصبح التحويلة (1):

$$w = -\frac{1}{2}[\log(z+1) + \log(z-1)] + \pi i \qquad (5)$$

أي أن:

$$z^2 = 1 + e^{-2w} \qquad (6)$$

تحت تأثير هذه التحويلة، تصبح الدالة التوافقية المطلوبة $V(u,v)$ دالة توافقية في المتغيرين x, y في المنطقة $y > 0$ وتحقق الشروط الحدية الموضحة بشكل (8-11).

لاحظ أن $x_2 = 0$ في هذه الحالة. الدالة التوافقية في نصف المستوى هذا والتي تأخذ هذه القيم على الحدود هي الجزء التخيلي من الدالة التحليلية:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\log\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{\pi}\log\frac{r_1}{r_2} + \frac{i}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

حيث θ_2, θ_1 يأخذان القيم من صفر إلى π بكتابة ظل كل من هاتين الزاويتين كدالة في x, y وإجراء التبسيطات اللازمة نجد أن:

$$\tan \pi V = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \qquad (7)$$

المعادلة (6) بصيغ للمقادير $x^2 - y^2 \,,\, x^2 + y^2$ بدلالة u, v من الصيغة (7) نجد إذن أن العلاقة بين الجهد V والإحداثيات u, v يمكن كتابتها على الصورة:

$$\tan \pi V = \frac{1}{x}\sqrt{e^{-4u} - s^2} \qquad (8)$$

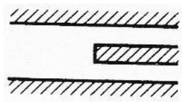
حيث:

$$s = -1 + \sqrt{1 + 2e^{-2u}\cos 2v + e^{-4u}}$$

تمارين غير محلولة(8-2)

1- استخدم تحويلة شفارتز-كريستوفل للحصول على الدالة الراسمة المعطاة.

2- بين لماذا يكون حل مسألة السريان في مجرى به عائق على صورة شريحة مستطيلة نصف لا نهائية (شكل 8-12) يكون متضمناً في حل المسألة التي عوجلت في بند (7.8).



الشكل: 8-12

3- عندما تتحرك النقطة z إلى اليمين على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقي بحيث $x \leq -1$، تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد الشعاع $u \leq 0, v = h$ وعندما تتحرك صورتها w في اتجاه تناقص v على امتداد القطعة المستقيمة $u = 0, 0 \leq v \leq h$ وأخيراً، عندما تتحرك z إلى اليمين على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقي بحيث $x \geq 1$، تتحرك صورتها w إلى اليمين على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقي. لاحظ التغيرات في اتجاه حركة w عند صورتي النقطتين $z = -1$ و$z = 1$ هذه التغيرات توضح أن المشتقة لدالة راسمة يمكن أن تكون:

$$\frac{dw}{dz} = k\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2}$$

حيث k ثابت ما. من ذلك احصل على التحويلة المعطاة هناك. تحقق أنه عند كتابة التحويلة على الصورة:

$$w = \frac{h}{\pi}\{(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2} + \log[z + (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}]\}$$

حيث $0 \leq \arg(z \pm 1) \leq \pi$ فإنها ترسم الحدود بالطريقة المبينة بالشكل.

4– لتكن $T(u,v)$ درجات الحرارة للحالة المستقرة المقيدة Bounded Steady State في الجزء المظلل من المستوى المركب w مع الشروط الحدية $T(u,v)=1$ عندما $u<0$ و $T=0$ على الجزء الباقي $(B'C'D')$ من الحدود بدلالة بارامتر حقيقي α $(0<\alpha<\pi/2)$ أثبت أن صورة كل نقطة $z=i\tan\alpha$ على الجزء الموجب من المحور التخيلي y هي النقطة:

$$w=\frac{h}{\pi}\left[\log(\tan\alpha+\sec\alpha)+i\left(\frac{\pi}{2}+\sec\alpha\right)\right]$$

(انظر تمرين (3) وأثبت كذلك أن درجة الحرارة عند تلك النقطة w تعطى بالعلاقة:

$$T(u,v)=\frac{\alpha}{\pi}\qquad\qquad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

5– لتكن $F(w)$ دالة الجهد المركب لسريان سائل على عتبة في قاع مجرى عميق ممثلاً بالجزء المظلل من المستوى المركب w، حيث تقترب سرعة السائل V من الثابت الحقيقي V_0 عندما تؤول $|w|$ إلى ما لا نهاية في تلك المنطقة.

التحويلة التي ترسم النصف العلوي من المستوى المركب z فوق تلك المنطقة هي التحويلة المعطاة في تمرين (3) باستخدام المتطابقة: $dF/dw=(dF/dz)(dz/dw)$

أثبت أن: $\overline{V(w)}=V_0(z-1)^{1/2}(z+1)^{-1/2}$

أثبت كذلك، بدلالة النقط $z=x$ التي تكون صورها النقط على امتداد قاع المجرى، أن:

$$|V|=|V_0|\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$$

من هذا لاحظ أن مقياس السرعة يزداد من $|V_0|$ على امتداد $A'B'$ ليصل $|V|=\infty$ عند B، ثم يتناقض لينعدم عند C'، وبعد ذلك يزداد من C' إلى D ليصل $|V_0|$ لاحظ أيضاً أن مقياس السرعة يكون $|V_0|$ عند النقطة $w=ih\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)$ بين B' و C'.

فهرس الفصل التاسع

الفصل التاسع

9. صيغ التكامل من نوع بواسون

في هذا الباب سنكشف النقاب عن مبرهنة تمكننا من الحصول على حلول للعديد من مسائل الشروط الحدية عندما يمكن التعبير عن هذه الحلول بدلالة تكاملات محددة أو معتلة. وبالتالي يمكننا مباشرة حساب الكثير من التكاملات التي تظهر في مثل تلك المسائل.

1.9 صيغة تكامل بواسون The Poisson Integral Formula

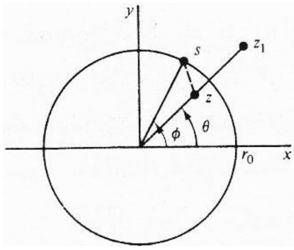
افرض أن f دالة تحليلية عند جمع نقط منحني مغلق بسيط C_0 ونقط داخليته وأن الاتجاه الدوراني لهذا المنحني هو الاتجاه الموجب. من المعلوم أن صيغة تكامل كوشي:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)}{s-z}ds \qquad (1)$$

تعبر عن قيمة f عند أي نقطة z من نقاط داخلية C_0 بدلالة قيم f عند نقط f تنتمي للمنحني C_0 عندما يكون C_0 دائرة، يمكننا الحصول من الصيغة (1) على صيغة مناظر لدالة توافقية، أي أنه يمكننا حل مسالة ديرخلت بالنسبة للدائرة.

اعتبر الحالة التي يكون فيها C_0 هو الدائرة $s = r_0 \exp(i\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$، و اكتب $z = r\exp(i\theta)$ حيث $0 < r < r_0$ شكل (9-1). معكوس النقطة الغير صفرية z بالنسبة للدائرة هو النقطة z_1 الواقعة على نفس الشعاع الذي تقع عليه النقطة z والتي تحقق الشرط $|z_1||z| = r_0^2$ أي أن:

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r}\exp(i\theta) = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{s\,\bar{s}}{\bar{z}} \qquad (2)$$



الشكل: 9-1

1.1.9 المتغيرات المركبة(العقدية) وتطبيقاتها

وحيث إن z_1 تنتمي لخارجية الدائرة C_0، فانه ينتج من نظرية كوشي- جورسيه أن قيمة التكامل المعطى في (1) يساوي صفراً عند وضع z_1 بدلاً من z في الدالة المكاملة. إذن، باستخدام التمثيل البارامتري المذكور للمنحني C_0، يمكننا أن نكتب:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{s}{s-z}-\frac{s}{s-z_1}\right)f(s)d\varphi$$

مع مراعاة أننا سنحتفظ بالرمز s ليقوم مقام $r_0\exp(i\varphi)$ وذلك للسهولة.

لاحظ أنه نظراً للتعبير الأخير في (2) للعدد z_1 فإن المقدار داخل الأقواس يمكن كتابته على الصورة:

$$\frac{s}{s-z}-\frac{1}{1-\frac{\bar{s}}{\bar{z}}}=\frac{s}{s-z}+\frac{\bar{z}}{\bar{s}-\bar{z}}=\frac{r_0^2-r^2}{|s-z|^2} \qquad (3)$$

بذلك نحصل على صورة أخرى لصيغة تكامل كوشي (1):

$$f\left(r\,e^{i\theta}\right)=\frac{r_0^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f\left(r_0\,e^{i\varphi}\right)}{|s-z|^2}d\varphi \qquad (4)$$

عندما $0<r<r_0$ وهذه الصورة صالحة أيضاً عندما $r=0$، وفي هذه الحال تؤول الصيغة مباشرة إلى الصيغة (1) عندما $z=0$.

المقدار $|s-z|$ هو البعد بين النقطتين z,s، وهنا يتحقق قانون جيب التمام (انظر الشكل (9-1)):

$$|s-z|^2=r_0^2-2r_0\,r\cos(\phi-\theta)+r^2>0 \qquad (5)$$

إذن، إن كان u هو الجزء الحقيقي للدالة التحليلية f، فإننا نحصل من العلاقة (4) على:

$$u(,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(r_0^2-r^2)\,u(r_0,\phi)}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2}\,d\phi \qquad (6)$$

حيث $r<r_0$. هذه الصيغة الأخيرة تعرف بـ:

صيغة تكامل بواسون Poisson integral formula للدالة التوافقية u في القرص المفتوح المحدد بالدائرة $r=r_0$.

العلاقة (6) تعطي تحويلاً تكاملياً خطياً من $u(r_0,\phi)$ إلى $u(r,\theta)$. نواة هذه التحويلة، عدا بالنسبة للمعامل $1/(2\pi)$، هو الدالة الحقيقية:

$$p(r_0,r,\phi-\theta)=\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2} \qquad (7)$$

والذي يعرف باسم نواة(أو قلب) بواسون Poisson Kernel.

الدالة $p(r_0,r,\phi-\theta)$ تمثل أيضاً بالصيغ (3)، ونرى من ثالث هذه الصيغ أن الدالة تكون دائماً موجبة. بالاضافة إلى ذلك، فحيث إن العدد $\bar{z}/(\bar{s}-\bar{z})$ ومرافقه $z(s-z)$ لهما نفس الأجزاء الحقيقية، فإننا نجد من الصيغة الثانية في (3) أن:

$$p(r_0,r,\phi-\theta)=Re\left(\frac{s}{s-z}+\frac{z}{s-z}\right)=Re\left(\frac{s+z}{s-z}\right) \qquad (8)$$

إذن: $p(r_0,r,\phi-\theta)$ دالة توافقية في المتغيرين r,θ لنقط داخلية C_0 لكل نقطة ثابتة s على C_0. ونلاحظ كذلك من معادلة (7) أن: $p(r_0,r,\phi-\theta)$ دالة زوجية دورية في المتغير، $\phi-\theta$ دورتها 2π وقيمتها تساوي واحد عندما $r=0$.

يمكننا الآن كتابة صيغة تكامل بواسون (6) على الصورة:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r_0,r,\phi-\theta)u(r_0,\phi)\,d\phi \qquad (9)$$

حيث $r<r_0$. وفي الحالة الخاصة عندما $f(z)=u(x,y)=1$، تبين أن معادلة (9) أن p لها الخاصية:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}p(r_0,r,\phi-\theta)d\phi=1 \qquad (10)$$

حيث $r<r_0$.

نقط C_0 نفسه وأن u تكون بالتالي توافقية في نطاق يحوي جميع نقاط هذه الدائرة. وعلى سبيل الخصوص، u تكون متصلة على C_0. فيما يلي سنخفف من هذه الشروط.

2.9 مسالة ديريخلت لقرص A Dirichlet Problem for a Disk

افرض أن F دالة معطاة للمتغير $\theta(0 \leq \theta \leq 2\pi)$، وأنها متصلة قطعة بقطعة. سنثبت أن الدالة:

$$U(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(r_0,r,\phi-\theta)F(\phi)d\phi \qquad (1)$$

حيث $r < r_0$، والتي يمكن أن نطلق عليها تحويلة تكامل بواسون للدالة F، تحقق الخصائص التالية: u تكون توافقية لجميع نقط داخلية الدائرة: $r = r_0$، وأن:

$$\lim_{r\to r_0} U(r,\theta) = f(\theta) \quad ; \quad (r < r_0) \qquad (2)$$

لكل قيمة ثابتة θ تكون عندها F متصلة.

إذن تكون U حلاً لمسألة ديريخلت للقرص $r < r_0$ بمعنى أن القيمة الحدية $F(\theta)$ تكون نهاية $U(r,\theta)$ عندما تقترب النقطة (r,θ) من النقطة (r_0,θ) على امتداد نصف قطر، ما عدا عند عدد محدود من النقطة (r_0,θ) التي تكون عندها الدالة F غير متصلة.

قبل أن نبرهن التقرير المذكور أعلاه. دعنا نستخدمه لإيجاد الجهد $V(r,\theta)$ داخل أسطوانة $r = 1$ حيث الشروط الحدية تلك الموضحة بالشكل 7–13، بمعنى أن الجهد ينعدم على أحد نصفي السطح ويساوي الوحدة على النصف الآخر للسطح. وقد سبق حل هذه المسألة في بند (6.7) باستخدام التحويلات الحافظة للزوايا الموجهة. في صيغة (1) نكتب V بدلاً من U، $r_0 = 1$ و $F(\phi) = 0$ عندما $0 < \phi < \pi$ و $F(\phi) = 1$ عندما $\pi < \phi < 2\pi$ لنحصل على:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} P(1,r,\phi-\theta)d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{(1-r^2)d\phi}{1+r^2-2r\cos(\phi-\theta)}$$

تكامل غير محدد للدالة $P(1,r,\psi)$ هو:

$$\int P(1,r,\psi)d\psi = 2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}tan\frac{\psi}{2}\right) \qquad (3)$$

وذلك لأن الدالة المكاملة هنا هي مشتقة الدالة في الطرف الأيسر بالنسبة إلى ψ. هذه الدالة تعطي القيمة $-\pi$ عندما $\psi/2 = -\pi/2$ والقيمة π عندما $\psi/2 = \pi/2$ وذلك حتى تكون دالة متصلة تزداد قيمتها من $-\pi$ إلى 2π. عندما تزداد $\psi/2$ من

$-\pi/2$ إلى π. هذا هو المدى المطلوب لقيم $\psi/2$ وذلك لأن $\psi = \phi - \theta$ و θ و ϕ تتغيران من π الى 2π ومن 0 إلى 2π على الترتيب. إذن:

$$\pi V(r,\theta) = \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{2\pi-\theta}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\pi-\theta}{2}\right)$$

حيث من الواضح فيزيائياً أن قيم $\pi V(r,\theta)$ تقع في المدى من 0إلى π.

بتبسيط الصورة التي حصلنا عليها للدالة $\tan(\pi V)$ من هذه المعادلة الأخيرة، نجد أن:

$$V(r,\theta) = \frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{1-r^2}{2r\sin\theta}\right) \; ; \quad (0 \le \arctan t \le \pi) \qquad (4)$$

وهذا هو الحل الذي حصلنا عليه قبل ذلك بدلالة الاحداثيات الديكارتية.

الدالة U المعرفة بالعلاقة (1) توافقية على داخلية الدائرة $r = r_0$ وذلك لأن P دالة توافقية في المتغيرين r,θ على نفس النطاق وأكثر تحديداً نلاحظ أنه حيث إن F متصلة قطعة بقطعة فإنه يمكن كتابة التكامل (1) كمجموع عدد محدود من تكاملات محددة كل منها دالته متصلة في r,θ,ϕ المشتقات الجزئية لهذه الدوال المكاملة محددة بالنسبة لكل من المتغيرين r,θ ،تكون أيضاً متصلة وحيث إنه يمكن تبديل ترتيب عمليتي التكامل والتفاضل بالنسبة إلى r,θ و حيث إن P تحقق معادلة لابلاس أيضاً.

للتحقق من وجود الشرط (2) فإننا في حاجة لإثبات أنه إذا كانت F متصلة عند θ فإنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث:

$$|U(r,\theta) - F(\theta)| < \varepsilon \quad ; \quad 0 < r_0 - r < \delta \qquad (5)$$

من خاصية (10) بند (9.8)، يمكن كتابة المتباينة (5) على الصورة:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0,r,\phi-\theta)[F(\phi)-F(\theta)]d\phi\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

سنجد من الملائم أن نوسع نطاق تعريف F بحيث تصبح دورية ودورتها 2π وذلك حتى تصبح الدالة المكاملة دورية في ϕ ولها نفس الدورة. حيث إن F متصلة عند θ ،فإنه يوجد عدد موجب صغير α مناظر للعدد الموجب المعطى ε بحيث إن:

$$|\phi - \theta| \le \alpha \quad \text{عندما} \quad |F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

دعنا نكتب:

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_o, r, \phi-\theta)[F(\phi)-F(\theta)]d\phi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0, r, \phi, \theta)[F(\phi) - F(\theta)]d\phi.$$

وبالتالي يمكن كتابة المتباينة (6) على الصورة:

$$|I_1(r) + I_2(r)| < \varepsilon \qquad (7)$$

وحيث إن P دالة موجبة القيم فبمراعاة خاصية (10) بند 9.8 ينتج أن:

$$|I_1(r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta)|F(\phi) - F(\theta)|d\phi < \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)d\phi = \frac{\varepsilon}{2}$$

طالما كانت $r < r_0$.

بعد ذلك، تذكر أن $P(r_0, r, \phi - \theta) = (r_0^2 - r^2)/|s - z|^2$ ولاحظ في شكل (9-1) إنه عندما $r \leq r_0$ فإنه المقدار $|s - z|^2$ يأخذ قيمة صغرى موجبة $m(\alpha)$ عندما تتغير السعة ϕ للعدد s بين $\theta + \alpha$, $\theta - \alpha + 2\pi$ إذا كانت M حداً أعلى للمقدار $|F(\phi) - F(\theta)|$ لجميع قيم ϕ, θ فإنه ينتج أن:

$$|I_2(r)| \leq \frac{(r_0^2 - r^2)M}{2\pi\, m(\alpha)} 2\pi < \frac{2Mr_0}{m(\alpha)}(r_0 - r) < \frac{\varepsilon}{2}$$

عندما $r_0 - r < m(\alpha)\varepsilon/(4Mr_0)$. وبالتالي، إذا اختيرت α لتناظر العدد المعطى ε ، فإنه يمكن تعيين العدد $m(\alpha)$، ويكون $|I_1(r)| + |I_2(r)| < \varepsilon$ عندما إذا كان: $r_0 - r < \delta$

$$\delta = \frac{m(\alpha)\varepsilon}{4Mr_0}$$

هذه إذن قيمة للعدد δ بحيث تتحقق متباينة (7) أو متباينة (6) وبالتالي يتحقق التقرير (5) عندما تأخذ δ هذه القيمة.

طبقاً للصيغة (1) فإن قيمة U عند $r = 0$ تساوي:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)d\phi.$$

إذن قيمة دالة توافقية عند مركز الدائرة تساوي متوسط القيم الحدية على الدائرة. وكتمارين سنترك للقارئ مهمة إثبات أنه يمكن تمثيل الدالتين U, P بمتسلسلات تحوي الدوال التوافقية $r^n \cos n\theta\,,\ r^n \sin n\theta$ كما يلي:

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\phi - \theta)\ ; (r < r_0\,) \quad (8)$$

$$U(.\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,;\ (r<r_0),(9)$$

حيث:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\cos n\phi\,d\phi;\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\phi)\sin n\phi\,d\phi\,,(10)$$

3.9 مسائل القيم الحدية المرتبطة Related Boundary Value Problems

سنترك للقارئ كتمارين مهمة إكمال تفاصيل براهين النتائج المعطاة فيما يلي سنفترض أن الدالة f الممثلة للقيم الحدية على الدائرة $r=r_0$ متصلة قطعة بقطعة، افرض أن $F(2\pi-\theta)=-F(\theta)$ بذلك تصبح الصيغة (1) لتكامل بواسون المعطاة ببند 2.9 هي:

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,r,\phi-\theta)-P(r_0,r,\phi+\theta)]F(\phi)d\phi\,,(1)$$

الدالة U تنعدم على نصفي القطرين الأفقيين $\theta=0$, $\theta=\pi$ للدائرة وهو الأمر المتوقع إذا ما اعتبرنا U على أنها درجة حرارة مستقرة. الصيغة (1) تحل إذن مسألة ديريخلت للمنطقة النصف دائرية $r<r_0$, $0<\theta<\pi$ (شكل 9-2) حيث $U=0$ على القطر AB و:

$$\lim_{r\to r_0}U(r,\theta)=F(\theta);\ (r<r_0,\ \ 0<\theta<\pi)\,,(2)$$

لكل قيمة ثابتة θ تكون عندها F متصلة.

إذا كانت $F(2\pi-\theta)=F(\theta)$ فإن:

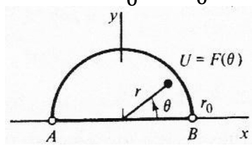
$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[P(r_0,r,\phi-\theta)+P(r_0,r,\phi+\theta)]\,F(\phi)d\phi\,,(3)$$

و$U_\theta(r,\theta)=0$ عندما $\theta=\pi$ أو $\theta=0$. الصيغة (3) بذلك دالة توافقية في المنطقة النصف دائرية $r<r_0$, $0<\theta<\pi$ (شكل 9-2) وتحقق الشرط (2) علاوة على الشرط أن مشتقها في اتجاه العمود تنعدم على القطر AB.

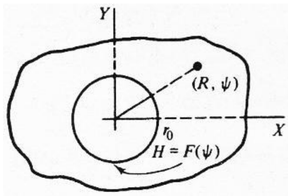
الدالة التحليلية $z=r_0^2/z$ ترسم الدائرة $|z|=r_0$ في المستوي المركب(العقدي) Z فوق الدائرة $|z|=r_0$ في المستوي المركب Z، وترسم أيضاً خارجية الدائرة الأولى فوق داخلية الدائرة الثانية. بكتابة $z=r\exp(i\theta)$, $z=R\exp(i\psi)$ نلاحظ أن

$r = r_0^2/R$، $\theta = 2\pi - \psi$، بذلك تحول الدالة التوافقية $U(r,\theta)$ الممثلة بالصيغة (1) ببند 2.9 إلى الدالة:

$$U\left(\frac{r_0^2}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^2 \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2 - 2r_0 R\cos(\phi+\psi) + R^2} F(\phi)d\phi$$



الشكل: 9–2



الشكل: 9–3

وهذه الدالة الأخيرة توافقية في النطاق $R > r_0$. والآن ، فبصفة عامة إذا كانت $u(r,\theta)$ توافقية فإن الدالة $u(r,-\theta)$ تكون توافقية كذلك (انظر تمرين رقم (10) من هذا البند). إذاً فالدالة:

$$H(R, \psi) = U\left(r_0^2/R, \psi - 2\pi\right)$$

أو:

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi) F(\phi)\, d\phi \qquad .... (4)$$

حيث إن $R > r_0$، تكون أيضاً توافقية. ولكل قيمة ثابتة ψ تكون عندها $F(\psi)$ متصلة نجد من شرط (2) بند (2.9) أن:

$$\lim_{R \to r_0} H(R, \psi) = F(\psi) \quad ; \quad (R > r_0) \qquad .... (5)$$

إذا الصيغة (4) حل مسألة ديريخلت للمنطقة الخارجية للدائرة $R = r_0$ في المستوي المركب Z (شكل 9–3). ونلاحظ أن قلب بواسون يكون سالباً في هذه الحالة، وأيضاً:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} P\left(r_0\ , R\ , \phi-\psi\right) d\phi = -1 \qquad ; \quad \left(R > r_0\right) \quad \text{........} \quad (6)$$

$$\lim_{R\to\infty} H\left(R\ , \psi\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} F\left(\phi\right) d\phi \qquad \text{...............} \quad (7)$$

تمارين غير محلولة (9-1)

1- استخدم صيغ تكامل بواسون (1) بالبند (2.9) لاستنتاج الصيغة:

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+(y-1)^2-1}\ ;\ (0\le \arctan t\le\pi)$$

لجهد الكهرباء الساكنة داخل الأسطوانة $x^2+y^2=1$ إذا كانت $V=1$ على الربع الأول $(x>0\,,\,y>0)$ من السطح الأسطواني وكانت $V=0$ على بقية السطح. لاحظ كذلك أن $1-V$ هو حل تمرين (8) بند (6.7).

2- افرض أن T ترمز للحرارة المستقرة في قرص $r\le 1$ أو جهة معزولة، عندما $T=1$ على القوس $0<\theta<2\theta_0$ من الحافة $T=0\,,\,r=1$ على بقية الحافة، حيث $0<\theta_0<\dfrac{\pi}{2}$. استخدم صيغة بواسون لإثبات أن:

$$T(x,y)=\frac{1}{\pi}\arctan\frac{\left(1-x^2-y^2\right)y_0}{(x-1)^2+(y-y_0)^2-y_0^2}\ ;\ (0\le \arctan t\le\pi)$$

حيث $y_0=\tan\theta_0$. تحقق من أن الدالة T تحقق الشروط الحدية.

3- افرض أن I دالة الدفع الأحادية المحدودة Finite Unit Impulse Function الآتية:

$$\mathrm{I}(h,\theta-\theta_0)=\begin{cases}\dfrac{1}{h} & ,\quad \theta_0<\theta<\theta_0+h\\ 0 & ,\quad 0\le\theta<\theta_0\ \ or\ \ \theta_0+h<\theta<2\pi\end{cases}$$

حيث h ثابت موجب و $0\le\theta_0\le 2\pi$.

لاحظ أن:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{I}(h,\theta-\theta_0)\,d\theta=1$$

بمساعدة نظرية القيمة المتوسطة للتكاملات، أثبت أن:

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{2\pi} P\left(r_0, r, \phi-\theta\right).\mathrm{I}\left(h, \phi-\theta_0\right)d\phi = P\left(r_0, r, \theta-\theta_0\right)$$

حيث: $r<r_0 \ , \ h>0$ وبالتالي عندما تؤول h إلى الصفر من خلال قيم موجبة فإن قلب بواسون $P\left(r_0, r, \theta-\theta_0\right)$ يكون هو النهاية للدالة التوافقية على داخلية الدائرة $r=r_0$ والتي قيمتها الحدية تمثل بدالة الدفع $2\pi\cdot\mathrm{I}\left(h, \theta-\theta_0\right)$.

4- أثبت أن الصيغة والتي تعطي مجموع متسلسلة جيوب التمام يمكن كتابتها على الصورة:

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}k^n\cos n\theta = \frac{1-k^2}{1-2k\cos\theta+k^2}$$

حيث $-1<k<1$. ومن أثم أثبت أن قلب بواسون يمكن تمثيله بالمتسلسلة (8) بند (2.9).

5- أثبت أن المتسلسلة في الصيغة (8) بند (2.9) تقاربية تقارب منتظم بالنسبة إلى ϕ.
ثم احصل من الصيغة (1) بهذا البند على المتسلسلة الممثلة (9) هناك.

6- استخدم علاقتي (9) و(10) ببند (2.9) لإيجاد درجات الحرارة المستقرة $T(r, \theta)$ في اسطوانة مصمتة $r\le r_0$ طولها لا نهائي إذا كان $T\left(r_0, \theta\right)=A\cos\theta$. أثبت أنه لا يوجد سريان للحرارة خلال المستوي $y=0$.

7- احصل على الحالات الخاصة التالية:

أ) $H(R, \psi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P\left(r_0, R, \phi+\psi\right)-P\left(r_0, R, \phi-\psi\right)\right]F(\phi)\,d\phi$.

ب) $H(R, \psi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[P\left(r_0, R, \phi+\psi\right)-P\left(r_0, R, \phi-\psi\right)\right]F(\phi)\,d\phi$.

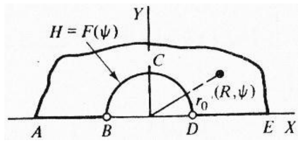
لصيغة (4) بند (3.9) وذلك للدالة التوافقية H في المنطقة غير المحدودة $0<\psi<\pi\ , R>r_0$ الموضحة بالشكل (4-9) بفرض أن هذه الدالة تحقق الشرط

الحدي: $\left(R>r_0 \quad \psi<\pi\right)$ $\lim\limits_{R\to r_0} H\left(R \quad \psi\right)=F\left(\psi\right)$ على نصف الدائرة،

وأن الدالة:

أ) تنعدم على الشعاعين BA و DE.

ب) تنعدم مشتقتها في اتجاه العمود على الأشعة BA و DE.



الشكل: 9-4

8- أعط التفاصيل الكاملة لاستنباط الصيغة (1) بند (3.9) كحل لمسألة ديريخلت المذكورة هناك للمنطقة الموضحة بالشكل (9-2).

9- أعط التفاصيل الكاملة لاستنباط الصيغة (3) بند (3.9) كحل لمسألة الشروط الحدية المذكورة هناك.

10- استنبط صيغة (4) ببند (3.9) كحل لمسالة ديريخلت للمنطقة الخارجية لدائرة (شكل 9-3) لتبين أن: $u\left(r\ ,-\theta\right)$ توافقية عندما تكون $u\left(r\ ,\theta\right)$ توافقية، ارجع إلى الصورة القطبية لمعادلة لابلاس.

11- اذكر لماذا تكون صيغة (6) بند (3.9) صحيحة.

12- استنبط معادلة (7) ببند (3.9).

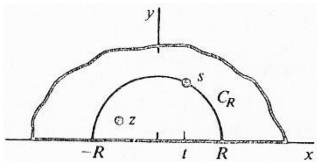
4.9 صيغ التكامل لنصف مستوي Integral Formulas for a Half Plane:

افرض أن لدينا الدالة f دالة تحليلية للمتغير z لجميع نقاط نصف المستوي $\text{Im}z \geq 0$، وبحيث تحقق f خاصية الترتيب الآتية:

$$\left|z^k f(z)\right| < M \quad ; \quad (\text{Im}z \geq 0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

لعددين ثابتين موجبين M, k لنقطة ثابتة z في الجزء الواقع أعلى المحور الحقيقي افرض أن C_R هو النصف العلوي من دائرة نصف قطرها R ومركزها نقطة الأصل وموجهة بالاتجاه الموجب، حيث $R > |z|$ (شكل 9–5). إذا طبقنا صيغة تكامل كوشي:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(s)\,ds}{s-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$



الشكل: 9–5

أول هذه التكاملات يقترب من الصفر عندما تؤول R إلى ∞، وذلك لأن $|f(s)| < M / R^k$ وبالتالي فإن:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-z} \quad ; \quad \text{Im}z > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

وبسبب الشرط (1)، يكون التكامل المعتل أعلاه تقاربياً، والعدد الذي يقترب منه هو نفسه قيمة كوشي الأساسية له. الصيغة (3) هي صيغة تكامل كوشي لنصف المستوي $\text{Im}z > 0$.

عندما تقع النقطة z في الجزء الواقع أسفل المحور الحقيقي، ينعدم الطرف الأيمن من المعادلة (2)، وبالتالي ينعدم التكامل المعتل (3) لمثل تلك النقطة. من هنا ينتج أنه عندما تقع z في الجزء الواقع أعلى المحور الحقيقي فإننا نحصل على الصيغة التالية:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{c}{t-z}\right) f(t)\; dt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

حيث $\operatorname{Im} z > 0$ و c ثابت اختياري.

للحالتين $c = -1$ و $c = 1$ تؤول هذه الصيغة على الترتيب إلى:

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot f(t)}{|t-z|^2}\,dt \qquad ; \quad y > 0 \quad \text{.............} \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t-x)\cdot f(t)}{|t-z|^2}\,dt \qquad ; \quad y > 0 \quad \text{.............} \quad (6)$$

إذا كانت $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$، فإنه ينتج من الصيغتين (5) و(6) أن الدالتين التوافقيتين u, v يمكن تمثيلهما في نصف المستوي $y > 0$ بدلالة القيم الحدية للدالة بالصيغتين التاليتين:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot u(t,0)}{|t-z|^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot u(t,0)}{(t-x)^2 + y^2}\,dt \qquad ; \quad y > 0 \quad \text{.............} \quad (7)$$

$$v(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)\cdot u(t,0)}{(1-x)^2 + y^2}\,dt \qquad ; \quad y > 0 \quad \text{..............} \, (8)$$

الصيغة (7) تعرف بصيغة تكامل بواسون لنصف المستوي، أو صيغة تكامل شفارتز.

في البند التالي سنخفف من الشروط اللازمة لتحقق الصيغتين (7) و(8).

5.9 مسالة ديرخلت لنصف المستوي: A Dirichlet Problem for a Half Plane

افرض أن F دالة حقيقية للمتغير الحقيقي x، محدودة لجميع القيم x، ومتصلة لجميع القيم x، عدا عند عدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر. عندما $|x| \le 1/\varepsilon \,,\, y \ge \varepsilon$ حيث ε أي ثابت موجب، يكون التكامل:

$$I(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\,dt}{(t-x)^2 + y^2}$$

منتظم التقارب بالنسبة للمتغيرين x, y تماماً كما هي الحال لتكاملات المشتقات الجزئية للدالة المكاملة بالنسبة للمتغيرين x, y. كل من هذه التكاملات هو مجموع لعدد محدود من التكاملات المعتلة أو المحددة على فترات تكون فيها الدالة F متصلة، وبالتالي فإن الدالة المكاملة لكل تكامل من تكاملات المجموع هي دالة متصلة في المتغيرات x, y, t

عندما $y \ge \varepsilon$، وبالتالي فإن كل مشتقة جزئية للدالة $I(x,y)$ تمثل بتكامل المشتقة المناظرة للدالة المكاملة طالما $y > 0$.

سنكتب $U(x,y) = y \cdot I(x,y)/\pi$. إذاً U هي تحويلة تكامل شفارتز للدالة F، كما يستتبع من معادلة (7) ببند (4.9):

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y \cdot F(t)}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \quad ; \quad y > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

مع إغفال المعامل $(1/\pi)$، يكون القلب هنا مساوياً للقيمة $y \cdot |t-z|^2$. هذا القلب هو الجزء التخيلي من الدالة $1/(t-z)$ التي تكون تحليلية بالنسبة للعدد المركب z عندما $y > 0$. من هذا ينتج أن القلب دالة توافقية، وبالتالي فإنها تحقق معادلة لابلاس في المتغيرين x, y، وحيث إنه يمكن تبديل ترتيب عمليتي التفاضل والتكامل هنا، فإن الدالة (1) تحقق تلك المعادلة. وذلك يستتبع أن تكون الدالة U توافقية عندما $y > 0$.

لإثبات أن:

$$\lim_{y \to 0} U(x,y) = F(x) \quad ; \quad y > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

لكل عدد ثابت x تكون عنده F متصلة، فإننا نضع $t = x + y\tan r$ في الصيغة (1) ونكتب:

$$U(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y\tan r)\, dr \quad ; \quad y > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

إذا كانت:

$$G(x,y,r) = F(x + y\tan r) - F(x)$$

وكان α عدداً ثابتاً موجباً صغيراً، فإن:

$$\pi\left[U(x,y) - F(x)\right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x,y,r)\, dr = I_1(y) + I_3(y) \quad \ldots\ldots\ (4)$$

حيث:

$$I_1(y)=\int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} G(x,y,r)\,dr$$

$$I_2(y)=\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2-\alpha} G(x,y,r)\,dr$$

$$I_3(y)=\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} G(x,y,r)\,dr$$

إذا كان M حداً أعلى للمقدار $|F(x)|$ فإن: $|G(x,y,r)|\le 2M$. إذا أعطينا عدداً موجباً ε فإننا نختار عدداً α بحيث $6M\alpha<\varepsilon$، إذاً:

$$|I_1(y)|\le 2M\alpha<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$|I_3(y)|\le 2M\alpha<\frac{\varepsilon}{3}$$

سنبين فيما يلي أنه يوجد عدد موجب δ مناظر للعدد ε بحيث:

$$|I_2(y)|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{طالما} \quad 0<y<\delta$$

حيث إن F متصلة عند x فإنه يوجد عدد موجب γ بحيث:

$$|G(x,y,r)|<\frac{\varepsilon}{3\pi} \quad \text{طالما} \quad 0<y<\delta.$$

بهذا نكون قد أثبتنا:

$$|I_1(y)|+|I_2(y)|+|I_3(y)|<\varepsilon \quad \text{طالما} \quad 0<y<\delta.$$

من هذه النتيجة الأخيرة ومن المعادلة (4) ينتج مباشرة أن الشرط (2) متحقق.

من هذا ينتج أن الصيغة (1) تحل مسالة دريشلت لنصف المستوي $y>0$ وذلك بافتراض وجود الشرط الحدي (2). من الواضح من الصور ة (3) للصيغة (1) أن $|U(x,y)|\le M$ في نصف المستوي حيث M حد أعلى للمقدار $|F(x)|$، أي أن الدالة U محدودة. ونلاحظ أن $U(x,y)=F_0$ وحيث F_0 مقدار ثابت.

طبقاً للصيغة (8) بالبند السابق فإن الدالة:

$$V(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-t)F(t)}{(t-x)^2+y^2}dt \qquad ; \qquad y>0 \quad \text{............} \ (5)$$

تحت شروط معينة فغن الدالة F، تكون مرافقاً توافقياً للدالة U إذا كانت F متصلة عند جميع النقاط. وذلك فيما عدا عند عدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر، وإذا كانت F تحقق خاصية ترتيب $\left|x^k F(x)\right|<M$، حيث $k>0$. وذلك لأنه تحت تأثير هذه الشروط نجد أن U,V تحققان معادلتي كوشي- ريمان عندما $y>0$. وسنترك كتمارين الحالات الخاصة من الصيغة (1) عندما تكون الدالة F فردية أو زوجية.

6.9 مسألة نويمان للقرص A Neumaan Problem for disk

كما في البند (1.9) وشكل (9-1) سنكتب:

$$z=r\cdot\exp(i\phi) \ , \ s=r_0\cdot\exp(i\phi)$$

حيث $r<r_0$ عندما تكون s ثابتة فإن الدالة:

$$\left.\begin{aligned} Q(r_0,r,\phi-\theta)&=-2r_0\cdot\text{Log}|s-z| \\ &=-r_0\cdot\text{Log}\left[r_0^2-2r_0 r\cos(\phi-\theta)+r^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \text{......} \ (1)$$

تكون توافقية لجميع نقاط داخل الدائرة $|z|=r_0$ وذلك لكونها الجزء الحقيقي للدالة $-2r_0\,\text{Log}|s-z|$ حيث الفرع القاطع للدالة $\log(z-s)$ متجه خارج من النقطة s.

وإذا كان علاوة على ذلك، $r\neq 0$، فإن:

$$\begin{aligned} Q_r(r_0,r,\phi-\theta)&=-\frac{r_0}{r}\,\frac{2r^2-2r_0 r\cos(\phi-\theta)}{r_0^2-2r_0 r\cos(\phi-\theta)+r^2} \\ &=\frac{r_0}{r}\Big[P(r_0,r,\phi-\theta)-1\Big] \quad \text{...........} \ (2) \end{aligned}$$

حيث P قلب بواسون المعرف بالمعادلة (7) ببند (1.9).

هذه الملاحظات ترجح أنه يمكن استخدام الدالة Q لكتابة تمثيل تكاملي لدالة توافقية U تؤخذ مشتقاتها U_r في اتجاه العمود للدائرة $r=r_0$ قيماً مفروضة $G(\theta)$.

إذا كانت الدالة G متصلة قطعة بقطعة وكان U_0 ثابتاً اختيارياً فإن الدالة:

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\left(r_0\ ,r\ ,\phi-\theta\right)G(\phi)\,d\phi+U_0\ ;\left(r<r_0\right)\ ......\ (3)$$

تكون توافقية وذلك لأن الدالة المكاملة توافقية في المتغيرين $r\ ,\theta$. إذا كانت القيمة المتوسطة للدالة G على الدائرة تساوي الصفر،

$$\int_0^{2\pi} G(\phi)\,d\phi=0\quad ....\ (4)$$

إذاً طبقنا المعادلة (2)،

$$U_r(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r_0}{r}\left[P\left(r_0\ ,r\ ,\phi-\theta\right)-1\right]G(\phi)\,d\phi$$

$$=\frac{r_0}{r}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(r_0\ ,r\ ,\phi-\theta\right)G(\phi)\,d\phi$$

والآن فمن معادلتي (1) و(2) بند (2.9) نجد أن:

$$\lim_{r\to r_0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(r_0\ ,r\ ,\phi-\theta\right)G(\phi)\,d\phi=G(\theta)\ ;\ \left(r<r_0\right)$$

إذاً:

$$\lim_{r\to r_0} U_r(r,\theta)=G(\theta)\ ;\ \left(r<r_0\right)\quad ....\ (5)$$

لكل قيمة من قيم θ تكون G متصلة.

حيث إن Q تكون ثابتة عندما $r=0$ فإنه ينتج من معادلتي (3) و(4) أن U_0 هي قيمة U عند مركز الدائرة.

عندما تكون G متصلة قطعة بقطعة وتحقق المعادلة (4)، فإن الصيغة:

$$U(r,\theta)=-\frac{r_0}{r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Log}\left[r_0^2-2r_0r\cos(\phi-\theta)+r^2\right]G(\phi)\,d\phi+U_0\ ....\ (6)$$

حيث إن $r<r_0$، نحل مسألة نويمان للمنطقة الداخلية للدائرة $r=r_0$، حيث إن $G(\theta)$ هي المشتقة في اتجاه العمود للدالة التوافقية $U(r,\theta)$ على الحدود بمفهوم الشرط (5).

القيم $U(r,\theta)$ يمكن أن تمثل درجات حرارة مستقرة في قرص $r<r_0$ ، أو جهة معزولة.

في هذه الحالة ينص الشرط (5) على أن الفيض الحراري في القرص خلال حافته يتناسب مع $G(\theta)$. شرط (4) هو الشرط الفيزيائي الطبيعي المطلوب ليكون إجمالي المعدل الكلي لسريان الحرارة مساوياً للصفر وذلك لأن درجات الحرارة لا تتغير مع الزمن.

ومن الممكن كتابة صيغة توافقية مناظرة لدالة توافقية H في النطاق الخارجي للدائرة $r=r_0$ بدلالة Q على الصورة:

$$H(R,\psi)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\left(r_0, R, \phi-\psi\right) G(\phi)\, d\phi + H_0 \quad ...... (7)$$

حيث إن $R>0$ و H ثابت. كما وسبق سنفترض أن G دالة متصلة قطعة قطعة وبأن:

$$\int_0^{2\pi} G(\phi)\, d\phi = 0 \quad .... (8)$$

إذاً:

$$H_0=\lim_{R\to\infty} H(R,\psi)$$

و

$$\lim_{R\to r_0} H_R(R,\psi)=G(\psi) \quad ; \quad (R>r_0) \quad .... (9)$$

لكل ψ تكون عندها G متصلة.

التحقق من صحة الصيغة (7)، وكذلك دراسة حالات خاصة من الصيغة (3) التي يمكن تطبيقها للمناطق الدائرية سنتركه للقارئ كتمرين.

7.9 مسألة نويمان لنصف المستوي:

A Neumann Problem for a Half Plane

نفرض أن الدالة $G(x)$ دالة متصلة لجميع قيم x، فيما عدا لعدد محدود من القفزات المحدودة على الأكثر، وافرض كذلك أنها تحقق خاصية ترتيب:

$$\left|x^k G(x)\right| < M \quad ; \quad (-\infty < x < +\infty) \quad .... (1)$$

حيث $k>1$. لكل عدد حقيقي ثابت t تكون الدالة $\operatorname{Log}|z-t|$ توافقية في نصف المستوي $\operatorname{Im} z > 0$، وبالتالي فإن الدالة:

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{Log}|z-t|G(t)\,dt+U_0$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Log}\left[(t-x)^2+y^2\right]G(t)\,dt+U_0\ ;(y>0)\ \text{........}\ (2)$$

حيث $y>0$، U_0 ثابت حقيقي، تكون توافقية في نفس نصف المستوي.

لقد كتبنا صيغة (2) آخذين في الاعتبار صيغة شفارتز (1) ببند (4.9)، وذلك لأن صيغة (2) آخذين في الاعتبار صيغة شفارتز (1) ببند (4.9)، وذلك لأن صيغة (2) تعطى:

$$U_y(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\cdot G(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\quad;\quad(y>0)\ \text{..........}\ (3)$$

من معادلتي (1) و(2) ببند (4.9) ينتج أن:

$$\lim_{y\to0}U_y(x,y)=G(x)\ ;\ (y>0)\ \text{...........}\ (4)$$

عند كل نقطة x تكون عندها الدالة G متصلة.

من هذا نرى أن صيغة التكامل (2) تحل مسألة نويمان لنصف المستوي $y>0$، مع افتراض وجود الشرط الحدي (4). ولكن يجب ملاحظة أننا لم نضع شروطاً كافية على G لضمان أن تكن الدالة التوافقية U محدودة عندما يزداد $|z|$.

عندما تكون G دالة فردية، يمكن كتابة صيغة (2) على الصورة:

$$U(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Log}\frac{(t-x)^2+y^2}{(t+x)^2+y^2}G(t)\,dt\ ;(x>0\,,\,y>0)\ \text{....}\ (5)$$

وهذه تمثل دالة توافقية في الربع الأول: $x>0\,,\,y>0$، علاوة على أنها تحقق الشروط الحدية:

$$U(0,y)=0\ ;\ (y>0)\ \text{.........}\ (6)$$

$$\lim_{y\to0}U_y(x,y)=G(x)\ ;\ (x>0\,,y>0)\ \text{.....}\ (7)$$

يمكن وصف جميع قلوب صيغ التكامل للدوال التوافقي التي عرضناها في هذا الباب بدلالة دالة حقيقية وحيد للمتغيرات المركبة: $w=u+iv\ ,\ z=x+iy$.

$$K(z,w)=\mathrm{Log}|z-w| \quad ; \quad (z\neq w) \quad .... (8)$$

وهذه الدالة الأخيرة هي دالة جرين Green's Function للجهد اللوغاريتمي في المستوي المركب z. وهي دالة متماثلة، بمعنى أن $K(z,w)=K(w,z)$ صور القلوب التي استخدمت فيما سبق بدلالة K ومشتقاتها ستعطى في التمارين.

تمارين غير محلولة(9−2)

1- استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (1) بند (4.9):

$$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2}-\frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]F(t)\,dt$$

حيث $(x>0\,,\,y>0)$ لدالة محدودة U وتوافقية في الربع الأول من المستوي وتحقق الشروط الحدية:

$$U(0,y)=0\ ;\ (y>0)$$

$$\lim_{y\to 0}U(x,y)=F(x)\ ;\left(x>0\,.\,x\neq x_j\ ,\ y>0\right)$$

حيث F محدودة لجميع القيم x الموجبة والمتصلة لنفس القيم عدا عند لعدد محدود من القفزات عند عدد محدود على الأكثر من النقط $x=x_j:(j=1,2,3,\ldots,n)$.

2- استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (1) بند (4.9):

$$U(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2}+\frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]F(t)\,dt\ ;\ (x>0\,,\,y>0)$$

حيث $(x>0\,,\,y>0)$ لدالة محدودة U وتوافقية في الربع الأول من المستوي وتحقق الشروط الحدية:

$$U(0,y)=0\ ;\ (y>0)$$

$$\lim_{y\to 0}U(x,y)=F(x)\ ;\left(x>0\,.\,x\neq x_j\ ,\ y>0\right)$$

حيث F محدودة لجميع القيم x الموجبة والمتصلة لنفس القيم عدا عند لعدد محدود من القفزات عند عدد محدود على الأكثر من النقط $x=x_j:(j=1,2,3,\ldots,n)$.

3- أبدل محوري x,y كل مكان الآخر ببند (4.9) بحيث يكون:

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x.F(t)}{(t-y)^2+x^2}dt \qquad (x>0)$$

هو حل لمسألة ديريخلت لنصف المستوي $x > 0$. اكتب:

$$\lim_{x\to 0}U(x,y)=\begin{cases}1 \;;\; (x>0,-1<y<1)\\ 0 \;;\; (x>0,|y|>1)\end{cases}$$

ثم استنتج الصيغ التالية للدالة ومرافقتها التوافية V:

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{y+1}{x}-\arctan\frac{y-1}{x}\right)$$

$$V(x,y)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{Log}\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2}$$

حيث: $-\pi/2\le \arctan t\le \pi/2$. كذلك أثبت أن:

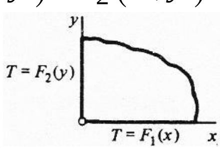
$$\pi\left[V(x,y)+i\,U(x,y)\right]=\operatorname{Log}(z+i)-\operatorname{Log}(z-i) \;;\; z=x+iy$$

4- افرض أن $T(x,y)$ تمثل درجات الحرارة المستقرة المقيدة في صفيحة $(x>0,y>0)$ ذات أوجه معزولة عندما:

$$\lim_{y\to 0}T(x,y)=F_1(x)\;,\;\lim_{x\to 0}T(x,y)=F_2(y)$$

حيث إن $(x>0,y>0)$ (شكل 9-6). وهنا F_2,F_1 دالتان محدودتان ومتصلتان فيما عدا عند عدد محدود على الأكثر من القفزات المحدودة. اكتب $z=x+iy$ وأثبت باستخدام العلاقة في التمرين (1) أن:

$$T(x,y)=T_1(x,y)+T_2(x,y)\;;\;(x>0,y>0)$$



الشكل: 9-6

حيث:

$$T_1(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{|t-z|^2}-\frac{1}{|t+z|^2}\right)F_1(t)\ ,$$

$$T_2(x,y)=\frac{x}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{|i\,t-z|^2}-\frac{1}{|i\,t+z|^2}\right)F_2(t)\ ,$$

5- استنتج صيغة (7) ببند (9-5) كحل لمسالة نويمان للمنطقة الخارجية لدائرة مستخدماً في ذلك النتائج السابق الحصول عليها في هذا البند.

6- استنتج الحالة الخاصة الآتية من صيغة (3) بند (9-5):

$$U(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left[Q\left(r_0\,,r\,,\phi-\theta\right)-Q\left(r_0,r\,,\phi+\theta\right)\right]G(\phi)\,d\phi$$

لدالة U وتوافقية في المنطقة النصف دائرية $r<r_0$, $0<\theta<\pi$: والتي تحقق الشروط الحدية:

$$U(r,0)=U(r,\pi)=0\ ;\ (r<r_0)$$

$$\lim_{r\to r_0}U_r(r,\theta)=G(\theta)\ \ ;(r<r_0,o<\theta<\pi)$$

لكل θ تكون عندها G متصلة، وبفرض أن:

$$\int_0^{\pi}G(\phi)\,d\phi=0$$

7- افرض أن الدالة $T(x,y)$ ترمز لدرجات الحرارة المستقرة في صفيحة $(x\ge 0\,,\,y\ge 0)$ وجهاها معزولان و$T=0$ على الحافة $x=0$. الفيض الحراري عبر الصفيحة على امتداد القطعة المستقيمة $0<x<1$ من الحافة $y=0$ يساوي مقداراً ثابتاً A، وبقية تلك الحافة معزولة. استخدم الصيغة (5) في البند (6.9) لإثبات أن الفيض الحراري إلى خارج الصفيحة على امتداد الحافة $x=0$ يساوي:

$$\frac{A}{\pi}\,\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{y^{2}}\right)$$

8- أثبت أن قلب بواسون يعطى بالمعادلة التالية:

$$P\left(\rho, r, \phi-\theta\right)=2\rho\frac{\partial K}{\partial \rho}-1$$

حيث $K=K\left(z, w\right)$ هي دالة جرين التالية:

$$K\left(z, w\right)=\mathrm{Log}\left|z-w\right|=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left[\rho^{2}-2\rho r\cdot\cos\left(\phi-\theta\right)+r^{2}\right];$$

$$w=\rho\cdot\exp\left(i\phi\right),\ z=r\cdot\exp\left(i\theta\right)$$

9- أثبت أن القلب المستخدم في تحويل تكامل شفارتز ببند (4.9) يمكن كتابته على الصورة:

$$\frac{y}{\left|u-z\right|^{2}}=\left.\frac{\partial K}{\partial y}\right|_{\upsilon=0}=-\left.\frac{\partial K}{\partial \upsilon}\right|_{\upsilon=0}$$

حيث K دالة جرين:

$$K\left(z, w\right)=\mathrm{Log}\left|z-w\right|=\frac{1}{2}\mathrm{Log}\left[\left(x-u\right)^{2}+\left(y-\upsilon\right)^{2}\right];$$

$$w=u+i\upsilon,\ z=x+iy$$

ومع اعتبار K دالة في المتغيرات الحقيقية الأربعة x, y, u, v.

فهرس الفصل العاشر

الفصل العاشر

10. إفاضة في نظرية الدوال

لقد قمنا في الأبواب السابقة باستبعاد الكثير من المباحث – في نظرية الدوال– التي لم تكن أساسية لاتصال تسلسل العرض في حينه، ومع هذا فإن عدداً لا بأس به من هذه المباحث لا بد وأن يحتل مكاناً في أي مقرر تمهيدي وذلك بسبب أهميتها العامة وسنقوم بإدراج هذه المباحث في هذا الباب.

(أ) **امتداد تحليلي**: Analytic Continuation

سنستعرض أولاً كيف أن سلوك دالة توافقية في نطاق ما يتعين تماماً بسلوكها في فئة أصغر محتواة في هذا النطاق، بعد ذلك سنطرق مسألة مد نطاق تعريف دالة تحليلية.

1.10 الشروط التي في ظلها يكون: $f(z)=0$

أثبتنا فيما سبق أن أصفار أي دالة تحليلية تكون معزولة إلا إذا انعدمت الدالة تطابقياً، أي أنه، عندما تكون دالة f تحليلية عند نقطة ما z_0 فإنه يوجد جوار $|z-z_0| \langle \varepsilon$ بحيث تكون $f(z)=0$ على هذا الجوار بأكمله أو أن لا يكون للدالة f أصفار في هذا الجوار فيما عدا ربما عند النقطة z_0 نفسها.

افرض الآن أن z_0 نقطة تراكم فئة لا نهائية وأن $f(z)=0$ عند كل نقطة Z تنتمي لهذه الفئة، إذن كل جوار للنقطة z_0 ، فلا بد وأن يوجد جوار ما للنقطة z_0 بحيث $f(z)=0$ عند كل نقطة Z ومن نقط الجوار، جميع المعاملات $f\left(z_0\right)$ و $f^{(n)}\left(z_0\right)/n!$ حيث $n=1,2,3,....$ في مفكوك تايلور للدالة $f(z)$ حول z_0 تكون بالتالي مساوية للصفر وبالتالي إذا كانت الدالة f تحليلية على داخلية دائرة ما $|z-z_0|= r_0$، فإنه ينتج أن $f(z)\equiv 0$ في القرص المفتوح $|z-z_0| \langle r_0$.

وعلى سبيل الخصوص، إذا كانت $f(z)=0$ عند كل نقطة z في نطاق ما يحوي z_0 أو عند كل نقطة من نقاط قوس يحوي z_0، وإذا كانت f تحليلية في قرص مفتوح $|z-z_0|\langle\ r_0$ فإن $f(z)$ تنعدم تطابقياً على هذا القرص المفتوح.

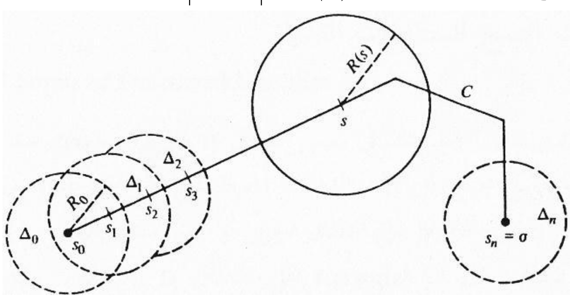
سنقدم الآن النتيجة الأساسية لهذا البند.

مبرهنة: 10-1-1 :إذا كانت f دالة تحليلية على نطاق D وكانت $f(z)=0$ عند كل نقطة Z من نقاط نطاق أو قوس يقع داخل D، فإن $f(z)=0$ عند كل نقطة من نقاط D.

سنبرهن هذه النظرية أولاً في حالة ما إذا كانت $f(z)=0$ عند كل نقطة z من نقاط نطاق D_0 يقع داخل D.

افرض أن s_0 أي نقطة من نقاط D_0 وأفرض أن σ أي نقطة تنتمي للنطاق D ولا تنتمي للنطاق D_0. حيث إن النطاق يكون دائماً مترابط، فإنه يوجد مسار مضلعي C، يتكون من عدد محدود من القطع المستقيمة المتصلة نهاية بنهاية، ويقع بأكمله في النطاق D ويصل النقطة s_0 بالنقطة σ (شكل 10-1).

الآن الدالة التحليلية f لها مفكوك على صورة متسلسلة تايلور حول كل نقطة S من نقاط C ونصف قطر دائرة التقارب يكون عدداً موجباً ما $R(S)$ ومع هذا سنتفق على أن نكتب $R(S)=1$ حينما يكون نصف القطر هذا أكبر من الواحد، أي أن $0\langle\ R(S)\leq 1$ بالطبع قد تمتد دائرة ما $|Z-S|=R(S)$ فيما وراء D.



الشكل: 10-1

من أجل برهان ما نبغيه سنكون في حاجة إلى حقيقة أن R دالة متصلة في S للوصول لتلك الحقيقة أفرض أن S أي نقطة من نقاط C وأفرض أن $S+\Delta S$ نقطة ما على C قريبة كافياً من S بحيث $|\Delta S| \langle R(S)$ من هذا ينتج أن S تكون تحليلية في القرص المفتوح:

$$|z-(s+\Delta s)| \langle R(S)-|\Delta s|$$

الذي مركزه النقطة $s+\Delta s$ (شكل 10-2). ولكن قد تكون f تحليلية في الحقيقة في قرص مفتوح أكبر مركزه عند $s+\Delta s$ إذن $R(S+\Delta s)\geq R(s)-|\Delta s|$ أو:

$$-[R(S+\Delta s)-R(s)]\leq|\Delta s| \quad (1)$$

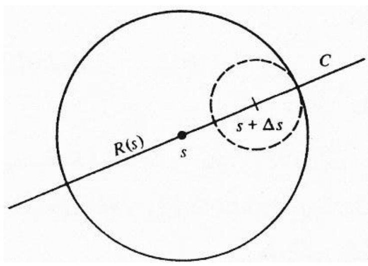
إذا كان $R(S+\Delta s)\leq R(s)$ فإنه يمكن كتابة المتباينة (1) على الصورة .

$$[R(S+\Delta s)-R(s)]\leq|\Delta s| \quad (2)$$

من ناحية أخرى، افرض أن $R(S+\Delta s)\rangle R(s)$ لاحظ أنه إذا كانت z نقطة واقعة في القرص المفتوح.

$$|z-s| \langle R(S+\Delta s)-|\Delta s| \quad (3)$$

فإن: $|z-(s+\Delta s)| \leq|z-s|+|\Delta s| \langle R(s+\Delta s)$



الشكل: 10-2

الدالة f تكون إذن تحليلية عند z وذلك لأن هذه النقطة تقع داخل دائرة التقارب حول $S+\Delta s$ وبالتالي فإن القرص المفتوح (3) يكون محتوى في القرص المفتوح $|R(S+\Delta s)-|\Delta s|\leq R(s)|$ ومرة أخرى تتحقق المتباينة (2).

باستخدام المتباينة (2) نرى أن $|R(S+\Delta s)-R(s)|$ يكون أقل من أي عدد موجب ε عندما يكون $|\Delta s|$ أقل من كل من ε و$|R(s)|$ أي أن:

$$\lim_{\Delta s \to 0} R(S+\Delta s)=R(s)$$

وبهذا يكون قد اكتمل إثبات أن R متصلة عند S

عند إعطاء تمثيل بارامتري $a\leq t\leq b, z=z(t)$ للمنحني c فإنه يمكن اعتبار R دالة ذات قيم حقيقية $R[z(t)]$ لمتغير حقيقي وأنها تكون متصلة وموجبة على فترة مغلقة محدودة. من هذا ينتج أن الدالة R يكون لها إذن قيمة صغرى موجبة R_0. إذن الدالة f تكون تحليلية في القرص المفتوح $|z-s_0|<R_0$، الذي سنرمز له بالرمز Δ_0. حيث أن $f(z)=0$ عند كل نقطة في النطاق D_0 الذي يحوي s_0، فإنه ينتج أن $f(z)=0$ عند كل نقطة z في القرص المفتوح Δ_0. وهذا ينتج من الملاحظات التي ذكرناها سابقة لمنطوق المبرهنة.

افرض أن $s_0, s_1, s_2, ..., s_n=\sigma$ متتالية من نقط C بحيث:

$$\frac{1}{2}R_0\leq|s_j-s_{j-1}|<R_0 \qquad (j=1,2,....,n)$$

كما هو موضح بشكل (10-1)، يوجد حول كل نقطة s_j قرص مفتوح Δ_j نصف قطره R_0 تكون f تحليلية عليه. حيث إن المركز s_1 للقرص المفتوح Δ_1 يقع في النطاق Δ_0 الذي تكون $f(z)$ مساوية للصفر عليه، فإنه ينتج أن $f(z)=0$ على Δ_1. بالمثل، يقع مركز القرص المفتوح Δ_2 في النطاق Δ_1، وبالتالي فإن $f(z)=0$ على Δ_2. بالاستمرار على هذا المنوال، فإننا سنصل حتماً إلى Δ_n ونجد أن $f(\sigma)=0$. بهذا يكتمل برهان النظرية في الحالة التي يكون فيها $f(z)=0$ عند كل نقطة من نقاط نطاق D_0 محتوى في داخلية النطاق D.

افرض الآن أن $f(z)=0$ على امتداد قوس في D. إذن يوجد قرص مفتوح، أو نطاق، محتوى في داخلية D حول أي نقطة على القوس، وبمراعاة الملاحظات التي ذكرناها سابقة لمنطوق النظرية. نجد بسهولة أن $f(z)=0$ عند كل نقطة من نقاط D.

2.10 ثبات الصيغ للمتطابقات الدالية

Permanence Of Forms Of Functional Identities

افرض أن g,f دالتان تحليليتان في نفس النطاق D وأن $f(z)=g(z)$ عند كل نقطة z من نقاط نطاق أو قوس محتوى في D. الدالة h المعرفة على أنها $h(z)=f(z)-g(z)$ تكون أيضاً تحليلية في D، كما أن $h(z)=0$ على النطاق الجزئي أو على امتداد القوس. إذن $h(z)=0$ على النطاق D بأكمله، أي أن $f(z)=g(z)$ على النطاق D بأكمله. بهذا نكون قد أثبتنا النتيجة التالية:

مبرهنة:$10-2-1$: الدالة التي تكون تحليلية في نطاق D تعين بصورة وحيدة على D بوساطة قيمها على نطاق، أو على امتداد قوس، محتوى في داخلية D.

كمثال توضيحي، الدالة e^z هي الدالة الوحيدة الشاملة التي يمكن أن تأخذ القيم e^x على امتداد قطعة من المحور الحقيقي. علاوة على ذلك، فحيث إن e^{-x} تكون شاملة وأن $e^x e^{-x}=1$ طالما كان x عدد حقيقي، فإن الدالة: $e^x e^{-x}-1$ تكون شاملة وتأخذ قيماً صفرية على امتداد المحور الحقيقي بأكمله. وبالتالي فإن:

$$e^x e^{-x}-1=0$$

عند جميع النقط، وتتحقق المتطابقة $e^{-x}=1/e^x$ لكل عدد مركب z.

ثبات الصيغ هذا لمتطابقات أخرى بين الدوال، عند انتقالنا من متغير حقيقي إلى متغير مركب، يمكن أن يبرهن بإتباع نفس الأسلوب. سنقصر اهتمامنا في النظرية التالية على الفصل الهام من المتطابقات التي تحوي فقط كثيرات حدود في الدوال.

مبرهنة:$10-2-2$: افرض أن $P(w_1,w_2,....,w_n)$ كثيرة حدود في n من المتغيرات w_j وافرض أن $f_j(j=1,2,....,n)$ دوال تحليلية للمتغير z في نطاق D يحوي فترة ما $a<x<b$ من محور السينات. إذا كانت الدوال f_j تحقق المتطابقة:

$$P[f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)]=0 \tag{1}$$

على تلك الفترة، فإن:

$$P[f_1(z), f_2(z),..., f_n(z)]=0 \tag{2}$$

على النطاق D بأكمله.

الطرف الأيسر من معادلة (2) يمثل دالة تحليلية للمتغير z في النطاق المعطى، وهو يساوي صفر على امتداد قوس في هذا النطاق، وذلك طبقاً للمتطابقة (1). إذن المتطابقة (2) تتحقق على النطاق بأكمله.

لتوضيح هذه النظرية، دعنا نعتبر كثرة الحدود $P(w_1,w_2)=w_1^2+w_2^2-1$ والدالتين الشاملتين $f_1(z)=\sin z$ و $f_2(z)=\cos z$ على المحور الحقيقي:

$$P[f_1(x),f_2(x)]=\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$$

إذن، $P[f_1(z),f_2(z)]=\sin^2 z+\cos^2 z-1=0$ أو $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ على المستوى المركب(العقدي) z بأكمله.

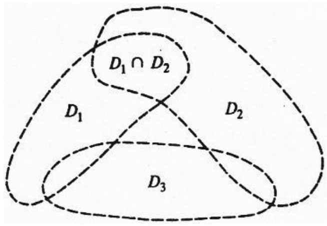
3.10 وجدانية الامتداد التحليلي Uniqueness Of Analytic Continuation

تقاطع Intersection نطاقين D_2,D_1 هو النطاق $D_1\cap D_2$ المكون من جميع النقط المشتركة بين كل من D_2,D_1. إذا وجدت نقط مشتركة بين النطاقين. فإن اتحادهما Union $D_1\cup D_2$ يتكون من جميع النقط التي تنتمي إلى D_1 أو D_2، ويكون $D_1\cup D_2$ نطاقاً أيضاً.

إذا كان لدينا نطاقين D_1 و D_2 بينهما نقط مشتركة (شكل 10-3) ودالة f_1 تحليلية في D_1، فإنه يوجد دالة f_2 تحليلية في D_2 بحيث $f_2(z)=f_1(z)$ لكل نقطة من نقط التقاطع $D_1\cap D_2$. إذا تحقق ذلك فإننا نسمي f_2 الامتداد التحليلي The Analytic Continuation للدالة f_1 إلى النطاق D_2.

إذا ما تحقق وجود هذا الامتداد التحليلي f_2، فإنه يكون وحيداً، وذلك حسب نظرية (1) من البند السابق، وذلك لعدم إمكانية تحقق وجود أكثر من دالة تحليلية في D_2 تأخذ أيضاً القيمة $f_1(z)$ عند كل نقطة z تنتمي للنطاق $D_1\cap D_2$ وتقع في داخلية D_2. بالرغم من ذلك، إذا كان هناك امتداد تحليل f_3 للدالة f_2 من النطاق D_2 إلى نطاق D_3 يتقاطع مع D_1 كما هو موضح بشكل (10-3)، فليس من الضروري أن يكون $f_3(z)=f_1(z)$ صحيحاً لكل z تنتمي للنطاق $D_1\cap D_3$ في البند التالي سنوضح حقيقة

أن هذه المتسلسلة من الامتدادات التحليلية لدالة معطاة من نطاق D_1 قد تؤدي إلى الحصول على دالة مختلفة معرفة على D_1.



الشكل: 10–3

إذا كان f_2 الامتداد التحليلي للدالة f_1 من نطاق D_1 إلى نطاق D_2، فإن الدالة المعرفة كالتالي:

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z) & \text{و} \quad z \in \mathrm{D}_1 \\ f_2(z) & \text{و} \quad z \in \mathrm{D}_2 \end{cases}$$

تكون تحليلية في نطاق الاتحاد $D_1 \cup D_2$. الدالة F هي الامتداد التحليلي إلى $D_1 \cup D_2$ لأي من الدالتين f_1 أو f_2، وفي هذه الحالة يقال أن f_1 و f_2 عناصر Elements للدالة F.

4.10 أمثلة:

دعنا نعتبر أولاً الدالة f_1 المعرفة بالمعادلة:

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \tag{1}$$

متسلسلة القوى المعطاة هنا تكون تقاربية، إذا وفقط إذا، كان $|z|<1$. هذه المتسلسلة هي مفكوك ماكلورين للدالة $1/(1-z)$. إذن:

$$f_1(z)=\frac{1}{1-z}$$

طالما كان $|z|<1$، الدالة f_1 ليست معرفة عندما $|z|\geq 1$.

الآن، الدالة:

$$f_2(z)=\frac{1}{1-z} \qquad (z \neq 1) \tag{2}$$

معرفة وتحليلية عند جميع النقط فيما عدا عند النقطة $z=1$ حيث إن $f_2(z)=f_1(z)$ داخل الدائرة $|z|=1$، فإن الدالة f_2 تكون الامتداد التحليلي للدالة f_1 إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطة $z=1$. وهي الامتداد التحليلي الوحيد المحتمل للدالة f_1 إلى هذا النطاق، وذلك حسب النتائج التي توصلنا إليها في البند السابق. في هذا المثال f_1 تكون أيضاً عنصراً للدالة f_2 .

من المفيد أن نلاحظ أنه إذا بدأنا بمعلومية أن متسلسلة القوى:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

تقاربية وأنها تمثل دالة تحليلية للمتغير z عندما $|z|<1$ وأن مجموعها يساوي $1/(1-x)$ عندما $z=x$ فإنه يمكننا استنتاج أن مجموع هذه المتسلسلة هو $1/(1-z)$ طالما كان $|z|<1$. هذا ينتج من حقيقة أن الدالة $1/(1-z)$ هي الدالة التحليلية على داخلية الدائرة $|z|=1$ التي تأخذ القيم $1/(1-x)$ على امتداد القطعة المستقيمة من محور السينات الواقعة داخل الدائرة.

كمثال توضيحي آخر للامتداد التحليلي، اعتبر الدالة:

$$g_1(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}dt \tag{3}$$

إجراء التكامل مباشرة يكشف النقاب عن أن التكامل (3) يتحقق فقط عندما $\operatorname{Re} z>0$ وأن:

$$g_1(z)=\frac{1}{z} \tag{4}$$

نطاق التعريف $\operatorname{Re} z>0$ رمز له بالرمز D_1 في الشكل (4–10)، الدالة g_1 تحليلية هناك.

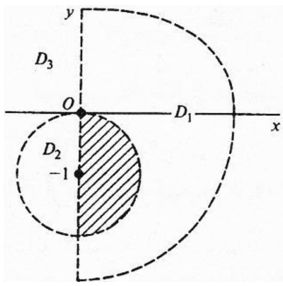
افرض أن g_2 معرفة بدلالة متسلسلة هندسية بالمعادلة

$$g_2(z)=i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n \quad , \qquad |z+i|<1 \tag{5}$$

داخل دائرة تقارب هذه المتسلسلة (أي دائرة الوحدة التي مركزها النقطة $z = -1$، تكون المتسلسلة تقاربية. إذن:

$$g_2(z) = i\frac{1}{1-(z+1)/i} = \frac{1}{z} \tag{6}$$

عندما تنتمي x للنطاق $|z+i| < 1$، الذي رمزنا له بالرمز D_2. من الواضح أن $g_2(z) = g_1(z)$ لكل z تنتمي للتقاطع $D_1 \cap D_2$، إن g_2 هي الامتداد التحليلي للدالة g_1 إلى النطاق D_2.



الشكل: 10–4

الدالة $G(z) = 1/z$، حيث $z \neq 0$، هي الامتداد التحليلي لكل من g_1, g_2 إلى النطاق D_3 المكون من جميع نقاط المستوى المركب z عدا نقطة الأصل. وبالتالي تكون الدالتين g_1, g_2 عناصر للدالة G.

أخيراً، اعتبر الفرع التالي للدالة $z^{1/2}$:

$$h_1(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2}, \; r > 0 \;\;,\;\; 0 < \theta < \pi$$

الامتداد التحليلي h_2 عبر الجزء السالب من المحور الحقيقي إلى النصف السفلي للمستوى هو:

$$h_2(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2}, \; r > 0 \;\;,\;\; \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

الامتداد التحليلي h_3 للدالة عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقي إلى الربع الأول من المستوى هو:

$$h_3(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2}, \; r > 0 \;\;,\;\; \pi < \theta < \frac{5\pi}{2}$$

لاحظ أن $h_3(z)\neq h_1(z)$ في الربع الأول من المستوي، وفي الحقيقة فإن $h_3(z)=-h_1(z)$ هناك.

5.10 مبدأ الانعكاس The Principle Of Reflection

في الفصل الثالث وجدنا أن بعض الدوال البسيطة $f(z)$ لها الخاصية $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$، والبعض الآخر منها ليس له هذه الخاصية. كأمثلة للدوال التي لها هذه الخاصية، يمكننا أن نذكر الدوال:

$$z \quad , \quad z^2+1 \quad , \quad e^z \quad , \quad \sin z;$$

وذلك لأنه عند إحلال z بمرافقها المركب، نجد أن قيمة كل من هذه الدوال تتغير إلى المرافق المركب للقيمة الأصلية. من ناحية أخرى، الدوال:

$$iz \quad , \quad z^2+i \quad , \quad e^{iz} \quad , (1+i)\sin z$$

لا تحقق خاصية أن صورة z بالانعكاس بالنسبة للمحور الحقيقي تناظر صورة $f(z)$ بالانعكاس بالنسبة للمحور الحقيقي.

النظرية التالية، والتي تعرف باسم مبدأ الانعكاس Reflection Principle، تفسر هذه المشاهدات.

مبرهنة:10-5-1 : نفرض أن f دالة تحليلية في نطاق ما D يحوي قطعة من محور السينات وأنها متماثلة بالنسبة لمحور السينات. إذا كانت $f(x)$ حقيقية لكل نقطة x من نقط تلك القطعة، فإن:

$$f(\bar{z})=\overline{f(z)} \qquad (1)$$

لكل نقطة z تنتمي للنطاق D. وبالعكس، إذا تحقق الشرط (1) فإن $f(x)$ تكون حقيقية.

المعادلة (1) تمثل نفس الشرط على f المعطى بالمعادلة:

$$\overline{f(\bar{z})}=f(z) \qquad (2)$$

حيث $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و:

$$\overline{f(\overline{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y) \qquad (3)$$

عندما يتحقق الشرط (2) عند نقطة على المحور الحقيقي، فإن:

$$f(x)=u(x,0)+iv(x,0)=u(x,0)-iv(x,0);$$

وبالتالي فإن $v(x,0)=0$، وتكون $f(x)$ حقيقية. وبالتالي فإن التقرير العكسي في المبرهنة يكون صحيحاً.

لإثبات صحة التقرير المباشر في المبرهنة، سنبين أولاً أن الدالة $\overline{f(\overline{z})}$ تحليلية على النطاق D. من أجل ذلك سنكتب:

$$F(z)=\overline{f(\overline{z})}=U(x,y)+iV(x,y);$$

إذن، طبقاً لمعادلة (3)،

$$U(x,y)=u(r,t)\ ,\ V(x,y)=-v(r,t) \qquad (4)$$

حيث $r=x$ و$t=-y$ حيث إن $f(r+it)$ دالة تحليلية في $r+it$، فإنه ينتج أن الدالتين: $v(r,t)$ و$u(r,t)$، وكذلك مشتقاتهما الجزئية، تكون متصلة على النطاق D، كما أن معادلتي كوشي–ريمان:

$$u_r=v_t \quad , \qquad u_t=-v_r$$

تكون محققة على نفس النطاق، الآن، من معادلتي (4)، نجد أن:

$$U_x=u_r \qquad , \qquad V_y=-v_t\frac{dt}{dy}=v_t$$

وبالتالي فإن $U_x=U_y$ بالمثل يمكننا إثبات أن:

$$U_y=-V_x$$

هذه المشتقات الجزئية للدالتين V,U جميعها متصلة، وبالتالي تكون الدالة F تحليلية على النطاق D.

حيث إن $f(x)$ حقيقية، فإن $v(x,0)=0$ إذن:

$$F(x)=U(x,0)+iV(x,0)=u(x,0);$$

أي أن $F(z)=f(z)$ عندما تقع النقطة z على القطعة من محور السينات المحتواة في النطاق D. من نظرية (1) ببند (2.10) ينتج إذن أن $F(z)=f(z)$ عند كل نقطة z

من نقاط D حيث إن كل من الدالتين تكون تحليلية هناك. وبالتالي فإن الشرط (2) يكون قد تحقق، وبهذا يكتمل برهان المبرهنة.

تـمـارين غير محلولة(1-10)

1- بمعلومية أن دالتي الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي، والدالة الأسية، ودالتي الجيب وجيب التمام جميعها دوال شاملة، استخدم نظرية (2) ببند (2.10) للحصول على كل من المتطابقات التالية لجميع الأعداد المركبة z من المتطابقات المناظرة عندما تكون z حقيقية.

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z \quad ; \quad \sinh z + \cosh z = e^z$$

$$\sin(\pi/2 - z) = \cos z \quad ; \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

2- أثبت أن الدالة:

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2+1} \quad ; \quad z \neq \pm i$$

هي الامتداد التحليلي للدالة:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \quad ; \quad |z|<1$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوي المركب z عدا النقطتين $z=\pm i$.

3- أثبت أن الدالة $1/z^2$ تمثل الامتداد التحليلي للدالة المعرفة بالمتسلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z+1)^n \quad ; \quad |z+1|<1$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوي المركب z عدا النقطة $z=0$.

4- اذكر لماذا تكون الدالة:

$$h_4(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \quad r>0 \ , \ -\pi<\theta<\pi$$

الامتداد التحليلي للدالة (انظر بند 4.10)

$$h_1(z) = \sqrt{r}\exp\frac{i\theta}{2} \quad , \quad r>0 \ , \ 0<\theta<\pi$$

عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقي إلى النصف السفلي للمستوي.

5- أوجد الامتداد التحليلي للدالة $\log z$ من النصف العلوي $\operatorname{Im} z > 0$ للمستوي إلى النصف السفلي للمستوي عبر الجزء السالب من المحور الحقيقي. لاحظ أن هذا الامتداد التحليلي يختلف عن $\log z$ في نصف المستوي السفلي.

الإجابة : $Log\, r + i\theta$ حيث $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$.

6- أوجد الامتداد التحليلي للدالة: $\operatorname{Re} z > 0$ $\quad f(z) = \int_0^\infty te^{-xt}dt$.

7- أثبت أن الدالة $1/(z^2+1)$ هي الامتداد التحليلي للدالة:

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-xt}\sin t\, dt \qquad , \qquad \operatorname{Re} z > 0$$

إلى النطاق المكون من جميع نقط المستوى المركب z عدا النقطتين $z = \pm i$.

8- أثبت أنه إذا أحللنا الشرط أن $f(x)$ تكون حقيقية في المبرهنة ببند (5.10) بالشرط أن $f(x)$ تكون تخيلية فإن النتيجة تتغير إلى $f(\bar{z}) = -\overline{f(z)}$.

9- افرض أن S ترمز لفئة من نقط نطاق D بحيث يكون للفئة S نقطة تراكم في D. عمم نظرية (1) ببند (2.10) بإثبات أن أي دالة تحليلية في D تعين بصورة وحيدة بقيمها على الفئة S.

(ب) النقاط الشاذة والأصفار Singular Points and Zeros

سنقوم الآن بدراسة إضافية لسلوك الدوال بالقرب من نقطها الشاذة.

6.10 الأقطاب والأصفار Poles and Zeros

لقد أوضحنا سابقاً أنه إذا كان z_0 قطب من أي درجة لدالة f، فإن:

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty; \qquad (1)$$

أي أنه لكل عدد موجب ε يوجد عدد موجب δ بحيث :

$$|f(z)|>\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{طالما كان} \quad 0<|z-z_0|<\delta \qquad (2)$$

كنتيجة لهذا، يوجد دائماً جوار ما للقطب لا يحوي أي أصفار للدالة f.

حيث إن الأقطاب هي نقط شاذة معزولة، فينتج أنه إذا كان z_0 قطب لدالة f، فإنه يوجد جوار للنقطة z_0 لا يحوي أي أصفار للدالة f أو أي نقط شاذة للدالة f فيما عدا النقطة z_0 نفسها.

وإذا كان z_0 صفراً رتبته m لدالة $f(z)$ ، فإن z_0 يكون قطباً من درجة m للدالة الكسرية $1/f(z)$. عكس هذه النتيجة يمكن أن يبرهن بسهولة. وذلك لأنه إذا كان z_0 قطب من درجة m لدالة $g(z)$ ، فإن الدالة $(z-z_0)^m g(z)$ يكون لها نقطة شاذة مزالة(قابلة للإزالة) عند z_0. القيمة المعينة للدالة الأخيرة عند z_0 بحيث تكون الدالة الناتجة تحليلية في قرص مفتوح $|z-z_0|<r_0$ حول z_0 لا بد وأن تكون مختلفة عن الصفر إذا كان ϕ يرمز لتلك الدالة التحليلية، فإن:

$$\phi(z)=(z-z_0)^m g(z) \quad \text{طالما كان} \quad 0<|z-z_0|<r_0 \qquad (3)$$

$$\phi(z_0)\neq 0 \quad \text{و}$$

الآن، الدالة $1/\phi(z)$ تحليلية عند z_0 ، ولعدد موجب ما r_1 تمثل بمتسلسلة تايلور:

$$\frac{1}{\phi(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \qquad (|z-z_0|<r_1)$$

حيث $r_1\le r_0$ و $a_0=1/\phi(z_0)\neq 0$ من معادلة (3) ينتج أن:

$$\frac{1}{g(z)} = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad (|z-z_0|<r_1) \tag{4}$$

إذن، إذا كان z_0 قطب من درجة m لدالة $g(z)$، فإن z_0 تكون صفراً رتبته m للدالة $1/g(z)$.

كتباين للشرط (2)، افرض أن $f(z)$ دالة محدودة وتحليلية في نطاق $0<|z-z_0|<\delta$ إذن تتحقق المبرهنة التالية التي وضعها ريمان Riemann.

مبرهنة:10-6-1 : إذا كانت f دالة محدودة وتحليلية على نطاق $0<|z-z_0|<\delta$ فإنه إما أن تكون f تحليلية عند z_0 أو أن تكون z_0 نقطة شاذة مزالة(قابلة للإزالة) للدالة f.

لإثبات ذلك، لاحظ أن $f(z)$ تمثل بمتسلسلة لوران في النطاق المعطى حول z_0. إذا كان C يرمز لدائرة $|z-z_0|=r$، حيث $r<\delta$، فإن المعاملات b_n للحدود $1/(z-z_0)^n$ في تلك المتسلسلة هي:

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{-n+1}} = \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0+re^{i\theta}\right)e^{in\theta}d\theta,$$

حيث $n=1,2,......$ حيث إن f محدودة، فإنه يوجد عدد حقيقي موجب M بحيث:

$$|f(z)|<M \qquad (0<|z-z_0|<\delta);$$

إذن:

$$|b_n|<Mr^n$$

ولكن المعاملات تكون ثوابت، وحيث إن r يمكن اختيارها صغيرة بدرجة كافية، فإن $b_n=0(n=1,2,...)$ وبالتالي تؤول متسلسلة لوران للدالة $f(z)$ إلى متسلسلة قوى:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad (0<|z-z_0|<\delta)$$

إذا عرفنا $f(z_0)$ على أنه العدد a_0، فإنه ينتج أن f تكون تحليلية عند z_0، وهذا يكمل برهان المبرهنة.

7.10 النقط الشاذة الأساسية Essential Singular Points

سلوك دالة ما بالقرب من نقطة شاذة أساسية لها يكون غير منتظم بدرجة كبيرة. وقد سبق الإشارة إلى هذا عند ذكرنا لمبرهنة بيكار التي تنص على: **في أي جوار لنقطة شاذة أساسية لدالة ما تأخذ الدالة كل قيمة محدودة، مع استثناء وحيد محتمل، عدداً لا نهائياً من المرات**. وقد أوضحنا أيضاً مبرهنة بيكار بتبيان أن الدالة $\exp(1/z)$، حيث نقطة الأصل نقطة شاذة أساسية لها، تأخذ القيمة -1 عدداً لا نهائياً من المرات في أي جوار لتلك النقطة الشاذة. ولن نقوم بإثبات مبرهنة بيكار، ولكننا سنقوم بإثبات مبرهنة ذات صلة بمبرهنة بيكار وقد وضعها العالم فايرشتراس Weierstrass.

هذه المبرهنة توضح أن قيمة دالة ما تكون قريبة اختيارياً من أي عدد c معين سلفاً عند نقط قريبة اختيارياً من نقطة شاذة أساسية لتلك الدالة.

مبرهنة:$10-7-1$: بفرض أن z_0 نقطة شاذة أساسية لدالة f وأن c أي عدد مركب معطى. إذن لكل عدد موجب ε، مهما بلغ صغره، تتحقق المتباينة:

$$|f(z)-c|<\varepsilon \qquad (1)$$

عند نقطة ما z مختلفة عن z_0 في كل جوار للنقطة z_0.

لإثبات المبرهنة، نفرض أن الشرط (1) ليس متحققاً عند أي نقطة من نقاط جوار $|z-z_0|<\delta$ حيث δ صغيراً صغراً كافياً لأن تكون f تحليلية في النطاق $0<|z-z_0|<\delta$ إذن $|f(z)-c|\geq\varepsilon$ لجميع نقط هذا النطاق، وتكون الدالة:

$$g(z)=\frac{1}{f(z)-c} \qquad (0<|z-z_0|<\delta) \qquad (2)$$

تحليلية ومحدودة هناك. طبقاً لنظرية ريمان (بند 6.10) تكون z_0 نقطة شاذة مزالة للدالة g. أفرض أننا عرفنا $g(z_0)$ بحيث تكون g تحليلية عند z_0. حيث إن f لا يمكن أن تكون دالة ثابتة، فإن g لا يمكن أن تكون كذلك أيضاً، وبالتالي، إذا ما أخذنا في الاعتبار مفكوك تايلور للدالة g عند z_0، إما أن يكون $g(z_0)\neq 0$ أو أن يكون للدالة g صفر ذي رتبة نهائية عند z_0. وبالتالي، فإن الدالة:

$$\frac{1}{g(z)}=f(z)-c\,,$$

إما أن تكون تحليلية عند z_0 أو أن يكون لها قطب هناك. ولكن هذا يناقض الفرض أن z_0 نقطة شاذة أساسية للدالة f. إذن الشرط (1) لا بد وأن يكون متحققاً عند نقطة ما من نقط الجوار المعطى.

8.10 عدد الأصفار والأقطاب The Number Of Zeros And Poles

يمكن تعميم خواص المشتقة اللوغاريتمية التي حصلنا عليها بتمريني (13) و(14).

افرض أن دالة ما f تكون تحليلية عند نقط منحني مغلق بسيط C ونقاط داخليته، فيما عدا ربما عند عدد محدود من الأقطاب التي تنتمي لداخلية C. كذلك، افرض أن f ليس لها أي أصفار على C ولها على الأكثر عدد محدود من الأصفار التي تنتمي لداخلية C إذن، إذا كان C موجهاً في الاتجاه الموجب،

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P \tag{1}$$

حيث N العدد الكلي لأصفار الدالة f التي تنتمي لداخلية P, C العدد الكلي لأقطاب f التي تنتمي لداخلية C. ويجب التنويه إلى أن الصفر الذي رتبته m_0 يحصى m_0 من المرات، والقطب الذي درجته m_p يحصى m_p من المرات.

لإثبات التقرير (1)، سنثبت أن العدد الصحيح $N - P$ يساوي مجموع بواقي الدالة $f'(z)/f(z)$ عند نقطها الشاذة داخل المنحني المغلق البسيط C. هذه النقط الشاذة هي بالطبع أصفار وأقطاب الدالة f بداخلية C.

افرض أن z_0 صفر رتبته m_0 للدالة f. في جوار ما للنقطة z_0 يمكننا أن نكتب:

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z) \tag{2}$$

حيث $g(z)$ دالة تحليلية في ذاك الجوار و $g(z_0) \neq 0$ إذن:

$$f'(z) = m_0 (z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$

أو:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

حيث إن $g'(z)/g(z)$ تحليلية عند z_0، فإن الدالة $f'(z)/f(z)$ يكون لها قطب بسيط عند z_0 وباقي هذا القطب يساوي m_0. بذلك يكون مجموع بواقي الدالة $f'(z)/f(z)$ عند جميع أصفار f بداخلية C مساوياً للعدد الصحيح N.

إذا كان z_p قطب من درجة m_p للدالة f، فإن الدالة:

$$h(z)=(z-z_p)^{m_p}f(z) \tag{3}$$

يمكن أن تعرف عند z_p بحيث تكون h تحليلية هناك، وبالإضافة إلى ذلك، تكون $h(z_p)\neq 0$ إذن في جوار ما للنقطة z_p، فيما عدا عند النقطة $z=z_p$ نفسها، يكون:

$$f(z)=(z-z_p)^{-m_p}h(z) \tag{4}$$

و

$$f'(z)=-m_p(z-z_p)^{-m_p-1}h(z)+(z-z_p)^{-m}h'(z)$$

إذن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{m_p}{z-z_p}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

والتي نرى منها أن $f'(z)/f(z)$ لها قطب بسيط عند z_p باقية يساوي $-m_p$ إذن مجموع بواقي الدالة $f'(z)/f(z)$ عند جميع أقطاب f بداخلية C يساوي العدد الصحيح $-P$ بذلك نكون قد أثبتنا صحة الصيغة (1).

صورة ما لمبرهنة بولزانور–فايرشتراس Bolzano – Weirstrass المألوفة يمكن صياغتها كالتالي **كل مجموعة لا نهائية تنتمي كل نقطة من نقاطها لمنطقة مغلقة ومحدودة يكون لها نقطة تراكم واحدة على الأقل في تلك المنطقة.** من الممكن إثبات هذه المبرهنة باختيار متتالية لا نهائية $z_1, z_2, \ldots.$ من نقط المجموعة وتطبيق عملية المربعات المتداخلة على تلك المتتالية.

طبقاً لتلك المبرهنة، فإنه يمكن استبعاد الشرط أن عدد الأصفار والأقطاب التي تنتمي لداخلية C يكون محدوداً، وهو الشرط الذي استخدم في إثبات الصيغة (1).

لأن عدد الأصفار والأقطاب داخل المنحني المغلق البسيط C لا بد وأن يكون محدوداً من أجل أن تكون الدالة f تحليلية عند جميع نقط C ونقط داخليته، فيما عدا ربما للأقطاب

داخل C، وذلك حيث أن الأصفار والأقطاب تكون معزولة. وسنترك كتابة الإثبات كتمرين للقارئ.

9.10 مبدأ السعة The Argument Principle

افرض أن C منحني مغلق بسيط في المستوى المركب z وموجهاً في الاتجاه الموجب وأن f دالة تحليلية عند جميع نقاط C ونقاط داخليته، فيما عدا ربما الأقطاب تنتمي لداخلية C. كذلك افرض أن f ليس لها أي أصفار على C. الصورة Γ للمنحنى C بالتحولية $w = f(z)$ تكون منحني مغلق في المستوى المركب w (شكل 10-5)

عندما تتحرك نقطة z على المنحنى C في الاتجاه الموجب، فإن صورتها w تتحرك على Γ في اتجاه خاص يحدد توجيه المنحنى Γ.

حيث إن f ليس لها أصفار على C، فبالتالي لا يمر المنحني Γ بنقطة الأصل في المستوى المركب w. افرض أن w_0 نقطة ثابتة على Γ وافرض أن ϕ_0 قيمة ما من قيم سعة w_0 ثم افرض أن سعة w تتغير تغيراً متصلاً ، بادئة بالقيمة ϕ_0، عندما تبدأ النقطة w من عند w_0 وتتحرك على Γ مرة واحدة في الاتجاه المحدد له بالراسم $w = f(z)$، عندما تعود w مرة أخرى لنقطة البداية w_0، تأخذ سعة w قيمة معينة من قيم سعة w_0، وسنرمز لهذه القيمة بالرمز ϕ_1. إذن ، التغير في سعة w عندما تقطع w المنحني Γ مرة واحدة في اتجاهه الدوراني يساوي $\phi_1 - \phi_0$ لاحظ أن هذا التغير لا يتوقف على النقطة الخاصة w_0 المختارة لتعيين التغير في السعة.

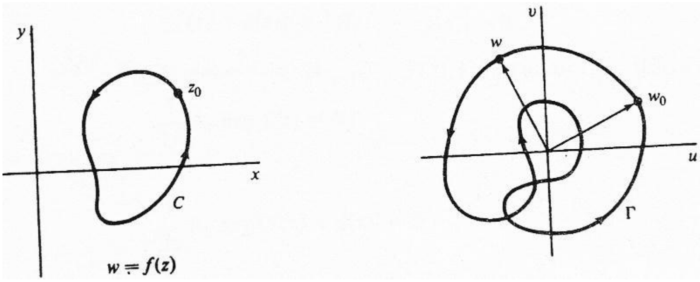
العدد $\phi_1 - \phi_0$ هو أيضاً التغير في سعة $f(z)$ عندما تقطع z المنحنى C مرة واحدة في الاتجاه الموجب، ونكتب:

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0 \qquad (1)$$

قيمة المقدار $\Delta_C \arg f(z)$ مضاعف للعدد 2π، والعدد الصحيح:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

يمثل عدد الدورات الكاملة التي تقطعها النقطة w حول نقطة الأصل في المستوي المركب w عندما نقطع النقطة z المنحنى C مرة واحدة في الاتجاه الموجب. فمثلاً، إذا كان هذا العدد يساوي -1 فإن هذا يعني أن Γ تدور حول نقطة الأصل مرة واحدة في اتجاه عقرب الساعة.



الشكل: 10-5

في شكل (10-5) قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ تساوي صفر. قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ تساوي الصفر أيضاً عندما لا تحوي داخلية المنحني Γ نقطة الأصل، والتحقق من هذه الحقيقة لحالة خاصة سيترك للتمارين.

قيمة $\Delta_C \arg f(z)$ يمكن تعيينها من عدد أصفار وأقطاب الدالة f التي تنتمي لداخلية C.

مبرهنة:10-9-1 : بفرض أن C منحني مغلق بسيط موجهاً في الاتجاه الموجب وبفرض أن f دالة تحليلية لجميع نقاط C ونقاط داخليته، فيما عدا الأقطاب المتنتمية لداخلية C. كذلك، بفرض أن الدالة f ليس لها أصفار على C. إذن:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z) = N - P \qquad (2)$$

حيث P, N عدد الأصفار وعدد الأقطاب على الترتيب للدالة f والتي تنتمي لداخلية C، مع حساب تعدد كل منها.

برهاننا لهذه النتيجة المعروفة بمبدأ السعة يتأسس على الصيغة:

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P \qquad (3)$$

التي حصلنا عليها في البند السابق. إذا كان $z=z(t)$، حيث $a\le t\le b$، تمثيلاً بارامترياً للمنحني C، فإن تمثيلاً بارامترياً لصورته Γ بالتحويلة $w=f(z)$ يكون:

$$w=w(t)=f[z(t)] \qquad (a\le t\le b)$$

الآن،

$$w'(t)=f'[z(t)]z'(t)$$

على امتداد كل من الأقواس الملساء التي يتكون منها المنحني Γ. حيث إن $z'(t)$ و $w'(t)$ متصلان قطعة بقطعة على الفترة $a\le t\le b$، فيمكننا أن نكتب:

$$\int_a^b \frac{f'[z(t)]}{f[z(t)]}z'(t)dt=\int_a^b \frac{w'(t)}{w(t)}dt.$$

أي أن:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\int_\Gamma \frac{dw}{w}$$

بذلك تؤول الصيغة (2) إلى:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w}=N-P \qquad (4)$$

حيث إن Γ لا يمر إطلاقاً بنقطة الأصل في المستوى المركب w، فيمكننا أن نعبر عن كل نقطة على هذا المنحني بالصورة القطبية $w=p\exp(i\phi)$ فإذا ما عبرنا عن Γ بدلالة بارامتر τ على الصورة:

$$w=w(\tau)=\rho(\tau)\exp[i\phi(\tau)] \qquad (c\le\tau\le d)$$

فإننا نحصل على المعادلة:

$$w'(\tau)=\rho'(\tau)\exp[i\phi(\tau)]+\rho(\tau)\exp[i\phi(\tau)]i\phi'(\tau),$$

حيث $\rho'(\tau)$ و $\phi'(\tau)$ متصلتين قطعة بقطعة على الفترة $c\le\tau\le d$ إذن، يمكننا أن نكتب:

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\int_c^d \frac{w'(\tau)}{w(\tau)}d\tau=\int_c^d \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}d\tau+i\int_c^d \phi'(\tau)d\tau,$$

أو:

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=\log\rho(\tau)\Big]_c^d+i\phi(\tau)\Big]_c^d$$

ولكن $\rho(d)=\rho(c)$ فيكون:

$$\phi(d)-\phi(c)=\phi_1-\phi_0=\Delta_C \arg f(z)$$

إذن:

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w}=i\Delta_C \arg f(z) \tag{5}$$

الصيغة (2) يمكن استنتاجها الآن مباشرة من معادلتي (4) و(5).

بعد ذلك سنقدم نتيجة مفيدة لمبدأ السعة، وهذه النتيجة تعرف بمبرهنة روشيه Rouche.

مبرهنة:10-9-2 : بفرض أن كل من f , g دالة تحليلية عند جميع نقط منحني مغلق بسيط C ونقاط داخليته، حيث المنحني C موجهاً في الاتجاه الموجب. إذا كان $|f(z)|>|g(z)|$ عند كل نقطة z على C، فإن الدالتين $f(z)$ ، $f(z)+g(z)$ يكون لهما نفس عدد الأصفار داخل C، مع حساب تعدد كل صفر.

لإثبات ذلك، لاحظ أولاً أن $f(z)$ ليس لها أصفار على C، وذلك حيث إن $|f(z)|>|g(z)|\geq 0$ على C. علاوة على ذلك فإن:

$$|f(z)+g(z)|\geq |f(z)|-|g(z)|>0$$

على C، وبالتالي فإن الدالة $f(z)+g(z)$ ليس لها أيضاً أصفار على C. الآن:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg f(z)=N_f \tag{6}$$

و:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg[f(z)+g(z)]=N_{f+g} \tag{7}$$

حيث N_f عدد أصفار الدالة $f(z)$ بداخلية C و N_{f+g} عدد أصفار الدالة $f(z)+g(z)$ بداخلية C. معادلتي (6) و(7) تنتجان مباشرة من مبدأ السعة وحقيقة أن كل من الدالتين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$ ليس لها أقطاب بداخلية C. لاحظ أن:

$$\Delta_C \arg[f(z)+g(z)]=\Delta_C \arg\left\{f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]\right\}$$

$$=\Delta_C \arg f(z)+\Delta_C \arg\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right]$$

التحويلة $w=1+g(z)/f(z)$ الذي يقع داخل الدائرة Γ ترسم المنحني C إلى المنحني $|w-1|=1$ وذلك لأن $|w-1|=|g(z)/f(z)|<1$ على C إذن النقطة $w=0$ لا تنتمي لداخلية المنحنى Γ، وبذلك تساوي القيمة:

$$\Delta_C \arg[f(z)+g(z)]=\Delta_C \arg f(z)$$

ويكون للدالة $f(z)+g(z)$ نفس عدد أصفار الدالة $f(z)$ بداخلية C، وذلك طبقاً لمعادلتي (6)، (7).

كتطبيق لمبرهنة روشيه، دعنا نعين عدد جذور المعادلة $z^7-4z^3+z-1=0$ بداخلية الدائرة $|z|=1$. اكتب $g(z)=z^7+z-1,\ f(z)=-4z^3$ ، ولاحظ أن $|f(z)|=4$ و $|g(z)|\le 3$ عندما $|z|=1$. بذلك تكون شروط مبرهنة روشيه متحققة. وبالتالي، حيث إن $f(z)$ لها ثلاث أصفار (لاحظ أننا حسبنا تعدد صفر الدالة) بداخلية الدائرة $|z|=1$ يكون للدالة $f(z)+g(z)$ بالمثل ثلاث أصفار بداخلية الدائرة $|z|=1$.

أي أن المعادلة $z^7-4z^3+z-1=0$ يكون لها ثلاث جذور تنتمي لداخلية الدائرة $|z|=1$.

تمـاريـن غير محلولة(2−10)

1− بفرض أن c عدد مركب ثابت مختلف عن الصفر، أثبت أن الدالة $\exp(1/z)$ التي لها نقطة شاذة أساسية عند $z=0$، تأخذ القيمة c عدداً لا نهائياً من المرات في أي جوار لنقطة الأصل.

اقـتراح: اكتـب $c=c_0 \exp(iy)$، حيـث $c_0 > 0$، وبـين أن $\exp(1/z)$ تأخـذ القيمـة c عند النقط $z=r\exp(i\theta)$ حيث $r\,,\,\theta$ تحققان المعادلات.

$$r^2=\frac{1}{r^2(Log\ c_o)^2}$$

$$\sin\ \theta=\frac{-r}{\sqrt{r^2(Log\ c_o)^2}} \quad ; \quad \cos\ \theta=\frac{Log\ \ c_o}{\sqrt{r^2(Log\ c_o)^2}}$$

لاحظ أنه يمكن جعل r صغيرة اختيارياً وذلك بإضافة مضاعفات صحيحة للمقدار 2π إلى الزاوية r ومع ترك c ثابتة.

2− إذا كانـت f دالـة تحليليـة في نطـاق مـا $a < |z-z_0| < r_0$ وإذا كانـت z_0 نقطـة تـراكم لأصفار الدالـة، فإنه إمـا أن تكـون z_0 نقطـة شـاذة أساسية للدالـة f أو أن تنعـدم $f(z)$ تطابقياً.

برهن هذه النظرية بمساعدة النتائج السابق الحصول عليها.

3− اختبر فئة أصفار الدالة $z^2\sin(1/z)$ وطبـق النظريـة الـواردة بتمـرين (2) لإثبـات أن نقطة الأصل تكون نقطة شاذة أساسية لهذه الدالة. لاحظ أن هذه النتيجة تنتج أيضاً من طبيعة متسلسلة لوران التي تمثل هذه الدالة في النطاق $|z| > 0$.

4− أفرض أن c منحني مغلـق بسيط في المستوى المركـب z، موجهـاً في الاتجاه الموجـب وأفـرض أن w_0 أي عـدد مركـب معطـى، أفـرض أن g دالـة تحليليـة جميـع نقـط c ونقـاط

داخليته ،وأفرض أن $q'(z)\neq 0$ عند أي نقطة z بداخلية c إذا كانت $q(z)\neq w_0$ عند أي نقطة z على c فإن:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_c \frac{q'(z)}{g(z)-w_o}dz=N$$

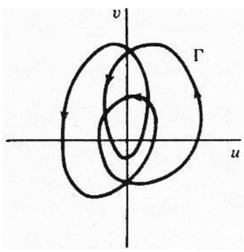
حيث العدد الصحيح N هو عدد النقط z بداخلية c التي يكون عندها $q(z)=w_0$ بين أن هذه النتيجة تنتج مباشرة من النتائج السابق الحصول عليها ببند (8.10).

قارن هذه النتيجة بتلك السابق الحصول عليها بتمرين (12) بند (5.8).

5- أكمل البرهان (بند 8.10) المبنى على مبرهنة بلزانو-فايرشتراس، أنه إذا كانت f دالة تحليلية عند جميع نقط منحني مغلق بسيط c ونقط داخليته، فيما عدا ربما لأقطاب وبداخلية c، وإذا كانت $f(z)\neq w_0$ عند أي نقطة من نقط c فإن أصفار وأقطاب f بداخلية c تكون محدودة العدد وتكون الصيغة (1) ببند (8.10) صحيحة.

6- افرض أن f دالة تحليلية عند جميع نقط منحني مغلق بسيط c ونقط داخليته وأفرض أن $f(z)$ لا تساوي صفر على الإطلاق على c افرض أن صورة c بالتحويلة $w=f(z)$ هي المنحني المغلق Γ الموضح بالشكل (10-6) باستخدام المنحني Γ أوجد قيمة $\Delta_c \arg f(z)$. عين أيضاً عدد أصفار الدالة f بداخلية e.

الأجوبة: $6\pi, 3$



الشكل: 6-10

7- افرض أن c يرمز لدائرة الوحدة $|z|=1$ موجهة في الاتجاه الموجب، أوجد قيمة $\Delta_c \arg f(z)$ للدالة:

$$f(z)=Z^2 \quad (أ) \qquad\qquad f(z)=\frac{z^3+2}{z} \quad (ب)$$

أيضاً لكل من التحويلات $w=f(z)$ المعرفة بهاتين الدالتين، اذكر عدد المرات التي تدور فيها النقطة الصورة W حول نقطة الأصل في المستوي المركب w عندما تقطع النقطة z المنحني c مرة واحدة في الاتجاه الموجب.

الأجوبة : (أ) $4\pi, 2$ (ب) $-2\pi-1$

8- باستخدام المفهوم الوارد ببند (9.10) أثبت أنه عندما لا يحصر المنحني Γ النقطة $w=0$ وعندما يوجد متجه خارج من تلك النقطة ولا يتقاطع مع المنحني Γ فإن $\Delta_c \arg f(z)=0$.

اقتراح: لاحظ أن التغير في قيمة $\arg f(z)$ لا بد وأن يكون أقل من 2π عددياً عندما تصنع z دورة واحدة كاملة حول c ثم استخدم حقيقة أن $\Delta_c \arg f(z)$ مضاعف صحيح للمقدار 2π.

9- أوجد عدد أصفار كثير الحدود:

$$6z^6-5z^4+z^3-2z \quad (أ) \qquad\qquad 2z^4-2z^3+2z^2-2z+9 \quad (ب)$$

داخل الدائرة $|z|=1$.

الأجوبة: (أ) : 4 . (ب): صفر.

10- عين عدد جذور المعادلة $2z^5-6z^2+z+1=0$ في المنطقة $1 \le |z| \langle 2$.

الإجابة: ثلاثة جذور.

11- أثبت أنه إذا كان c عدد مركب بحيث $|c| \rangle e$ فإن المعادلة $c2^n=e^2$ يكون لها n من الجذور داخل الدائرة $|z|=1$.

12- باستخدام مبرهنةروشيه أثبت أن أي كثيرة حدود.

$$p(z)=a_0+a_1z+......+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n \quad ,a_n \neq 0$$

حيث $n\geq 1$ يكون لها بالضبط n من الجذور من ثم أعطي برهان بديل للمبرهنة الأساسية للجبر.

اقتراح: لاحظ أنه يكفي أن نفرض أن $a_n=1$ ثم بكتابة:

$$f(z)=z^n \quad ,q(z)=a_o+a_1z+....+a_{n-1}z^{n-1}$$

13- أثبت أن $p(z)$ لها n من الأصفار داخل دائرة $|z|=R$ حيث R أكبر من أي من العددين 1 و $|a_0|+|a_1|+.....+|a_{n-1}|$ لإثبات أن $p(z)$ ليس لها أي أصفار أخرى، بين أن $0 \rangle |z^n+q(z)|\geq|z|^n-|q(z)|$ عندما $|z|\geq R$.

(ج) **سطوح ريمان** Riemann Surfaces

سطح ريمان هو تعميم المستوى المركب لسطح ذي أكثر من طية بحيث يكون للدالة المتعددة القيم قيمة وحيدة مناظرة لكل نقطة على هذا السطح. حال تصميم مثل هذا السطح لدالة معطاة، تصبح الدالة وحيدة القيمة على السطح ويمكن تطبيق نظرية الدوال وحيدة القيمة هنا.

وبالتالي فإن الصعوبات التي تظهر نتيجة كون الدالة متعددة القيم تخفف باستخدام تطبيق هندسي معقد. بالرغم من ذلك فإن وصف هذه الأسطح وترتيب الترابطات المضبوطة بين الطيات من الممكن أن يصير متشابكاً بصورة تشكل صعوبة لذلك فإننا سنقصر اهتمامنا فقط على بعض الأمثلة المتناهية في البساطة.

10.10 سطح ريمان للدالة $\log z$:

لكل عدد مركب غير صغري z يكون للدالة المتعددة القيم. $\log z=\log r+i\theta$ قيم مناظرة لا نهائية العدد من أجل تصور $\log z$ كدالة وحيدة القيمة فإننا نحلل المستوى المركب z، بعد استبعاد نقطة الأصل، بسطح تتحدد عليه دائماً نقطة جديدة كلما زادت أو نقصت سعة العدد المركب z بمقدار 2π أو مضاعفات صحيحة للمقدار 2π.

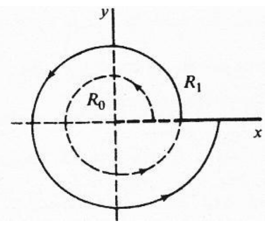
اعتبر المستوى المركب z بعد استبعاد نقطة الأصل كما لو كان صحيفة رقيقة (أو طية) R_0 مشقوقة على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقي على تلك الطية أفرض أن θ تأخذ القيم من صفر إلى 2π افرض أن طية ثانية R_1 شقت بنفس الأسلوب ووضعت أمام الصحيفة R_0 بعد ذلك وصلت الشفة السفلى للشق في R_0 بالشفة العليا للشق في R_1 على R_1 الزاوية θ تأخذ القيم من 2π إلى 4π وعلى ذلك فعند تمثيل z بنقطة على R_1 فإن الجزء التخيلي للدالة $Iog\ z$ يأخذ القيم من 2π إلى 4π بنفس الأسلوب نشق بعد ذلك طية ثالثة R_2 ونضعها أمام R_1 ونوصل الشفة السفلى للشق في R_1 بالشفة العليا للشق في هذه الطية الجديدة وهكذا نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة $R_3, R_4, \ldots$ بنفس الأسلوب نشق طية أخرى نرمز لها بالرمز R_{-1} ونضعها

خلف الطية R_0 ونعتبر أن الزاوية θ تأخذ القيم من -2π إلى صفر عليها ، ثم نوصل الشفة السفلى للشق في R_{-1} بالشفة العلا للشق في R_0.

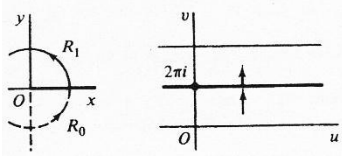
وبالمثل نتابع هذه العملية بإضافة طيات جديدة . $R_{-2}, R_{-3},...$ يمكن اعتبار الأحداثيين θ, r لنقطة ما على أي طية على أنها إحداثيات قطبية لمسقط تلك النقطة على المستوى المركب الأصلي z، حيث يقصر مدى الأحداثي الزواي θ لمدى محدد قيمته 2π من الزوايا النصف قطرية على كل طية.

اعتبر أي منحني متصل على هذا السطح المترابط المكون من عدد لا نهائي من الطيات (أو الصحف) عندما تتحرك نقطة ما z على هذا المنحنى فإن قيم $\log z$ تتغير تغيراً متصلاً حيث إن θ بالإضافة إلى r تتغير الآن تغيراً متصلاً وتأخذ $\log z$ قيمة واحدة فقط مناظرة لكل نقطة على المنحنى فمثلاً عندما تصنع النقطة دورة كاملة حول نقطة الأصل على الطية R_0 على امتداد المسار الموضح بالشكل (10–7) فإن الزاوية تتغير من صفر إلى 2π.

عندما تجتاز النقطة الخط المستقيم $\theta = 2\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_1 من السطح عندما تكمل النقطة دورة كاملة في R_1 تتغير الزاوية θ من 2π إلى 4π وعندما تجتاز الخط المستقيم $\theta = 4\pi$ فإنها تنتقل إلى الطية R_2.



الشكل: 10–7



الشكل: 10–8

السطح الذي وصفناه هنا هو سطح من سطوح ريمان للدالة $\log z$ وهو سطح مترابط يتكون من عدد لا نهائي من الطيات مرتبة بحيث تكون $\log z$ دالة وحيدة القيمة للنقط الواقعة عليه .

التحويلة $w = \log z$ راسم أحادي لسطح ريمان بأكمله فوق المستوي المركب w بأكمله صورة الطية R_0 هي الشريحة $0 \le a \le 2\pi$ عندما تتحرك نقطة z فوق .
الطية R_1 على امتداد القوس الموضح بالشكل $(10-8)$ تتحرك صورتها w إلى أعلى عبر الخط المستقيم $v = 2\pi$ ، كما هو موضح بالشكل.
لاحظ أن الدالة $\log\ z$ المعرفة على الطية R_1 تمثل الامتداد التحليلي للدالة التحليلية وحيدة القيمة.

$$\log r + i\theta \qquad\qquad (0 \langle\ \theta \ \langle\ 2\pi)$$

إلى أعلى عبر الجزء الموجب من المحور الحقيقي بهذا المفهوم، لا تكون $\log\ z$ دالة وحيدة القيمة فحسب لجميع النقاط z على سطح ريمان ولكنها تكون أيضاً دالة تحليلية عند جميع النقط هناك.
بالطبع من الممكن أن تكون الطيات مشقوقة على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقي، أو على امتداد أي شعاع آخر يبدأ من نقطة الأصل وموصلة كما يجب على امتداد الشقوق لتكون سطح آخر من سطوح ريمان للدالة $\log\ z$.

11.10 سطح ريمان للدالة $z^{1/2}$:

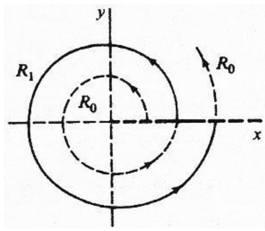
كل نقطة مختلفة عن نقطة الأصل، من نقط المستوي المركب z يناظرها قيمتان للدالة :

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\ \frac{\theta}{2}\right)$$

يمكن الحصول على سطح من سطوح ريمان للدالة $z^{1/2}$ بإحلال المستوي المركب z بسطح مكون من طيتين R_1, R_0 ، كل منهما مقطوعة على امتداد الجزء الموجب من المحور الحقيقي مع وضع R_1 أمام R_0 الشفة السفلى للشق في R_0 توصل بالشفة العليا للشق في R_1 وتوصل الشفة السفلى للشق في R_1 بالشفة العليا للشق في R_0 .
عندما تبدأ نقطة z في التحرك من الشفة العليا للشق في R_0 وتقطع دائرة متصلة حول نقطة الأصل في الاتجاه المضاد لعقرب الساعة (شكل $10-9$) تزداد الزاوية θ من صفر إلى 2π .

بعد ذلك تعبر النقطة من الطية R_0 إلى الطية R_1 حيث تزداد θ من 2π إلى 4π إذا ما استمرت النقطة في حركتها أكثر من ذلك فإنها تعبر عائدة مرة أخرى للطية R_0 حيث يمكن أن تتغير قيم θ من 4π إلى 6π أو من صفر إلى 2π وهذا الاختيار أو ذاك لا يؤثر على قيمة $z^{1/2}$ .... إلخ.

لاحظ أن قيمة $z^{1/2}$ عند نقطة تعبر عندها الدائرة من الطية R_0 إلى الطية R_1 تكون مختلفة عن قيمة $z^{1/2}$ عند نقطة تعبر عندها الدائرة من الطية R_1 إلى الطية R_0 .



الشكل: 10–9

بهذا نكون قد صممنا سطح من سطوح ريمان تكون عليه الدالة $z^{1/2}$ وحيدة القيمة لكل عدد غير صفري z في هذا التصميم توصل شفاه الطيتين R_1, R_0 كأزواج بحيث يكون السطح المتولد مغلق ومترابط. النقط التي يوصل عندها زوج من الشفاه تكون مختلفة عن النقط التي يوصل عندها الزوج الثاني من الشفاه.

من هذا نرى أنه من المستحيل فيزيائياً بناء نموذج لسطح ريمان هذا عند تخيل سطح من سطوح ريمان من المهم أن نفهم جيداً كيف نتقدم عندما نصل إلى شفة لشق.

نقطة الأصل نقطة خاصة جداً على سطح ريمان هذا هذه النقطة مشتركة بين الطيتين وأي منحني على السطح حول نقطة الأصل لا بد وأن يدور دورتين كاملتين حول نقطة الأصل لكي يكون منحني مغلق. أي نقطة من هذا النوع على سطح ريمان تسمى نقطة تفرع.

صورة الطية R_0 بالتحويلة $w=z^{1/2}$ هي النصف العلوي من المستوى المركب w وذلك حيث إن سعة w تساوي $\theta/2$ و $0\leq\theta/2\leq\pi$ على R_0 بالمثل، صورة الطية R_1 بنفس التحويلة هي النصف السفلى من المستوى المركب w.

الدالة المعرفة على أي من الطيتين تكون الامتداد التحليلي، عبر الشق، للدالة المعرفة على الطية الأخرى. من هذه الوجهة تكون الدالة وحيدة القيمة $z^{1/2}$ للنقط على سطح ريمان وتحليلية عند جميع النقط فيما عدا عند نقطة الأصل.

12.10 سطوح لدوال غير قياسية أخرى:

دعنا نصف سطح من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة.

$$f(z)=\left(z^2-1\right)^{1/2}=\sqrt{r_1 r_2}\exp\left(i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \qquad (1)$$

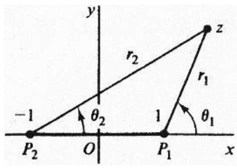
حيث:

$z+1=r_2\exp\left(i\theta_2\right), z-1=r_1\exp\left(i\theta_1\right)$ كما هو موضح بالشكل (10-10)
لقد سبق أن وصفنا فرع لهذه الدالة، حيث القطعة المستقيمة P_1P_2 الواصلة بين نقطتي التفرع $z=\pm1$ فرع قاطع له هذا الفرع يعطي بالصيغة (1) مع الاشتراطات: $r_2 \rangle\ 0\ , r_2 \rangle\ 0\ , r_1+r_2 \rangle\ 2, 2\pi \rangle\ \theta_k \leq 0 ;(k=1,2)$. الفرع لا يكون معرفاً على القطعة المستقيمة $P_1\ P_2$.

أي سطح من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة (1) لا بد وأن يتكون من طيتين R_1, R_0. بفرض أن كلتي الطبقتين قد شقتا على امتداد القطعة المستقيمة P_1P_2. الشفة السفلى للشق في R_0 توصل بالشفة العليا للشق في R_1، كما أن الشفة السفلى للشق في R_1 توصل بالشفة العليا للشق في R_0.

على الطية R_0 نفرض أن كل من الزاويتين θ_1, θ_2 تأخذ القيم من الصفر إلى 2π، إذا تحركت نقطة على الطية R_0 لترسم منحنى مغلق بسيط، يحوي بداخله القطعة المستقيمة P_1P_2 مرة واحدة في الاتجاه المضاد لعقرب الساعة، فإن كل من θ_1, θ_2 تتغير بمقدار 2π لدى عودة النقطة لوضعها الابتدائي. التغير في $(\theta_1+\theta_2)/2$ يساوي أيضاً 2π، وبالتالي لا تتغير قيمة F. إذا رسمت نقطة بادئة حركتها على الطية R_0 مساراً يمر مرتين حول نقطة التفرع $z=1$ فقط، فإنها تعبر من الطية R_0 إلى الطية R_1 ثم تعبر مرة أخرى

عائدة إلى الطية R_0 وذلك قبل عودتها لوضعها الابتدائي. في هذه الحالة، تعبر قيمة θ_1 بمقدار 4π، بينما لا تتغير قيمة θ_2 على الإطلاق. بالمثل، لدوران مرتين حول النقطة $z = -1$، تتغير قيمة θ_2 بمقدار 4π، بينما لا تتغير قيمة θ_1 على الإطلاق. مرة أخرى نرى أن التغير في $(\theta_1 + \theta_2)/2$ يساوي أيضاً 2π، ولا تتغير قيمة الدالة f، إذن على الطية $\mathrm{R0}$ من الممكن أن نمد مدى كل من الزاويتين θ_1, θ_2 وذلك بتغيير كل من θ_1, θ_2 بنفس المضاعف الصحيح للمقدار 2π، أو بتغيير إحدى الزاويتين فقط بمضاعف صحيح 4π. في كلتى الحالتين يكون التغيير الكلي في الزاويتين مضاعف زوجي صحيح للمقدار 2π.



الشكل (10–10)

للحصول على مدى القيم لكل من θ_1, θ_2 على الطية R_1 نلاحظ أنه إذا بدأت نقطة ما تحركها من على الطية R_0 ورسمت مرة واحدة مساراً حول إحدى نقطتي التفرع فقط، فإنها تعبر للطية R_1 ولا تعود مرة أخرى للطية R_0. في هذه الحالة تتغير

قيمة إحدى الزاويتين بمقدار 2π، بينما لا تتغير قيمة الزاوية الأخرى على الإطلاق. إذن، على الطية R_1 تأخذ إحدى الزاويتين القيم من 2π إلى 4π بينما تأخذ الزاوية الأخرى القيم من صفر إلى 2π. بذلك يأخذ مجموعها القيم من 2π إلى 4π، وتأخذ $(\theta_1 + \theta_2)/2$سعة $f(z)$، القيم من π إلى 2π. مرة أخرى نجد أن مدى الزوايا قد امتد بتغيير قيمة إحدى الزاويتين فقط بمضاعف صحيح للمقدار 4π أو بتغيير قيمة كل من الزاويتين بنفس المضاعف الصحيح للمقدار 2π.

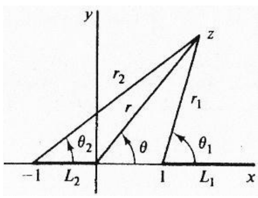
الدالة الثنائية القيمة المعطاة بالمعادلة (1) يمكن الآن اعتبارها دالة وحيدة القيمة لنقط سطح ريمان الذي صممناه الآن. التحويلة $w = f(z)$ ترسم كل من الطيتين المستخدمتين في تصميم سطح ريمان هذا فوق المستوي المركب w بأكمله.

كمثال آخر، اعتبر الدالة الثنائية القيمة:

$$g(z) = [z(z^2-1)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{rr_1r_2}\exp\left(i\frac{\theta+\theta_1+\theta_2}{2}\right) \tag{2}$$

(شكل 10–11) النقط $z = 0, \pm 1$ نقط تفرع لهذه الدالة. نلاحظ أنه إذا كانت النقطة z ترسم دائرة تحوي هذه النقط الثلاث جميعها، فإن سعة $g(z)$ تتغير بمقدار الزاوية 3π وبالتالي تتغير قيمة الدالة نفسها، وبالتالي فإن أي فرع قاطع لابد وأن يمتد من إحدى نقط التفرع هذه حتى نقطة اللانهاية وذلك حتى يكون بإمكاننا أن نصف فرع وحيد القيمة للدالة g. إذن نقطة اللانهاية هي أيضاً نقطة تفرع، وهذا ما يتضح لنا بملاحظة أن الدالة $g(1/2)$ لها نقطة تفرع عند $z = 0$.

بفرض أن طيتين قد شقتا على امتداد القطعة المستقيمة L_2 من $z = -1$ إلى $z = 0$ وعلى امتداد الجزء L_1 من المحور الحقيقي الواقع على اليمين من النقطة $z = 1$. سنعتبر أن كل من الزوايا الثلاث $\theta, \theta_1, \theta_2$ تتغير في المدى من صفر إلى 2π على الطية R_0 ومن 2π إلى 4π على الطية R_1 وسنعتبر أن الزوايا المناظرة لنقطة على أي من الطيتين يمكن أن تتغير بمضاعفات صحيحة للمقدار 2π مع مراعاة أن هذا يحدث شريطة أن يتغير مجموع الزوايا الثلاث بمضاعف صحيح للمقدار 4π، وبالتالي لا تتغير قيمة الدالة g.



الشكل (10–11)

سطح آخر من سطوح ريمان للدالة الثنائية القيمة (2) نحصل عليه بتوصيل الشفتين السفليتين في R_0 للشقين على امتداد L_1, L_2 للشفتين العلويتين في R_1 للشقين على امتداد L_1, L_2 على الترتيب. الشفتان السفليتان في R_1 للشقين على امتداد L_1،L_2 يوصلان بعد ذلك للشفتين العلويتين في R_0 للشقين على امتداد L_1،L_2 على الترتيب.

ويمكن بسهولة، بمساعدة شكل (10–11) إثبات أن فرع من فروع الدالة يمثل قيمها عند نقط على R_0 وأن الفرع الآخر للدالة يمثل بقيمها عند نقط على R_1.

تمارين غير محلولة(3-10)

1- صف سطح من سطوح ريمان للدالة الثلاثية القيمة $w=(z-1)^{1/3}$ ثم بين ثلث المستوى المركب w الذي يمثل صورة كل طية من طيات هذا السطح.

2- صف سطح ريمان للدالة $\log(z)$ الذي نحصل عليه بشق المستوى المركب z على امتداد الجزء السالب من المحور الحقيقي. قارن بين سطح ريمان هذا للدالة $\log(z)$ وسطح ريمان لنفس الدالة السابق الحصول عليه ببند (10.10).

3- عين صورة الطية R_n، حيث n عدد صحيح اختياري، من سطح ريمان للدالة $\log(z)$ المعطى ببند (10.10) بالتحويلة $w = \log(z)$.

4- تحقق من أن التحويلة $w=(z)^{1/2}$ ترسم الطية R_1 من سطح ريمان للدالة $(z)^{1/2}$ المعطى ببند (11.10) فوق النصف السفلي من المستوى المركب w.

5- صف المنحني، على سطح من سطوح ريمان للدالة $(z)^{1/2}$، الذي صورته بالتحويلة $w=(z)^{1/2}$ كامل الدائرة $|w| = 1$.

6- كل نقطة من نقط سطح ريمان المذكور ببند (12.10) للدالة $w=g(z)$ يناظرها قيمة واحدة فقط من قيم w. أثبت أن كل قيمة من قيم w يناظرها بصفة عامة ثلاث نقط على سطح ريمان هذا.

7- صف سطح من سطوح ريمان للدالة المتعددة القيم:

$$f(z)=\left(\frac{(z-1)}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

8- افرض أن c يرمز للدائرة $|z-2|=1$ على سطح ريمان الذي وصفناه ببند (11.10) للدالة $(z)^{1/2}$، حيث يقع النصف العلوي من تلك الدائرة على الطية R_0 ويقع النصف السفلي من الدائرة على R_1 لاحظ أنه لكل نقطة z على c يمكننا أن نكتب:

$$(z)^{1/2}=\sqrt{r}\exp\frac{i\Theta}{2}$$

حيث $4\pi-\frac{\pi}{2}<\Theta<4\pi+\frac{\pi}{2}$ اذكر لماذا يمكن استنتاج أن:

$$\int_c (z)^{1/2}dz=0$$

عمم هذه النتيجة يمكن تطبيقها في حالة المنحنيات المغلقة البسيطة الأخرى التي تعبر من طية إلى أخرى دون أن تحوي بداخلها نقط التفرع. بعد ذلك عمم هذه النتيجة لدوال أخرى، لتحصل بذلك على تعميم لنظرية كوشي-جورساه لتكاملات دوال متعددة القيم.

9- لاحظ أن سطح ريمان الذي وصفناه ببند (12.10) للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ يكون أيضاً سطح من سطوح ريمان للدالة: $h(z)=z+(z^2-1)^{1/2}$.

افرض أن f_0 هو فرع الدالة $(z^2-1)^{1/2}$ المعرف على الطية R_0 وأثبت أن الفرعان h_1, h_2 للدالة h على الطيتين يعطيان بالمعادلتين:

$$h_0(z)=\frac{1}{h_1(z)}=z+f_0(z)$$

10- بتمرين (9) يمكن وصف الفرع f_0 للدالة $(z^2-1)^{1/2}$ بالمعادلة:

$$f_0(z)=\sqrt{r_1r_2}\exp\frac{i\theta_1}{2}\exp\frac{i\theta_2}{2}$$

حيث θ_1,θ_2 تتغيران من صفر إلى 2π:

$$z-1=r_1\exp(i\theta_1)\quad,\quad z+1=r_2\exp(i\theta_2)$$

لاحظ أن $2z=r_1\exp(i\theta_1)+r_2\exp(i\theta_2)$ وأثبت أن الفرع h_0 للدالة $h(z)=z+(z^2-1)^{1/2}$ يمكن كتابته على الصورة:

أوجد $h_0(z)\overline{h_0(z)}$ ولاحظ أن $r_1 + r_2 \geq 2$ و $\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2] \geq 0$ لجميع النقط z لإثبات أن $|h_0(z)| \geq 1$ بعد ذلك أثبت أن التحويلة:

$$w = z + (z^2 - 1)^{1/2}$$

ترسم الطية R_0 من سطح ريمان فوق المنطقة $|w| \geq 1$ وترسم الطية R_1 فوق المنطقة $|w| \leq 1$ وترسم الفرع القاطع الواصل بين النقطتين $z = \pm 1$ فوق الدائرة $|w| = 1$. لاحظ أن التحويلة المستخدمة هنا هي معكوسة للتحويلة:

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)$$

وقارن النتيجة التي حصلت عليها بالنتيجة التي حصلنا عليها سابقاً.

الباب الثالث

التحليل المتجهي

الفصل الأول: الحقول السلمية و الحقول المتجهية.

الفصل الثاني: التكاملات المتجهية.

الفصل الثالث: التطبيقات الفيزيائية و الهندسية للتحليل المتجهي.

.

فهرس الفصل الأول

الفصل الأول

1. الحقول السلمية والحقول المتجهية

1.1 الحقل السلمي (أو التابع العددي):

تعريف 1-1-1: نسمي حقلاً سلمياً (أو دالةً عدديةً للموضع) كل تطبيق من الشكل: $f : D \subset R^3 \to R \,;\, (x,y,z) \to f(x,y,z)$

تعريف 1-1-2 (سطح السوية):

لتكن الدالة العددية للموضع $u = u\,(x,y,z)$ المعرفة في النطاق الفضائي D، ولتكن $p \in D$ ولنفرض أن: $u(p) = c$، عندئذٍ تمثل المعادلة: $u\,(x,y,z) = c$ سطحاً يمر بالنقطة p يسمى سطح السوية للدالة u والمار بالنقطة p. ويكون سطح السوية سطحاً صقيلاً(أو أملساً)، إذا لم تنعدم مشتقاته الجزئية الأولى معاً في نفس النقطة.

مثال 1-1-1: إن سطوح السوية للدالة العددية للموضع: $u = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ هي: $u = c \Rightarrow u^2 = c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ (معادلة دائرة مركزها المبدأ O).

مثال 1-1-2: 1- درجة الحرارة في كل نقطة من D في لحظة معينة تعين حقلاً سلمياً.

2- الدالة (أو التابع) $f(x,y,z) = xy^2 + x^2 z$ تعين أيضاً حقلاً سلمياً.

تعريف 1-1-3: نهاية دالة بعدة متغيرات:

إذا كان $f(x,y,z)$ دالةً عدديةً (أو حقلاً سلمياً) معرفةً على $D \subset R^3$، عندئذٍ نقول إن $f(x,y,z)$ تتقارب من العدد الحقيقي A عندما $M(x,y,z) \to M_0(x_0,y_0,z_0)$ ونكتب:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \left[\, f(x,y,z) \,\right] = A$$

إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0;\ d[(x,y,z)] = \sqrt{(x-x_0)^2 (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta$$
$$\Rightarrow \quad | f(x,y,z) - A| < \varepsilon$$

ونسمي A نهاية لـ $f(x,y,z)$ عندما: $M(x,y,z) \to M_0(x_0,y_0,z_0)$.

1.1.1 العمليات الجبرية على النهايات:

إذا كان:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f_1(x,y,z) = A_1 \quad ; \quad \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f_2(x,y,z) = A_2$$

فإن:

$$1) \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} [\lambda\, f_1(x,y,z) + \mu\, f_2(x,y,z)] = \lambda\, A_1 + \mu\, A_2$$
$$2) \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} [\, f_1(x,y,z)\,.\ \ f_2(x,y,z)] = A_1\,.\,A_2$$
$$3) \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \left[\frac{f_1(x,y,z)}{f_2(x,y,z)} \right] = \frac{A_1}{A_2} \qquad ;(A_2 \neq 0)$$

مثال 1–1–3: نلاحظ أن الدوال الإسقاطية:

$$X : \underset{(x,y,z)\to x}{\Re^3 \to \Re} \qquad ;Y : \underset{(x,y,z)\to y}{\Re^3 \to \Re} \qquad ;Z : \underset{(x,y,z)\to z}{\Re^3 \to \Re}$$

تحقق النهايات:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} x = x_0 \ ; \quad \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} z = z_0 \quad \lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} y = y_0 \ ;$$

تعريف1–1–4: استمرار دالة عددية (أو دالة حقيقية) بعدة متغيرات:

نقول عن الدالة العددية (أو الحقيقية) $f(x,y,z)$ إنها مستمرة في النقطة $M_0(x_0,y_0\ ,z_0)$ في النطاق الفضائي D إذا كان:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} [\ f(x,y,z)\ ] = f(x_0,y_0,z_0)$$

هذا يعني تحقق ما يلي:

$$\forall \varepsilon \in R^*, \exists \delta \in R^* : \forall (x,y,z) \in D, \{d[(x,y,z),(x_0,y_0,z_0)]\} < \delta \Rightarrow$$
$$|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)| < \varepsilon$$

ونقول إن $f(x,y,z)$ مستمرة في D إذا كانت مستمرة في كل نقطة من D.

2.1.1 العمليات الجبرية في الاستمرار:

إذا كانت الدالتان $f_1(x,y,z)$ ، $f_2(x,y,z)$ مستمرتين في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ فإن كلاً من الدوال الآتية:

$$1):(\lambda f_1 + \mu f_2)(x,y,z) = \lambda \cdot f_1(x,y,z) + \mu \cdot f_2(x,y,z) \quad ;$$
$$2):(f_1, f_2)(x,y,z) = f_1(x,y,z) \cdot f_2(x,y,z)$$
$$3):\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x,y,z) = \frac{f_1(x,y,z)}{f_2(x,y,z)}, [f_2(x_0,y_0,z_0) \neq 0]$$

مستمرة في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

تعريف 1-1-5: المشتقة الجزئية لدالة عددية (أو حقيقية) بعدة متغيرات:

ليكن $f(x,y,z)$ دالةً عدديةً معرفةً على المجموعة المفتوحة $D \subset R^3$ ولنفترض أن $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$ ، عندئذٍ نقول إن الدالة $f(x,y,z)$ قابلةً للاشتقاق الجزئي بالنسبة لـ x أو لـ y أو لـ z في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$ ونكتب:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h,y_0,z_0) - f(x_o,y_0,z_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0,y_0+k,z_0) - f(x_o,y_0,z_0)}{k}$$
$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} = \lim_{p \to 0} \frac{f(x_0,y_0,z_0+p) - f(x_o,y_0,z_0)}{p}$$

(وذلك بشرط وجود هذه النهايات)

حيث لدينا التطبيق:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : D \to R \ ; \ (x,y,z) \to \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$$

وهي مشتقة الدالة بالنسبة لـ x مثلاً.

3.1.1 المشتقات الجزئية من الرتب العليا:

إذا كانت الدوال : $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$

قابلةً للاشتقاق جزئياً بالنسبة لـ x و لـ y و لـ z في النقطة $M(x,y,z)$ فإننا نسمي الدوال الآتية: $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

بالمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y,z)$ في النقطة $M(x,y,z)$ من D

وبنفس الطريقة تعرف المشتقات الجزئية من الرتب الأعلى.

مثال 1–1–4: إذا كانت: $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

أثبت أن: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$

الحل:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{d^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{-3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=\frac{-3+3}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0$$

مبرهنة 1.1.1: لتكن $f(x,y)$ دالةً حقيقيةً (أو عدديةً) معرفةً على المجموعة المفتوحة $D\subset R^2$ فإنه إذا كانت المشتقات الجزئية: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}$ موجودة ومستمرة، عندئذٍ تكون المساواة الآتية صحيحة:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

(تقبل المبرهنة دون إثبات).

4.1.1 قابلية الاشتقاق وتفاضل دالة حقيقية بعدة متغيرات:

ليكن $f(x,y,z)$ دالةً حقيقيةً (أو عدديةً) معرفةً على النطاق الفضائي $D \subset R^3$، عندئذٍ نعرف تفاضل هذه الدالة بالعلاقة: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}.dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}.dz$

وذلك على اعتبار المشتقات الجزئية الأولى لـ f موجودة ومستمرة في D .

مثال 5-1-1: أوجد تفاضل الدالة: $f(x,y,z) = ze^{xy} + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

الحل: نعلم أن: $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}.dz$

$$df = \left(yze^{xy} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dx + \left(xze^{xy} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dy +$$

$$+\left(e^{xy} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)dz$$

2.1 الحقل المتجهي (أو الدالة المتجهية):

تعريف 1-2-1:نسمي حقلاً متجهياً (أو دالةً متجهيةً) كل تطبيق من الشكل:

$$\vec{V} : D \subset \Re^3 \to \Re^3 : (x,y,z) \to \vec{V}(x,y,z) = v_1(x,y,z)\hat{i} + v_2(x,y,z)\hat{j} + v_3(x,y,z)\hat{k}$$

حيث تتعين الدالة المتجهية $\vec{V}(x,y,z)$ بالدوال العددية (أو الحقول السلمية)

$$v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)$$

مثال 1-2-1: إن القوة التي تؤثر بها شحنة كهربائية Q موضوعة في المبدأ (O) على شحنة كهربائية q في نقطة ما M تعطى بالدالة المتجهية:

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon Q q}{\|\vec{r}\|^3}.\vec{r};$$ ($\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ متجه موضع M و ε ثابت معين)

تعريف 1-2-2: نقول عن الدالة المتجهية $\vec{V}(x,y,z)$ أنها تتقارب من المتجه $\vec{A}$ عندما تتقارب النقطة $M(x,y,z)$ من النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$، إذا تحقق الشرط:

$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 ; d(M,M_0) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta \Rightarrow \| \vec{V}(x,y,z) - \vec{A} \| \langle \varepsilon$$

عندئذٍ نسمي $\vec{A}$ نهاية لـ $\vec{V}(x,y,z)$ عندما $M \to M_0$ ونكتب:

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \vec{v}(x,y,z) = \vec{A}$$

مبرهنة1-2-1: الشرط اللازم والكافي حتى تكون:

$$\lim_{M(x,y,z)\to M_0(x_0,y_0,z_0)} \vec{v}(x,y,z) = \vec{A}$$

حيث: $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$; $\vec{V}(x,y,z) = v_1\hat{i} + v_2\hat{j} + v_3\hat{k}$

و$\vec{V}(x,y,z)$ معرفةً على المجموعة المفتوحة $D \subset \Re^3$ و $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$ هو أن تكون:

$$\lim_{M\to M_0} v_1(x,y,z) = A_1 \quad ; \lim_{M\to M_0} v_2(x,y,z) = A_2 \quad ; \lim_{M\to M_0} v_3(x,y,z) = A_3$$

نتيجة: إذا كانت:

$$\lim_{M\to M_0} \vec{V}(x,y,z) = \vec{A} \quad , \quad \lim_{M\to M_0} \vec{F}(x,y,z) = \vec{B} \quad , \quad \lim_{M\to M_0} g(x,y,z) = \lambda$$

فإن:

1) $\lim_{M\to M_0} \left[\alpha \vec{V}(x,y,z) + \beta \vec{F}(x,y,z)\right] = \alpha \vec{A} + \beta \vec{B}$

2) $\lim_{M\to M_0} \left[g(x,y,z)\vec{V}(x,y,z)\right] = \lambda\vec{A}$

3) $\lim_{M\to M_0} \left\|\vec{V}(x,y,z)\right\| = \left\|\vec{A}\right\|$

4) $\lim_{M\to M_0} \left[\vec{V}(x,y,z)\vec{F}(x,y,z)\right] = \vec{A}.\vec{B}$

5) $\lim_{M\to M_0} \left[\vec{V}(x,y,z) \wedge \vec{F}(x,y,z)\right] = \vec{A} \wedge \vec{B}$

1.2.1 استمرار دالة متجهية:

تعريف 1-2-3: نقول عن الدالة المتجهية $\vec{V}(x,y,z)$ إنها مستمرة في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$ إذا كانت $\lim\limits_{M\to M_0}\vec{V}(x,y,z)=\vec{V}(x_0,y_0,z_0)$ ، ونقول إن $\vec{V}(x,y,z)$ مستمرة على D إذا كان مستمرة في كل نقطة منها.

مبرهنة1-2-2: الشرط اللازم والكافي حتى تكون الدالة المتجهية:

$$\vec{V}(x,y,z)=V_1(x,y,z)\hat{i}+V_2(x,y,z)\hat{j}+V_3(x,y,z)\hat{k}$$

مستمرة في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)$ هو أن تكون مركبات الدوال العددية (أو الحقيقية) على المحاور الإحداثية: V_1,V_2,V_3 مستمرة في النقطة M_0.

نتيجة:

1) مجموع وطرح دالتين متجهيتين مستمرتين هو دالة متجهية مستمرة.
2) جداء دالة متجهية مستمرة بدالة حقيقية (سلمية) مستمرة هو دالة متجهية مستمرة.
3) الجداء الداخلي لدالتين متجهيتين مستمرتين هو دالة حقيقية (سلمية) مستمرة.
4) الجداء الخارجي لدالتين متجهيتين مستمرتين هو دالة متجهية مستمرة.
5) طول (أو طويلة) دالة متجهية مستمرة هو دالة حقيقية (سلمية) مستمرة.

مثال 1-2-2:

أ): الدالة المتجهية:

$$\vec{V}(x,y,z)=(x-yz)\hat{i}+\ln\left(x^2+y^2\right)\hat{j}+(x\cos y)\hat{k}$$

مستمرة في كل نقطة من الفضاء $\Re^3$ لأن مركبات الدوال العددية (أو الحقيقية)لها :

$$V_1=x-yz \quad ;\ V_2=\ln\left(x^2+y^2\right)\ ;\ V_3=x\cos y$$

كثيرات حدود مستمرة في كل نقطة من $\Re^3$.

ب): الدالة المتجهية:

$$\vec{V}(x,y)=\frac{2x}{x^2-y}\hat{i}+ye^x\hat{j}$$

مستمرة في كل نقطة من $\Re^2$، باستثناء نقاط القطع المكافئ $y=x^2$.

2.2.1 الاشتقاق الجزئي للدالة المتجهية:

لتكن الدالة المتجهية:

$$\vec{V}(x,y,z)=V_1(x,y,z)\hat{i}+V_2(x,y,z)\hat{j}+V_3(x,y,z)\hat{k}$$

المعرفة على المجموعة المفتوحة $D\subset\Re^3$ بحيث $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$ ، عندئذٍ نقول إن $\vec{V}$ قابلةً للاشتقاق جزئياً بالنسبة لـ x في M_0 إن وجدت النهاية:

$$\vec{V}_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial\vec{V}(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{V}(x_0+h,y_0,z_0)-\vec{V}(x_0,y_0,z_0)}{h}$$

ونعرف بشكل مشابه المشتقات الجزئية بالنسبة لـ y و z ويمكن أن نكتب:

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial V_2}{\partial x}\hat{j}+\frac{\partial V_3}{\partial x}\hat{k}\quad;\qquad\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}=\frac{\partial V_1}{\partial y}\hat{i}+\frac{\partial V_2}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial V_3}{\partial y}\hat{k}$$

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}=\frac{\partial V_1}{\partial z}\hat{i}+\frac{\partial V_2}{\partial z}\hat{j}+\frac{\partial V_3}{\partial z}\hat{k}$$

هذا يعني أن قواعد الاشتقاق الجزئي للدوال الحقيقية (أو العددية) تماثل قواعد الاشتقاق الجزئي للدوال المتجهية لعدة متغيرات ونعرف تفاضل الدالة المتجهية $\vec{V}(x,y,z)$ بالشكل:

$$d\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{V}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}dz$$

ملاحظة: إذا كانت:

$$\vec{V}(t)=V_1(t)\hat{i}+V_2(t)\hat{j}+V_3(t)\hat{k}$$

دالةً متجهيةً بمتغير حقيقي واحد فإن مشتقتها هي:

$$\vec{V}'(t)=\frac{d\vec{V}(t)}{dt}=\frac{dV_1(t)}{dt}\hat{i}+\frac{dV_2(t)}{dt}\hat{j}+\frac{dV_3(t)}{dt}\hat{k}\Rightarrow d\vec{V}=V'(t)dt$$

وإذا كانت $t=t(s)$ دالةً حقيقيةً قابلةً للاشتقاق ، فإن $\vec{V}$ تصبح دالةً مركبةً قابلةً للاشتقاق بالنسبة لـ s ويكون:

$$\frac{d\vec{V}}{ds}=\frac{d\vec{V}}{dt}.\frac{dt}{ds}$$

3.2.1 المشتقة المتجهية :

إذا كانت $f(x,y,z)$ دالة حقيقية ولها مشتقات جزئية مستمرة على $D\subset\Re^3$ وليكن $\vec{u}(a,b,c)$ متجهة الوحدة (حيث $\|\vec{u}\|=1$) و $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$ ، عندئذٍ نعرف المشتقة المتجهية للدالة $f(x,y,z)$ في النقطة $M_0(x_0,y_0,z_0)\in D$ وفق المتجه $\vec{u}$ بالشكل:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial\vec{u}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc)-f(y_0,y_0,z_0)}{t}$$
$$=a\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+b\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}+c\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$$

مثال 3-2-1: أوجد المشتقة المتجهية للدالة:

$$f(x,y,z)=xy\sqrt{1+z^2}$$

في النقطة $(1,1,2)$ وفق المتجه: $\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

الحل:

$$\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial x}=\left[y\sqrt{1+z^2}\right]_{(1,1,2)}=\sqrt{5},\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial y}=\left[x\sqrt{1+z^2}\right]_{(1,1,2)}=\sqrt{5}$$

$$\frac{\partial f(1,1,2)}{\partial z}=\left[\frac{xyz}{\sqrt{1+z^2}}\right]_{(1,1,2)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

ومنه:

$$\frac{\partial f(1,1,2)}{d\vec{u}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{2}{\sqrt{5}}$$

نتيجة: نستنتج مما سبق أن:

المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ هي المشتقة المتجهية لـ f وفق $\vec{i}$ (باتجاه المحور oX)

المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}$ هي المشتقة المتجهية لـ f وفق $\vec{j}$ (باتجاه المحور oY)

المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial z}$ هي المشتقة المتجهية لـ f وفق $\vec{k}$ (باتجاه المحور oZ)

فمثلاً شعاع الوحدة وفق المحور oX هو $\vec{u}=\vec{i}=(1,0,0)$ وبالتالي:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial \vec{i}}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}=\frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$$

3.1 المنحنيات في الفضاء

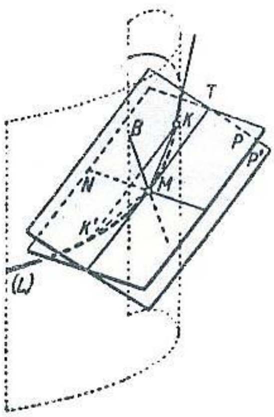
إذا كان L منحنياً فضائياً معادلاته الوسيطية $x(u),y(u),z(u)$ فيمكن تمثيله بالدالة المتجهية:

$$\vec{r}(u)=\ x(u)\vec{\imath}+y(u)j+z(u)\,\vec{k}$$

الذي يدعى متجه الموضع أو دالة الموضع للمنحني L.

1.3.1 المستوي الملاصق

تعريف1−3−1: المستوي الملاصق للمنحني L عند النقطة M هو المستوي P الذي ينتهي إلى المستوي KMK' لينطبق عليه عندما تنتهي النقطتان K,K' الواقعتان على المنحني L (وغير المنطبقتين إحداهما على الأخرى) إلى النقطة M كما هو مبين بالشكل (1−3−1). ولتوضيح ذلك نفترض أننا نعين على نموذج سلكي للمنحني L ثلاث نقاط M,K,K'. إذا لم تكن هذه النقاط بعيدة جداً عن بعضها. فإن القوس KMK' يقع عملياً داخل المستوي KMK'. والمستوي الملاصق هو صورة مجردة لمستوي KMK'.



الشكل (1−3−1)

إذا وضعنا على النموذج ورقة بحيث تنطبق على المستوي الملاصق، فإنه بالرغم من حدوث بعض الميل، يحافظ على توازنه (بسبب الاحتكاك على الجزء

$(KMK'$ بينما لا تستقر الورقة على النموذج في جميع الأوضاع الأخرى.

يقع متجه السرعة $\overrightarrow{r'}(u)$ ومتجه التسارع $\overrightarrow{r''}(u)$ في المستوي الملاصق. وإذا لم يكونا متوازيين ، فإن الجداء الخارجي (أو الاتجاهي):

$$\vec{B} = \overrightarrow{r'} \wedge \overrightarrow{r''} \qquad (1.1)$$

هو المتجه العمودي على المستوي الملاصق ومعادلته تكون:

$$\left(\vec{R} - \vec{r}\right).\left(\overrightarrow{r'} \wedge \overrightarrow{r''}\right) = 0 \qquad (2.1)$$

أو بدلالة الاحداثيات هي:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

مثال 1–3–1: أوجد المستوي الملاصق للمنحني الحلزوني:

$$\vec{r} = a\cos u\,\vec{\imath} + a\sin u\,\vec{\jmath} + bu\,\vec{k}$$

الحل: بالاشتقاق نجد:

$$\overrightarrow{r'}(u) = -a\sin u\,\vec{\imath} + a\cos u\,\vec{\jmath} + b\,\vec{k}$$

كذلك:

$$\overrightarrow{r''}(u) = -a\cos u\,\vec{\imath} - a\sin u\,\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

ويكون:

$$\overrightarrow{r'}(u) \wedge \overrightarrow{r''}(u) = ab\sin u\,\vec{\imath} - ab\cos u\,\vec{\jmath} + a^2\vec{k} =$$
$$= a\left[b\sin u\,\vec{\imath} - b\cos u\,\vec{\jmath} + a\vec{k}\right]$$

ووفقاً للعلاقة (3.1) تكون معادلة المستوي اللاصق هي:

$$(X - a\cos u)\,b\sin u - (Y - a\sin u)b\cos u + (Z - bu)a = 0$$

أو:

$$(b\sin u)X - (b\cos u)Y + aZ = abu$$

نجد الزاوية ϕ التي يصنعها المستوي الملاصق مع محور المنحني الحلزوني من العلاقة:

$$\sin\phi = \frac{a}{\sqrt{b^2sin^2u + b^2cos^2u + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ومنه نجد أن:

$$\tan\phi = \frac{a}{b}$$

أي أن المستوي الملاصق يصنع مع محور المنحني الحلزوني نفس تلك الزاوية الثابتة التي يصنعها مع المماس.

للمستوي الملاصق الخواص التالية:

1- إن المستوي TMK المبين بالشكل (1-3-1) والمار بالمماس MT وبالنقطة K الواقعة على المنحني L، ينتهي لينطبق على المستوي الملاصق P عندما تنتهي النقطة K إلى M.

2- إن المستوي p' المبين بالشكل(1-3-1) المار بالمماس MT والموازي للماس KS ينتهي كذلك لينطبق على المستوي P عندما تنتهي النقطة K إلى M.

يمكن اعتبار كل هذه الخواص تعريفاً للمستوي الملاصق.

2.3.1 متجه الناظم ثلاثي السطوح المرافق

إن العمود MN للمنحني L المبين بالشكل (1-3-1) والواقع في المستوي الملاصق P، يسمى بالناظم. أما العمود MB المتعامد مع المستوي الملاصق فيسمى بثنائي التعامد للمنحني. وأما المستوي TMB المار بالمماس وبثنائي التعامد فيسمى بالمستوي المقوم.

المستويات الثلاثة المتعامدة أي المستوي الملاصق TMN والمستوي العمودي NMB والمقوم BMT تشكل ثلاثي السطوح المرافق.

وكثيراً ما تعتبر المستقيمات المتعامدة الثلاث MT, MN, MB التي تشكل أضلاع ثلاثي السطوح المرافق كمحاور إحداثيات مرتبطة بالموضع (فيؤخذ المحور MT كالمحور x والناظم MN كالمحور y وثنائي التعامد MB كالمحور z)، وسنبحث لاحقاً الاتجاهات الموجبة لهذه المحاور.

وفي الحالة العامة تحسب هذه المتجهات حسب الترتيب الآتي:

متجه المماس $\vec{T} = \vec{r'}$

متجه ثنائي التعامد $\vec{B} = \vec{r'} \wedge \vec{r''}$

متجه الناظم $\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = \left(\vec{r'} \wedge \vec{r''}\right) \wedge \vec{r'}$

وبالتالي فإن العلاقة التي تعطينا المتجه $\vec{N}$ تصبح بسيطة إذا ما اعتبرنا أن القوس US للمنحني L المتحول المستقل.

لدينا:

$$\vec{N} = \left(\vec{r'} \wedge \vec{r''}\right) \wedge \vec{r'} = \vec{r''}\left(\overrightarrow{r'^2}\right) - \vec{r'}\left(\vec{r'}.\vec{r''}\right)$$

وبما أنه في هذه الحالة:

$\vec{r'}.\vec{r''} = 0$ ، $\overrightarrow{r'^2} = 1$ ، فإن $\vec{N} = \vec{r''}$

حيث يقع متجه التسارع $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ في المستوي الملاصق ويكون عمودياً على متجه المماس $\overrightarrow{dr}/dS$.

وبالنتيجة يكون:

$$\vec{N} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$$

مثال1–3–2: أوجد ثلاثي السطوح المرافق للمنحني الحلزوني:

$$\vec{r} = a\cos u\ \vec{\imath} + a\sin u\ \vec{\jmath} + bu\ \vec{k}$$

الحل: متجه المماس:

$$\vec{T} = \vec{r'} = -a\sin u\ \vec{\imath} + a\ \cos u\ \vec{\jmath} + b\ \vec{k}$$

متجه ثنائي التعامد:

$$\vec{B} = \vec{r'} \wedge \vec{r''} = ab\ \sin u\ \vec{\imath} - ab\cos u\ \vec{\jmath} + a^2\vec{k}$$

متجه الناظم:

$$\vec{N} = \vec{B} \wedge \vec{T} = -a(a^2+b^2)\cos u\,\vec{\imath} - a(a^2+b^2)\sin u\,\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$

وبالتالي تأخذ معادلات الناظم الشكل:

$$\frac{X-a\cos u}{\cos u} = \frac{Y-a\sin u}{\sin u} = \frac{Z-bu}{0}$$

يتضح من هذه المعادلات أن الناظم متعامد مع محور المنحني الحلزوني ويقطع هذا المحور في النقطة $(0,0,bu)$ فالناظم إذن يمر على امتداد نصف قطر الاسطوانة التي تحمل المنحني الحلزوني. كما ينطبق المستوي المقوم على المستوي المماس للاسطوانة.

3.3.1 الوضع المتبادل لمنحني ومستوي :

1- إذا لم يكن المستوي Q المار من النقطة M ماراً بالمستقيم MT المماس للمنحني L، فإن هذا المنحني يقع بالقرب من النقطة M على كلتا جهتي المستوي.

إن البعد d بين النقطة المجاورة M' الواقعة على المنحني L والمستوي Q في الحالة التي درسناها، يكون لا متناهياً في الصغر من نفس رتبة التناهي في الصغر للقوس $\widehat{MM'}$.

2- إذا كان المستوي Q ماراً بالمماس MT ولكنه غير ملاصق، فإن المنحني L يقع عادة بالقرب من النقطة M في جهة واحدة من المستوي (جهة تقعر المنحني L) ويمكن أن تكون هناك حالة شاذة عندما يكون المتجهان $\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}$ متوازيين.

وكحالة خاصة يقع المنحني L عادة في جهة واحدة من المستوي المقوم.

3- إذا كان المستوي Q ملاصقاً، فإن المنحني L يقع بالقرب من النقطة M عادة في كلتا جهتي المستوي ويمكن أن تكون هناك حالة شاذة عندما تكون المتجهات $\overrightarrow{r'}, \overrightarrow{r''}, \overrightarrow{r'''}$ واقعة في مستو واحد.

4.3.1 المتجهات الأساسية لثلاثي السطوح المرافق (ثلاثي فرينيه)

تعتبر أضلاع ثلاثي السطوح المرافق مجموعة إحداثيات مرافقة للموضع (آنية) وتؤخذ عليها المتجهات $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ الأحادية كما في مجموعة الإحداثيات المتعامدة الثابتة لتلعب على المجموعة المرافقة نفس دور المتجهات الأحادية $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

أما الاتجاهات الموجبة للمتجهات الأحادية المرافقة فتعتبر متفقة مع الاتجاهات الموجبة للمقادير المحمولة على أضلاع ثلاثي السطوح المرافق.

1- المتجه الأساسي للمماس $\vec{t}$، ويكون محمولاً على امتداد المماس وموجهاً في اتجاه تزايد المتحول:

$$\vec{t} = \frac{\vec{T}}{\sqrt{T^2}} = \frac{\overrightarrow{r'}(u)}{\sqrt{\overrightarrow{r'^2}(u)}}$$

إذا اعتبرنا S قوس المنحني L متحولاً فإن:

$$\vec{t} = \frac{d\,\vec{r}}{dS}$$

2- المتجه الأساسي للناظم $\vec{n}$، ويكون محمولاً على امتداد الناظم وموجهاً في اتجاه تقعر المنحني L.

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\sqrt{N^2}} = \frac{(\vec{r\prime} \wedge \vec{r''}) \wedge \vec{r\prime}}{\sqrt{\left|\vec{r\prime} \wedge \vec{r''}\right|^2} \sqrt{\left|\vec{r\prime} . \vec{r''}\right|}}$$

إذا اعتبرنا S كمتحول فهذه العلاقة تختصر وتصبح:

$$\vec{n} = \frac{\frac{d^2 \vec{r}}{dS^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dS^2}\right)^2}}$$

3- المتجه الأساسي لثنائي التعامد $\vec{b}$ ويكون محمولاً على امتداد ثنائي التعامد بحيث تكون المتجهات الثلاثة $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ تمثل مجموعة يمنى أو ثلاثية مباشرة.

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n} = \frac{\vec{r\prime} \wedge \vec{r''}}{\sqrt{\left(\vec{r\prime} \wedge \vec{r''}\right)^2}}$$

وعند أخذ المتحول S يكون لدينا:

$$\vec{b} = \frac{\frac{d\,\vec{r}}{dS} \wedge \frac{d^2 \vec{r}}{dS^2}}{\sqrt{\frac{d^2 \vec{r}}{dS^2}}}$$

تسمى ثلاثية (فرينيه) بالثلاثية المشكلة من المتجهات الأساسية $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$.

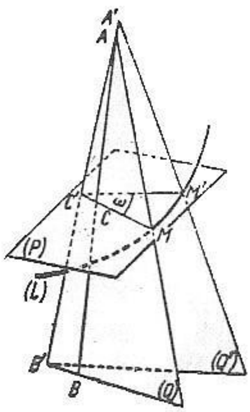
لا يعتمد اتجاه المتجه الأساسي للناظم على اختيار المتحول، بل يكون له معنى هندسي محسوس، أما المتجه الأساسي للماس فيمكن أن يتخذ أياً من الاتجاهين المتضادين، وهذا يعتمد على اختيار المتحول.

ومثالاً على ذلك: إذا افترضنا أن المتحول هو الزمن، فإن اتجاه المتجه $\vec{t}$ يتفق مع اتجاه حركة النقطة M على المنحني L. أما إذا كان المتحول هو القوس فإن اتجاه $\vec{t}$ يتفق مع اتجاه التزايد المعتمد للأقواس.

وهكذا نرى أن ليس هناك معنىً هندسياً محسوساً لاتجاه المتجه $\vec{t}$، وعندما يتعين اتجاه المتجه $\vec{t}$ يصبح اتجاه المتجه $\vec{b}$ معيناً بطبيعة الحال.

5.3.1 مركز ومحور ونصف قطر انحناء المنحني الفضائي

نفرض أن النقطة M' تتحرك على المنحني الفراغي L وتقترب من النقطة الثابتة M بحيث لا يكون الانحناء K مساوياً للصفر كما هو مبين بالشكل (2–1) عندئذ ينتهي المستقيم $A'B'$، الذي يتقاطع عنده المستوي العمودي الثابت Q مع المستوي العمودي المتحرك Q'، لينطبق على المستقيم AB المتعامد مع المستوي الملاصق P والذي يبعد عن النقطة M بمقدار $MC = \frac{1}{k}$.



الشكل (2–3–1)

في هذه الحالة يكون الشعاع MC موجهاً في جهة تقعر المنحني L.

يسمى المستقيم AB بمحور الانحناء. والنقطة C حيث يتقاطع AB مع المستوي الملاصق P تسمى بمركز الانحناء. ويسمى MC بنصف قطر الانحناء.

يرمز إلى نصف قطر الانحناء بالحرف ρ ويربط بين الكميتين ρ و k تناسب عكسي متبادل أي أن:

$$\rho = \frac{1}{k} \qquad , \qquad k = \frac{1}{\rho}$$

تسمى الدائرة المرسومة من مركز الانحناء C وبنصف قطر $CM = \rho$ بالدائرة الملاصقة أو بدائرة الانحناء للمنحني L (بالنسبة للنقطة M).

إذا كان انحناء المنحني L عند النقطة M مساوياً للصفر، فيقال عندئذ أن نصف قطر الانحناء لا نهائي ويكتب ذلك على الصورة $\rho = \infty$.

6.3.1 علاقات الانحناء ونصف القطر والمركز بالنسبة لمنحني فضائي

يعطى الانحناء k بالعلاقة:

$$k=\frac{\sqrt{\left(\overrightarrow{r\prime}\wedge\overrightarrow{r"}\right)^2}}{\left(\overrightarrow{r\prime^2}\right)^3}$$

وبدلالة الإحداثيات يكون:

$$k=\frac{\sqrt{(y\prime z"-z\prime y")^2+(z\prime x"-x\prime z")^2+(x\prime y"-y\prime x")^2}}{\sqrt{(x\prime^2+y\prime^2+z\prime^2)^3}}$$

إذا اعتبرنا القوس متحولاً، فإن العلاقتين السابقتين تختصران وتأخذان الشكل:

$$k=\sqrt{\frac{d^2\,\vec{r}}{dS^2}}=\sqrt{\left|\frac{d^2\,\vec{r}}{dS^2}\right|^2}$$

$$k=\sqrt{\left(\frac{d^2\,x}{dS^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\,y}{dS^2}\right)^2+\left(\frac{d^2\,z}{dS^2}\right)^2}$$

ويسمى المتجه $\frac{d^2\,\vec{r}}{dS^2}$ المائل في هذه العلاقة بمتجه الانحناء، ويتفق اتجاهه مع اتجاه $\overrightarrow{MC}$ المتجه الذي يبدأ من النقطة M الواقعة على المنحني L ويمتد إلى مركز الانحناء C.

نصف قطر المتجه $\overrightarrow{r_C}$ لمركز الانحناء يكون:

$$\overrightarrow{r_C}=\vec{r}+\vec{n}\;\rho$$

وبالتالي:

$$\overrightarrow{r_C}=\vec{r}+\frac{\overrightarrow{r\prime^2}}{\left(\overrightarrow{r\prime}\wedge\overrightarrow{r"}\right)^2}\left[\left(\overrightarrow{r'}\wedge\overrightarrow{r"}\right)\wedge\overrightarrow{r'}\right]$$

ووفقاً لذلك، تتعين إحداثيات مركز الانحناء x_c, y_c, z_c حسب العلاقات:

$$x_c=x+\frac{{x'}^2+{y'}^2+{z'}^2}{A^2+B^2+C^2}(Bz'-Cy')$$

$$y_c=y+\frac{{x'}^2+{y'}^2+{z'}^2}{A^2+B^2+C^2}(Cx'-Az')$$

$$z_c=z+\frac{{x'}^2+{y'}^2+{z'}^2}{A^2+B^2+C^2}(Ay'-Bx')$$

حيث تعبر الرموز A, B, C عن القيم التالية:

$$A = y'z''\text{-}z'y'' \qquad B = z'x'' - x'z'' \qquad C = x'y'' - y'x''$$

إذا اعتبرنا القوس كمتحول يكون:

$$\overrightarrow{r_C} = \vec{r} + \frac{\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right)^2} = \vec{r} + \rho^2 \frac{d^2\vec{r}}{dS^2}$$

$$x_c = x + \frac{\frac{d^2x}{dS^2}}{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2} = x + \rho^2 \frac{d^2x}{dS^2}$$

$$y_c = y + \frac{\frac{d^2y}{dS^2}}{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2} = y + \rho^2 \frac{d^2y}{dS^2}$$

$$z_c = z + \frac{\frac{d^2z}{dS^2}}{\left(\frac{d^2x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dS^2}\right)^2} = z + \rho^2 \frac{d^2z}{dS^2}$$

وفي حال كون المنحني مستوياً نجعل $z = z' = z'' = 0$ فنحصل على العلاقات التي تعطي الانحناء ونصف قطر الانحناء ومركز الانحناء.

مثال1–3–3: أوجد الانحناء ونصف قطر الانحناء ومركزه بالنسبة للمنحني الحلزوني L.

الحل: نعتبر طول القوس متحولاً فيكون لدينا:

$$\vec{r} = a\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{\imath} + a\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{\jmath} + \frac{bS}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{k}$$

وبتفاضل هذه العلاقة مرتين نجد:

$$r'' = \frac{-a}{a^2+b^2}\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \vec{\imath} - \frac{a}{a^2+b^2}\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{\jmath} + 0\vec{\mathrm{k}}$$

وبالتالي يكون:

$$k = \frac{-a}{a^2+b^2} \quad , \quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}$$

أي أن الانحناء ونصف قطر الانحناء ثابتان.

وكذلك نجد:

$$x_c = a\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x_c = -\frac{b^2}{a}\cos\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}x$$

$$y_c = -\frac{b^2}{a}\sin\frac{S}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{b^2}{a^2}y$$

$$z_c = \frac{bS}{\sqrt{a^2+b^2}} = z$$

ويتضح من هذا أن تعيين مركز الانحناء يتطلب أن نمد نصف قطر الأسطوانة التي تحوي المنحني الحلزوني إلى ما بعد محور الأسطوانة بمقدار ثابت b^2/a وعليه فإن مركز الانحناء الحلزوني L يرسم المنحني الحلزوني L_1 ذا الخطوة $h = 2\pi b$ نفسها وتحويه أسطوانة متمحورة مع أسطوانة الحلزون ونصف قطرها $a_1 = b^2/a$. يبين تماثل النسبة $aa_1 = b^2$ إن المنحنيين L, L_1 متبادلان أي أن مركز انحناء L_1 يرسم المنحني L.

7.3.1 إشارة الانحناء:

يمكن إعطاء انحناء المنحنيات المستوية الواقعة في مستو واحد إشارة ما بالشكل الآتي: إذا كان دوران متجه المماس يتم عكس دوران عقارب الساعة عند تحرك النقطة M في جهة تزايد المتحول u فإن الانحناء يعتبر موجباً. وإذا تم الدوران في اتجاه دوران عقارب الساعة فيعتبر الانحناء سالباً. على أن نلاحظ أن المنحني منسوب لجملة يمنى.

تتغير إشارة الانحناء إلى الإشارة المعاكسة إذا ما أبدلنا المتحول u بمتحول آخر u_1 يتناقص عندما تتزايد u وعندما يعتبر الإحداثي x متحولاً فإن تزايد المتحول يوافق انتقال النقطة M إلى اليمين، ويكون الانحناء في هذه الحالة موجباً عندما يكون المنحني مقعراً إلى أعلى وسالباً إذا كان المنحني مقعراً إلى الأسفل ويكون:

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال1–3–4: انحناء الدائرة:

$$x = a\cos u \qquad , \qquad y = a\sin u$$

إننا بتطبيق العلاقة السابقة وبعد إجراء الاشتقاقات على x و y نجد أن انحناء الدائرة هو $K = 1/a$ (وهذا بديهي لأن a المائل في معادلات الدائرة يمثل نصف قطر هذه الدائرة).

(يتم تزايد المتحول بدوران بعكس دوران عقارب الساعة، وفي الجهة نفسها يدور متجه المماس) إذا أعطينا نفس تلك الدائرة بالعلاقتين:

$$x = a\cos u_1 \qquad , \qquad y = -a\sin u_1$$

فانحناء الدائرة وفق العلاقة السابقة يكون $K = -1/a$.

إذا أعطينا الدائرة بالعلاقة:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

فنجد بالنسبة للنصف الأعلى من الدائرة نحصل على $K = -1/a$ (إذ يتم الدوران عكس عقارب الساعة ويكون التقعر موجهاً نحو الأسفل).

وبالنسبة لنصف الدائرة الأسفل نحصل على $K = 1/a$.

يبين المثال أنه ليس هناك معنى هندسي لإشارة الانحناء بحد ذاتها. إنما هناك فقط معنى لتغير الإشارة عند المرور بنقطة ما (نقطة الانقلاب) أو على العكس يكون هناك معنى لثبات الإشارة في جزء ما.

لا يصح إطلاقاً أن نعطي الانحناء للمنحنيات الفضائية (بما في ذلك المستوية) إشارة ما إذ أنه لا يوجد في الفضاء دوران في اتجاه عقارب الساعة أو بعكس عقارب الساعة أما بالنسبة للمنحنيات الواقعة في مستو واحد فيختلف عن هذان الاتجاهان لأننا إذا ما اخترنا الجهة على المستوي (الأمامية) فإننا نأخذ في اعتبارنا المراقب الذي يرى هذه الجهة بالذات. وإذا ما اعتمدنا على بعض الخصائص، في التمييز بين الجهة الأمامية والجهة الخلفية على المستويات الملاصقة لمنحن ما في الفضاء، فإن المراقب لن يستطيع من أي وضع كان، رؤية جميع المستويات من الجهة الأمامية.

8.3.1 الالتواء

يتميز التواء المنحني الفضائي بدرجة انحراف هذا المنحني عن الشكل المستوي (مثله مثل الانحناء الذي يعبر عن درجة الانحراف عن الشكل المستقيم).

تعريف1–3–2:التواء المنحني L عند النقطة M هو بالقيمة المطلقة المقدار الذي تنتهي إليه نسبة الزاوية ω' التي يصنعها كل من ثنائي التعامد $MB, M'B$ إلى طول القوس $\widehat{MM'}$

وذلك عندما تنتهي النقطة M' إلى النقطة M بشرط أن تظل دوماً على L {انظر الشكل (1-3-2)} تعتبر إشارة الالتواء (وكذلك إشارة الزاوية ω') موجبة عندما يكون زوج ثنائي التعامد $MB, M'B$ أيمن وسالبة عندما يكون هذا الزوج أيسر. يشار الالتواء بالرمز:

$$\sigma = \lim \frac{\omega'}{\widehat{MM'}}$$

يحافظ ثنائي التعامد للمنحني المستوي على اتجاه ثابت، أي أن التواء المنحني المستوي يساوي الصفر دوماً. وعلى العكس أيضاً فإذا كان التواء المنحني معدوماً دائماً فإن المنحني يكون مستوياً. أما بالنسبة للمنحنيات غير المستوية فيمكن أن يكون الالتواء مساوياً للصفر في نقط منفردة فقط (نقط الاستواء). نسمي المقدار $\tau = 1/\sigma$ المتناسب تناسباً عكسياً مع الالتواء بنصف قطر الالتواء وذلك بصورة مشابهة لنصف قطر الانحناء. غير أن هذا التشابه غير تام. فالعملية المشابهة لعملية تعيين ورسم مركز الانحناء لا تعطينا أي مركز للالتواء.

نعبر عن الالتواء بالعلاقة:

$$\sigma = \frac{\vec{r'}.\left(\vec{r''} \wedge \vec{r'''}\right)}{\left(\vec{r'} \wedge \vec{r''}\right)^2}$$

أو في صورة الإحداثيات:

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2}$$

إذا اعتبرنا القوس S متحولاً فإن العلاقتين السابقتين تختصران بالشكل:

$$\sigma = \frac{\left(\frac{d\vec{r}}{dS}\right).\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{dS^3}\right)}{\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2}\right)^2} = \rho^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dS}\right).\left(\frac{d^2\vec{r}}{dS^2} \wedge \frac{d^3\vec{r}}{dS^3}\right)$$

أو بصورة الإحداثيات:

$$\sigma = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dS} & \frac{dy}{dS} & \frac{dz}{dS} \\ \frac{d^2x}{dS^2} & \frac{d^2y}{dS^2} & \frac{d^2z}{dS^2} \\ \frac{d^3x}{dS^3} & \frac{d^3y}{dS^3} & \frac{d^3z}{dS^3} \end{vmatrix} \cdot \left[\left(\frac{d^2\,x}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,y}{dS^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2\,z}{dS^2}\right)^2\right]$$

مثال1–3–5: أوجد التواء المنحني الحلزوني:

$$x = a\cos u \qquad y = a\sin u \qquad z = bu$$

الحل: لدينا:

$$\vec{r'}.\left(\vec{r''} \wedge \vec{r'''}\right) = \begin{vmatrix} -a\sin u & a\sin u & b \\ -a\cos u & -a\sin u & 0 \\ a\sin u & -a\cos u & 0 \end{vmatrix} = a^2 b$$

$$\left(\vec{r'} \wedge \vec{r''}\right)^2 = a^2(a^2 + b^2)$$

وبالتالي نجد:

$$\sigma = \frac{b}{a^2+b^2}$$

ويتضح من هنا أن التواء المنحني الحلزوني الأيمن $(b > 0)$ موجب وأن التواء المنحني الحلزوني الأيسر سالب.

4.1 المؤثر التفاضلي (∇):

تعريف1–4–1: يعرف المؤثر التفاضلي (∇) بالشكل:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot \hat{k}$$

فإذا كانت u دالةً عدديةً للموضع،عندئذ يؤثر عليها (∇) بالشكل:

$$\nabla(u) = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot \hat{k}$$

وتسمى هذه العلاقة بتدرج الدالة u ويرمز له بـ : $grad\, u$

ملاحظة: إن المتجه $\nabla(u)$ عمودي على سطح السوية للدالة u.

1.4.1 أهم خواص متجه التدرج:

$$1):\nabla(u_1+u_2)=\nabla u_1+\nabla u_2 \quad ;$$
$$2):\nabla(u_1\cdot u_2)=(\nabla u_1)u_2+u_1(\nabla u_2)$$
$$3):\ \nabla u=\hat{r}\cdot\frac{du}{dr}=u'(r)\cdot\hat{r}\ ;\ u=u(r)\ ;$$
$$4):(\vec{a}\cdot\nabla)u=\vec{a}\cdot(\nabla u)$$

(مشتق التابع u وفق الشعاع $\vec{a}$)

مثال 1–4–1: إذا كان:

$$\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}\ ;\ r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ \ ;\ \ u=u(r)$$

فأثبت أن:

$$grad\,u(r)=u'(r)\cdot\hat{r}$$

الحل:

$$grad\,u(r)=\frac{\partial u(r)}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial u(r)}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial u(r)}{\partial z}\hat{k}$$

ولكن:

$$\frac{\partial u(r)}{\partial x}=\frac{\partial u(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\acute{u}(r)\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}=\acute{u}(r)\frac{x}{r}$$

وبالمثل:

$$\frac{\partial u(r)}{\partial y}=\acute{u}(r)\frac{y}{r}\ \ ;\ \ \frac{\partial u(r)}{\partial z}=\acute{u}(r)\frac{z}{r}$$

وبالتالي:

$$grad\,u(r)=u'(r)\left(\frac{x}{r}\hat{\imath}+\frac{y}{r}\hat{\jmath}+\frac{z}{r}\hat{k}\right)=u'(r)\frac{\vec{r}}{r}=u'(r)\cdot\hat{r}$$

مثال 1–4–2: ليكن $\vec{B},\vec{A}$ شعاعان ثابتان والمطلوب:

1 –أثبت أن: $\nabla=(\bar{A}.\bar{r})=\bar{A}$

2 –أثبت أن: $\nabla[(\bar{A}.\bar{r}).(\bar{B}.\bar{r})]=(\bar{A}.\bar{r})\bar{B}+(\bar{B}.\bar{r})\bar{A}$

الحل:

1- بما أن $\vec{A}$ شعاع ثابت فرضاً فمركباته هي الأعداد الثابتة α,β,γ أي:

$$\vec{A}=\alpha\hat{\imath}+\beta\hat{\jmath}+\gamma\hat{k}$$

ولكن:

$$\vec{r}=x\hat{\imath}+\ y\hat{\jmath}+z\hat{k}$$

وبالتالي:

$$\vec{A}.\vec{r}=\alpha x+\beta y+\gamma z\ \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla(\bar{A}.\bar{r})=\nabla(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha\hat{\imath}+\beta\hat{\jmath}+\gamma\hat{k}=\vec{A}$$

هذا يعني أن: $\nabla(\bar{A}.\bar{r})=\ \vec{A}$

2- بما أن $\bar{A}.\bar{r}$ و $\bar{B}.\bar{r}$ مقداران عدديان عندئذ نفرض أن $\bar{B}.\bar{r}=u_2$ و $\bar{A}.\bar{r}=u_1$

$$\Longrightarrow \nabla[(\bar{A}.\bar{r}).(\bar{B}.\bar{r})]=\nabla(u_1.u_2)=\ u_2(\nabla u_1)+u_1(\nabla u_2)$$

ولكن، حسب الطلب الأول $\nabla u_1=\nabla(\bar{A}.\bar{r})=\vec{A}$

$$\nabla u_2=\nabla(\bar{B}.\bar{r})=\vec{B}\Longrightarrow\ \nabla\big[(\vec{A}.\vec{r}).(\vec{B}.\vec{r})\big]=(\vec{B}.\vec{r})\vec{A}+(\vec{A}.\vec{r})\vec{B}$$

مثال 1–4–3: أثبت أن: $grad\left(\ln r\right)=\dfrac{\vec{r}}{r^2}$

الحل: $grad\left(\ln r\right)=$

$$=\frac{\partial\ln r}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\ln r}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial\ln r}{\partial z}\hat{k}=\frac{\partial\ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial\ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial\ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

$$=\frac{1}{r}\left(\frac{x}{r}\hat{\imath}+\frac{y}{r}\hat{\jmath}+\frac{z}{r}\hat{k}\right)=\frac{1}{r^2}\left(x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}\right)=\frac{\vec{r}}{r^2}$$

تعريف1–4–2: إن المشتق الموجه للتابع u وفق شعاع التوجيه $\hat{a}$ هو:

$$\left(\hat{a}\cdot\nabla\right)u=l\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+m\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+n\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

حيث: $\hat{a}=l\cdot\hat{i}+m\cdot\hat{j}+n\cdot\hat{k}$

وإن أعظم مشتق موجه للتابع u، هي قيمة تدرج هذا التابع، أي:

$$du=\nabla u\cdot d\vec{r}$$

وذلك لأن:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

ومنه نجد:

$$du = \nabla u \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\hat{k}\right)\cdot\left(dx\cdot\hat{i} + dy\cdot\hat{j} + dz\cdot\hat{k}\right)$$

$$\Rightarrow du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

2.4.1 المعنى الهندسي لتدرج دالة سلمية

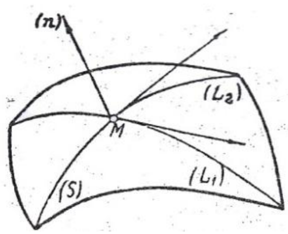
إن الدالة السلمية $f\ (x,y,z)$ تأخذ في النقطة $M\ (x_0,y_0,z_0)$ من الفراغ D القيمة $f(x_0,y_0,z_0) = c$. ويسمى السطح الذي معادلته:

بسطح السوية المار بالنقطة $M\ (x_0,y_0,z_0)$ أي أن من كل نقطة M من الفراغ D يمر سطح سوية واحد و يتعين بمعادلته وفق معادلة السطح السابقة.

فإذا انتقلت النقطة M إلى نقطة أخرى M' على هذا السطح فإن قيمة التابع تبقى ثابتة وتساوي c وبالتالي:

$$\frac{df}{du} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \vec{\nabla} f\ .\vec{u} = 0$$

فإذا انتقلت النقطة M' على سطح السوية المار بالنقطة M فهي عندما تنتهي M' إلى M ينتهي القاطع MM' إلى المماس للسطح في النقطة M وبالتالي فالمتجه $\vec{u}$ هو مماس للسطح في النقطة M.



الشكل:1-4-1

ووفقاً للعلاقة السابقة نستنتج أن شعاع التدرج للدالة السلمية f في النقطة M يتعامد مع جميع المماسات لهذا السطح في النقطة M. أي أن متجه التدرج في أية نقطة يكون عمودياً على سطح السوية المار بتلك النقطة ومن ذلك نستنتج النتيجة الهامة التالية:

إذا رمزنا $\frac{df}{du}$ لمشتقة الدالة السلمية f في اتجاه الناظم $\vec{N}$ في النقطة M فإن هذه المشتقة هي:

$$\frac{df}{dn} = \vec{\nabla} f \cdot \vec{N}$$

حيث يمثل $\vec{N}$ متجه الواحدة على الناظم للسطح في النقطة M.

ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$\vec{N}.\frac{df}{dN} = \vec{\nabla} f$$

وهذا يدل أن متجه التدرج يتجه دوماً باتجاه تزايد f مهما يكن اتجاه الناظم $\vec{N}$.

من الواضح أن ما يميز سطوح السوية هو أن الدالة f تحافظ في جميع نقاط السطح الواحد على قيمته ثابتة c مرتبطة بإحداثيات النقطة التي يمر بها السطح. فإذا أعطينا لهذه الثابتة قيماً عددية مختلفة، حصلنا على مجموعة من سطوح السوية.

هذا مع العلم أن من كل نقطة من الفضاء يمر سطح سوية معين. وبالعودة إلى مثال الجسم الساخن فإن سطوح السوية فيه تمثل النقاط ذات درجات الحرارة المتساوية لكل سطح.

3.4.1 تباعد(أو تفرق) دالة متجهية للموضع:

لتكن $\vec{V}$ دالة متجهية للموضع، فإن تباعد(أو تفرق) الدالة $\vec{V}$ هو:

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \nabla.\vec{V} = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)$$

وبالتالي من المثال (1–4–1) ينتج أن: $\operatorname{div}(\vec{r}) = 3$

4.4.1 المعنى الهندسي للتباعد

إن تباعد الحقل في النقطة M هو نهاية نسبة تدفق الحقل خلال سطح مغلق صغير محيط بالنقطة M إلى قياس الحجم المحدد بهذا السطح. وبتعبير آخر يمكننا القول إن معدل تدفق السائل مقدراً بواحدات الحجوم في وحدة الزمن يساوي تباعد الشعاع $\rho\vec{V}$ حيث ρ كثافة السائل. و $\vec{V}$ سرعته.

5.4.1 أهم خواص تباعد الحقل المتجهي

إذا كانت $w(x,y,z)$ دالةً سلميةً قابلةً للاشتقاق بالنسبة لـ $x,\ y,\ z$ وكانت $V(x,y,z)$ دالةً متجهيةً قابلةً للاشتقاق جزئياً فإن:

1 - $\vec{\nabla}.(\vec{V}+W)=\vec{\nabla}.\vec{V}+\vec{\nabla}.\vec{W}$

كذلك بفرض f دالةً سلميةً و$\vec{V}$ دالةً متجهيةً فإن:

2 - $\vec{\nabla}.(f\vec{V})=(\vec{\nabla}f)\vec{V}+f(\vec{\nabla}\,\vec{V})$

3 - برهان الخاصة الأولى:

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{V}+\vec{W}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left[(V_1+W_1)\vec{\imath}+(\,V_2+W_2)\vec{\jmath}+(V_3+W_3)\vec{k}\right]=\frac{\partial}{\partial x}(V_1+W_1)+\frac{\partial}{\partial y}(V_2+W_2)+\frac{\partial}{\partial z}(V_3+W_3)$$

$$=\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial V_3}{\partial z}+\frac{\partial W_1}{\partial x}+\frac{\partial W_2}{\partial y}+\frac{\partial W_3}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_1\vec{\imath}+V_2\,\vec{\jmath}+V_3\vec{k}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath}+\left(\frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(W_1\vec{\imath}+W_2\,\vec{\jmath}+W_3\vec{k}\right)=\vec{\nabla}.\vec{V}+\vec{\nabla}.W$$

برهان الخاصة الثانية:

$$\vec{\nabla}.\left(f\ \vec{V}\right)=\vec{\nabla}.\left(fV_1\vec{\imath}+fV_2\vec{\jmath}+fV_3\vec{k}\right)=\ \frac{\partial}{\partial x}\ (fV_1)+\frac{\partial}{\partial y}(fV_2)+$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(fV_3)=\frac{\partial f}{\partial x}V_1+f\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}V_2+f\frac{\partial V_2}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}V_3+f\frac{\partial V_3}{\partial z}$$

$$= \frac{f}{\partial x}V_1 + \frac{\partial f}{\partial y}V_2 + \frac{\partial f}{\partial z}V_3 + f\left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k}\right) + f\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k}\right) = (\vec{\nabla}f).\vec{V} + f(\vec{\nabla}.\vec{V})$$

5.1 دوران حقل متجهي

1.5.1 تعريف الدوران

ليكن لدينا الحقل المتجهي $\vec{V}$ المحدد قياسه واتجاهه في كل نقطة من الفراغ المحدد بـ D والقابل للاشتقاق عند كل نقطة (x, y, z) في هذا الفراغ:

$$\vec{V}(x,y,z) = V_1(x,y,z)\,\vec{\imath} + V_2(x,y,z)\,\vec{\jmath} + V_3(x,y,z)\,\vec{k}$$

إن دوران الدالة المتجهية $\vec{V}$ ويرمز له بالرمز $\mathrm{rot}\,\vec{V}$ أو $\mathrm{curl}\,\vec{V}$ معرف كما يلي:

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = (\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}) \wedge (V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

لنلاحظ أنه عند فك المعين فإن العوامل $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ لا بد وأن تسبق V_1, V_2, V_3

وبالتالي من المثال (1–4–1) ينتج أن: $\mathrm{rot}(\vec{r}) = \vec{0}$

2.5.1 المعنى الهندسي للدوران

بفرض أن لدينا جسماً ما يدور بسرعة زاوية منتظمة ω حول محور Δ. فيعرّف متجه السرعة الزاوية $\vec{\Omega}$ بأنه المتجه المحمول على المحور Δ والموجه على النحو الذي يكون معه دوران الجسم حول Δ موجباً.

لتكن O نقطة ثابتة على المحور Δ و$\vec{R}$ متجه الموضع $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ الذي يعين موضع النقطة M من الجسم.

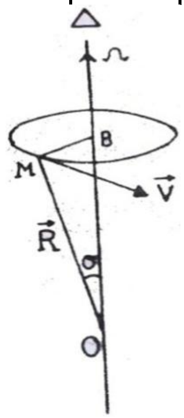
من الشكل (1- 3) نجد نصف قطر دوران M حول Δ هو: $MB = |\vec{R}| \sin\theta$

وبذلك فإن السرعة الخطية $\vec{V}$ للنقطة M تساوي:

$$\vec{V} = \omega|\vec{R}|\sin\theta = |\vec{\Omega}||\vec{R}|\sin\theta$$

وهذا المقدار كما نعلم هو:

$$\vec{V} = |\vec{\Omega} \wedge \vec{R}|$$



الشكل: 1–3

كما أن متجه السرعة الخطية عمود على المستوي المعين بالمتجهين $\vec{R}$، $\vec{\Omega}$ بحيث تؤلف المتجهات $\vec{V}, \vec{\Omega}, \vec{R}$ ثلاثية موجبة أي أن: $\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{R}$

فإذا كان:

$$\vec{R} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \quad , \quad \vec{\Omega} = \Omega_1\,\vec{\imath} + \Omega_2\vec{\jmath} + \Omega_3\vec{k}$$

لنحسب المتجه $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \vec{\Omega} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\Omega_2 z - \Omega_3 y)\vec{\imath} + (\Omega_3 x - \Omega_1 z)\vec{\jmath} + (\Omega_1 y - \Omega_2 x)\vec{k}$$

لنحسب الآن $\vec{\nabla} \wedge \vec{\mathrm{V}}$:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Omega_2 z - \Omega_3 y & \Omega_3 x - \Omega_1 z & \Omega_1 y - \Omega_2 x \end{vmatrix} =$$

$$= (\Omega_1 + \Omega_1)\vec{\imath} + (\Omega_2 + \Omega_2)\vec{\jmath} + (\Omega_3 + \Omega_3)\vec{k} = 2\vec{\Omega}$$

أي أن متجه السرعة الزاوية لجسم يدور يساوي نصف دوران متجه السرعة الخطية في أية نقطة من الجسم وهذا يفسر التسمية بدوران المتجه $\vec{\nabla}\wedge\vec{V}$.

3.5.1 أهم خواص دوران حقل متجهي

الخاصة الأولى:

$$\operatorname{div}\ \operatorname{grand} f = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

الخاصة الثانية:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla} f = 0$$

الخاصة الثالثة:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{V}\right) = 0$$

الخاصة الرابعة:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\ \vec{V} = \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right) - \nabla^2 V$$

الخاصة الخامسة:

$$\vec{\nabla}\wedge(f\vec{V}) = f\vec{\nabla}\wedge\vec{V} + \vec{\nabla}f\wedge\vec{V}$$

الخاصة السادسة:

$$\vec{\nabla}.(\vec{V}\wedge\vec{u}) = (\vec{\nabla}\wedge\vec{V}).\vec{u} - (\vec{\nabla}\wedge\vec{u}).\vec{V}$$

وذلك بفرض أن f تابع سلمي وقابل للاشتقاق مرتين وأن $\vec{u},\vec{V}$ كل منهما تابع متجهي مستمر وقابل للاشتقاق وأن المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة أيضاً.

6.1 قواعد الاشتقاق:

1): $\nabla.(u\vec{v}) = (\nabla u).\vec{v} + u(\nabla.\vec{v}) \Longrightarrow \operatorname{div}(u\vec{v}) = (\operatorname{grad} u).\vec{v} + u\operatorname{div}\vec{v}$
2): $\nabla\wedge(u.\vec{v}) = (\nabla u)\wedge\vec{v} + u(\nabla\wedge\vec{v}) \Longrightarrow \operatorname{rot}(u\vec{v}) = (\operatorname{grad} u).\vec{v} + u\operatorname{div}\vec{v}$

$$3):\ \nabla(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{v}(\nabla\wedge\vec{u}) - \vec{u}.(\nabla\wedge\vec{v}) \Longrightarrow$$
$$\operatorname{div}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{v}.\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}.\operatorname{rot}\vec{v}$$
$$4):\ \nabla\wedge(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (\vec{v}.\nabla)\vec{u} - (\vec{u}.\nabla)\vec{v} + \vec{u}(\nabla.\vec{u}) - \vec{v}(\nabla.\vec{u}) \Longrightarrow$$
$$\operatorname{rot}(\vec{u}\wedge\vec{v}) = (\vec{v}.\nabla)\vec{u} - (\vec{u}.\nabla)\vec{v} + \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u}$$
$$5):\nabla(\vec{u}.\vec{v}) = (\vec{v}.\nabla)\vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{v} + \vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{u}) + \vec{u}\wedge(\nabla\wedge\vec{v}) \Longrightarrow$$
$$\operatorname{grad}(\vec{u}.\vec{v}) = (\vec{v}.\nabla)\vec{u} + (\vec{u}.\nabla)\vec{v} + \vec{v}\wedge\operatorname{rot}\vec{u} + \vec{u}\wedge\operatorname{rot}\vec{v}$$

مثال 1–6–1: أثبت أن:

$$\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$
$$\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r^3}\ .\vec{r}\right) = \left(\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\right).\vec{r} + \frac{1}{r^3}\operatorname{div}(\vec{r})$$

ولكن:

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(\frac{1}{r^3}\right)'\hat{r} = \frac{-3}{r^4}\hat{r} = \frac{-3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{-3}{r^4}\vec{r}$$
$$\operatorname{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

نعوض:

$$\nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{-3}{r^5}\ \vec{r}.\vec{r} + \frac{3}{r^3} = \frac{-3}{r^5}r^2 + \frac{3}{r^3} = 0$$

7.1 المشتقات المتجهية من المرتبة الثانية:

1.7.1 تفرق التدرج:

$$\begin{cases}\nabla.(\nabla u) = (\nabla.\nabla)u = \nabla^2 u\\ \operatorname{div}\operatorname{grad}u = \operatorname{Lap}u\end{cases}$$

يسمى $\nabla^2 \equiv \operatorname{Lap}$ مؤثر لابلاس حيث $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

* نسمي كل دالة u تحقق المعادلة: $\nabla^2 u = 0$ دالة توافقية ،كما نسمي هذه المعادلة معادلة لابلاس.

ملاحظة: $\nabla^2\vec{F} = (\nabla.\nabla)\vec{F} \neq \nabla.(\nabla\vec{F})$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \& \qquad \nabla^2\vec{F} = \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{F}}{\partial z^2}$$

2.7.1 دوران التدرج:

$$\begin{cases} \nabla \wedge (\nabla u) = \vec{0} \\ \text{rot grad}\, u = \vec{0} \end{cases}$$

نتيجة: $\vec{\mathrm{F}} \in cl^1 . \nabla \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \exists\, u \in cl^1 : \vec{F} = \nabla u$

ونسمي $\vec{F}$ في هذه الحالة متجه كموني كما نسمي u كمونه العددي.

وإذا كان أيضاً $\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \nabla . \vec{F} = \nabla . (\nabla u) = \nabla^2 u = 0$ أي ينعدم تفرق المتجه الكموني إذا كان كمونه العددي دالةً توافقيةً.

ملاحظة:

$$if:\ \ B = \text{const} \ \ \Rightarrow \ \ \vec{F} = \nabla(u + B) = \nabla u$$

أي أن $u + B$ هو كمون عددي للمتجه الكموني $\vec{F}$.

3.7.1 تفرق الدوران:

$$\begin{cases} \nabla . \left(\nabla \wedge \vec{F}\right) = 0 \\ \text{div rot}\, \vec{F} = 0 \end{cases}$$

نتيجة:

$$\vec{F} \in cl^1, \nabla . \vec{F} = 0 \Rightarrow \exists\, \vec{A} \in cl^1 : \vec{F} = \nabla \wedge \vec{A}$$

نسمي $\vec{F}$ في هذه الحالة متجه لولبي كما نسمي $\vec{A}$ كمونه المتجهي.

ملاحظة: إذا كانت u دالةً عدديةً اختياريةً، فإن:

$$\vec{F} = \nabla \wedge \left(\vec{A} + \nabla u\right) = \nabla \wedge \vec{A} + \nabla \wedge (\nabla u) = \nabla \wedge \vec{A} + \vec{0} = \nabla \wedge \vec{A}$$

أي أن $\left(\vec{A} + \nabla u\right)$ هو أيضاً كمون متجهي للمتجه اللولبي $\vec{F}$.

* إذا كان $\vec{F}$ متجهاً كمونياً لولبياً ، فهو تدرج لدالة عددية توافقية:

البرهان: (1) $\vec{F} = \nabla u$ "لأن $\vec{F}$ كموني"

(2) $\nabla . \vec{F} = 0$ "لأن $\vec{F}$ لولبي"

نعوض (1) في (2): $0 = \nabla . \vec{F} = \nabla . (\nabla u) = \nabla^2 u \Longrightarrow \nabla^2 u = 0$

أي أن u دالة توافقية.

4.7.1 دوران الدوران وتدرج التفرق:

$$\begin{cases} \nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{F}\right) = \nabla\left(\nabla . \vec{F}\right) - \nabla^2 \vec{F} \\ \text{rot rot } \vec{F} = \text{grad div } \vec{F} - \text{Lap } \vec{F} \end{cases}$$

مثال 1–7–1: أثبت أن الدالة العددية $u = \frac{1}{r}$ هي دالة توافقية في نطاق فراغي يطلب تعينه.

الحل: إن $u = \frac{1}{r} \in cl^2$ في أي نطاق فراغي لا يشمل مبدأ الإحداثيات، وعندئذ فإن $\nabla^2 u$ موجود في هذا النطاق.

$$\nabla^2 u = (\nabla . \nabla) u = \nabla . (\nabla u) = \nabla . \left(\nabla \frac{1}{r}\right) = \nabla . \left(-\frac{1}{r^2} \hat{r}\right) = \nabla . \left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\nabla . \left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$$

وذلك حسب تمرين سابق.

8.1 التدرج والتفرق والدوران واللابلاسي في الإحداثيات الاسطوانية والكروية:

بفرض u, v, w الإحداثيات الاسطوانية أو الكروية، و$\vec{r}$ متجه الموضع، عندئذ نضع:

$$h_u = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \quad ; \quad h_v = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| \quad ; \quad h_w = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|$$

فإذا كان:

$$\vec{F}(u, v, w) = (\hat{u} F_u + \hat{v} F_v + \widehat{w} F_w) \in cl^2; \ U(u, v, w) \in cl^2 \ ; h_u \, h_v \, h_w \neq 0$$

عندئذ:

$$1): \nabla U = \left(\frac{\hat{u}}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{v}}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\widehat{w}}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right) U$$

$$2): \nabla . \vec{F} = \frac{1}{h_u \, h_v \, h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_v \, h_w \, F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u \, h_w \, F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u \, h_v \, F_w)\right]$$

$$3): \nabla \wedge \vec{F} = \frac{1}{h_u\ h_v\ h_w}\begin{vmatrix} h_u\hat{u} & h_v\hat{v} & h_w\hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ h_uF_u & h_vF_v & h_wF_w \end{vmatrix}$$

$$4): \nabla^2 U = \frac{1}{h_u\ h_v\ h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v\ h_w}{h_u}\frac{\partial U}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_u\ h_w}{h_v}\frac{\partial U}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_u\ h_v}{h_w}\frac{\partial U}{\partial w}\right)\right]$$

مثال 1–8–1: أثبت أن: $\nabla\phi = \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}$

الحل: الإحداثيات هي الكروية $u = r, v = \theta, w = \phi$ وعندئذ يكون متجه الموضع:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = (r\cos\phi\sin\theta)\hat{\imath} + (r\sin\phi\sin\theta)\hat{\jmath} + (r\cos\theta)\hat{k}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \left|(\cos\phi\sin\theta)\hat{\imath} + (\sin\phi\sin\theta)\hat{\jmath} + (\cos\theta)\hat{k}\right| = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = \left|(r\cos\phi\cos\theta)\hat{\imath} + (r\sin\phi\cos\theta)\hat{\jmath} + (-r\sin\theta)\hat{k}\right| = r$$

$$h_\phi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = \left|(-r\sin\phi\sin\theta)\hat{\imath} + (r\cos\phi\sin\theta)\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right| = r\sin\theta$$

وذلك بشرط $r^2\sin\theta \neq 0$ وبالتالي يتم حساب التدرج في أي نطاق فراغي لا يتقاطع مع المحور OZ:

لدينا: $$\nabla\phi = \left(\frac{\hat{r}}{h_r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{h_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{h_\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\phi = \frac{\hat{\phi}}{h_\phi} = \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}$$

مثال 1–8–2: أثبت أن $r^3\vec{r}$ هي دالة متجهية كمونية وأوجد كمونها العددي u ثم احسب $\nabla^2 u$.

الحل: نحسب دوران الدالة المتجهية $r^3\vec{r}$

$$\nabla \wedge (r^3\vec{r}) = (\nabla r^3) \wedge \vec{r} + r^3(\nabla \wedge \vec{r}) = (3r^2\hat{r}) \wedge \vec{r} + r^3(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

وبالتالي فإن $r^3\vec{r}$ متجهة كمونية.

نفرض أن الكمون العددي للدالة المتجهية $r^3\vec{r}$ هو u عندئذ:

$$r^3\vec{r} = \nabla u \Longrightarrow r^4\hat{r} = \nabla u \Longrightarrow \frac{du}{dr} = r^4; \nabla u = \frac{du}{dr}\hat{r} \Longrightarrow u = \frac{r^5}{5} + c$$

$$\nabla^2 u = (\nabla.\nabla)u = \nabla.(\nabla u) = \nabla.(r^3\vec{r}) = (\nabla r^3).\vec{r} + r^3(\nabla.\vec{r}) =$$
$$(3r^2\hat{r}).\vec{r} + r^3(3) = 3r^3 + 3r^3 = 6r^3\ ;\ \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

مثال 1–8–3: نفرض أن: $\vec{A}=5u^2\vec{i}+u\vec{j}-u^3\vec{k}$ و $\vec{B}=\sin u.\vec{i}-\cos u.\vec{j}$

أوجد: $\vec{A}.\vec{B}=5u^2\sin u-u\cos u$ ، $\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{B})$ ، $\frac{d}{du}(\vec{A}\wedge\vec{B})$ ، $\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{A})$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{du}=\frac{d}{du}(5u^2\sin u-u\cos u)=(5u^2\cos u+10u\sin u+u\sin u-\cos u)$$

$$=(5u^2-1)\cos u+11u.\sin u$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{A}\wedge\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\wedge\vec{B}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5u^2&u&-u^3\\\cos u&\sin u&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\10u&1&-3u^2\\\sin u&-\cos u&0\end{vmatrix}$$

$$=[u^3\sin u\,\vec{i}-u^3\cos u\,\vec{j}+(5u^2\sin u-u\cos u)\vec{k}]$$

$$+[-3u^2\cos u\,\vec{i}-3u^2\sin u\,\vec{j}-(-10u\cos u-\sin u)\vec{k}]$$

$$=(u^3\sin u-3u^2\cos u)\vec{i}-(u^3\cos u+3u^2\sin u)\vec{j}+(5u^2\sin u-\sin u-11u\cos u)\vec{k}$$

طريقة أخرى:

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5u^2&u&-u^3\\\sin u&-\cos u&0\end{vmatrix}=-u^3\cos u\,\vec{i}-u^3\sin u\,\vec{j}+(-5u^2\cos u-u\sin u)\vec{k}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\wedge\vec{B})=(u^3\sin u-3u^2\cos u)\vec{i}-(u^3\cos u+3u^2\sin u)\vec{j}$$

$$+(5u^2\sin u-11u\cos u-\sin u)\vec{k}$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{A})=\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{A}=2\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$=2(5u^2\,\vec{i}+u\,\vec{j}+u^3\,\vec{k}).(10u\,\vec{i}+\vec{j}-3u^2\,\vec{k})=100u^3+2u+6u^5$$

طريقة أخرى:

$$A.A=(5u^2)^2+(u)^2+(-u^3)^2=25u^4+u^2+u^6$$

$$\frac{d}{du}(25u^2+u^2+u^6)=100u^3+2u+6u^5$$

مثال 1–8–4: إذا كان:

$$\vec{V}=x^2y\vec{i}+e^{xy}\ \vec{j}+x^2z\cos y\ \vec{k}$$

فاحسب:

$$\frac{\partial 2\vec{V}}{\partial y.\partial x},\frac{\partial 2\vec{V}}{\partial x.\partial y},\frac{\partial \vec{V}}{\partial y},\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}$$

الحل:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x}=2xy\ \vec{i}+ye^{xy}\ \vec{j}+2xz\cos y\ \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial y}=x^2\ \vec{i}+xe^{xy}\ \vec{j}-x^2z\sin y\ \vec{k}$$

$$\frac{\partial 2\vec{V}}{\partial x.\partial y}=2x\ \vec{i}+(1+xy)e^{xy}\ \vec{j}-2xz\sin y\ \vec{k}=\frac{\partial 2\vec{V}}{\partial y.\partial x}$$

مثال 1–8–5: بفرض أن العلاقات الوسيطية للخط الأوسط لمنشأ على شكل درج حلزوني هي: $z=8u$, $y=6\sin u$, $x=6\cos u$

وبفرض أن هناك وثاقة تامة من أجل $u=0$ وأنه ومن أجل $u=\pi$ توجد نهاية حرة A مطبق عليها القوة $\vec{F}$ المحددة بـ : $\vec{F}=\vec{i}+1.5\vec{j}-0.5\vec{k}$

والمطلوب:

1. أوجد ثلاثية (فرينيه).
2. أوجد علاقات القوى الداخلية المؤثرة عند مختلف مقاطع المنشأ.

الحل: **أولاً**: ثلاثية فرينيه:

$$\vec{r}=6\cos u\ \vec{i}+6\sin u\ \vec{j}+8u\ \vec{k}\Rightarrow\frac{d\vec{r}}{du}=-6\sin u\ \vec{i}+6\cos u\ \vec{j}+8\vec{k}$$

$$\frac{dS}{du}=\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right|=\sqrt{\frac{d\vec{r}}{du}.\frac{d\vec{r}}{du}}=\sqrt{(-6\sin u)^2+(6\cos u)^2+(8^2)}=10$$

$$\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}=-\frac{3}{5}\sin u\ \vec{i}+\frac{3}{5}\cos u\ \vec{j}+\frac{4}{5}\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{T}}{du}=\frac{d}{du}\left(-\frac{3}{5}\sin u\ \vec{i}+\frac{3}{5}\cos u\ \vec{j}+\frac{4}{5}\ \vec{k}\right)=-\frac{3}{5}\cos u\ \vec{i}-\frac{3}{5}\sin u\ \vec{j}$$

$$\left|\frac{d\vec{T}}{du}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\cos u\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\sin u\right)^2}=\frac{3}{5}$$

ويكون متجه الناظم: $\vec{N}=-\cos u\ \vec{i}-\sin u\ \vec{j}$

$$\vec{B}=\vec{T}\wedge\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{3}{5}\sin u & -\frac{3}{5}\cos u & \frac{4}{5}\\ -\cos u & -\sin u & 0\end{vmatrix}=\frac{4}{5}\sin u\ \vec{i}-\frac{4}{5}\cos u\ \vec{j}+\frac{3}{5}\ \vec{k}$$

ثانياً: علاقات القوى الداخلية: نحصل على علاقات القوى الداخلية في مقطع ما بإسقاط القوى المؤثرة على يمين أو يسار هذا المقطع على الثلاثية الموضعية المرتبطة بالمقطع والتي تتشكل من:

$\vec{n}$ متجه الواحدة الناظمي على المقطع والذي يماثل المتجه $\vec{T}$ المماس للمنحني في ثلاثية فرينيه.

$\vec{t}$ متجه الواحدة المماس للمقطع والذي يماثل المتجه $\vec{N}$ العمودي على المنحنى في ثلاثية فرينيه.

$\vec{b}$ متجه فرينيه الذي يشكل مع $\vec{T}$ و $\vec{N}$ ثلاثية مباشرة أو مع $\vec{n}$ و$\vec{t}$ فهو نفس الشعاع $\vec{B}$ من ثلاثية فرينيه.

والمعلوم أن مسقط متجه على محور هو الجداء السلمي لهذا المتجه بمتجه الواحدة للمحور المسقط عليه.

وعليه فإن القوة الناظمية المؤثرة في مقطع ما هي:

$$N=\vec{F}.\vec{n}=-0.6\sin u+0.9\cos u-0.4$$

والقوة الداخلية المماسية باتجاه $\vec{t}$ هي:

$$T_t=\vec{F}.\vec{T}=-\cos u-1.5\sin u$$

والقوة الداخلية المماسية باتجاه $\vec{b}$ هي:

$$T_b=\vec{F}.\vec{b}=0.8\sin u-1.2\cos u-0.3$$

أما قيمة العزوم الموجهة الداخلية $\overrightarrow{M}_G$ المؤثرة في مقطع ما G فتكون:

$$\overrightarrow{M}_G = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{F} \Rightarrow \overrightarrow{M}_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -6-6\cos u & 0-6\sin u & 8\pi - 8u \\ 1 & 1.5 & -0.5 \end{vmatrix}$$

وبإجراء الحساب نجد:

$$\overrightarrow{M}_G = [3\sin u - 12(\pi - u)]\vec{i} - [3(1+\cos u) - 8(\pi - u)]\vec{j}$$
$$+[-9(1+\cos u) + 6\sin u]\vec{k}$$

أي أن:

$$M_X = 3\sin u - 12(\pi - u)$$
$$M_Y = -3(1+\cos u) + 8(\pi - u)$$
$$M_Z = -9(1+\cos u) + 6\sin u$$

مثال 1–8–6: عيّن المشتقة الموجهة للدالة: $f(x,y,z) = x^2y - yz^3 + z$ عند النقطة $P_0(1,-2,0)$ وذلك باتجاه:

1. المتجه $\vec{u} = 2\,\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$
2. المتجه الناظم $\overrightarrow{N}$ عند هذه النقطة.

الحل: 1. باتجاه $\vec{u}$: $\vec{a} = \dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{3}\vec{j} - \dfrac{2}{3}\vec{k}$

وبالتالي فالمشتقة الموجهة لـ f وفق هذا الاتجاه هو:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \vec{a}.\vec{\nabla} f \qquad \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2xy\,\vec{i} + \left(x^2 - z^3\right)\vec{j} + \vec{k}$$

$$grad\ f\,|_{P_o} = \vec{\nabla} f\,|_{P_o} = -4\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \vec{a}.\vec{\nabla} f = \left(\frac{2}{3}\,\vec{i} + \frac{1}{3}\,\vec{j} - \frac{2}{3}\,\vec{k}\right)\left(-4\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) = -3$$

2. باتجاه المتجه $\vec{\nabla} f$: إن متجه الواحدة بهذا الاتجاه هو $\overrightarrow{N}$ حيث:

$$\overrightarrow{N} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{-4\,\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{16+1+1}} = -\frac{4}{3\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{k}$$

وبالتالي المشتقة الموجهة لـ f باتجاه $\vec{\nabla} f$ هو $\vec{N}.\vec{\nabla} f$ إذن:

$$\frac{\partial f}{\partial N}=\vec{N}.\vec{\nabla} f=\frac{16}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{18}{3\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

وهذه هي القيمة العظمى لجميع المشتقات الموجهة لـ f عند $P_0(1,-2,0)$ كما نعلم ذلك من الهندسة التحليلية.

مثال 1–8–7: عين تباعد الحقل المتجهي $\vec{\nabla} f$ حيث $f=x^2y^2z^3$.

الحل:

$$\vec{\nabla} f=2xy^2z^3\ \vec{i}+2x^2yz^3\ \vec{j}+3x^2y^2z^2\ \vec{k}$$

وبالتالي فالتباعد $\vec{\nabla} f$ هو:

$$div\vec{\nabla} f=\vec{\nabla}.\vec{\nabla} f=2y^2z^3+2x^2z^3+6x^2y^2z$$

تمارين محلولة (1)

1- ليكن الدالة المتجهية $\vec{F} = (\hat{\imath}.\vec{r})\vec{r} \;\; ; \;\; r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

والمطلوب:

أ - احسب: $\nabla.\left(\nabla \wedge \vec{F}\right)$.

ب -احسب: $\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{F}\right)$.

الحل: أ-

$$\vec{F} = \left[\hat{\imath}.(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})\right]\vec{r} = x\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) \Longrightarrow \vec{F} = x^2\hat{\imath} + xy\hat{\jmath} + xz\hat{k}$$

إن المشتقات الجزئية الأولى للدالة $\vec{F}$ موجودة ومستمرة لأن مركباتها كثيرات حدود وبالتالي الدوران موجود:

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & xz \end{vmatrix} = 0\hat{\imath} - (z - 0)\hat{\jmath} + (y - 0)\hat{k} = -z\,\hat{\jmath} + y\hat{k}$$

$$\nabla.\left(\nabla \wedge \vec{F}\right) = \frac{\partial(-z)}{\partial y} + \frac{\partial(y)}{\partial z} = 0 + 0 = 0$$

ب-

$$\nabla \wedge \left(\nabla \wedge \vec{F}\right) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -z & y \end{vmatrix} = (2)\hat{\imath} - (0)\hat{\jmath} + (0)\hat{k} = 2\hat{\imath}$$

2- احسب قيم الثوابت a, b, c لكي تكون الدالة المتجهية :

$$\vec{F} = (x + cy + az)\hat{\imath} + (x + y^2 + bz)\hat{\jmath} + (cy + z^2)\hat{k}$$

كمونيةً في أي نطاق فراغي بسيط الاتصال ثم احسب تفرق الدالة الناتجة.

الحل: $\vec{F} \epsilon\, cl^1$ في أي نطاق فراغي D لأن مركباتها كثيرات حدود، فالدوران موجود.

ويكون المتجه $\vec{F}$ كمونياً إذا كان: $\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0}$ وبالتالي:

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+cy+az & x+y^2+bz & cy+z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (c-b)\hat{\imath} - (0-a)\hat{\jmath} + (1-c)\hat{k}$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} c-b=0 \\ 0-a=0 \\ 1-c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=0, b=c=1$$

وعندئذٍ يكون:

$$\vec{F} = (x+y)\hat{\imath} + (x+y^2+z)\hat{\jmath} + (y+z^2)\hat{k}$$

$$\nabla.\vec{F} = \frac{\partial(x+y)}{\partial x} + \frac{\partial(x+y^2+z)}{\partial \mathrm{y}} + \frac{\partial(\mathrm{y+z^2})}{\partial \mathrm{z}} = 1+2y+2z$$

3- إذا كانت : $u = \left(r+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \sin\phi$

فاحسب التراكيب التالية: $\nabla u \quad ,\nabla^2 u \quad , \quad \nabla \wedge (\nabla u)$

الحل: الدالة u تعطى في الإحداثيات الكروية:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = r\cos\phi\sin\theta\ \hat{\imath} + r\sin\phi\sin\theta\ \hat{\jmath} + r\cos\theta\ \hat{k}$$

$$h_r = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = \left|cos\,\phi\sin\theta\,\hat{\imath} + sin\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}\right| = 1$$

$$h_\theta = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = \left|r\cos\phi\cos\theta\,\hat{\imath} + r\sin\phi\cos\theta\,\hat{\jmath} + r\sin\theta\,\hat{k}\right| = r$$

$$h_\phi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = \left|-r\sin\phi\sin\theta\,\hat{\imath} + r\cos\phi\sin\theta\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right| = r\sin\theta$$

والتدرج موجود عندما $h_r\ h_\theta\ h_\phi \neq 0$ أي عندما $r^2\sin\theta \neq 0$ وبالتالي التدرج موجود في أي نطاق فراغي لا يتقاطع مع المحور $0Z$.

$$\nabla u = \left(\frac{\hat{r}}{h_r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{h_\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{h_\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)u$$

$$\nabla u = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\theta}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left[\left(r+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta + \sin\phi\right]$$

$$= \hat{r}\left(1-\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta - \hat{\theta}\left(1+\frac{1}{r^3}\right)\sin\theta + \hat{\phi}\frac{cos\phi}{r\sin\theta}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h_r\ h_\theta\ h_\phi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{h_\theta\ h_\phi}{h_r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{h_r\ h_\phi}{h_\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{h_r\ h_\theta}{h_\phi}\frac{\partial u}{\partial\phi}\right)\right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\left(1-\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin^2\theta\left(r+\frac{1}{r^2}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\theta}\right)\right]$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left(2r+\frac{2}{r^2}\right)\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\left(r+\frac{1}{r^2}\right)-\left(\frac{\sin\phi}{\sin\theta}\right)\right]$$

$$\nabla^2 u = -\frac{\sin\phi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\nabla\wedge(\nabla u) = \frac{1}{h_r\ h_\theta\ h_\phi}\begin{vmatrix} \hat{r}\, h_r & \hat{\theta}\, h_\theta & \hat{\phi}\, h_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ h_r\, F_r & h_\theta\, F_\theta & h_\phi\, F_\phi \end{vmatrix}$$

$$\nabla\wedge(\nabla u) = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\,\hat{\theta} & r\sin\theta\,\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\phi} \\ \left(1-\frac{2}{r^3}\right)\cos\theta & -\left(r+\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta & \cos\phi \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left\{\left[\hat{r}(0-0)-r\hat{\theta}(0-0)\right]+r\sin\theta\ \hat{\phi}\left[\left(-1+\frac{2}{r^3}\right)\sin\theta+\left(1-\frac{2}{r^3}\right)\sin\theta\right]\right\}$$

4- أثبت أن: $\nabla.[\nabla\wedge(\vec{r}\ln r)]=0$

الحل: $\vec{r}\ln r\, \epsilon\, cl^1$ في أي نطاق فراغي D لا يشمل مبدأ الإحداثيات، وبالتالي الدوران موجود.

$$\nabla\wedge(\vec{r}\ln r) = (\nabla\ln r)\wedge\vec{r}+\ln r(\nabla\wedge\vec{r}) = \left(\frac{1}{r}\hat{r}\right)\wedge\vec{r}+\ln r\left(\vec{0}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$$

$$\Longrightarrow \nabla.[\nabla\wedge(\vec{r}\ln r)] = \nabla.\vec{0} = 0$$

5- أثبت أن: $\nabla\wedge\hat{\phi}=\frac{\hat{k}}{\rho}$.

الحل: الإحداثيات هي الإحداثيات الاسطوانية و الدالة المتجهية هي:

$$\vec{F} = \hat{\phi} = 0\hat{\rho} + 1\hat{\phi} + 0\hat{k}$$
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = \rho\cos\phi\,\hat{\imath} + \rho\sin\phi\;\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$
$$h_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \left|\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right| = 1$$
$$h_\phi = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\right| = \left|-\rho\sin\phi\,\hat{\imath} + \rho\cos\phi\,\hat{\jmath} + 0\hat{k}\right| = \rho$$
$$h_z = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right| = \left|0\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + 1\hat{k}\right| = 1$$

الدوران موجود عندما $h_\rho\ h_\phi\ h_z \neq 0$ أي عندما $\rho \neq 0$ وبالتالي الدوران موجود في أي نطاق فراغي لا يتقاطع مع المحور OZ.

$$\nabla \wedge \hat{\phi} = \frac{1}{h_\rho\ h_\phi\ h_z}\begin{vmatrix} \hat{\rho}\,h_\rho & \hat{\phi}\,h_\phi & \hat{k}\,h_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_\rho\,F_\rho & h_\phi\,F_\phi & h_z\,F_z \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\,\hat{\phi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[0\hat{\rho} - 0\hat{\phi} + 1\hat{k}\right] = \frac{\hat{k}}{\rho}$$

تمارين غير محلولة (1)

1- إذا كانت: $\vec{V}=3xyz^2\,\vec{i}+3xy^3z\,\vec{j}-x^2yz\,\vec{k}$ و $f(x,y,z)=3x^2-yz$

فاحسب ما يلي:

a. $\vec{\nabla}.\vec{V}$ b. $\vec{V}.\vec{\nabla}f$

c. $\vec{V}.\left(\vec{\nabla}f\right)$ d. $\vec{\nabla}.\left(f\,\vec{V}\right)$

وذلك في النقطة $(1,-1,1)$

الأجوبة : $a(4),\ b(-15), c(6)\ ,\ d(1)$

2- احسب $\overline{\text{div}}\ r$ حيث $\vec{r}=x\ \vec{i}+y\ \vec{j}+z\ \vec{k}$ ، الجواب: 3

3- احسب $\text{div}\left(\overrightarrow{A\varphi}\right)$ حيث $\vec{A}$ دالة متجهية و φ دالة سلمية.

الجواب: $\varphi\,\text{div}\,\vec{A}+\text{grad}\ \varphi\vec{A}$.

4- إذا كان $\vec{c}$ متجهاً ثابتاً ولدينا : $\vec{A}=\vec{c}\wedge\vec{r}$ ، فأثبت أن: $\text{div}\,\vec{A}=0$

5- احسب $\vec{\nabla}.[r\vec{\nabla}(1/r^3)]$

الجواب: $3r^{-4}$.

6- احسب $grad\,\text{div}\,\vec{A}$ حيث $A=\vec{r}/r$ و $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$

الجواب $\left(-2\vec{r}/r^3\right)$.

7- أثبت أن: $r\ o\left(c_1\vec{A_1}+c_2\vec{A_2}\right)=c_1 r\ o\vec{A_1}+c_2\,r\ o\vec{A_2}$ حيث $\vec{A_2},\vec{A_1}$ دالتان متجهيتان مستمرتان و c_2,c_1 ثابتان عدديان.

8- تحقق أن: $\vec{A}\wedge grad\,\varphi=rot\left(\varphi\vec{A}\right)$ حيث $\vec{A}$ دالة متجهية مستمرة و φ دالة سلمية مستمرة.

9- عين قيمة الثابت a لكي يكون:

$$\vec{V}=\left(a\,x\,y-z^3\right)\vec{i}+(a-2)x^2\,\vec{j}+(1-a)z^2\,\vec{k}$$

حقلاً متجهياً محافظاً ثم عين كمونه السلمي.

الجواب: $f=2x^2y-xz^3+c$, $a=4$.

10- أوجد ثلاثية فرينيه لمنحن على شكل قطع ناقص.

11- لدينا منشأ على شكل ربع دائرة نصف قطرها $3m$ مقطعها البدائي A موثوق ومقطعها النهائي B حر ويخضع للقوة: $\vec{F}=2\vec{i}+3\,\vec{j}+2\,\vec{k}$ مقدرة بالنيوتن N وللعزم $\overrightarrow{M}=3\,\vec{i}+5\,\vec{j}+2\,\vec{k}$ مقدراً بالنيوتن متر $N.m$ والمطلوب:

1 -أوجد علاقة فرينيه.

2 -علاقات القوى الداخلية بمختلف مقاطع ربع الدائرة.

12- لدينا منشأ منحن على شكل قطع مكافئ معادلته $y=x^2$ وبفرض أنه موثوق وثاقة تامة عند $x=0$، وأن طرفه عند $x=3$ هو طرف حر ويخضع للقوة $\vec{F}=2\vec{i}-3\,\vec{j}+5\,\vec{k}$ مقدرة بالنيوتن N وللعزم $\overrightarrow{M}=-\,\vec{i}+\,\vec{j}+3\,\vec{k}$ مقدراً بالنيوتن متر $N.m$. والمطلوب إيجاد:

1 -ثلاثية فرينيه.

2 -علاقات القوى الداخلية في مختلف مقاطع القطع المكافئ المحصورة بين $x=0$ و $x=3$.

فهرس الفصل الثاني

الفصل الثاني

2. التكاملات المتجهية

1.2 المنحني الموجه:

نقصد في بحثنا بالمنحني الموجه Γ، المنحني الفراغي المحدد المفتوح أو المغلق الصقيل أو الصقيل جزئياً، والموجه من A الى B ونعتبر المنحني المستوي كحالة خاصة، فإذا كان المنحني المستوي مغلقاً، فيعتبر موجهاً بالاتجاه الموجب إذا كان في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة.

- ليكن لدينا الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_x \ \hat{i} + F_y \ \hat{j} + F_z \ \hat{k}$$

المعرفة والمستمرة على الساحة ($D \subseteq R^3$).

وليكن لدينا المنحني المستمر Γ:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\ \hat{i} + y(t)\ \hat{j} + z(t)\ \hat{k} \quad ; \quad t \in [a, b]$$

الواقع في الساحة D والقابل للاشتقاق على المجال $[a,b]$.

إن المقدار السلمي $\vec{F}.\hat{T}$ يمثل حركة الدالة المتجهية $\vec{F}$ على شعاع واحدة مماس المنحني Γ

2.2 التكاملات الخطية على منحن موجه وأنواعها:

$1'$): التكامل الخطي العددي (أو جولان) الدالة المتجهية على منحن موجه هو عدد.

تعريف:2-2-1 :إن تكامل المركبة المماسية للدالة المتجهية $\vec{F}$ على المنحني Γ يسمى جولان الدالة المتجهية على المنحني Γ ويكتب بالشكل:

$$G = \int_{\Gamma} (\vec{F}.\hat{T})\ ds$$

ولكن بما أن:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\ \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\ \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt}\ \hat{k}$$

فإن: $$d\vec{r} = dx\ \hat{i} + dy\ \hat{j} + dz\ \hat{k}$$

كما أن: $$\frac{d\vec{r}}{ds} = \hat{T} \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \hat{T}\,.ds$$

وبالتالي فإن: $$(\vec{F}.\hat{T})\,ds = \vec{F}.d\vec{r}$$

وبالتالي ، الجولان يأخذ الشكل:

$$G = \int_{\Gamma} (\vec{F}.\hat{T})\,ds = \int_{\Gamma} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\Gamma} (F_x\,.dx + F_y\,.dy + F_z\,.dz)$$

ملاحظة: عندما تمثل الدالة المتجهية $\vec{F}$ قوة تؤثر على نقطة مادية متحركة على المنحن Γ فإن التكامل:

$$\int_{\Gamma} (\vec{F}.\hat{T})\,ds$$

يمثل عمل القوة $\vec{F}$ عند انتقال النقطة على المنحني Γ.

مبرهنة: 2-2-1 : إذا كان $\vec{F}$ متجهاً كمونياً في ساحة $(D \subseteq R^3)$ أي أنه تدرج الدالة العددية $u = u(x,y,z)$ حيث u معرفةً ومستمرةً ولها مشتقات جزئية ضمن D ، فإن:

1. $\int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$ مستقل عن الطريق الذي يصل بين A و B في D.
2. $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$ وذلك من أجل كل منحن بسيط مغلق Γ يقع ضمن D .

2ً): التكامل الخطي المتجهي للدالة المتجهية $\vec{F} \in c\ell^1$ على المنحني الموجه Γ هو المتجه:

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \wedge d\vec{r} = \int_{\Gamma} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} \int_{\Gamma} (F_y\ dz - F_z\ dy) + \hat{j} \int_{\Gamma} (F_z\ dy - F_x\ dz) + \hat{k} \int_{\Gamma} (F_x\ dy - F_y\ dx)$$

والتكاملات موجودة لأن $F_x\ ,\ F_y\ ,\ F_z$ مستمرة على Γ.

$\acute{3}$): التكامل الخطي المتجهي للدالة العددية $u\ \in\ c\ell^1$ على المنحني الموجه Γ هو المتجه:

$$\int_\Gamma u.\,dr\ =\ \hat{i}\ \int_\Gamma u\ dx + \hat{j}\ \int_\Gamma u\ dy + \hat{k}\ \int_\Gamma u\ dz$$

والتكاملات موجودة لأن u مستمرة على Γ.

مثال: 2-2-1 : احسب جولان الدالة المتجهية : $\vec{F}\ =\ yz\ \hat{i} + xz\ \ \hat{j} + xy\ \hat{k}$ على اللولب الدائري:

$$\Gamma : \left|\vec{r} = \vec{r}(t) = a\cos t\,\hat{i} + a\sin t\,\hat{j} + bt\,\hat{k};\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right.$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (F_x\ \ dx + F_y\ \ dy + F_z\ \ dz\ ) = \int_\Gamma (\ yz\ \ dx + xz\ \ dy + xy\ \ dz\ )$$

$$= \int_\Gamma [\ z(\ y\ dx + x\ dy\ ) + xy\ dz\ ] = \int_\Gamma (\ z\ dxy + xy\ dz\ ) = \int_\Gamma \ d(\ x\ y\ z\ ) =$$

$$\int_{t=0}^{\frac{\pi}{4}} d(xyz) = [xyz]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[a^2bt\cos t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2b\pi}{8}$$

3.2 أنواع التكاملات السطحية على سطح موجه:

ليكن $u\ \in\ cl^1$ دالة عددية للموضع على سطح موجه $\sum$ وليكن:

$$\vec{F}\ =\ F_x\ \ \hat{i} + F_y\ \ \hat{j} + F_z\ \ \hat{k}$$

دالة متجهية للموضع عليه، عندئذٍ نميز ثلاث أنواع من التكاملات لهذه الدالة على $\sum$ وهي:

(1): إن التكامل السطحي العددي للدالة المتجهية $\vec{F}$ على السطح الموجه $\sum$ (أو تدفق $\vec{F}$ عبر $\sum$) هو العدد:

$$\phi\ =\ \int_\Sigma\ \vec{F}.\vec{ds}\ =\ \int_\Sigma (\ \vec{F}\ .\hat{n}\ )\ ds\quad ;\quad (\ \frac{\vec{ds}}{ds}\ =\ \hat{n}\ )$$

وإذا كان Σ سطحاً مغلقاً فيرمز للتكامل بالشكل:

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \,.\, \vec{ds}$$

(2): إن التكامل السطحي المتجهي للدالة المتجهية $\vec{F}$ على السطح الموجه Σ هو المتجه:

$$\int_{\Sigma} d\vec{s} \wedge \vec{F} = \int_{\Sigma} (\hat{n} \wedge \vec{F}) \, ds = \int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} ds$$

حيث $\cos\alpha \,,\, \cos\beta \,,\, \cos\gamma$ جيوب تمام توجيه $\hat{n}$. والتكاملات بعد النشر موجودة لأن $F_x \,,\, F_y \,,\, F_z$ مستمرة على Σ وجيوب التمام مستمرة على هذا السطح .

(3): إن التكامل السطحي المتجهي للدالة العددية u على السطح الموجه Σ هو المتجه:

$$\int_{\Sigma} u \,.\vec{ds} = \int_{\Sigma} (u.\hat{n}) \, ds = \hat{i} \int_{\Sigma} u \cos\alpha \;\, ds + \hat{j} \int_{\Sigma} u \cos\beta \;\, ds + \hat{k} \int_{\Sigma} u \cos\gamma \;\, ds$$

والتكاملات السطحية موجودة لأن u وجيوب تمام $\hat{n}$ مستمرة على Σ.

4.2 التكامل الحجمي للدالة المتجهية للموضع:

ليكن: $\vec{F} = F_x \;\hat{i} + F_y \;\hat{j} + F_z \;\hat{k} \;\in\; c\ell$ دالةً متجهيةً للموضع في منطقة فراغية R فان تكامل $\vec{F}$ على R هو:

$$\int_{R} \vec{F} \,.\vec{dv} = \hat{i} \int_{R} F_x \,.dv + \hat{j} \int_{R} F_y \,.dv + \hat{k} \int_{R} F_z \,.dv$$

والتكاملات الناتجة موجودة لأن $F_x \,,\, F_y \,,\, F_z$ مستمرة على R .

5.2 مبرهنة التحويلات من تكامل حجمي إلى تكامل سطحي وبالعكس:

1.5.2 المبرهنة الأولى (مبرهنة غوص في التفرق أو التباعد):

إذا كان $\vec{F} \in C\ell^1$ دالةً متجهيةً للموضع في منطقة فراغية R محاطة بسطح موجه مغلق Σ فإن:

$$\int_R \nabla.\vec{F}.dv = \oint_\Sigma \vec{F}.ds$$

مثال:2-5-1: احسب تدفق الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = 4x\,\hat{i} - 2y\,\hat{j} + z^2\,\hat{k}$$

من خلال السطح المغلق:

$$s \,|\, x^2 + y^2 = 4 \;,\; z = 0 \;,\; z = 3$$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص نجد:

$$\mathrm{I} = \iint_\Sigma \vec{F}.ds = \iiint_R \nabla\vec{F}.dv = \iiint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2)\right] dx\,dy\,dz$$

$$\mathrm{I} = \iiint_R (2 + 2Z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_R (2+2Z)\rho d\rho d\varphi dz = \int_0^2 \{\int_0^{2\pi} [\int_0^3 (2 + 2z)\rho\,dz] d\varphi\} d\rho$$

$$= \int_0^2 \{\,\rho \int_0^{2\pi} 15\,d\varphi\,\}\,d\rho = \int_0^2 30\pi\,\rho\,d\rho = 60\pi$$

2.5.2 المبرهنة الثانية:

إذا كان $\vec{u} \in C\ell^1$ تابعاً عددياً للموضع في منطقة فراغية R محاطة بسطح موجه مغلق $\sum$ فإن:

$$\int_R \nabla.u.dv = \oint_\Sigma u.ds$$

3.5.2 المبرهنة الثالثة:

إذا كان $\vec{F} \in c\ell^1$ دالةً متجهيةً للموضع في منطقة فراغية R محاطة بسطح موجه مغلق $\sum$ فإن:

$$\int_R (\nabla \wedge \vec{F})\,dv = \oint_\Sigma ds \wedge \vec{F}$$

4.5.2 مبرهنة ستوكس لتحويل تكامل سطحي إلى خطي وبالعكس:

ليكن $\sum$ سطحاً موجهاً مفتوحاً وحافته Γ منحن فراغي موجه مغلق، وليكن $\vec{F} \in c\ell^1$ دالةً متجهيةً للموضع في نطاق فراغي D يحوي السطح $\sum$ فإن:

$$\int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{F})\hat{n}\, ds = \oint_{\Gamma} \vec{F}.\vec{ds}$$

مثال: 2-5-2:احسب بتطبيق مبرهنة ستوكس جولان الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = -3y\ \hat{i} + 3x\ \hat{j} + \hat{k}$$

على محيط الدائرة $\Gamma \,|\, x^2 + y^2 = 1 \ ,\ z = 2$ والموجهة بحيث تأخذ y بالتزايد من أجل قيم موجبة لـ x .

الحل: لدينا حسب مبرهنة ستوكس:

$$G = \oint_{\Gamma} \vec{F}.\vec{ds} = \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{F})\, \hat{n}\, ds$$

حيث s السطح المشدود على المنحني Γ فإن:سطح الدائرة Γ.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y & 3x & 1 \end{vmatrix} = 0\ \hat{i} + 0\ \hat{j} + 6\ \hat{k} \Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = 6\ \hat{k}$$

ومن أجل السطح s فإن $\hat{n} = \hat{k}$ وبالتالي:

$$G = \int_{\Sigma} (6\,\hat{k})\ \hat{k}\ ds = 6\int_{\Sigma} ds = 6[\,s\,]_0^{\pi} = 6\pi$$

5.5.2 مبرهنة غرين في المستوي:

في الحالة الخاصة التي يكون فيها Γ منحنياً مستوياً واقعاً في المستوي $z = 0$ ، فإن:

$$ds = dx\ \hat{i} + dy\ \hat{j} \quad , \quad F = F_x\ \hat{i} + F_y\ \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}.\vec{ds} = F_x\ dx + F_y\ dy \ ....(1)$$

$$\nabla \wedge F = \hat{k}\,\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \quad , \quad ds = \hat{k}\ dx\, dy$$

ومنه:
$$(\nabla \wedge F) .ds = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \, dx \, dy \; .....(2)$$

نعوض (1) و(2) في مبرهنة ستوكس فنجد:
$$\iint_{\Sigma} (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}) \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} (F_x \, dx + F_y \, dy)$$

حيث Γ منحن موجه بالاتجاه الموجب و F_x , F_y تملك مشتقات أولى مستمرة.

6.5.2 مبرهنة غرين:

إذا كانت $w \in c\ell^2$, $u \in c\ell^2$ دالتين عدديتين للموضع في منطقة فراغية R محاطة بسطح موجه ومغلق $\sum$ فإن:
$$\oint_{\Sigma} (u \nabla w - w \nabla u) \, ds = \int_{R} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) \, dv$$

أو:
$$\oint_{\Sigma} (u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n}) \, ds = \int_{R} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) \, dv$$

حيث $\frac{\partial w}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ تمثل مشتقتين موجهتين وفق $\hat{n}$.

تمارين محلولة (2)

1- احسب جولان الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = (3z - y)\,\hat{i} + (x - 2)\,\hat{j} + y^2\,\hat{k}$$

على المنحني: $c\,\big|\,9x^2 + 4y^2 = 36 \quad , \quad z = 1$

في الاتجاه الموجب من النقطة $M_1(2,0,1)$ إلى النقطة $M_2(0,3,1)$.

الحل: نلاحظ أن معادلتي المنحني c تكتبان بالشكل:

$$c\,\Big|\,\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad , \quad Z = 1$$

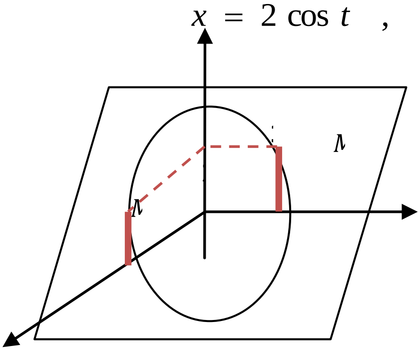
$$\underset{\uparrow}{(9 \rangle 4)}$$

والمنحني c يمثل قطع ناقص مركزه واقع على المحور OZ في النقطة $(0,0,1)$ ويقع هذا القطع في المستوي $z = 1$ الموازي للمستوي XOY ومحوره المحرقي يوازي OY ووسطاؤه هي:

$$a = 2 \quad , \quad b = 3 \quad , \quad c = \sqrt{13}$$

فتكون معادلاته الوسيطية هي:

$$x = 2\cos t \quad , \quad y = 3\sin t \quad , \quad z = 1$$



النقطة $M_1(2,0,1)$

تقابل قيمة الوسيط $t = 0$

النقطة $M_2(0,3,1)$

تقابل قيمة الوسيط $t = \dfrac{\pi}{2}$

والتالي يكون جولان الدالة المتجهية $\vec{F}$ على المنحني c هو :

$$G = \int_c \vec{F}.\vec{dr} = \int_{M_1}^{M_2} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) = \int_{M_1}^{M_2} [(3z - y)\,dx + (x - 2)\,dy + y^2\,dz]$$

ولكن: $dx = -2\sin t\,dt \quad , \quad dy = 3\cos t\,dt \quad , \quad dz = 0$

$$\Rightarrow \int_c \vec{F}\,.\vec{dr}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,(3-3\sin t)(-2\sin t)+(2\cos t-2)(3\cos t)+0\,]\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,6-6(\sin t+\cos t)\,]\,dt = 3\pi - 6[-\cos t+\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3\pi - 12$$

2- احسب جولان الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = (2x+y^2)\,\hat{i} + (3y-4x)\,\hat{j}$$

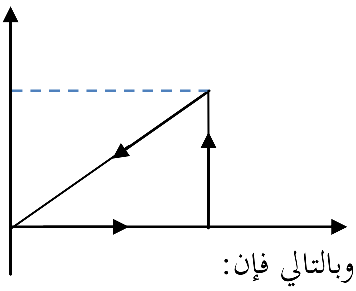
على المثلث الذي رؤوسه النقاط: $B(2,1)$, $A(2,0)$, $o(0,0)$.

الحل: لحساب جولان $\vec{F}$ على المثلث OAB، نحسب الجولان على كل من القطع المستقيمة oA , AB , Bo ونجمع النواتج.

1): **الجولان على القطعة** oA :

إن ترتيب كل نقطة من نقاط القطعة oA يساوي الصفر وبالتالي فإن:

$$G_1 = \int_{oA} \vec{F}\,.\vec{dr} = \int_{oA} (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int_{oA} [\,(2x+y^2)\,dx + (3y-4x)\,dy\,]$$



نعوض كل y بـ 0 وكل dy بـ 0 فنجد:

$$G_1 = \int_0^2 2x\,dx = 4$$

2): **الجولان على القطعة** AB :

إن فاصل كل نقطة من نقاط القطعة AB يساوي 2 وبالتالي فإن:

$$G_2 = \int_{AB} \vec{F}\,.\vec{dr} = \int_{AB} [\,(2x+y^2)\,dx + (3y-4x)\,dy\,]$$

نبدل كل x بـ 2 وكل dx بـ 0 فنجد:

$$G_2 = \int_0^1 (3y-8)\,dy = [\,\frac{3}{2}y^2 - 8y\,]_0^1 = \frac{-13}{2}$$

3): **الجولان على القطعة** Bo :

إن معادلة المستقيم الواصل بين o وB هي: $x = 2y$ والجولان يتم وفق الاتجاه من B إلى o أي من النقطة التي ترتيبها (1) إلى النقطة التي ترتيبها (0) عندئذ:

$$G_3 = \int_{Bo} \vec{F} . \vec{dr} = \int_{Bo} [(2x + y^2) dx + (3y - 4x) dy]$$

نبدل كل x بـ $2y$ وكل dx بـ $2dy$ فنجد:

$$G_3 = \int_1^0 [2 (4y + y^2) dy + (3y - 8y) dy] = \int_1^0 (2y^2 + 3y) dy = \frac{-13}{6}$$

وبالتالي الجولان على المثلث OAB يكون:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 = 4 - \frac{13}{2} - \frac{13}{6} = \frac{-14}{3}$$

3- ليكن لدينا الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = y \ \hat{i} + [x + z \cos (yz)] \ \hat{j} + y \cos (yz) \ \hat{k}$$

والمطلوب:

1ً): احسب $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ واستنتج أن $\vec{F}$ متجهاً كمونياً.

2ً): أوجد كمونه العددي.

3ً): احسب جولان $\vec{F}$ من النقطة $M_1 (0 , \frac{\pi}{2} , 1)$ الى النقطة $M_2 (0 , 1 , \frac{\pi}{2})$.

الحل:

1ً): نلاحظ أن:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & [x + z \cos (yz)] & y \cos (yz) \end{vmatrix}$$

$$= 0 \ \hat{i} + 0 \ \hat{j} + 0 \ \hat{k} = \vec{0}$$

إذاً $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ هذا يعني أن $\vec{F}$ متجه كموني.

2ً): بما أن $\vec{F}$ متجه كموني فيوجد له كمون عددي وليكن f بحيث يكون $\vec{F} = grad \ f$، عندئذٍ:

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y........(1)$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\cos(yz)........(2)$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(yz)........(3)$$

نكامل العلاقة (1) بالنسبة لـ x فنجد:

$$f = xy + \varphi(y,z)........(4)$$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ y فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z\cos(yz)$$

نكامل العلاقة السابقة بالنسبة لـ y فنجد:

$$f = xy + \sin(yz) + g(z)........(5)$$

نشتق العلاقة (5) بالنسبة لـ z فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(yz) + \frac{dg}{dz} \Rightarrow \frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow g(z) = c$$

نعوض في (5) نحصل على الكمون العددي وهو:

$$f = xy + \sin(yz) + c$$

:(3ً

$$G = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{dr} = \int_{M_1}^{M_2} [F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz] = \int_{M_1}^{M_2} [\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz]$$

$$= \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_1) - f(M_2) = 1 + c - 1 - c = 0$$

4- احسب تدفق الدالة المتجهية:

$$\vec{F} = 2xy\,\hat{i} + yz^2\,\hat{j} + xz\,\hat{k}$$

من خلال السطح $\sum$ الذي هو متوازي المستطيلات المعين بالمعادلات:

$$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0\ ,\ x = 2\ ,\ y = 1\ ,\ z = 3$$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص نجد:

$$\phi = \iint_{\Sigma} (\vec{F} \,.\, \hat{n})\, ds = \iiint_{R} \nabla \vec{F}\, dv = \iiint_{R} (2y + z^2 + x)\, dv =$$

$$= \int_0^2 \{ \int_0^1 [\int_0^3 (2y + z^2 + x)\, dz]\, dy \}\, dx = \int_0^2 [\int_0^1 (6y + 9 + 3x)\, dy]\, dx$$

$$= \int_0^2 (3 + 9 + 3x)\, dx = 6 + 18 + 6 = 30$$

5- ليكن Σ سطحاً بسيطاً ومغلقاً، فأثبت أن:

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} \,.\, \hat{n}}{r^3}\, ds = \begin{cases} 0; & \text{إذا كان المبدأ } O \text{ خارج } \Sigma \\ 4\pi; & \text{إذا كان المبدأ } O \text{ داخل } \Sigma \end{cases}$$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص نجد: (حيث R الحجم الذي يحده Σ):

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} \,.\, \hat{n}}{r^3}\, ds = \iiint_{R} \nabla \frac{\vec{r}}{r^3} dv$$

1- إذا كان المبدأ O خارج $\Sigma \Leftarrow r \neq o$ ونعلم أن $\Delta\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = o \Leftarrow I = o$

2- إذا كان المبدأ O داخل $\Sigma \Leftarrow$ نحيط المبدأ بكرة صغيرة σ نصف قطرها α وتقع ضمن Σ ولنرمز بـ τ للحجم المحصور بين الكرة σ والسطح Σ فعندئذ يكون:

$$\iint_{\Sigma} \frac{\vec{r} \,.\hat{n}}{r^3}\, ds - \iint_{\sigma} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3}\, d\sigma = \iiint_{\tau} \nabla\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\,v = o \Rightarrow I = \iint_{\sigma} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3}\, d\sigma$$

ولكن شعاع واحدة الناظم على الكرة σ هو $\hat{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{\alpha}$ لأن $|\vec{r}| = \alpha$ على σ

$$\Rightarrow I = \iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{x^2} = \frac{1}{x^2} \iint_{\sigma} d\sigma = \frac{1}{x^2} (4x\, \pi^2) = 4\pi$$

6.2 طرائق حساب التدفق بصورة مباشرة (دون استخدام المبرهنات):

1): إذا كان السطح Σ معيناً بالمعادلات الوسيطية من الشكل:

$$\Sigma | \bar{\gamma} = \bar{\gamma}(u, v) = x(u, v)\ \hat{i} + y(u,v)\ \hat{j} + z(u,v)\ \hat{k}\ ;\ (u,v) \in G$$

عندئذ الجداء $\hat{n}\ .\ ds$ يكتب بالشكل:
$$\hat{n}\ .\ ds = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du\, dv$$

والتدفق يصبح:
$$\iint_{\Sigma} (\vec{F}\ .\ \hat{n})\ ds = \iint_{G} \vec{F} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du\, dv$$

تمرين: 2-6-1:احسب تدفق متجه الموضع من خلال السطح Σ الذي معادلاته الوسيطية:

$$\Sigma |\ x = u \cos v\ ,\ y = u \sin v\ ,\ z = u$$

حيث:
$$G = \{(u,v)\ ; o \le u \le 2\ ,\ o \le v \le 2\pi\}$$

الحل: الدالة المتجهية المفروضة هي:
$$\vec{r} = x\ \hat{i} + y\ \hat{i} + z\ \hat{k}$$

$$\Rightarrow \phi = \iint_{\Sigma} (\vec{r}\ .\ \hat{n})\ ds = \iint_{G} \vec{r} . \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \vec{r}}{d\, v} \right) du\ dv$$

ولكن:
$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = u \cos v\ \hat{i} + u \sin v\ \hat{j} + u\ \hat{k} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \cos v\ \hat{i} + \sin v\ \hat{j} + \hat{k}\ ,\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = -u \sin v\ \hat{i} + u \cos v\ \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} x & y & Z \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -xu \cos v - yu \sin v + u z$$

ولكن من أجل جميع نقاط السطح Σ فإن:

$$x = u \cos v\ ,\ y = u \sin v\ ,\ Z = u$$

$$\Rightarrow \vec{r} . \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Lambda \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) = u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v + u^2 = 0$$

وبالتالي التدفق ، هو : $\phi = 0$.

2): عندما يعطى السطح Σ ، بالمعادلة الديكارتية: $f(x,y,z)=0$ وبالتالي:

$$\hat{n}=\frac{\vec{\nabla}f}{\left|\vec{\nabla}f\right|}$$ (لأن $\vec{\nabla}f$ يعامد السطح Σ)

لنفرض أن $dx\,dy$ مسقط عنصر السطح على المستوي $X0Y$ ، عندئذٍ:

$$dx\,dy=ds\left|\cos(\hat{n},\hat{k})\right|=ds\left|\hat{n}.\hat{k}\right|\Rightarrow ds=\frac{dx\,dy}{\left|\hat{n}\,\hat{k}\right|}$$

وبالتالي:

$$\iint_{\Sigma}(\vec{F}.\hat{n})\,ds=\iint_{G_1}\vec{F}\,\hat{n}\,\frac{dx\,dy}{\left|\hat{n}.\hat{k}\right|}=\iint_{G_1}\vec{F}\,\frac{\vec{\nabla}f}{\left|\vec{\nabla}f\right|}\cdot\frac{dx\,dy}{\left|\frac{\vec{\nabla}f}{\vec{\nabla}f}\,\hat{k}\right|}$$

$$=\iint_{G_1}\vec{F}\,\vec{\nabla}f\,\frac{dx\,dy}{\left|\vec{\nabla}f\,\hat{k}\right|}$$ (حيث G_1 مسقط Σ على $X0Y$)

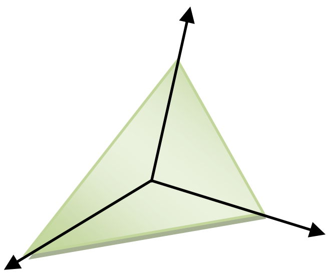
وبالمثل:

$$\iint_{\Sigma}(\vec{F}.\hat{n})\,ds=\iint_{G_2}\vec{F}\,\vec{\nabla}f\,\frac{dy\,dz}{\left|\vec{\nabla}f\,\hat{i}\right|}=\iint_{G_3}\vec{F}.\vec{\nabla}f\,\frac{dy\,dz}{\left|\vec{\nabla}f\,\hat{i}\right|}$$

تمرين: 2-6-2: احسب تدفق الدالة المتجهية:

$\vec{F}=18z\,\hat{i}-12\hat{y}+3y\,\hat{k}$ من خلال السطح Σ الذي هو جزء المستوي $2x+3y+6z=12$ الواقع في الثمن الأول:

الحل:



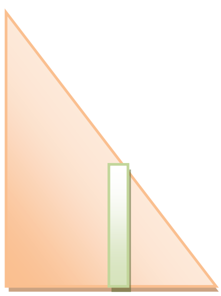
$$\vec{\nabla}f=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\Leftarrow f=2x+3y+6z-12=0$$

$$\Rightarrow\vec{\nabla}f.\hat{k}=6=\vec{F}.\vec{\nabla}f=36z-36+18y$$

ويمكن من أجل جميع نقاط Σ فإن: $6z=12-2x-3y$

$$\Rightarrow\vec{F}.\vec{\nabla}f=72-12x-18y-36+18y=36-12x$$

وبالتالي:



$$\phi=\iint_{\Sigma}(\vec{F}.\hat{n})ds=\iint_{R_1}\frac{\vec{F}\cdot\vec{\nabla}f}{\left|\vec{\nabla}f.\hat{k}\right|}\,dxdy$$: (R_1 مسقط Σ على $X0Y$)

$$\Rightarrow \phi = \iint_{R_1} \frac{1}{6}(36-12x)dxdy = \int_0^6 [\int_0^{4-\frac{2}{3}x} (6-2x)dy]dx = 24$$

3) عندما يعطى السطح بالاحداثيات الكروية أو الاسطوانية:

تمرين: 2-6-3: احسب تدفق الدالة المتجهية: $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} - 2z\hat{k}$

من خلال السطح Σ النصف العلوي لسطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

الحل: بالانتقال إلى الإحداثيات الكروية فإن المعادلات الوسيطية للسطح هي:

$$\Sigma |\; x = a\sin\theta\cos\varphi, y = a\sin\theta\sin\varphi \;\; , z = a\cos\theta$$

$$G_1 = \left\{(\varphi_1, \theta);\; o \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

اعتماداً على الإحداثيات الكروية نجد:

$$ds = a^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

وأيضاً:

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} = \frac{2\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{a}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \sin\theta\cos\varphi \;\; \hat{i} + \sin\theta\sin\varphi \;\; \hat{j} + \cos\theta \;\; \hat{k}$$

$$\Rightarrow \phi = \iint_{\Sigma} (\vec{F}.\hat{n})ds \Rightarrow$$

$$\phi = \iint_{G_1} [a\sin\theta\cos\varphi \;\; \hat{i} + a\sin\theta\sin\varphi \;\; \hat{j} + 2a\cos\theta \;\; \hat{k}]\,[\sin\theta\cos\varphi \;\; \hat{i} + \sin\theta\sin\varphi \;\; \hat{j} + \cos\theta]$$

$$[a^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta] = -2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - 3\cos^2\theta)\, d\cos\theta \Rightarrow$$

$$\phi = -2\pi a^3 [\cos\theta - \cos^3\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

فهرس الفصل الثالث

الفصل الثالث

3. التطبيقات الفيزيائية والهندسية للتحليل المتجهي

1.3 أولاً: التطبيقات الفيزيائية للتحليل المتجهي

1.1.3 معادلة الاستمرار: لتكن $p(r,t)$ كثافة مائع ما. ولنأخذ جزء من مائع يشغل منطقة فراغية R محاطة بسطح افتراضي مغلق موجه Σ. عندئذ معدل زيادة كتلة المائع التي يحويها السطح بالنسبة لـ t هو:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_R \tau\, dV = \int_R \frac{\partial p}{dt} dV \qquad (1)$$

بفرض V سرعة المائع وبما أن الناظم $\hat{n}$ موجه خارج المنطقة فإن كتلة المائع الداخل إلى R عبر المساحة ds في t هي: $\quad -(\rho v).\hat{n}\, ds$

وبالتالي معدل زيادة كتلة المائع بالنسبة لـ t ضمن Σ هو:

$$\oint_\Sigma (\rho v)\hat{n}\, ds = -\int_R \nabla.(\rho v)\, dv \qquad (2)$$ (حسب غوص)

من (1) و(2) ينتج: $\displaystyle \int_R \frac{\partial \rho}{dt}\ dV = -\int_R \nabla.(\rho v)\ dV$

وبالتالي $\displaystyle \frac{\partial \rho}{dt} = -\nabla(\rho v)$ هذا يعني أن: $\displaystyle \frac{\partial \rho}{d\,t} + \nabla(\rho v) = 0$ معادلة الاستقرار.

2.1.3 المعادلة التفاضلية للإيصال الحراري:

لتكن ρ كثافة جسم في النقطة p ولتكن c حرارته النوعية و dV عنصر الحجم في p ، عندئذ تكون زيادة درجة الحرارة في p بمقدار dT تقابل امتصاص العنصر لكمية من الحرارة قدرها $c\rho dV dT$.

وليكن Σ سطحاً موجهاً مغلقاً يحيط بمنطقة R واقعة تماماً على هذا الجسم.

فإذا كان $\left(-\frac{\partial T}{\partial t}\right)$ هو انخفاض الحرارة في P في وحدة الزمن ، عندئذ كمية حرارة المادة الواقعة في المنطقة R تنقص في وحدة الزمن بمقدار:

$$-\int_R c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى فإن كمية الحرارة الخارجة من R عبر وجود مساحة السطح Σ في وحدة الزمن هي:

$$\hat{n}.F = \hat{n}.(k\nabla T)$$

وباستخدام القانون $F = -k\nabla T, (K > 0)$ نجد أن كمية الحرارة التي تخرج عبر السطح Σ في وحدة الزمن هي:

$$\oint_\Sigma \hat{n}.(k\nabla T)\, ds = -\int_R \nabla.(k\nabla T) dv \qquad (2)$$

باستخدام مبرهنة غوص وبتساوي (1) و(2) ينتج:

$$\int_R c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dv = \int_R \nabla(k\nabla T) dv$$

وبالتالي:

$\frac{\partial T}{dt} = \frac{1}{c\rho}\nabla.(k\nabla T)$ المعادلة التفاضلية للإيصال الحراري.

3.1.3 معادلات ماكسويل ونتائجها:

ليكن E الحقل الكهربائي ، وH الحقل المغناطيسي ، و ρ الكثافة الحجيمه للشحنة ، و ليكن t الزمن ، و K السماحية الكهربائية ،و μ النفوذية المغناطيسية ، و σ الناقلية الكهربائية و $D = K\,E$ التحريض الكهربائي و $B = \mu\, H$ التحريض المغناطيسي، و$J = \sigma E$ كثافة التيار ، في وسط ناقل ساكن متجانس تعادلي الخواص و متصل الشحنة. وبالتالي معادلات ماكسويل للحقل الكهرطيسي المعين بدوال الموضع والزمن معاً E, H, ρ هي المعادلات الأربع:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{k} \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot H = o \qquad (2)$$

$$\nabla \wedge H = \sigma E + K \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\nabla \wedge E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (4)$$

4.1.3 معادلتا البرق والانتشار الكهربائي:

يوضع $\rho = 0$ في المعادلة (1) ينتج أن:

$$\nabla \cdot E = 0 \qquad (I)$$

من (4) ينتج بأخذ دوران الطرفين:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \wedge H) \qquad (II)$$

وذلك لأن ∇ لا تتعلق بالزمن ، وبالتالي بإيجاد قيمة الطرف الأيسر في (II) :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

وباستخدام (I) يكون:

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge E) = -\nabla^2 E \qquad (III)$$

بتعويض (3) و(III) في (II) تنتج:

$$\nabla^2 E = \mu\, \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \mu\, k \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \qquad \text{(معادلة البرق)}$$

بالطريقة نفسها نبرهن أن H يحقق المعادلة نفسها.

في الحالة الخاصة التي يكون فيها تغير الحقل الكهرطيسي بطيئاً بالنسبة للزمن لذلك يمكن اهمال الحد الذي يحوي المقدار $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ في معادلة البرق ، وبوضع $J = \sigma E$ في الناتج نحصل ، على المعادلة التفاضلية:

$$\nabla^2 J = \mu\, \sigma \frac{\partial J}{\partial t} \qquad \text{(معادلة الانتشار الكهربائي)}$$

2.3 ثانياً: التطبيقات الهندسية للتحليل المتجهي

1.2.3 حركة الجسم الصلب والتشوه الصغير:

نعلم أن سرعة نقطة ما من جسم صلب يدور حول نقطة O تعطى بالعلاقة:

$$\vec{V} = \vec{O}\,\Lambda\,\vec{r}$$

وذلك بفرض أن $\vec{o}$ شعاع الدوران الآني و $\vec{r}$ نصف القطر المتجهي. إن أعم حركة للجسم الصلب تتم عندما يقوم الجسم بالإضافة إلى الحركة السابقة بحركة انسحابية سرعتها $\vec{V}_0$، وعندها يعبر عن السرعة الكلية بالعلاقة:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{O}\Lambda\;\vec{r}$$

سنبحث الآن عن متجه الدوران حين يكون حقل السرع $\vec{V}$ معلوماً. لنلاحظ قبل كل شيء أن الأشعة $\vec{V}_0$ في لحظة ما متساويةً شدةً واتجاهاً في جميع نقاط الجسم، فهي إذن مستقلة عن $(x\,,y\,,z)$ وعندها نجد أن $\text{rot}\,\vec{V}_0 = 0$.

لتكن p,q,r مركبات $\vec{O}$ على المحاور الإحداثية. وبما أن مركبات الجداء الخارجي $\vec{O}\,\Lambda\,\vec{r}$ هي:

$$qz - ry \quad , \quad rx - p \quad , \quad py - qx$$

فيمكننا أن نعبر عن متجه الدوران الآني بدلالة $\vec{V}$ بالشكل:

$$\vec{O} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\,\vec{V}$$

من هنا يتضح سبب تسمية المتجه $\text{rot}\,\vec{V}$ بدوران متجه السرعة.

إذا ضربنا متجه السرعة $\vec{V}$ بالعنصر الزمني الصغير dt، حصلنا على المتجه $\vec{V}\,dt$ الذي يعطى الانتقال التقريبي لنقطة خلال العنصر الزمني الصغير dt. وبهذا نحصل على الحقل المتجهي للانتقالات الصغيرة لنقاط الجسم الصلب:

$$\vec{A} = \vec{V}\,dt$$

ففي حال عدم وجود حركة انسحابية، يكون متجه الانتقال:

$$\vec{A} = \vec{o_1}\Lambda\;\vec{r} \qquad (3-2-1)$$

بفرض $\overrightarrow{o_1} = \vec{o}\, dt$ متجهاً صغيراً محمولاً على محور الدوران طوله يساوي زاوية الدوران الصغيرة خلال المجال الزمني dt، ولتكن $(p_1\ ,\ q_1\ ,\ r_1)$ مركبات هذا المتجه، و(x, y, z) إحداثيات نقطة متحولة من الجسم الصلب، عندها تغدو مركبات الشعاع $\overrightarrow{A}$:

$$A_x = q_1 z - r_1 y \quad , \quad A_y = r_1 x - p_1 z \quad , \quad A_z = p_1 y - q_1 x$$

من السهل أن نعبر هنا، عن متجه الدورانات الصغيرة بدلالة متجه الانتقال على النحو التالي:

$$\overrightarrow{o_1} = \frac{1}{2}\ \mathrm{rot}\,\overrightarrow{A}$$

وبالإضافة إلى ذلك، فإن العلاقات الأخيرة تبين أن مركبات $\overrightarrow{A}$ هي دوال خطية متجانسة بالنسبة للإحداثيات (x, y, z).

لننظر الآن في الحالة العامة عندما يتعرض الجسم للتشوه الخطي المتجانس وذلك عندما تكون مركبات متجه الانتقال دوال خطية متجانسة بالنسبة للإحداثيات.

$$\left.\begin{aligned} A_x &= a_1 x + b_1 y + c_1 z \\ A_y &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \\ A_z &= a_3 x + b_3 y + c_3 z \end{aligned}\right\} \ ;\ (3-2-2)$$

سنعتبر الأمثال a وb وc صغيرة، وسنقتصر على حجم عنصري V بالقرب من مبدأ الإحداثيات. إن كل نقطة من هذا الحجم تنزاح بمقدار الشعاع $\overrightarrow{A}$ ، وبالتالي إحداثياتها الجديدة تصبح بعد الانزياح:

$$\xi = x + A_x \qquad ; \qquad \eta = y + A_y \qquad ; \qquad \mu = z + A_z$$

أي أن:

$$\begin{aligned} \xi &= (1 + a_1)x + b_1 y + c_1 z \\ \eta &= a_2 x + (1 + b_1)y + c_2 z \\ \mu &= a_3 x + b_3 y + (1 + c_3)z \end{aligned}$$

إن هذا التحويل يمثل دورانا للحجم العنصري V حول O وكأنه جسم صلب متماسك وذلك في حالات خاصة فقط ، أما في الحالة العامة فانه يرتبط بتشوه هذا الحجم، أي بتغير الأبعاد بين نقاطه. ولنشرح هذا الموضوع بشكل أكثر تفصيلاً:

إن مركبات دوران متجه الانتقال $\overrightarrow{A}$ حسب (1) هي:

$$(b_3 - c_2\ , c_1 - a_3\ , a_2 - b_1)$$

ولو آل التحويل إلى دوران الحجم العنصري ككل لحصلنا على متجه الانتقال $\overrightarrow{A^{(1)}}$ ذي المركبات:

$$A_x^{(1)} = \frac{1}{2}(c_1 - a_3)z - \frac{1}{2}(a_2 - b_1)y$$
$$A_y^{(1)} = \frac{1}{2}(a_2 - b_1)x - \frac{1}{2}(b_3 - c_2)z$$
$$A_z^{(1)} = \frac{1}{2}(b_3 - c_2)y - \frac{1}{2}(c_1 - a_3)x$$

لنطرح هذا المتجه من $\vec{A}$، ونمثل المتجه الأخير بالشكل:

$$\vec{A} = \overrightarrow{A^{(1)}} + \overrightarrow{A^{(2)}}$$

بفرض مركبات متجه التشوه البحت هي:

$$A_x^{(2)} = a_1x + \frac{1}{2}(b_1 + a_2)y + \frac{1}{2}(c_1 + a_3)z$$
$$A_y^{(2)} = \frac{1}{2}(b_1 + a_2)x + b_2y + \frac{1}{2}(c_2 + b_3)z$$
$$A_z^{(2)} = \frac{1}{2}(c_1 + a_3)x + \frac{1}{2}(c_2 + b_3)y + c_3z$$

ومن السهل أن نرى أن هذا المتجه كموني، ذلك لأن:

$$\overrightarrow{A^{(2)}} = \frac{1}{2}\mathrm{grad}[\, a_2x^2 + b_2y^2 + c_3z^2 + (b_1 + a_2)xy + (c_1 + a_3)xz \; + (c_2 + b_3)yz\,]$$

ومن الواضح أن دوران هذا المتجه يساوي الصفر.

لنعين الآن تغير الحجم العنصري بنتيجة التشوه. يعبر عن الحجم الجديد بعد التشوه بالتكامل:

$$\iiint_{(V)} d\xi \;\; d\eta \;\; d\mu$$

واذا أجرينا تغيراً للمتحولات وجدنا:

$$d\xi\, d\eta\, d\mu = \{(1 + a_1)[(1 + \, b_2)(\,1 + c_3\,) - c_2b_3)] +$$

$$b_1[c_2a_3 - a_2(1 + c_3)] + c_1[a_2b_3 - (1 + b_2)a_3]\}dxdydz$$

وبفك الأقواس والإبقاء فقط على الحد الثابت والحدود ذات الدرجة الأولى بالنسبة للأمثال الصغيرة a و b و c نجد:

$$d\xi\, d\eta\, d\mu = [1 + (a_1 + b_2 + c_3)]dxdydz$$

وعندها تعطى العلاقة السابقة:

$$V_1 = \iiint_V [1 + (a_1 + b_2 + c_3)]dxdydz = V + (a_1 + c_2)V$$

وذلك بفرض أن V يمثل قياس الحجم العنصري قبل التشوه. ويكون التغير الحجمي مساوياً عندئذ:

$$\frac{V_1 - V}{V} = a_1 + b_2 + c_3$$

وليس من الصعب أن نبين أن المجموع الموجود في الطرف الأيمن هو $\overrightarrow{d\iota v}\mathrm{A}$ أي أن تفرق أو تباعد حقل الانتقالات يساوي عامل التغير الحجمي.

2.2.3 معادلات تحريك السائل المثالي:

نعني بالسائل المثالي ذلك الوسط المتصل وغير المتماسك الذي تؤول فيه القوى الداخلية (في حال توازن السائل أو حركته) الى ضغط ناظمي، بحيث أننا إذا اجتزأنا من هذا الوسط حجماً ما (v) محصوراً بالسطح (s) آل تأثير القسم الباقي من الوسط على هذا الجزء إلى قوة موجهة في كل نقطة من (s) باتجاه الناظم الداخلي. لنرمز بـ p إلى قياس هذه القوة على واحدة المساحة (أي الضغط).

إن قيم الضغط $p(M)$ في مختلف نقاط الوسط تشكل في لحظة حقلاً سلمياً.

ويمكن التعبير عن محصلة قوى الضغط على السطح الخارجي للحيز (v) بالتكامل:

$$-\iint_{(s)} p\, \overrightarrow{ds} = \iiint_{(v)} grad\ p\ dv$$

وقد وضعنا الإشارة $(-)$ لأن الضغط الموجب يؤثر في اتجاه الناظم الداخلي. بينما يتجه المتجه $\overrightarrow{ds}$ باتجاه الناظم الخارجي فرضاً.

واستناداً إلى مبدأ دالامبير، فيجب أن تكون قوى الضغط متوازنة مع القوى الخارجية التي نرمز لها بـ $\vec{F}$ من أجل واحدة الكتلة، والتي محصلتها في الحجم (v) هي:

$$\iiint_{(v)} \rho\, \vec{F}\, dv$$

تضاف إليها قوة العطالة التي تساوي $\rho\, dv\, \vec{w}$ من أجل عنصر الكتلة حيث تمثل ρ الكثافة الجزيئة السائلية و $\vec{w}$ تسارعها. وهكذا فإن قوة العطالة المطبقة على الحجم (v) تساوي:

$$-\iiint_{(v)} \rho\, \vec{w}\, dv$$

وعندها واستناداً إلى مبدأ دالامبير، نجد العلاقة:

$$\iiint_{(v)} \left[\rho\, \vec{F} - \text{grad}\, p - \rho \vec{w}\right] dv = 0$$

ويترتب عليها ، أن الدالة الخاضعة للتكامل تساوي الصفر، أي:

$$\rho \vec{w} = \rho\, \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\, p \qquad (3)$$

وذلك لأن v كيفي. إن هذه المعادلة (3) تكافئ ثلاث معادلات هي المعادلات الأساسية لتحريك السائل المثالي.

لتكن مركبات متجه السرعة (u, v, w) دوال لإحداثيات النقطة (x, y, z) والزمن t إن مركبة متجه التسارع $\vec{w}$ على المحور $\overrightarrow{OX}$ هي المشتقة الكلية بالنسبة للزمن لمركبة متجه السرعة $u(t, x, y, z)$ ، لذا يمكننا أن نكتب:

$$w_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

أو

$$w_x = \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}} u + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} v + \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}} w$$

كذلك فإن:

$$w_y = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w$$

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w$$

وهكذا فإن المعادلة المتجهيه (3) تقودنا إلى المعادلات الثلاث التالية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial x}u+\frac{\partial w}{\partial y}v+\frac{\partial w}{\partial z}w=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ويقال عن هذه المعادلات إنها معادلات تحريك السائل في صيغة (أولر). ويجب أن نضيف إلى هذه المعادلات معادلة الاستمرار التي استنتجناها في الفقرة السابقة.

وإذا استعملنا هذه الرموز يمكن كتابة العلاقة (3) بالشكل:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho}{\partial x}u+\frac{\partial \rho}{\partial t}v+\frac{\partial \rho}{\partial z}w+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

إن ما يميز هذه المعادلات أننا عند دراسة الحركة اخترنا إحداثيات النقطة في الفضاء (x,y,z) والزمن t كمتحولات مستقلة.

تمارين عامة في التحليل المتجهي

1- أوجد المشتقة المتجهية للدالة: $f(x,y,z)=x^3+y^2z$ في النقطة $P(2,1,0)$:

$1'$- في اتجاه تزايد الإحداثي x.

$2'$- في الاتجاه من النقطة $P(2,1,0)$ إلى النقطة $(1,1,-\sqrt{3})$.

الحل:

$1'$- إن المشتقة المتجهية للدالة f باتجاه تزايد الإحداثي x هو عبارة عن المشتقة باتجاه متجه الواحدة $\vec{\imath}(1.0.0)$ وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial f(2,1,0)}{\partial\vec{\imath}}=1.\frac{\partial f(2,1,0)}{\partial x}+0.\frac{\partial f(2,1,0)}{\partial y}+0.\frac{\partial f(2,1,0)}{\partial z}=3x^2|_{(2,1,0)}=12$$

$2'$- إن الاتجاه الواصل من النقطة $P(2,1,0)$ إلى النقطة $(1,1,-\sqrt{3})$ ممثل بالمتجه:

$$\vec{V}=(1-2)\vec{\imath}+(1-1)\vec{\jmath}+(-\sqrt{3}-0)\vec{k}$$

$$\Longrightarrow\vec{V}=-\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+-\sqrt{3}\ \ \vec{k}$$

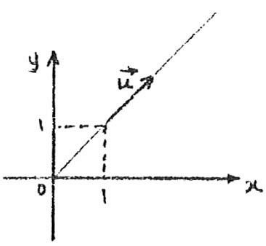
وبالتالي فإن متجه واحدة هذا المتجه يكون:

$$\vec{u}=\frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}=-\frac{1}{2}\vec{\imath}+0\vec{\jmath}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \vec{k}$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial f\ (2,1,0)}{\partial\vec{u}}=-\frac{1}{2}\ \frac{\partial f\ (2,1,0)}{\partial x}+0\frac{\partial f\ (2,1,0)}{\partial y}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{\partial f\ (2,1,0)}{\partial z}$$
$$=-\frac{1}{2}.12+0-\frac{\sqrt{3}}{2}1=-\left(6+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2- أوجد المشتقة المتجهية للدالة:



$f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ في النقطة $(1,1)$ وفق اتجاه تزايد النصف الأول.

الحل: ليكن $\vec{u}(a,b)$ متجه الواحدة الموجه باتجاه تزايد المنصف الأول فهذا يعني أن $a=b$ حيث $a>0$ ولكن لدينا:

$$|\vec{u}|=1\rightarrow\quad\sqrt{a^2+a^2}=1$$

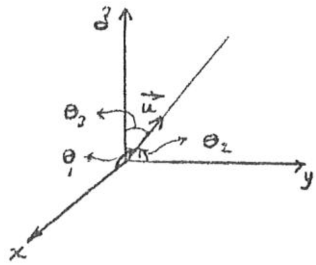
وبالتالي فإن: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

و بالتالي ، متجه الواحدة الموجه باتجاه تزايد المنصف الأول هو: $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ومنه ، ينتج أن:

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial \vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f(1,1)}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3- أوجد المشتقة المتجهية للدالة: $f(x,y,z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ في النقطة (0,0,0) وفق الاتجاه الذي يصنع مع المحاور الإحداثية زوايا حادة متساوية.



الحل: لنفرض أن $\vec{u}(a,b,c)$ هو متجه الواحدة وفق الاتجاه المطلوب أي أنه يصنع مع المحاور الإحداثية زوايا حادة متساوية ولكن مركبات هذا المتجه ما هي إلا تجيبات الزوايا التي يصنعها مع المحاور الإحداثية أي أن:

$$a = \cos\theta_1, b = \cos\theta_2 , c = \cos\theta_3$$

وبما أن $\overrightarrow{|u|} = 1 \rightarrow \overrightarrow{|u|}^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$

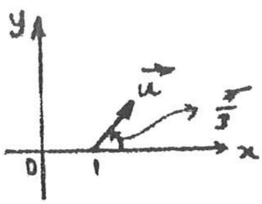
ولكن $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ ولأن θ_1 حادة،فإن:

$$3\cos^2\theta_1 = 1 \Longrightarrow \cos\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

إذن: $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، أي أن $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ومنه ، ينتج أن:

$$\frac{\partial f(0.0.0)}{\partial \vec{u}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\partial f(0.0.0)}{\partial x} + \frac{\partial f(0.0.0)}{\partial y} + \frac{\partial f(0.0.0)}{\partial z}\right] = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4- أوجد المشتقة المتجهية للدالة: $f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$ وفق الاتجاه الذي يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{3}$ راديان مع محور الفواصل في النقطة (1,0).



الحل: لنفرض أن $\vec{u}(a,b)$ هو متجه الواحدة وفق الاتجاه المطلوب فعندئذٍ يكون:

$$a=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad b=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

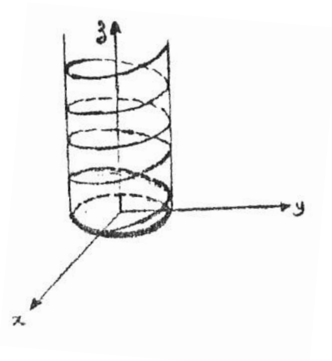
وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial f(1{,}0)}{\partial\vec{u}}=\frac{1}{2}\frac{\partial f(1{,}0)}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial f(0.1)}{\partial y}=\frac{1}{2}.4+\frac{\sqrt{3}}{2}.0=2$$

5- ليكن لدينا المنحني $\vec{r}=\vec{r}(t)=\cos t\ \vec{\imath}+\sin t\vec{\jmath}+t\vec{k}$ (لولب دائري)

والمطلوب:

1ً- أوجد ثلاثية فرينيه $(\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ واستنتج أن تقوس اللولب ثابت.



2ً- أوجد معدلات المستقيم المماس والمستوي الناظم في النقطة الموافقة لـ $t=\frac{\pi}{2}$

الحل: 1ً): $\vec{r}'(t)=-\sin t\,\vec{\imath}+\cos t\vec{\jmath}+\vec{k}$

$$\Longrightarrow\ |\vec{r}'(t)|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}=\sqrt{2}$$

وبالتالي فإن:

$$\vec{T}=\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}=\frac{1}{\sqrt{2}}[-\sin t\,\vec{\imath}+\cos t\,\vec{\jmath}+\vec{k}]$$

$$\vec{K}=\frac{d\vec{T}}{ds}=\frac{d\vec{T}}{dt}\ .\frac{dt}{ds}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{|\vec{r}'(t)|}=\frac{1}{2}\ [-\cos t\,\vec{\imath}-\sin t\vec{\jmath}]$$

وبالتالي فإن تقوس اللولب الدائري في كل نقطة من نقاطه ثابت ويساوي $k=|\vec{k}|=\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow\vec{N}=\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}=-\cos t\,\vec{\imath}-\sin t\,\vec{\jmath}$$

$$\vec{B}=\vec{T}\wedge\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t&\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\,\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\vec{\jmath}+\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

2ً- نعلم أن معادلة المستقيم المار من النقطة (x_0,y_0,z_0) ويعامد الشعاع $\vec{V}(p,q,r)$ هما:

$$\frac{x-x_0}{P}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

إن النقطة الموافقة لـ $t=\frac{\pi}{2}$ هي $M_o\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$ وبالتالي فالمستقيم المماس للولب الدائري يمر من النقطة M_o ويوازي الشعاع $\vec{T}$ في هذه النقطة ولكن $\vec{T}$ في هذه النقطة يكون:

$$\vec{T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\vec{\imath}+0\vec{\jmath}+\vec{K}\right] \Longrightarrow \vec{T}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

معادلتي المماس تكونا:

$$\frac{x-0}{-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

أو المماس على شكل فصل مشترك للمستويين:

$$y=1 \quad , \ x+z=\frac{\pi}{2}$$

ونعلم أن معادلة مستوٍ يمر من النقطة (x_o,y_o,z_o) ويوازي المتجه $\vec{V}(p,q,r)$ هي:

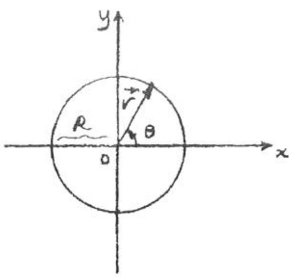
$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

وبالتالي فالمستوي الناظم للولب يعامد متجه واحدة المماس $\vec{T}$ ويمر من النقطة $\left(0,1,\frac{\pi}{2}\right)$ فتكون معادلته:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-0)+0(y-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)=0 \Rightarrow x-z+\frac{\pi}{2}=0$$

معادلة المستوي الناظم.

6- أثبت أن تقوس الدائرة التي نصف قطرها R هو مقدار ثابت في كل نقطة من نقاطها.



الحل: تنسب هذه الدائرة إلى جملة محاور إحداثية متعامدة ونظامية XOY مبدأ هذه الجملة يقع في مركز الدائرة فتكون المعادلات الوسيطة للدائرة:

$$x=R\cos\theta, \quad y=R\sin\theta\,, \quad \theta\in[0,2\pi]$$

وبالتالي فإن الدالة المتجيه المستمرة:

$$\vec{r}:[0,2\pi]\to R^2:\theta\to\vec{r}(\theta)=R\cos\theta\vec{\imath}+R\sin\theta\vec{\jmath}$$

تمثل منحني هذه الدائرة.

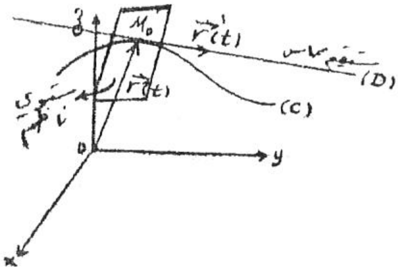
$$\vec{r}'(\theta) = -R\sin\theta\vec{\imath} + R\cos\theta\vec{\jmath} \quad \rightarrow |\vec{r}'(\theta)| = R$$

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}\prime(\theta)}{|\vec{r}\prime(t)|} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath}\ ,\vec{K} = \frac{d\vec{T}}{ds}\,.\,\frac{dt}{d\theta}\,.\frac{d\theta}{ds} = \frac{\frac{d\vec{T}}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}$$

ولكن:
$$\frac{ds}{d\theta} = s'(\theta) = |\vec{r}'(\theta)| = R$$

$$\Longrightarrow \vec{K} = \frac{1}{R}.\frac{d\vec{T}}{d\theta} = \frac{1}{R}\,[-\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath}] \rightarrow K = \left|\vec{K}\right| = \frac{1}{R} = \text{cons}\,t$$

7- ليكن لدينا المنحني المعطى بالمعادلات الوسيطية:



$$C \mid x = 3t - t^3 \quad y = 3t^2 \quad z = 3t + t^3$$

والمطلوب: إيجاد معادلتي المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني في النقطة الموافقة لـ $t = 1$.

الحل: إن الدالة المتجيه المستمرة:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (3t - t^3)\vec{\imath} + 3t^3\vec{\jmath} + (3t + t^3)\vec{k}$$

تمثل المنحني (C) ولكن منحى المماس للمنحني (C) في كل نقطة من نقاطه، ممثل بالمتجه:

$$\vec{r}'(t) = (3 - 3t^2)\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath} + (3 + t^2)\vec{k}$$

إن النقطة من المنحني (C) الموافقة لقيمة الوسيط $t = 1$ هي: $M_0(2,3,4)$.

كما أن منحني المستقيم المماس للمنحني (C) في النقطة معين بالمتجه:

$$\vec{r}'(t)|_{t=1} = o\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

وبالتالي فإن معادلتي المستقيم المماس للمنحني (C) في النقطة M_0 هما:

$$D \left| \frac{x-2}{o} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-4}{6} \right.$$

أو هذا المستقيم على شكل فصل مشترك لمستويين:

$$D| \begin{array}{l} x = 2 \\ y - z = -1 \end{array}$$

كما أن المستوى الناظم للمنحني (C) في النقطة الموافقة لـ $t = 1$ هو عبارة عن المستوى المار من النقطة M_0 والمعامد للمتجه $(o\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 6\vec{k})$ ، فتكون معادلته:

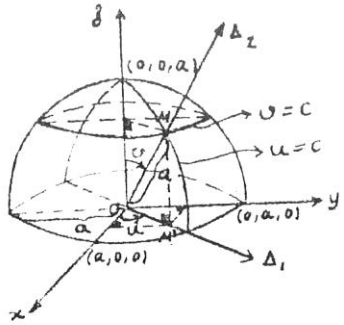
$$o(x-2) + 6\,(y-3) + 6\,(z-4) = o$$

أو:
$$y + z - 7 = o$$

8- ليكن لدينا السطح:

$$\vec{r}(u,v) = \alpha \cos u \sin v \vec{\imath} + \alpha \sin u \sin v \vec{\jmath} + \alpha \cos v \vec{k}$$

والمطلوب:



1- أوجد المعادلة الديكارتية لهذا السطح واستنتج نوع هذا السطح.

2- ماذا تمثل المنحنيات الإحداثية على هذا السطح.

3- أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم الناظم للسطح في النقطة $M_o\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

4- أثبت أن أي مستقيم ناظم للسطح يمر من نقطة الأصل.

الحل: 1 - لدينا :

$$x^2 = a^2\cos^2 u \sin^2 v \quad , \quad y^2 = a^2 \sin^2 u \sin^2 v$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2\sin^2 v \quad , \quad z^2 = a^2 \cos^2 v$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

وهي المعادلة الديكارتية للسطح وهي عبارة عن معادلة كرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها a.

2- بما أن السطح هو عبارة عن كرة فإن الوسيط u يمثل الزاوية بين المحور OX والمحور Δ_1 (حيث Δ_1 المستقيم الموجه من O إلى M' مسقط M على XOY).

كما أن الوسيط v يمثل الزاوية بين المحور OZ والمحور Δ_2 (حيث Δ_2 المستقيم الموجه من O إلى M.

وبالتالي من أجل $u = c$ نحصل في الفضاء على مستوٍ يمر بالمحور OZ ويصنع مع المستوي XOY الزاوية الثابتة u فالنقاط الواقعة على الكرة من المستوي السابق هي عبارة عن الدائرة الواقعة في هذا المستوي والتي مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها a وتمر دوماً من النقطتين: $(0\,,0\,,a)\,,\ (0\,,0\,,-a)$.

إذن فالمنحنيات الإحداثية ذات الوسيط v أي $(u = c)$ هي عبارة عن خطوط الطول.

أما من أجل $(v = c)$ فنحصل في الفضاء على مخروط دوراني رأسه O ومحوره OZ ونصف زاويته الرأسية هي الزاوية الثابتة $v = c$ فالنقاط الواقعة على الكرة من المخروط السابق هي عبارة عن نقاط الدائرة الأفقية التي مركزها النقطة $(0, 0\,, \alpha \cos v)$ ونصف قطرها $R = a \sin v$ إذن فالمنحنيات الإحداثية ذات الوسيط u أي $(v = c)$ هي عبارة عن خطوط العرض.

3- إن الإحداثيات الديكارتية للنقطة المقابلة للوسيطين $u = v = \frac{\pi}{4}$ هي:

$$x = \frac{a}{2} \ , \quad y = \frac{a}{2} \ , \quad z = \frac{a}{\sqrt{2}} \ \rightarrow M_O\left(\frac{a}{2}\,, \frac{a}{2}\,, \frac{a}{\sqrt{2}}\ \right)$$

ولكن معادلة الكرة هي: $\varphi\ (x, y, z) \equiv\ x^2 +\ y^2 + z^2 - a^2 = 0$

فتكون معادلة المستوي المماس للكرة في النقطة M_O هي:

$$(X - x_o)\frac{\partial\varphi}{\partial x} +\ (Y - y_o)\frac{\partial\varphi}{\partial y} +\ (Z - z_o)\frac{\partial\varphi}{\partial z} =\ 0$$

$$\Longrightarrow \left(X - \frac{a}{2}\right)(a) + \left(Y - \frac{a}{2}\right)(a) + \left(Z - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}\,a\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ X + Y +\ \sqrt{2}\,Z = 2a$$

أما معادلتي المستقيم الناظم للكرة في النقطة M_O فهما:

$$\frac{X - x_O}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{Y - y_O}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{Z - z_O}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \ \Rightarrow\ \frac{X - \frac{a}{2}}{a} = \frac{Y - \frac{a}{2}}{a} = \frac{Z - \frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}a}$$

أو على شكل فصل مشترك لمستويين:

$$\left[\begin{array}{c} X - Y = 0 \\ \sqrt{2}\,X - Z = 0 \end{array}\right.$$

4- لتكن $M_O = (x_{o,} y_o, z_o)$ نقطة اختيارية من سطح الكرة. إن منحى الناظم على الكرة في هذه النقطة معين بالمتجه:

$$\vec{V} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\ \vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\ \vec{k}$$

وذلك بعد تعويض المشتقات في النقطة M_O

$$\Rightarrow \quad \vec{V} = 2x_o\,\vec{\imath} +\ 2y_o\,\vec{\jmath} + 2z_o\,\vec{k}$$

فتكون معادلتا المستقيم الناظم في النقطة M_O هما:

$$\frac{X-x_o}{2x_o} = \frac{Y-y_o}{2y_o} = \frac{Z-z_o}{2z_o}$$

ولنرى فيما إذا كان هذا المستقيم يمر من نقطة الأصل أم لا؟ لذا نعوض إحداثيات نقطة الأصل في المعادلات السابقة فنجد:

$$\frac{0-x_o}{2x_o} = \frac{0-y_o}{2y_o} = \frac{0-z_o}{z_o} = -\frac{1}{2}$$

إذاً نقطة الأصل تنتمي إلى هذا المستقيم وذلك مهما تكن النقطة M_O الواقعة على سطح الكرة السابقة.

9- أوجد معادلات المستوي المماس والمستقيم الناظم للسطح $z = x^2 + y^2$ في النقطة $(2,-1,5)$.

الحل: نلاحظ أن $5 = (2)^2 + (-1)^2$ أي أن النقطة المفروضة تحقق معادلة السطح.

إن معادلة المستوي المماس للسطح في النقطة $(2,-1,5)$ هي:

$$(X-x_o)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + (Y-y_o)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + (Z-z_o)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

حيث: $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$

وبالتالي فمعادلة المستوي المماس للسطح في النقطة $(2,-1,5)$ تكون:

$$(X-2)(4) + (Y+1)(-2) + (Z-5)(-1) = 0 \Rightarrow 4X - 2Y - Z = 5$$

أما معادلتي المستقيم الناظم للسطح في النقطة $(2,-1,5)$ فهما:

$$\frac{X-x_o}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{Y-y_o}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{Z-z_o}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}} \Rightarrow \frac{X-2}{4} = \frac{Y+1}{-2} = \frac{Z-5}{-1}$$

أو على شكل فصل مشترك لمستويين:

$$\left[\begin{array}{l} X + 2Y = 0 \\ Y - 2Z + 11 = 0 \end{array}\right.$$

10- ليكن $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ وليكن $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

ولتكن $\varphi = \varphi(r)$ فأثبت أن: $\operatorname{grad} \varphi(r) = \varphi'(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}$.

الحل:

$$\operatorname{grad} \varphi(r) = \frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\,\vec{k}$$

ولكن: $\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'(r) . \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \varphi'(r) . \frac{x}{r}$

وبالمثل فإن: $\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y} = \varphi'(r) . \frac{y}{r} \quad , \quad \frac{\partial\varphi(r)}{\partial z} = \varphi'(r) . \frac{z}{r}$

وبالتالي فإن: $\text{grad}\,\varphi(r) = \varphi'(r) \left[\frac{x}{r}\vec{\imath} + \frac{y}{r}\vec{\jmath} + \frac{z}{r}\vec{k}\right] = \varphi'(r) . \frac{\vec{r}}{r}$

11- ليكن $\vec{B}, \vec{A}$ شعاعان ثابتان والمطلوب:

1- أثبت أن: $\vec{\nabla}\left(\vec{A}\,\vec{r}\right) = \vec{A}$.

2- أثبت أن: $\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{A}\,\vec{r}\right).\left(\vec{B}\,\vec{r}\right)\right\} = \left(\vec{A}\,\vec{r}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\,\vec{r}\right)\vec{A}$

الحل: 1- بما أن $\vec{A}$ متجه ثابت نفرض أن مركباته هي الأعداد الثابتة α, β, γ أي:

$$\vec{A} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\,\vec{k}$$

ولكن ، بما أن: $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k} \Rightarrow \vec{A} . \vec{r} = \alpha x + \beta y + \gamma z$

وبالتالي فإن:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{A}\vec{r}\right) = \vec{\nabla}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \text{grad}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k} = \vec{A}$$

2- بما أن $\vec{A}\,\vec{r}, \vec{B}\,\vec{r}$ مقداران سلميان فنفرض أن: $f = \vec{A}.\vec{r} \;,\; g = \vec{B}.\vec{r}$

(حسب خواص التدرج):

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\left\{\left(\vec{A}\,\vec{r}\right).\left(\vec{B}\,\vec{r}\right)\right\} = \vec{\nabla}(f.g) = \text{grad}(f.g) = f.\text{grad}\,g + g.\text{grad}\,f$$

ولكن حسب الطلب الأول فإن:

$$\text{grad}\,g = \text{grad}\left(\vec{B}\,\vec{r}\right) = \vec{B} \;,\; \text{grad}\,f = \text{grad}\left(\vec{A}\,\vec{r}\right) = \vec{A}$$

إذن فإن: $\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{A}\,\vec{r}\right).\left(\vec{B}\,\vec{r}\right)\right\} = \left(\vec{A}\,\vec{r}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\,\vec{r}\right)\vec{A}$

12- أثبت أنه من أجل أي حقلين سلميين f, g فإن:

$$\nabla^2(f.g) = f.\nabla^2 g + 2\vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g + g\,\nabla^2 f$$

الحل: نعلم أن:

$$\text{grad}(f.g) = f.\text{grad}\,g + g.\text{grad}\,f \;,\; \text{div}\left(g.\vec{V}\right) = g\,\text{div}\,\vec{V} + \vec{V}\,\text{grad}\,g$$

لدينا:

$$\nabla^2(f.g) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}(f.g) = \vec{\nabla}(\text{grad}\,f.g) = \vec{\nabla}(f.\text{grad}\,g + g.\text{grad}\,f)$$

ولكن المقدار الموجود بين القوسين هو عبارة عن مجموع حقلين شعاعيين يؤثر عليهما بمتجه نبلا يعني التفرق وحسب خواص التفرق يكون:

$$\nabla^2(f.g) = \text{div}(f.\text{grad}\, g + g.\text{grad}\, f) = \text{div}(f.\text{grad}\, g) + \text{div}(g.\text{grad}\, f)$$
$$= f.\text{div}(\text{grad}\, g) + \text{grad}\, g\,.\text{grad}\, f + g\,\text{div}(\text{grad}\, f) + \text{grad}\, f.\text{grad}\, g$$
$$= f\,.\nabla^2 g + 2\vec{\nabla} f.\vec{\nabla} g + g\,\nabla^2 f$$

13- أثبت كلاً مما يلي:

$$\text{grad}\,(\ln r) = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad , \quad \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0 \;\; , \;\; \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0\,, \quad \text{rot}\,(\vec{r}\ln r) = 0$$

الحل: 1- لنبرهن أن: $\text{grad}\;\ln r = \frac{\vec{r}}{r^2}$ لدينا:

$$\text{grad}\;\ln r = \frac{\partial \ln r}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial \ln r}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial \ln r}{\partial z}\,\vec{k}$$
$$= \frac{d\ln r}{dr}.\frac{\partial r}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{d\ln r}{dr}.\frac{\partial r}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{d\ln r}{dr}.\frac{\partial r}{\partial z}\,\vec{k}$$
$$= \frac{1}{r}\,.\frac{x}{r}\,\vec{\imath} + \frac{1}{r}\,.\frac{y}{r}\,\vec{\jmath} + \frac{z}{r}\,.\frac{1}{r}\,\vec{k}$$
$$= \frac{1}{r^2}\left[x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right] = \frac{\vec{r}}{r^2}$$

2- لنبرهن أن: $\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = 0$. لدينا:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \text{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\,\text{div}\,\vec{r} + \vec{r}\;\text{grad}\,\frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} + \vec{r}\left(-\frac{3}{r^4}\right).\frac{\vec{r}}{r}$$

وذلك لأنه لدينا:

$$\text{div}\,\vec{r} = \text{div}\left(x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\right) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

كما أن: $\text{grad}\,\varphi(r) = \varphi'(r).\frac{\vec{r}}{r}$

$$\Longrightarrow \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

3 -لنبرهن أن: $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ لدينا:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \text{div}\left(\text{grad}\,\frac{1}{r}\right) = \text{div}\left[\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}\right] = -\text{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

وذلك حسب المثال $(2'')$

4- لنبرهن أن: $\text{rot}\,(\vec{r}\ln r) = 0$ لدينا:

$$\vec{r}\ln r = \left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\vec{k}\right)\ln r = (x\ln r)\,\vec{i} + (y\ln r)\,\vec{j} + (z\ln r)\ \vec{k}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\vec{r}\ln r) = \vec{\nabla}\wedge(\vec{r}\ln r) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x\ln r & y\ln r & z\ln r \end{vmatrix} =$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(z\ln r) - \frac{\partial}{\partial z}(y\ln r)\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(x\ln r) - \frac{\partial}{\partial x}(z\ln r)\right]\vec{j} +$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(y\ln r) - \frac{\partial}{\partial y}(x\ln r)\right]\vec{k}$$

ولكن:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(z\ln r) - \frac{\partial}{\partial z}(y\ln r)\right] = z\frac{\partial \ln r}{\partial y} - y\,\frac{\partial \ln r}{\partial z} = \ z\frac{\partial \ln r}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial y} -$$
$$y\frac{\partial \ln r}{\partial r}.\frac{\partial r}{\partial z} = z\,.\frac{1}{r}\,.\frac{y}{r} - \ y.\frac{1}{r}\,.\frac{z}{r} = 0$$

وبالمثل فإن المركبات الأخرى تكون معدومة أي أن:

$$\text{rot}\ (\vec{r}\ln r\ ) = 0$$

ملاحظة: إذا كانت $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة متجهات طلقة فإن الجداء:

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})$$

هو عبارة عن متجه ويسمى بالجداء الخارجي الثلاثي. واعتماداً على علاقة جيبس يعبر عن الجداء السابق كما يلي:

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})\ = (\vec{w}\,.\vec{u}\,)\vec{v}\ - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

14- أوجد ناتج ما يلي: $\text{div}\ [\,\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})]$.

حيث $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة حقول متجهية معرفة ومستمرة ولها مشتقات جزئية مستمرة في $D \subseteq R^3$.

الحل: لدينا حسب علاقة جيبس:

$$\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w}) = \ (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

وبالتالي فإن:

$$\text{div}[\vec{u}\wedge(\vec{v}\wedge\vec{w})] = \text{div}\left[(\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}\ \right] =$$

$$= \text{div}\ [(\vec{u}.\vec{w})\vec{v}] - \text{div}[(\vec{u}.\vec{v})\vec{w}];\ \left(\text{حسب الخاصة الخطية للتفرق}\right) =$$

$$(\vec{u}.\vec{w})\operatorname{div}\vec{v} + \vec{v}\operatorname{grad}(\vec{u}.\vec{w}) - (\vec{u}.\vec{v})\operatorname{div}\vec{w} - \vec{w}\operatorname{grad}(\vec{u}.\vec{v})$$

وذلك لأن كلاً من $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{u}.\vec{v}$ حقلان سلميان.

15- إذا كان $\vec{V},\vec{F}$ حقلان متجهيان حيث:

$$\vec{F} = F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k} \quad , \quad \vec{V} = V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k}$$

فأثبت أن: $\operatorname{div}(\vec{V}\wedge\vec{F}) = \vec{F}.\operatorname{rot}\vec{V} - \vec{V}.\operatorname{rot}\vec{F}$

الحل:

$$\vec{V}\wedge\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (V_2.F_3 - V_3.F_2)\vec{\imath} + (V_3.F_1 - V_1.F_3)\vec{\jmath} + (V_1.F_2 - V_2.F_2)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{V}\wedge\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(V_2.F_3 - V_3.F_2) + \frac{\partial}{\partial y}(V_3.F_1 - V_1.F_3) + \frac{\partial}{\partial z}(V_1.F_2 - V_2.F_1)$$

$$= \left[F_3\frac{\partial V_2}{\partial x} + V_2\frac{\partial F_3}{\partial x} - F_2\frac{\partial V_3}{\partial x} - V_3\frac{\partial F_2}{\partial x}\right] + \left[F_1\frac{\partial V_3}{\partial y} + V_3\frac{\partial F_1}{\partial y} - F_3\frac{\partial V_1}{\partial y} - V_1\frac{\partial F_3}{\partial y}\right] + \left[F_2\frac{\partial V_1}{\partial z} + V_1\frac{\partial F_2}{\partial z} - F_1\frac{\partial V_2}{\partial z} - V_2\frac{\partial F_1}{\partial z}\right]$$

$$= F_1\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) + F_2\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right) + F_3\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) - V_1\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) - V_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial X}\right) - V_3\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) =$$

$$[F_1\vec{\imath} + F_2\vec{\jmath} + F_3\vec{k}].\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} - [V_1\vec{\imath} + V_2\vec{\jmath} + V_3\vec{k}].\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{V}\wedge\vec{F}) = \vec{F}.\operatorname{rot}\vec{V} - \vec{V}.\operatorname{rot}\vec{F}$$

16- ليكن $\vec{A}$ متجه ثابت والمطلوب: أثبت أن: $\operatorname{rot}(r\vec{A}) = \frac{1}{r}(\vec{r}\wedge\vec{A})$

الحل:

لنفرض أن مركبات المتجه هي الأعداد الثابتة α, β, γ أي أن:

$$\vec{A} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath} + \gamma\vec{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(r\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge (r\vec{A}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha r & \beta r & \gamma r \end{vmatrix} = \left(\gamma \frac{\partial r}{\partial y} - \beta \frac{\partial r}{\partial z}\right)\vec{i} +$$

$$(\alpha \frac{\partial r}{\partial z} - \gamma \frac{\partial r}{\partial x})\vec{j} + (\beta \frac{\partial r}{\partial x} - \alpha \frac{\partial r}{\partial y})\vec{k}$$

$$= \left(\frac{\gamma y}{r} - \frac{\beta z}{r}\right)\vec{i} + \left(\frac{\alpha z}{r} - \frac{\beta x}{r}\right)\vec{j} + \left(\frac{\beta x}{r} - \frac{\alpha y}{r}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(r\vec{A}) = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{r}(\vec{r} \wedge \vec{A})$$

17- إذا كان $\vec{A}$ متجهاً ثابتاً فأثبت أن: $\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{\nabla}\frac{1}{r}) = 0$

الحل: لنحسب أولاً: $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$: لدينا:

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)' \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

وبالتالي فإن:

$$(\vec{A} \wedge \vec{\nabla}\frac{1}{r}) = [\vec{A} \wedge (-\frac{1}{r^3})\vec{r}] = -\frac{1}{r^3}(\vec{A} \wedge \vec{r})$$

وذلك حسب خواص الجداء الخارجي. وبالتالي فإن:

$$\operatorname{div}\left(\vec{A} \wedge \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}\left[\left(-\frac{1}{r^3}\right)(\vec{A} \wedge \vec{r})\right] = -\frac{1}{r^3}\operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{r}) +$$

$$(\vec{A} \wedge \vec{r})\operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{r^3}\left[\vec{r}\,.\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\operatorname{rot}\vec{r}\right] + (\vec{A} \wedge \vec{r})(-\frac{1}{r^3})'.\frac{\vec{r}}{r}$$

$$= 0 + \frac{3}{r^5}.\vec{r}.(\vec{A} \wedge \vec{r}) = \frac{3}{r^5}\vec{A}.(\vec{r} \wedge \vec{r}) = 0$$

(وذلك حسب خواص الجداء المختلط).

18- ليكن $\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ حقلاً متجهياً معرفاً ومستمراً وله مشتقات جزئية مستمرة على الساحة $D \subseteq R^3$ وليكن g حقلاً سلمياً معرفاً ومستمراً وله مشتقات جزئية مستمرة على الساحة $D \subseteq R^3$

والمطلوب: أثبت أن: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{V}) = 0$ و استنتج أن:

$$\operatorname{div}[g.\operatorname{rot}\vec{V}] = (\operatorname{rot}\vec{V}).(\operatorname{grad} g)$$

الحل:

$$\operatorname{rot}\vec{V}=\vec{\nabla}\wedge\vec{V}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ V_1 & V_2 & V_3\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y}-\frac{\partial V_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}-\frac{\partial V_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}-\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 V_3}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 V_3}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2 V_1}{\partial z\,\partial y}$$

ولما كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية مستمرة فإن ترتيب الإشتقاق لا يغير قيمة المشتقة أي أن:

$$\frac{\partial^2 V_3}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 V_3}{\partial y\partial x}\quad,\quad\frac{\partial^2 V_2}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 V_2}{\partial z\,\partial x}\quad,\quad\frac{\partial^2 V_1}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 V_1}{\partial z\,\partial y}$$

وبالتالي فإن: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}=0$ ولكن:

$$\operatorname{div}[g.\operatorname{rot}\vec{V}]=g.\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{V}+\operatorname{rot}\vec{V}.\operatorname{grad}g=0+\operatorname{rot}\vec{V}.\operatorname{grad}g$$

19- ليكن $\vec{V}$ حقل متجهي أثبت أن:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}-\nabla^2\vec{V}$$

الحل: لدينا:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{V})=\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{V}\right)-\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\right).\vec{V}$$

وذلك حسب علاقة جيبس.

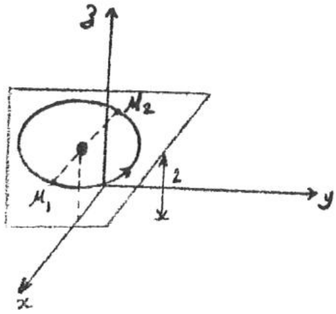
$$\Rightarrow\quad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{V}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{V}-\nabla^2\vec{V}$$

20- احسب جولان الحقل المتجهي:

$$\vec{F}=(y+3xz)\,\vec{\imath}-xz\,\vec{\jmath}+(xy-2yz)\,\vec{k}$$

على المنحني: $C\ |\ (x-1)^2+y^2=4\ ,\ z=2$ في الاتجاه الموجب من النقطة $M_1(3,0,2)$ إلى النقطة $M_2(-1,0,2)$.

الحل: إن المنحني C هو عبارة عن دائرة مركزها النقطة $(1\,,0\,,2)$ ونصف قطرها 2 وهذا المنحني واقع في المستوي الموازي للمستوي الأفقي والذي يبعد عنه مسافة قدرها 2 فتكون المعادلات الوسيطة للدائرة C هي:



$$x - 1 = 2\,\cos t \quad , \quad y = 2\,\sin t \quad , \quad z = 2$$

أو $x = 1 + 2\,\cos t \;,\; y = 2\,\sin t \;,\; z = 2$

النقطة $M_1(3\,,0\,,2)$ تقابل قيمة الوسيط $t = 0$

النقطة $M_2(-1\,,0\,,2)$ تقابل قيمة الوسيط $t = \pi$

وبالتالي يكون جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ على المنحني C هو:

$$G = \int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_C (F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$\int_C [(y + 2xz)\,dx + (-xz)dy + (xy - 2yz)dz] =$$

$$\int_0^{\pi} [(2\sin t + 4 + 4\cos t)(-2\sin t) + (-2 - 4\cos t)(2\cos t)]dt$$

$$= \int_0^{\pi} [-4 - 4\cos^2 t - 8\sin t - 4\sin 2t - 4\cos t\,]\,dt$$

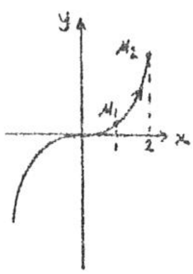
$$= [\,-4t - 2t - \sin 2t + 8\cos t + 2\cos 2t - 4\sin t]_0^{\pi} =$$

$$(-\,6\pi - 8 + 2 - 8 - 2) = \;-2\,(\,3\pi + 8)$$

21- احسب جولان الحقل المتجهي: $\vec{F} = (5xy - 6x^2\,)\,\vec{\imath} + (2y - 4x\,)\,\vec{\jmath}$

على المنحني: $C \mid y = x^3$ من النقطة $M_1(1\,,1)$ إلى النقطة $M_2(2\,,8)$.

الحل: إن جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ على المنحني C هو:



$$G = \int_C \vec{F}\,d\vec{r} = \int_C \big(F_x dx + F_y dy\big)$$

$$= \int_C [(5xy - 6\,x^2)dx + (2y - 4x)dy\,]$$

ولكن من أجل كل نقطة من نقاط المنحني C فإن: $y = x^3$

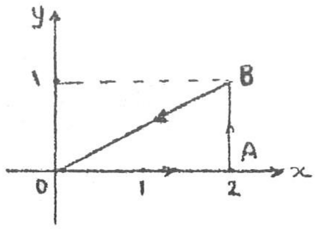
والجولان من النقطة M_1 إلى النقطة M_2 يوافق تحول x من 1 إلى 2 أي أن:

$$G = \int_1^2[(5x^4 - 6x^2)dx + (2y^3 - 4x)(3x^2)\, dx]$$
$$= \int_1^2[\, 6x^5 + 5x^4 - 12x^3 - 6x^2]\, dx = [x^6 + x^5 - 3x^4 - 2x^3]_1^2$$
$$= [\, 64 + 32 - 48 - 16 - 1 - 1 + 3 + 2\,] = 35$$

22- احسب جولان الحقل المتجهي: $\vec{F} = (2x + y^2)\,\vec{\imath} + (3y - 4x\,)\,\vec{\jmath}$

على المثلث الذي رؤوسه النقاط: $B\,(2\,,1)$, $A\,(2\,,0)$, $O\,(0\,,0)$.

الحل:



لحساب جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ على المثلث OAB

نحسب الجولان على كل من القطع المستقيمة BO, AB, OA

ونجمع النواتج.

1- الجولان على القطعة المستقيمة OA:

إن ترتيب كل نقطة من نقاط القطعة المستقيمة OA يساوي الصفر وبالتالي فإن:

$$G_1 = \int_{\overline{OA}} \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = \int_{\overline{OA}}(\, F_x dx + F_y dy\,)$$
$$= \int_{\overline{OA}}[(2x + y^2)dx + (3y - 4x)\, dy]$$

نعوض كل y بـ 0 وكل dy بـ 0 فنجد:

$$G_1 = \int_0^2 2x\, dx = 4$$

3 -الجولان على القطعة المستقيمة AB :

إن فاصلة كل نقطة من نقاط القطعة المستقيمة AB تساوي 2 وبالتالي فإن:

$$G_2 = \int_{\overline{AB}} \vec{F}\,\overrightarrow{dr} = \int_{\overline{AB}}[(2x + y^2)dx + (3y - 4x)\, dy]$$

نبدل كل x بـ 2 وكل dx بـ 0 فنجد:

$$G_2 = \int_0^1 (3y - 8)\, dy = \left[\frac{3}{2} y^2 - 8y \right]_0^1 = -\frac{13}{2}$$

3- الجولان على القطعة المستقيمة BO :

إن معادلة المستقيم الواصل بين النقطتين $B\,,O$ هي: $x = 2y$ حيث يتم الجولان وفق الاتجاه من B إلى O أي من النقطة التي ترتيبها 1 إلى النقطة التي ترتيبها 0 عندئذٍ فإن:

$$G_3 = \int_{\overline{BO}} \vec{F}\, \overrightarrow{dr} = \int_{\overline{BO}} [(2x + y^2)dx + (3y - 4x)\, dy]$$

نبدل كل x بـ $2y$ وكل dx بـ $2dy$ فنجد:

$$G_3 = \int_1^0 [\, 2(4y + y^2)\, dy + (3y - 8y)dy] = \int_1^0 [\, 2y^2 + 3y]dy$$

$$= \left[\frac{2}{3} y^3 + \frac{3}{2} y^2 \right]_1^0 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{13}{6}$$

إذاً ، فإن الجولان على المثلث OAB يكون: $G = G_1 + G_2 + G_3$

$$\Rightarrow \quad G = 4 - \frac{13}{2} - \frac{13}{6} = -\frac{14}{3}$$

23- احسب جولان الحقل المتجهي: $\vec{F} = (2y + 3)\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + (yz - x)\vec{k}$

على القطعة المستقيمة C التي تصل بين النقطتين: $O(0\,,0\,,0) \quad , \quad A(2\,,1\,,1)$

الحل: إن معادلتي المستقيم الواصل بين النقطتين $O \;,\; A$ هما:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-0}{1-0} = t$$

$$\Rightarrow \quad x = 2t \quad , \quad y = t \quad , \quad z = t$$

هي عبارة عن المعادلات الوسيطية للمستقيم OA.

النقطة $O(0\,,0\,,0)$ تقابل قيمة الوسيط $t = 0$، النقطة $A(2\,,1\,,1)$ تقابل قيمة الوسيط $t = 1$.

وبالتالي فإن جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ على القطعة المستقيمة $\overline{OA}$ يكون:

$$G = \int_{\overline{OA}} \vec{F}\, \overrightarrow{dr} = \int_{\overline{OA}} [F_x dx + F_y dy + F_z dz] =$$

$$= \int_0^1 [(2t+3)(2) + 2t^2 + (t^2 - 2t)]dt$$
$$= \int_0^1 (3t^2 + 2t + 6)dt = [t^3 + t^2 + 6t]_0^1 = 8$$

24- أوجد خطوط قوى كل من الحقول المتجهية التالية:

$$\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} \quad , \quad \vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$
$$\vec{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{j} \quad , \quad \vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{y}}\,\vec{j}$$

الحل: 1- لنوجد خطوط قوى الحقل المتجهي: $\vec{F} = 2xy\,\vec{i} + x^2\,\vec{j}$

لدينا : $F_x = 2xy \quad , \quad F_y = x^2$

معادلة خطوط القوى هي:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2} \quad \Rightarrow xdx = 2ydy \xrightarrow{\text{بالتكامل}}$$
$$\frac{x^2}{2} = y^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2y^2 = c$$

وهي عبارة عن مجموعة قطوع زائدة.

2- لتوجد خطوط قوى الحقل المتجهي:

$$\vec{F} = (y+z)\vec{i} + (z+x)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$$

لدينا: $F_x = y+z \quad , \quad F_y = z+x \quad , \quad F_z = x+y$

معادلات خطوط القوى هي:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{z+x} = \frac{dz}{x+y}$$

والجملة السابقة تكافئ الجملة التالية:

$$\frac{dx-dy}{y-x} = \frac{dy-dz}{z-y} = \frac{dx+dy+dz}{2x+2y+2z}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x-y)}{-(x-y)} = \frac{d(y-z)}{-(y-z)} = \frac{d(x+y+z)}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \ \ln(x-y) = \ln\frac{y-z}{c_1}$$

$$-\ln\frac{y-z}{c_2} = \frac{1}{2}\ln(x+y+z) \ \Longrightarrow \ \ \ln\frac{c_2}{y-z} = \ln\sqrt{x+y+z}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} y-z = \ c_1(x-y) \\ (y-z)\sqrt{x+y+z} = \ c_2 \end{cases}$$

فخطوط القوى هي عبارة عن المنحنيات الناتجة عن تقاطع الجملتين السابقتين.

3- لنوجد خطوط قوى الحقل المتجهي: $\vec{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$ لدينا:

$$F_x = \frac{x}{x^2+y^2} \quad , \quad F_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

معادلة خطوط القوى هي:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \ \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \ \ y = cx$$

وهي عبارة عن جملة مستقيمات تمر من مبدأ الإحداثيات.

4- لنوجد خطوط قوى الحقل المتجهي: $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x}}\,\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{y}}\,\vec{\jmath}$ لدينا:

$$F_x = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad F_y = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

معادلة خطوط القوى هي:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y}$$

$$\Rightarrow \ \sqrt{x}\,dx = \sqrt{y}\,dy \ \xrightarrow{\text{بالتكامل}} \ \frac{2}{3}\,x^{3/2} - \frac{2}{3}\,y^{3/2} = \ c_1$$

$$\Rightarrow \ x^{3/2} - y^{3/2} = c$$

وهي عبارة عن جملة منحنيات تمثل خطوط القوى.

25- ليكن لدينا الحقل المتجهي: $\vec{F} = (2xy+z^3)\vec{\imath} + \ x^2\vec{\jmath} \ + 3xz^2\,\vec{k}$

والمطلوب:

1): أثبت أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً.

2):أوجد الحقل السلمي f الذي يشتق منه الحقل المتجهي $\vec{F}$.

3): احسب جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ من النقطة $M_1(3,1,4)$ إلى النقطة $M_2(1,-2,1)$

الحل: 1): نلاحظ أن:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F_z}{\partial y} \; , \; \frac{\partial F_z}{\partial x} = 3z^2 = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

لدينا:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \text{rot}\,\vec{F} = 0$$

وبالتالي فإن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً.

2): بما أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً،فيوجد حقلاً سلمياً f بحيث يكون $\vec{F} = \text{grad}\, f$ (مبرهنة):

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + z^3 \cdots (1)$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cdots (2)$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 \cdots (3)$$

نكامل العلاقة (1) بالنسبة لـ x: $f = x^2y + z^3x + \varphi(y,z) \cdots (4)$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi(z)$$

نعوض في العلاقة (4) فنجد: $f = x^2y + z^3x + \varphi(z)$

نشتق طرفي العلاقة السابقة بالنسبة لـ z فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2 + \frac{d\varphi}{dz} = 3xz^2 \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = 0 \Rightarrow \varphi = c$$

إذن فإن الحقل السلمي الذي يشتق منه الحقل المتجهي $\vec{F}$ هو :

$$f = x^2y + z^3x + c$$

3):

$$G = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \, . d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} [F_x dx + F_y dy + F_z dz \,]$$
$$= \int_{M_1}^{M_2} [\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz]$$
$$= \int_{M_1}^{M_2} df = [f]_{M_1}^{M_2} = f(M_2) - f(M_1) = (-2 + 1 + c) - (9 + 192 + c) = -202$$

26- احسب جولان الحقل المتجهي:

$$\vec{F} = \frac{1}{z}\,\vec{\imath} + \frac{1}{z}\,\vec{\jmath} - \frac{x+y}{z}\,\vec{k}$$

من النقطة $M_1(0,0\,,1)$ إلى النقطة $M_2(3\,,0\,,1)$.

الحل: بما أنه لم يذكر المنحني C الواصل بين النقطتين M_2, M_1 فهذا يعني أن الجولان مستقل عن الطريق الواصل بين النقطتين وهذا يتحقق إذا وفقط إذا كان الحقل المتجهي $\vec{F}$ محافظاً وإلا ليس للكتابة السابقة أي معنى. نلاحظ أن:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

وبالتالي فإن $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ أي أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً ، وبالتالي يوجد حقلاً سلمياً f يشتق منه الحقل المتجهي $\vec{F}$ ، نلاحظ مباشرة أن هذا الحقل هو:

$$f = \frac{x+y}{z} + c$$

وبالتالي فإن:

$$G = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \, . d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1) = \left(\frac{3+0}{1} + c\right) - \left(\frac{0+0}{1} + c\right) = 3$$

27- ليكن لدينا الحقل المتجهي:

$$\vec{F} = y\,\vec{\imath} + [x + z\cos(yz)]\,\vec{\jmath} + y\cos(yz)\,\vec{k}$$

والمطلوب:

1 - احسب $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ واستنتج أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً.

2- أوجد دالة الكمون السلمي.

3- احسب جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ من النقطة $M_1(0,\frac{\pi}{2}\,,1)$ إلى النقطة $M_2(0,1\,,\frac{\pi}{2})$.

الحل: 1- نلاحظ أن:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_y}{\partial x}\ ,\quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \cos(yz) - yz\sin(yz) = \frac{\partial F_z}{\partial y}\ ,$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

وبالتالي فإن: $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ أي أن $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$ وهذا يعني أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً.

2- بما أن $\vec{F}$ حقلاً محافظاً ، فيوجد حقل سلمي f بحيث يكون: $\vec{F} = \text{grad}\, f$ (مبرهنة) ، عندئذ يكون دالة الكمون السلمي هو: $(-f)$

$$F_x = \frac{\partial f}{\partial x} \ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x} = y \cdots (1)$$

$$F_y = \frac{\partial f}{\partial y} \ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + \mathrm{z}\cos(yz)\ \cdots (2)$$

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial z} \ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(yz) \cdots (3)$$

نكامل العلاقة (1) بالنسبة لـ x فنجد:

$$f = xy + \varphi(y\,,z) \cdots (4)$$

نشتق العلاقة (4) بالنسبة لـ y فنجد:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \ \Rightarrow\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z.\cos(yz)$$

نكامل العلاقة السابقة بالنسبة لـ y فنجد:

$$\varphi(y,z) = \sin(yz) + g(z)$$

نعوض في العلاقة (4) فنجد: $f = xy + \sin(yz) + g(z) \cdots (5)$

نشتق العلاقة (5) بالنسبة لـ z فنحصل على:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y\cos(yz) + \frac{dg}{dz} \ \Rightarrow\ \frac{dg}{dz} = 0 \ \Rightarrow g\,(z) = c$$

بالتعويض في العلاقة (5) نجد:

$$f = xy + \sin(yz) + c$$

وبالتالي فإن دالة الكمون السلمي هو: $(-f) = -xy - \sin(yz) - c$

3- لحساب جولان الحقل المتجهي $\vec{F}$ لدينا:

$$G = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}\,.d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} [F_x\,dx + F_y dy + F_z dz]$$
$$= \int_{M_1}^{M_2} [\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz]$$
$$= \int_{M_1}^{M_2} df = f(M_2) - f(M_1) = 1 + c - 1 - c = 0$$

28- أثبت أن حقل الجاذبية الأرضية: $\vec{F} = -\frac{GmM}{r^3}\,\vec{r}$ هو حقلاً محافظاً و أوجد كمونه السلمي.

الحل: لدينا:

$$\text{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge [-\frac{GmM}{r^3}\,\vec{r}]$$

"حسب خواص الدوران"

$$= \text{grad}\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) \wedge \vec{r} - \frac{GmM}{r^3}\,\text{rot}\,\vec{r}$$

ولكن: $\text{rot}\,\vec{r} = 0$ كما أن:

$$\text{grad}\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) = \frac{3GmM}{r^4} \,.\, \frac{\vec{r}}{r}$$

"حسب خواص الجداء الخارجي"

$$\Rightarrow \quad \text{grad}\left(-\frac{GmM}{r^3}\right) \wedge \vec{r} = 0$$

إذاً فإن $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ أي أن: $\vec{F}$ حقلاً محافظاً.

ولكن بما أن:

$$\text{grad}\,\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

فيكون لدينا:

$$\vec{\nabla}\,.\,r^n = n\,.\,r^{n-2}\,\vec{r}$$

ومن أجل: $n = -1$ يكون:

$$\vec{\nabla}.\frac{1}{r} = \frac{-1}{r^3}\,\vec{r} \Rightarrow \vec{\nabla}\frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{r^3}\vec{r}$$

أي أن حقل الجاذبية الأرضية يشتق من الحقل السلمي $f = \frac{GmM}{r}$ ، فتكون دالة الكمون السلمي هي $\left(-\frac{GmM}{r}\right)$.

29- احسب تدفق متجه الموضع من خلال السطح s الذي معادلاته الوسيطية:

$$s \mid x = u\cos v \ , \ y = u\sin v \ , \ z = u$$

حيث: $$G = \{(u\,,v) \ : \ 0 \le u \le 2 \ , \ 0 \le v \le 2\pi$$

الحل: الحقل المتجهي المفروض هو: $\vec{\omega} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad \phi = \iint_s (\vec{\omega}\,.\vec{r}\,)ds = \iint_G \vec{\omega}\,.\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) du\,dv$$

ولكن: $\vec{r} = \vec{r}\,(u\,,v) = u\cos v\,\vec{\imath} + u\sin v\,\vec{\jmath} + u\,\vec{k}$

$$\Rightarrow \ \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \cos v\ \vec{\imath} + \sin v\,\vec{\jmath} + \vec{k} \ \ , \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = -u\sin v\ \vec{\imath} + u\cos v\ \vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}\,.\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-x\,u\cos v - y\,u\sin v + u\,z$$

ولكن من أجل جميع نقاط السطح s فإن:

$$x = u\cos v \ \ , \ \ y = u\sin v \ \ , \ \ z = u$$

$$\Rightarrow \ \omega\,.\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right) \ = -u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v + u^2 = 0$$

وبالتالي، فإن التدفق $\phi = 0$.

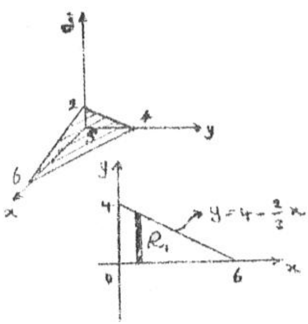
30- احسب تدفق الحقل المتجهي:

$$\vec{F} = 18z\,\vec{\imath} - 12\,\vec{\jmath} + 3y\,\vec{k}$$

من خلال السطح s الذي هو جزء المستوي:

$$2x + 3y + 6z = 12$$

الواقع في الثمن الأول.



الحل: لدينا:

$$f = 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}f = 2\vec{\imath} + 3\,\vec{\jmath} + 6\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow \ \vec{\nabla}f.\vec{k} \ = 6 \ \ , \ \vec{F}\,.\vec{\nabla}f = 36z - 36 + 18y$$

ولكن من أجل جميع نقاط السطح s فإن: $6z = 12 - 2x - 3y$

$$\Rightarrow\ \vec{F}\,.\vec{\nabla}f\ = 72 - 12x - 18y - 36 + 18y = 36 - 12x$$

وبالتالي فإن:

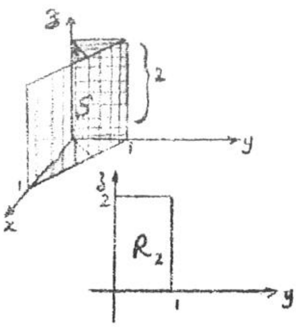
$$\phi\ =\ \iint_s(\vec{F}\,.\vec{n}\,)ds\ =\ \iint_{R_1}\frac{\vec{F}\,.\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f\,.\vec{k}|}dx\,dy$$

حيث R_1 مسقط السطح s على المستوي XOY.

$$\Rightarrow\ \phi\ =\ \iint_{R_1}\frac{1}{6}\,(36 - 12x)dxdy = \iint_{R_1}(6 - 2x)dxdy$$

$$\Rightarrow\ \ \phi\ =\ \int_0^6[\int_0^{4-\frac{2}{3}x}(6 - 2x)dy]dx =\ \int_0^6(6 - 2x)\left(4 - \frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\ \int_0^6\left(24 - 12x + \frac{4}{3}x^2\right)dx = [24x - 6x^2 + \frac{4}{9}x^3]_0^6 = 24$$



31- احسب تدفق الحقل المتجهي:

$$\vec{F}\ = y\vec{\imath} + 2x\,\vec{\jmath} - \mathrm{z}\,\vec{k}$$

من خلال السطح s الذي هو جزء المستوي $x + y = 1$ الموجود في الثمن الأول وتحت المستوي $z = 2$.

الحل: لدينا:

$$f\ = x + y - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}f\ =\ \vec{\imath} + \vec{\jmath}\,;\ \vec{\nabla}f.\vec{\imath} = 1$$

$$\vec{F}\,.\vec{\nabla}f\ = y + 2x$$

ولكن من أجل جميع نقاط السطح s فإن:

$$x = 1 - y\ \ \Rightarrow\ \ \ \vec{F}\,.\vec{\nabla}f\ = 2 - y$$

وبالتالي فإن:

$$\phi\ =\ \iint_s(\vec{F}\,.\vec{n}\,)ds = \iint_{R_2}\frac{\vec{F}\,.\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f\,.\vec{\imath}|}dy\,dz$$

حيث R_2 مسقط السطح s على المستوي XOY:

$$\Rightarrow\ \phi\ =\ \iint_{R_2}(2 - y)dydz\ =\ \int_0^1[\int_0^2(2 - y)dz]dy$$

$$= \int_0^1 (4-2y)dy = [4y - y^2]_0^1 = 3$$

32- احسب تدفق الحقل المتجهي: $\vec{F} = 2y\vec{\imath} - z\vec{\jmath} + x^2\,\vec{k}$ من خلال جزء سطح الإسطوانة المكافئة $y^2 = 8x$ الواقع في الثمن الأول والمحدود بالمستويين:

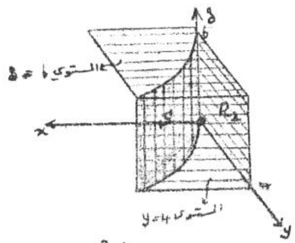
$$z = 6\,,\ y = 4$$

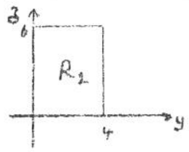
الحل: لدينا:

$$f = y^2 - 8x = 0 \Longrightarrow$$

$$\vec{\nabla} f = -8\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath}\ ;\ \vec{\nabla} f.\vec{\imath} = -8$$

$$\Rightarrow\ \vec{F}\,.\vec{\nabla} f = -16y - 2yz$$





وبالتالي فإن:

$$\phi = \iint_s (\vec{F}\,.\vec{n}\,)ds = \iint_{R_2} \frac{\vec{F}\,.\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f\,.\vec{\imath}|} dydz$$

$$= \iint_{R_2} \left(-2y - \tfrac{1}{4}\,yz\right) dydz$$

حيث R_2 مسقط السطح s على المستوي: YOZ

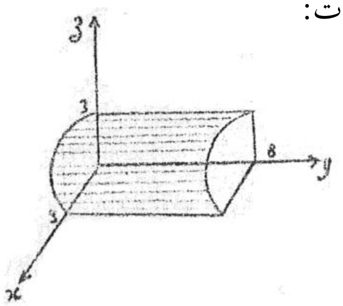
$$\Rightarrow \phi = \int_0^4 [\int_0^6 \left(-2y - \tfrac{1}{4}\,yz\right) dz]dy =$$

$$\int_0^4 \left(-12y - \tfrac{9}{2}\,y\right) dy$$

$$= \left[-6y^2 - \tfrac{9}{4}\ y^2\right]_0^4 = -132$$

33- احسب تدفق االحقل المتجهي: $\vec{F} = 6z\,\vec{\imath} + (2x+y)\vec{\jmath} - x\,\vec{k}$ من خلال السطح المحدود بالاسطوانة $x^2 + z^2 = 9$ والمستويات:

$$x = 0\ \ ,\ \ y = 0\ ,\ \ z = 0\ \ ,\ \ y = 8$$



الحل:

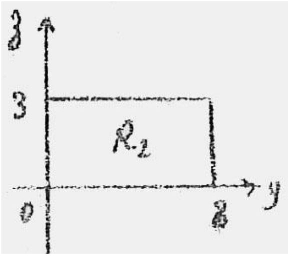
لدينا: $f = x^2 + z^2 - 9 = 0$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = 2x\,\vec{\imath} + 2z\,\vec{\jmath}; \vec{\nabla} f.\vec{\imath} = 2x$$

ولكن من أجل جميع نقاط السطح s فإن:

$x = \sqrt{9 - z^2}$ ، وبالتالي فإن: $\vec{\nabla} f.\vec{\imath} = 2\,\sqrt{9 - z^2}$

كما أن: $\vec{F}\,.\vec{\nabla}f = 12xz + 4xz + 2yz = 16z\sqrt{9-z^2} + 2y\,z$



$$\Rightarrow\ \phi = \iint_s (\vec{F}\,.\vec{n}\,)ds = \iint_{R_2} \frac{\vec{F}\,.\vec{\nabla}f}{|\vec{\nabla}f\,.\vec{i}|}\,dy\,dz$$

$$= \iint_{R_2}\left[8z + \frac{2zy}{2\sqrt{9-z^2}}\right]dy\,dz$$

حيث R_2 مسقط السطح s على المستوي YOZ.

$$\Rightarrow \phi = \int_0^3 [\int_0^8 \left(8z + \frac{2zy}{2\sqrt{9-z^2}}\right)dy]dz$$

$$= \int_0^3 \left[\,64z + 32\frac{z}{\sqrt{9-z^2}}\right]dz = \left[\,32z^2 - 32\sqrt{9-z^2}\right]_0^3 = 192$$

34- أثبت أن:

$$\iint_s (\vec{r}\,.\vec{n}\,)ds = 3v$$

حيث: $\vec{V} = x\,\vec{\imath} - y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$ "الحجم المحدد بالسطح s"

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص أو ستردغرادسكي نجد:

$$\iint_s (\vec{r}\,.\vec{n}\,)ds = \iiint_v \operatorname{div}\vec{r}\ \mathrm{dv} = \iiint_v 3dv = 3v$$

35- احسب تدفق الحقل المتجهي: $\vec{F} = 2xy\,\vec{\imath} + yz^2\,\vec{\jmath} + xz\,\vec{k}$ من خلال السطح s الذي هو متوازي المستطيلات المعين بالمعادلات:

$$x = 0\ ,\quad y = 0\ ,\ z = 0\ ,\ x = 2\ ,\quad y = 1\ ,\ z = 3$$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص أو ستردغرادسكي:

$$\phi = \iint_s (\vec{F}\,.\vec{r}\,)ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_D [2y + z^2 + x]dv$$

$$\Rightarrow \phi = \int_0^2 \left\{\int_0^1 [\int_0^3 (2y + z^2 + x)dz]\,dy\right\}dx$$

$$= \int_0^2 [\int_0^1 (6y + 9 + 3x)dy]dx$$

$$= \int_0^2 (3+9+3x)dx = 6+18+6 = 30$$

36- إذا كان: $\vec{F} = ax\vec{\imath} + by\,\vec{\jmath} + cz\,\vec{k}$ و s سطح مغلق يحدد الحجم D

أثبت أن: $\iint_s (\vec{F}\,.\vec{n}\,)ds = (a+b+c)D$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص أو ستردغرادسكي:

$$\phi = \iint_s (\vec{F}.\vec{n}\,)ds = \iiint_D \operatorname{div}\vec{F}\,dv = \iiint_D (a+b+c)dv = (a+b+c)D$$

37- ليكن s سطح بسيط ومغلق، فأثبت أن:

$$I = \iint_s \frac{\vec{r}\,.\vec{n}}{r^3}\,ds = \begin{cases} 0 & ; s \text{ إذا كان المبدأ } O \text{ خارج } \\ 4\pi & ; s \text{ إذا كان المبدأ } O \text{ داخل } \end{cases}$$

الحل: بتطبيق مبرهنة غوص أوستردغرادسكي:

$$I = \iint_s \frac{\vec{r}\,.\vec{n}}{r^3}\,ds = \iiint_D \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\,dv$$

(حيث D الحجم الذي يحدد السطح s)

1- إذا كان المبدأ O خارج s فإن، $r = 0$ ، وبالتالي نعلم أن:

$$\operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow I = 0$$

2- إذا كان المبدأ O داخل السطح s ، فإننا نحيط المبدأ بكرة صغيرة σ نصف قطرها α وتقع ضمن السطح s ونرمز بـ τ للحجم المحصور بين الكرة σ والسطح s ، فيكون:

$$\iint_s \frac{\vec{r}\,.\vec{n}}{r^3}\,ds - \iint_\tau \frac{\vec{r}\,.\vec{n}}{r^3}\,d\sigma = \iiint_\tau \operatorname{div}\frac{\vec{r}}{r^3}\,dv = 0$$

$$\Rightarrow I = \iint_\tau \frac{\vec{r}\,.\vec{n}}{r^3}\,d\sigma$$

ولكن متجه واحدة الناظم على الكرة σ هو:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{\alpha} \;;\; |\vec{r}| = \alpha$$

$$\Rightarrow I = \iint \frac{d\sigma}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}\iint_\sigma d\sigma = \frac{1}{\alpha^2}\,(4\pi\alpha^2) = 4\pi$$

المراجع العلميـة

المراجع العربيـة:

1 - الدكتور عباس عباس + الدكتور ضياء موصلي– الرياضيات (3):التحليل العقدي و الشعاعي – جامعة حلب 1995م .

2 - الـدكتور علـي الخطيـب – الرياضـيات (4): مفـاهيم أساسـية في التحليـل العقدي والشعاعي – جامعة حلب 1983م .

3 - الدكتور حسن سلوطة – الرياضيات (4) جامعة دمشق 1992 .

4 - الدكتور علي جربوع + الدكتور غسان الحرك– الرياضيات التطبيقية(3)– جامعة حلب 1996م .

5 - الدكتور صلاح الأحمد – الدكتور موفق دعبول – الدكتورة الهام حمصي – معجم الرياضيات المعاصرة – مؤسسة الرسالة 1983 م.

6 - االرياضيات العالية –القسم الثاني– مطبوعات وزارة التعليم العالي 1970م .

7 - الدكتورة إلهام حمصي– المعدلات التفاضلية– الجزء الثاني– جامعة حلب 1975م .

المراجع الأجنبية:

1 - أ.ج سفيشنبكوف + أ.ن تيخونف – نظرية التوابع للمتحول العقدي – منشورات مير – موسكو 1971م.

2 - ج.ي ماردزين+أ.ج ترومبا – التحليل الشعاعي – H.W. Freeman and Company 1976.

3 - أبحاث في التحليل الرياضي–جزء(1+2)– س.م.نيكولسكي(مير) موسكو 1977م.

4 - التوابع متعددة المتغيرات و.فليمنج (سبرنجر – فيرلاج) 1977م.

5 - بيسكونوف.ن – حساب التفاضل و التكامل – جزء (2+3) فرنسا 1980م.

دليل المصطلحات العلمية

(عربي – إنكليزي)

A	
Absolute	مطلق
- - convergence	تقارب مطلق
- - value	قيمة مطلقة
Absolutely convergent series	سلسلة متقاربة مطلقاً
Acceleration	تسارع
Addition of complex numbers	جمع الأعداد العقدية
- - of vectors	جمع الأشعة
Analytic function	تابع تحليلي
Analytic part of Laurent series	القسم التحليلي لسلسلة لوران
Angle	زاوية
Arbitrary	كيفي – اختياري
Arc	قوس
Area	مساحة
Argument of a complex number	عمدة(أو زاوية)عدد عقدي
Axis	محور
- - of symmetry	محور تناظر
B	

Binomial formula	علاقة ثنائي الحد
Binomial	ثنائي الناظم
Boundary	حدود
Boundary conditions	شروط حدية
Boundary – value problems	مسائل القيم الحدية
Bound	محدود
- - function	تابع محدود
- - sequence	متتالية محدودة
Branch	فرع
- - point	نقطة تفرع
C	
Change of variables	تغيير المتحولات
Circle of convergence	دائرة التقارب
Circulation	جَوَلان
Closed	مغلق
- - curve	منحني مغلق
- - surface	سطح مغلق
Coefficients	أمثال
Comparison test	اختبار المقارنة
Complex	عقدي
- - conjugate	مرافق عقدي

- - integral	تكامل عقدي
- - number	عدد عقدي
- - plane	مستوي عقدي
- - variable	متحول عقدي
Components of a vector	مركبات شعاع
Conditional convergence	تقارب شرطي
Conformal mapping	تابع محافظ (مطابق)
- - transformation	محول حافظ
Conjugate	مرافق
Connected region	منطقة مترابطة
Conservative field	حقل محافظ
Constant	ثابت
Continuity	الاستمرار
Continuous	مستمر
- - curve	منحني مستمر
- - function	تابع مستمر
Contour	إطار– منحني محيطي بسيط
- - integrals	تكاملات محيطية
Convergence	تقارب
Convergent	متقارب
- - sequence	متتالية متقاربة

- - series	سلسلة متقاربة
Convolution	ملتف(تلاف)
- - theorem	نظرية التلاف
Coordinate curves	منحنيات احتداثية
Coordinates	احداثيات
Cross ratio	النسبة التصالبية
Curl	دوران
Curvature	تقوس
Curves	منحنيات
Curvilinear coordinates	احداثيات منحنية
Cylindrical coordinates	احداثيات اسطوانية
D	
Definite integral	تكامل محدد
Degree of a polynomial	درجة كثيرة حدود
Delta function	التابع دلتا
Derivative	مشتق
Derivation	اشتقاق
Differentiability	قابلية الاشتقاق
Differential	تفاضل
Direction cosines	جيوب تمام التوجيه أو التجيبات الموجهة
Directional derivative	المشتق الموجه

Disk	قرص
Distance	مسافة
Divergence	تباعد أو تفرق
Divergent	متباعد
- - sequence	متتالية متباعدة
- - series	سلسلة متباعدة
Domain	منطقة
Double integrals	تكاملات ثنائية
Double pole	قطب مضاعف
E	
Elementary functions	توابع ابتدائية
Element	عنصر
Equation	معادلة
Essential singular point	نقطة شاذة أساسية
Euler's formula	علاقات أولر
Even function	تابع زوجي
Expansion	نشر
Exponential function	تابع أسّي
Extended complex plane	المستوي العقدي الممدد
F	
Field	حقل

Flux	تدفق
Force	قوة
Fourier integral	تكامل فورييه
- - series	سلسلة فورييه
Fractional linear transformation	محول خطي كسري
Function	تابع
G	
Gamma function	تابع غاما
Gradient	تدرج
Graphical representation	تمثيل بياني
Gravitation	الجاذبية الأرضية
H	
Harmonic function	تابع توافقي
Heaviside's unit function	التابع الدرجي الواحدي
Higher order derivatives	المشتقات من مراتب عليا
I	
Imaginary axis	المحور التخيلي
- - part	القسم التخيلي
Increment	تزايد
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Independent of the path	مستقل عن المسار

Infinite	لا نهائي
Infinity	اللا نهائية
Initial conditions	شروط ابتدائية
Initial point of a vector	نقطة البداية لشعاع
Integral	تكامل
Integration	مكاملة
Intersection	تقاطع
Interval	مجال
Inverse function	تابع عكسي
Isolated singular point	نقطة شاذة معزولة
J	
Jacobean	جاكوبيان
L	
Laplace integral	تكامل لابلاس
Laplace transform	تحويل لابلاس
Length	طول
Level curve	منحني سوية
- - surface	سطح سوية
Limit	نهاية
Linearly independent	مستقل خطياً
Linear transformation	محول خطي

Line	مستقيم
- - integral	تكامل خطي
M	
Magnitude	قياس أو طول
Many-valued function	تابع متعدد القيم
Mapping	تطبيق
Moment	عزم
Multiplication	جداء
N	
Natural logarithm	اللوغاريتم الطبيعي
Neighborhood	جوار
Normal	ناظم
Numbers	أعداد
O	
Odd function	تابع فردي
Open region	منطقة مفتوحة
Operator	مؤثر
Order	رتبة
Ordered pair	زوج مرتب
Ordinary point	نقطة عادية
Orthogonal	متعامد

- - coordinates	احداثيات متعامدة
P	
Parametric equations	معادلات وسيطية
Partial derivative	المشتق الجزئي
Period	دور
Periodic function	تابع دوري
Point set	مجموعة نقطية
Polar coordinates	الإحداثيات القطبية
Polar form of complex number	الشكل القطبي للعدد العقدي
Pole	قطب
Position vector	شعاع موضع
Potential	كمون
Power series	سلسلة قوى
Principal branch	الفرع الرئيسي
- - normal	الناظم الأساسي
- - part	القسم الرئيسي
- - value	القيمة الرئيسية
Product	جداء
Projection	إسقاط
R	
Radius	نصف قطر

- - of convergence	نصف قطر التقارب
- - of curvature	نصف قطر التقوس
Ration test	اختبار النسبة
Real axis	المحور الحقيقي
Region	منطقة
Regular	نظامي
Removable singular point	نقطة شاذة قابلة للحذف
Residues	رواسب
Resultant	محصلة
Root	جذر
S	
Scalar	سلمي
- - field	حقل سلمي
- - product	الجداء السلمي
Sequence	متتالية
Simple	بسيط
- - closed curve	منحني بسيط مغلق
- - pole	قطب بسيط
Simply-connected region	منطقة بسيطة الاتصال
Singular point	نقطة شاذة
Smooth curve	منحني صقيل

- - surface	سطح صقيل
Symmetric	تناظر
System	جملة
T	
Tangent	مماس
Test	اختبار
Torsion	الالتفاف
Transformation	محول
Translation	انسحاب
Trigonometric	مثلثي
Twisted curve	منحني ملتوي
U	
Unit circle	دائرة الواحدة
Unit vector	شعاع الواحدة
V	
Value	قيمة
Variable	متحول
Vector	شعاع
Vector algebra	جبر الأشعة
Vector field	حقل شعاعي
Vector function	تابع شعاعي

Vector product	الجداء الشعاعي
Velocity	سرعة
Volume	حجم
W	
Work	العمل