تبولوجيا بدون دموع

سيدني. ا مورس

نسخة 14 اكتوبر 2007

ترجمة: عليا النعيمات جامعة بالارات- استراليا

د جمال مصطفى

المحتويات

المحتويات

المحتويات

الفصل 0

مقدمة

التبولوجيا هو فرع مهم وممتع من فروع الرياضيات, دراسته لا تدخلك فقط الى مفاهيم ونظريات جديدة بل كذلك تضعك في سياق مفاهيم قديمة مثل الاقترانات المتصلة. من ناحية اخرى, يمكن ملاحظة اهمية التبولوجيا من خلال تأثيره الواضح في تقريبا جميع فروع الرياضيات الاخرى. هذا يجعل دراسة التبولوجيا ذات علاقة مع كل الذين يطمحون ان يصبحوا رياضيون سواء أكان حبهم الأول (او اصبح) الجبر, التحليل, نظرية التصنيف, الميكانيكا الكمية, الديناميكا, الهندسة, الرياضيات الصناعية, البيولوجيا الرياضية, الاقتصاد الرياضي, المالية الرياضية, العرض الرياضي, الفيزياء الرياضية, رياضيات الاتصالات, نظرية العدد, الرياضيات العددية, بحوث العمليات او الاحصاء (الببليوغرافيا الرئيسية في نهاية هذا الكتاب تكفي لبيان ان التبولوجيا بالفعل وثيقة الصلة مع كل هذه المواضيع واكثر من ذلك). المفاهيم التبولوجية مثل التراص, الترابط والكثافة هي امور اساسية لرياضيي اليوم كما كانت المجموعات والاقترانات امور اساسية لرياضيي القرن الماضي.

التبولوجيا لها عدة فروع مختلفة – التبولوجيا العامة (وتعرف كذلك بتبولوجيا النقطة - المجموعة), التبولوجيا الجبرية, التبولوجيا التفاضلية والجبر التبولوجي – الاولى, التبولوجيا العامة, هي الباب لدراسة الاخرى. آمل في هذا الكتاب ان اقدم ارضية كاملة في التبولوجيا العامة. أي شخص يدرس أول عشرة فصول بشكل جيد ويحل على الأقل نصف التمارين بالتأكيد سوف يحصل على هذه الأرضية.

للقُراء الذين لم يدرسوا سابقا اي موضوع بدهي من مواضيع الرياضيات مثل الجبر المجرد, سوف يكون لديهم عقبة في تعلم كتابة البراهين. لمساعدتك في تعلم كيفية كتابة البراهين, غالبا في الفصول الاولى, وضعت تعليقات جانبية والتي لا تعتبر جزءاً من البرهان ولكن تلخص العمليات الفكرية التي تقود الى البرهان.

التعليقات الجانبية اشير اليها على الشكل التالي

حتى أصل الى البرهان سرت خلال هذه العمليات الذهنية, التي قد تدعى " الاكتشاف " او " مرحلة التجربة ".

على كل حال, القارىء سوف يتعلم انه في حين ان الاكتشاف او التجريب ضروري في اغلب الاحيان, لا شيء يمكن ان يكون بديلا للبرهان الرئيسي.

هناك العديد من التمارين في هذا الكتاب. فقط بحل عدد جيد من هذه التمارين سوف تتقن هذا الموضوع. انا لم

أزود باجابات للتمارين وليس لدي النية لعمل ذلك. حسب رأيي ان هناك عدد كافي من الأمثلة المحلولة والبراهين خلال النص نفسه لذلك ليس من الضروري ان ازود بأجوبة التمارين – في الحقيقة من المحتمل ان يكون من غير المرغوب به عمل ذلك. في اغلب الأحيان أضمن مفاهيم جديدة في التمارين, المفاهيم التي اعتقد انها اكثر اهمية سوف تقدم بشكل مفصل مرة اخرى خلال النص.

التمارين الصعبة اشير اليها بـ *.

قراء هذا الكتاب ربما يرغبون الاتصال مع بعضهم البعض بخصوص الصعوبات, حلول التمارين, ملاحظات على هذا الكتاب والقراءات الاخرى. لجعل ذلك سهلاً اسست مجموعة " Face book " تسمى " قراء تبولوجيا بدون دموع ". أنت مرحب بك للانضمام الى هذه المجموعة بارسال رسالة الى البريد الالكتروني (S.morris@ballarat.edu.au) تطلب فيها ذلك.

أخيراً يجب ان اذكر ان التقدم الرياضي يفهم بشكل افضل عندما يدرس من خلال سياقه التاريخي. هذا الكتاب يخفق في مخاطبة السياق التاريخي حاليا بما فيه الكفاية. مؤقتا أكتفي بملاحظات على شخصيات التبولوجيا في ملحق 2 – هذه الملاحظات تم استخلاصها بشكل كبير من ارشيف تاريخ رياضيات ماكتوتور

(The MacTutor History of Mathematics Archive [206])

ينصح القارىء بزيارة الموقع الالكتروني لـ

(The MacTutor History of Mathematics Archive [206])

وقراءة المقالات الكاملة بالاضافة الى المقالات عن الشخصيات الرئيسية الاخرى. لكن الحصول على فهم جيد للتأريخ نادراً ما يحصل بالقرآة فقط من مرجع واحد.

ضمن سياق التأريخ كل ما اريد قوله هنا ان معظم التبولوجيا الموصوفة في هذا الكتاب اكتشفت في النصف الأول من القرن العشرين. ويمكن للشخص ان يقول ان مركز الثقل لهذه الفترة من الأكتشاف هو, اوكان, بولندا. (تحركت الحدود الى حد كبير). سيكون من العدل القول ان الحرب العالمية الثانية غيرت مركز الثقل بشكل تام. القارىء يجب ان يراجع ملحق 2 حتى يفهم هذه الملاحظة.

1.0 شكر

أجزاء من النسخ السابقة لهذا الكتاب استعملت في جامعة لاتروب, جامعة نيوانجلند, جامعة ولونجونج, جامعة جنوب استراليا, كلية مدينة نيويورك وجامعة بالارات خلال الثلاثين سنة الماضية. اريد ان اشكر هؤلاء الطلاب الذين نقدوا النسخ السابقة وميزوا الأخطاء. الشكر الخاص الى Deborah King و Allison Plat لإشارتهم الى العدد الاكبر من الأخطاء وضعف التقديم. الشكر ايضا للعديد من الزملاء الآخرين مثل Carolyn McPhail, Ralph Kopperman, Karl Heinrich, Rodney Nillsen, Peter Pleasants, Geoffrey Prince, Bevan Thompson و Ewan Barker الذين قرأوا نسخ مختلفة وقدموا نصائح لتحسين هذه النسخ. الشكر لـ

Rod Niggsen الذي ملاحظاته على الفوضى (chaos) كانت مفيدة في التهيئة للجزىء المرتبط به من الفصل السادس. الشكر الخاص كذلك لـ Jack Gray الذي دفاتر ملاحظاته الممتازة في جامعة جنوب ويلز الجديدة ذات العنوان " نظرية المجموعات وحساب ما وراء المنتهي " المكتوبة في السبعينيات كان لها الأثر على ملحقنا عن نظرية المجموعات اللانهائية.

في أماكن مختلفة من هذا الكتاب وبشكل خاص ملحق 2, هناك ملاحظات تاريخية. أنا أشكر مصدرين رائعين هما [30] Bourbaki و [206] The MacTutor History of Mathematics Archive.

2.0 قُراء – مواقع ومهن.

هذا الكتاب استخدم من قبل الاكتواريون, الفلكيون, الكيميائيون, علماء الحاسوب, المتخصصون بالاقتصاد القياسي, الاقتصاديون, الطيارون, المتخصصون بقواعد البيانات, الكهربائيون, الميكانيكيون, المبرمجون, المتخصصون بالفضاء والاتصالات, المهندسون, طلاب المالية, علماء الرياضيات التطبيقية والبحتة, علماء فسيولوجيا الاعصاب, تجار حقوق البيع والشراء, الفلاسفة, الفيزيائيون, علماء النفس, مطوروا البرامج, علماء البيانات الخاصة, والأحصائيون في الجزائر, الأرجنتين, استراليا, بنغلادش, بوليفيا, بلاروسيا, بلجيكا, البرازيل, بلغاريا, كمبوديا, الكاميرون, كندا, تشيلي, الصين, كولومبيا, كوستاريكا, كرواتيا, قبرص, جمهورية التشيك, الدنمارك, مصر, استونيا, اثيوبيا, فيجي, فنلندا, فرنسا, غزة, المانيا, غانا, اليونان, غويانا, هنجاريا, ايسلندا, الهند, اندونيسيا, ايران, العراق, اسرائيل, ايطاليا, جامايكا, اليابان, كينيا, كوريا, الكويت, لتوانيا, لكسمبورغ, ماليزيا, مالطا, موريشيوس, المكسيك, نيوزيلاندا, نيكاراغوا, نيجيريا, النرويج, باكستان, باراغواي, بيرو, الفلبين, بولندا, البرتغال, قطر, رومانيا, روسيا, صربيا والجبل الأسود, سيراليون, سنغافورة, سلوفينيا, جنوب افريقيا, اسبانيا, سيريلانكا, السودان, السويد, سويسرا, تايوان, تايلاند, هولندا, الفلبين, ترينداد وتوباغو, تونس, تركيا, المملكة المتحدة, اكرانيا, الامارات العربية المتحدة, الولايات المتحدة الامريكية, اوروغواي, اوزباكستان, فنزويلا وفيتنام.

الكتاب يرجع اليه بشكل خاص في الموقع **http://www.econphd.net/notes.htm** وهو موقع الكتروني صمم لجعل من السهولة الوصول الى مرجع لـ " محاضرات لمستوى الماجستير في كل المجالات الرئيسية " وهذا مناسب لطلاب الاقتصاد وكذلك في مرجع التبولوجيا " اطلس التبولوجيا " على الموقع

http://at.yorku.ca/topology/educ.htm.

3.0 تقديرات القُراء.

T. Lesley, الولايات المتحدة الأمريكية: "عمل مبهج, مكتوب بشكل جميل"

E. Ferrer, استراليا: "ملاحظاتك رائعة"

E. Yuan, المانيا: "انه حقيقة كتاب رائع للمبتدئين في التبولوجيا"

S. Kumar, الهند: "معجب جدا بالمعالجة السهلة للموضوع الذي يمكن ان يتتبع بسهولة من قبل غير الرياضيين"

Pawin Siriprapanukul, تايلند: "انا احضر نفسي لدرجة الدكتوراة (في الاقتصاد) ووجدت كتابك حقيقة مساعد في الموضوع المعقد التبولوجيا"

Hannes Reijner, السويد: "فكرة ممتازة"

G. Gray, الولايات المتحدة الامريكية: "نص رائع"

Dipak Banik, الهند: "ملاحظة جميلة"

B. Pragoff Jr, الولايات المتحدة الامريكية: "توضح التبولوجيا للطالب الجامعي بشكل حسن جدا"

Tapas Kumar Bose, الهند: "مجموعة ممتازة من المعلومات"

Eszter Csernai, هنجاريا: "انا طالب بكالوريوس ادرس الاقتصاد الرياضي. انا متاكد انك سمعت هذا عدت مرات سابقا ولكن سوف اعيد بان هذا الكتاب رائع جداً"

Christopher Roe, استراليا: "ممكن في البداية ان اشكرك لكتابة كتابك الرائع (تبولوجيا بدون دموع) ؟. بالرغم من انه من المحتمل جدا ان يكون هذا الكتاب اساسي بالنسبة لك فاني وجدت قراءته تجربة رائعة جداً "

Jeanine Dorminey, الولايات المتحدة الامريكية: "انا ادرس الآن تبولوجيا ولدي كمية غير عادية من الصعوبات مع هذا الموضوع. قرأت كتابك وساعدني جداً "

Tarek Fouda, الولايات المتحدة الامريكية: "انا ادرس التفاضل المتقدم في معهد ستيفنس للتكنولوجيا للحصول على الماجستير في العلوم تخصص الهندسة المالية. انها المرة الاولى التي اتعرض فيها لموضوع التبولوجيا. اشتريت العديد من الكتب ولكن وجدت كتابك الوحيد الذي يشرح الموضوع بطريقة ممتعة وارغب دائما بأخذ هذا الكتاب معي لقراءته في القطار او المدرسة "

Professor Luis J. Alias, قسم الرياضيات في جامعة مورسيا, اسبانيا: "انا حديثا اكتشفت كتابك الممتاز (تبولوجيا بدون دموع). خلال هذا الفصل سوف ادرس مساقا في التبولوجيا العامة (في الحقيقة سوف ابدأ هذا الفصل غدا صباحا). انا بدأت تدريس هذا المساق السنة الماضية واضطررت لاعتماد كتاب Munkres (الطبعة

الثانية ,Topology) الذي منه غطيت الفصول 2, 3 وجزء من 4, 5 وجزء من 9. انا قرأت كتابك وحقيقة استمتعت به. انا احببته كثيراً جداً خاصة الطريقة التي تقدم فيها المفاهيم الجديدة وكذلك المساعدات والملاحظات المفتاحية التي تقدمها للطلاب ".

Gabriele. E.M. Biella MD PhD, رئيس البحث, معهد التصوير الحيوي الجزيئي وعلم وظائف الأعضاء, مجلس البحث القومي, ايطاليا: "انا عالم في فسيولوجيا الأعصاب واحاول ان انجز بعض الوصف الديناميكي العصبي للعمليات الحسية من خلال النظرية التبولوجية. لذلك دخلت الى كتابك الرائع "

Gabriele Luculli, ايطاليا: "انا طالب شاب لكني وجدت طريقة عرضك لموضوع التبولوجيا ممتعة جدا خاصة عرضك العديد من الأمثلة"

K. Orr, الولايات المتحدة الامريكية: "كتاب ممتاز"

Professor Ahmed Ould, كولومبيا: "دعني اهنئك للعرض, التبسيط والوضوح في المادة"

Paul Unstead, الولايات المتحدة الامريكية: "انا أحببت مدوناتك لأنها تزود بالعديد من الأمثلة المتكاملة ولا تفترض ان القارىء رياضي متخصص"

Alberto Garca Raboso, اسبانيا: "انا احببته كثيرا"

Guiseppe Curci, مدير بحث في الفيزياء النظرية, المعهد القومي للفيزياء النظرية, بيسا: "كتاب لطيف يسلط الضوء على التبولوجيا"

M. Rinaldi, الولايات المتحدة الامريكية: "هذا الى حد بعيد اوضح وافضل مقدمة للتبولوجيا شاهدتها لغاية الآن ... عندما قرأت مدوناتك المفاهيم تعمقت ورسخت وامثلتك عظيمة"

Joaquin Poblete, استاذ في الاقتصاد, جامعة تشيلي الكاثوليكية: "انا انهيت لتوي قراءة كتابك وانا حقيقة احببته. انه واضح جدا والامثلة التي اعطيتها فيها ايحاء واكتشاف "

Alexander Liden, السويد: "انا استمتع بقراءة كتابك من الشاشة ولكني اود ان احصل على نسخة مطبوعة من الكتاب"

Francois Neville, الولايات المتحدة الامريكية: "انا طالب بكالوريوس في مساق هندسة متخصص في جامعة مين (الولايات المتحدة الامريكية) واستاذنا اوصى بحماس كتابك لوحدة التبولوجيا"

Hsin-Han Shen, الولايات المتحدة الامريكية: "انا طالب دكتوراة مالية في جامعة ولاية نيويورك في بافالو. وجدت مواد التبولوجيا على موقعك الالكتروني مفصلة بشكل جيد وسهلة القراءة والتي ستكون مثالية كمساق اولي في موضوع التبولوجيا لطلاب الدكتوراة الذين لا يتخصصون بالرياضيات مثلي "

Degin Cai, الولايات المتحدة الامريكية: "كتابك رائع"

Eric Yuan, المانيا: "انا الآن طالب رياضيات في جامعة دارمستادت للتكنولوجيا ادرس التبولوجيا واستاذنا K.H. Hofmann اوصى بكتابك (تبولوجيا بدون دموع) الى حدٍ كبيرٍ جداً"

Martin Vu, جامعة اكسفورد: "انا طالب ماجستير في الرياضيات التطبيقية هنا في اكسفورد. لأنني أستعمل حاليا المفاهيم المجردة في الرياضيات, عنوان الكتاب تبولوجيا بدون دموع له جاذبية طبيعية "

Ahmet Erdem, تركيا: "احبه كثيراً"

Wolfgang Moens, بلجيكا: "انا طالب بكالوريوس في الجامعة الكاثوليكية. وجدت نفسي أقرأ معظم الجزء الأول من (تبولوجيا بدون دموع) في بضعة ساعات. قبل ان اكمل يجب ان امدحك لكتابتك الواضحة والتركيب الممتاز (هو بالتاكيد لم يمر بدون ملاحظة!) "

Duncan Chen, الولايات المتحدة الامريكية: "يجب ان تكون قد تلقيت رسائيل الكترونية مثل هذه عدة مرات, ولكن ما زلت ارغب في شكرك على الكتاب (تبولوجيا بدون دموع)"

Maghaisvarei Sellakumaran, سنغافورة: "انا سوف اذهب الى الولايات المتحدة الامريكية لدراسة الدكتوراة في الاقتصاد. وجدت كتابك في التبولوجيا جيد جداً "

Tom Hunt, الولايات المتحدة الامريكية: "شكراً لك لعمل هذه المدونات المتوفرة على الوب"

Fausto Saporito, ايطاليا: "أنا أقرأ كتابك الجميل جدا وهذا هو أفضل كتاب شاهدته لغاية الآن عن هذا الموضوع" على خط آخر Takayuki Osogami, الولايات المتحدة الامريكية: بدأ قراءة كتابك (تبولوجيا بدون دموع) على الشاشة ووجد انها مادة جميلة جداً لتعلم التبولوجيا بالإضافة الى المفهوم الرياضي العام"

Roman Kn¨oll, ألمانيا: "شكراً جزيلاً لك لأنك جعلتني اقرأ كتابك العظيم. " تبولوجيا بدون دموع " ساعدني كثيرا واستعدت بطريقة ما اهتمامي في الرياضيات, الذي فقد بشكل مؤقت بسبب المحاضرات غير المنظمة والتعلم غير الضروري بالحفظ عن ظهر قلب "

Yuval Yatskan, الولايات المتحدة الامريكية: "ألقيت نظرة على الكتاب وهو يبدو انه عمل رائع"

N.S. Mavrogiannis, اليونان: "انه عمل جيد جداً"

Semih Tumen, تركيا: "انا اعرف ان برامج الدكتوراة في الاقتصاد تتطلب امورا رياضية لذلك وجدت ان كتابك مفيد جدا عند مراجعة المواضيع الضرورية"

Pyung Ho Kim, الولايات المتحدة الامريكية: "انا الآن طالب دكتوراة انا ادرس الجغرافيا الاقتصادية وجدت كتابك ممتازا لتعلم المفهوم الاساسي للتبولوجيا"

Javier Hernandez, ترنيا: "انا ممتن جدا لكل اولئك امثالك الذين يبذلون جهودهم لمشاركة الآخرين بعلمهم بدون التفكير فقط بالمنفعة التي يمكن ان يحصلوا عليها بواسطة اخفاء الشمعة تحت المنضدة واخذ المال لجعلنا نكتشف الضوء"

J. Chand, استراليا: "شكرا جزيلا لانتاج تبولوجيا بدون دموع. كتابك مدهش "

Richard VandeVelde, الولايات المتحدة الامريكية: "من سنتين ماضيتين اتصلت معك بخصوص تنزيل نسخة من كتابك "تبولوجيا بدون دموع" لاستخدامي الشخصي. في ذلك الوقت كنت ادرس مادة مشتركة للبكالوريوس والماجستير في التبولوجيا. اعطيت الطلاب الرقم السري للدخول (على الانترنت) الى النص. بالرغم من انني لم اتبع المواضيع والتطورات بالضبط بنفس الترتيب الذي عملته انت, أحد الطلاب الجيدين في الصف اقترح بأنه يجب علي ان اعتمد كتابك هو المرجع الوحيد لهذا المساق!. أعتقد ان تلك كانت توصية جميلة. حسنا التاريخ يعيد نفسه وبعد سنتين ادرس ثانية نفس المساق الى النوع نفسه من الطلاب. لذلك ارغب بأن اكون قادرا على تنزيل النسخة الكاملة من الكتاب "

Professor Sha Xin Wei, الفنون الجميلة وعلم الحاسوب, جامعة كونكورديا, كندا: "كل التقديرات لكتابك في التبولوجيا المكتوب بعناية وانسانية. انا اود ان يتم اعتماد هذا الكتاب كمساق يقدم الرياضيات (الحية) للمثقفين والفنانين الطموحين. دائما شيء مفرح ان تجد عملا كعملك في متناول المثقفين بدون مساومة".

Associate Professor Dr Rehana Bari, بنغلادش: "انا مدرس لمساق في التبولوجيا لطلبة الماجستير في قسم الرياضيات, جامعة دكا, بنغلادش. هل ممكن ان احصل على نسخة من كتابك الرائع " تبولوجيا بدون دموع " لاستخدامي الشخصي ؟ "

Rahul Nilakantan, طالب دكتوراة, قسم الاقتصاد, جامعة جنوب كاليفورنيا, الولايات المتحدة الامريكية: "انا طالب دكتوراة في قسم الاقتصاد في جامعة جنوب كاليفورنيا, لوس انجلوس. أرغب في العمل في موضوع الموازنة العامة في الاسواق النامية. هذا الموضوع يحتاج لفهم شامل للمفاهيم التبولوجية. كتابك الممتاز وصف لي من قبل زميل لي من جامعة كنساس (Mr. Ramu Gopalan). بعد دراستي لجزء من هذا الكتاب من نسخة غير مطبوعة استنتجت ان هذا الكتاب هو الذي اريد ان اقرأه لأتعلم التبولوجيا "

Long Nguyen, الولايات المتحدة الامريكية: "لم ارى ابدا كتابا بهذا الوضوح في مثل هذا الموضوع الصعب"

Renato Orellana, تشيلي: "اهنئك على كتابك العظيم. مررت بالفصول الاولى وامضيت وقتا رائعا. كنت اعتقد ان التبولوجيا بعيد المنال والآن اعلن نفسي بأنني متفائل في هذا المجال "

Sisay Regasa Senbeta, مساعد عميد, كلية الاعمال والاقتصاد, جامعة اديس ابابا, اثيوبيا: "انا طالب دكتوراة متوقع في الاقتصاد والآن محاضر في الاقتصاد في قسم الاقتصاد في جامعة اديس ابابا, اثيوبيا, شرق افريقيا. هل ممكن ان ترسل لي نسخة مطبوعة من كتابك ؟ "

Nicanor M. Tuan, كلية دافاو الشرقية الرسمية للعلوم والتكنولوجيا, الفلبين: "تحياتي! اريد ان ازجي امتناني لفعلك غير الأناني بالمشاركة في مصادرك التعليمية, انت في الواقع ساعدتني انا وطلابي في الحصول على النضج التبولوجي. شكرا وقدرة اكبر "

Ernita R. Calayag, الفلبين: "انا الآنسة Ernita R. Calayag, فلبينية, طالبة في جامعة دي لاسال مقبولة للدكتوراة في الرياضيات. سمعت اشياء جيدة عن كتابك " تبولوجيا بدون دموع " وكطالبة رياضيات, لا استطيع ان اضيع فرصة امتلاك نسخة والتمتع بمنافعها. أتمنى بموافقتك ان ابدأ في فهم التبولوجيا اكثر كموضوع تأسيسي في الرياضيات "

Nikola Matejic, صربيا: "حقيقة كتابك فريد وثمين, مناسب لجمهور عريض. هذا هدية ثمينة منك, التي تقدر حول العالم. أعتقد ان معظم من يريد ان يحصل على المعرفة المناسبة في التبولوجيا يمكن ان يستفيد بشكل عظيم من كتابك "

Iraj Davoodabadi, ايران: "(ارجوك اعذرني لرسالتي غير المناسبة) انا مهندس ميكانيكي. لكني احب الرياضيات جدا (احب اكثر شيء التحليل). علمت نفسي بدون معلم. بعض المواضيع كانت صعبة علي (على سبيل المثال التبولوجيا والتحليل المجرد) لأن خبرتي في الرياضيات البحتة ليست عالية لحد الآن. انا الآن ادرس كتابك (تبولوجيا بدون دموع). هذا الكتاب مختلف جدا عن الكتب الاخرى في هذا الموضوع وعلمني عدة اشياء كانت مجهولة اي لحد الآن [شكرا لك] "

M.A.R. Khan, كراتشي: "شكرا لك لتذكرك طلاب العالم الثالث"

الفصل الأول

الفضاءات التبولوجية (Topological spaces)

مقدمة

التنس, كرة القدم, البيسبول والهوكي يمكن ان تكون العاب ممتعة ولكن حتى تلعبها يجب في البداية ان تتعلم (بعض) قواعد اللعبة. الرياضيات ليست مختلفة. لذلك نحن نبدأ مع قواعد التبولوجيا.

هذا الفصل سيبدأ بتعريف التبولوجيا وبعد ذلك سيعرض بعض الامثلة البسيطة: الفضاءات التبولوجية المنتهية, الفضاءات المتقطعة, الفضاءات غير المتقطعة والفضاءات ذات التبولوجيا منتهي – مغلق.

التبولوجيا, كباقي فروع الرياضيات البحتة مثل نظرية الزمر, هو موضوع بديهي. نبدأ بمجموعة من البديهيات ونستخدم هذه البديهيات لاثبات تمهيديات ونظريات. انه من المهم جدا ان تطور مهارتك بكتابة البراهين.

لماذا البراهين مهمة جداً؟ افرض ان مهمتنا هي بناء عمارة. يجب ان نبدأ بالاساسات. في حالتنا هذه هي البديهيات او التعريفات – كل شيء آخر سيبنى عليها. كل نظرية او تمهيدية تمثل مستوى جديد من المعرفة ويجب ان تربط باحكام مع المستوى السابق. نحن نربط المستوى الجديد مع المستوى السابق باستخدام البرهان. لذلك النظريات والتمهيديات هي المعرفة الجديدة التي نحصل عليها في حين ان البراهين ضرورية لربطها مع المستوى الادنى من المعرفة. بدون البراهين التركيب سوف ينهار.

لذلك ما هو البرهان الرياضي؟

البرهان الرياضي هو حجة لا لبس فيها تبدأ بمعلومات معطاة وتستمر بحجج منطقية وتنتهي بالشيء الذي يراد اثباته.

يجب ان تبدأ البرهان بكتابة المعلومات المعطاة وبعد ذلك كتابة الشيء المراد اثباته. اذا كانت المعلومات المعطاة او المراد اثباته تحتوي على مفاهيم علمية يجب ان تكتب تعريفات لهذه المفاهيم.

كل برهان يجب ان يتكون من جمل تامة. كل جملة من هذه الجمل يجب ان تكون نتيجة لـ (1) ما تم كتابته سابقا او (2) نظرية, تمهيدية او مساعدة تم اثباتها سابقا.

في هذا الكتاب سوف تشاهد عدة براهين, لكن لاحظ ان الرياضيات ليست رياضة للمشاهد. هي لعبة للمشاركين. الطريقة الوحيدة لتعلم كتابة البراهين هي ان تحاول كتابتها بنفسك.

1.1 التبولوجيا Topology

1.1.1 تعريف. لتكن X أي مجموعة غير خالية. العائلة τ من المجموعات الجزئية من X تسمى **تبولوجيا** (Topology) على X اذا حققت الشروط التالية

I) X والمجموعة الخالية $\emptyset$ تنتميان لـ τ

II) اتحاد اي عدد (منتهي او غير منتهي) من عناصر τ ينتمي لـ τ, و

III) تقاطع اي عنصرين في τ ينتمي لـ τ.

الزوج (X, τ) يسمى **فضاءً تبولوجياً** (Topological space)

2.1.1 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ولتكن

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

نلاحظ ان τ_1 هي تبولوجيا على X لأنها تحقق الشروط (I), (II) و (III) في تعريف 1.1.1.

3.1.1 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ ولتكن

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, e\}, \{b, c, d\}\}$$

نلاحظ ان τ_2 هي ليست تبولوجيا على X بسبب ان الاتحاد

$$\{c, d\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

لعنصرين من τ_2 لا ينتمي لـ τ_2 أي ان τ_2 لا يحقق الشرط (II) من تعريف 1.1.1.

4.1.1 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ولتكن

$$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}, \{a, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$$

نلاحظ ان τ_3 هي ليست تبولوجيا على X لأن التقاطع

$$\{a, c, f\} \cap \{b, c, d, e, f\} = \{c, f\}$$

لعنصرين من τ_3 لا ينتمي لـ τ_3, أي ان τ_3 لا تحقق الشرط (III) من تعريف 1.1.1.

5.1.1 مثال. لتكن $\mathbb{N}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية (أي مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة) ولتكن τ_4 مكونة من $\mathbb{N}$, $\emptyset$ وجميع المجموعات الجزئية المنتهية من $\mathbb{N}$. نلاحظ ان τ_4 هي ليست تبولوجيا على $\mathbb{N}$ لان الاتحاد غير المنتهي

$$\{2\} \cup \{3\} \cup \cdots \cup \{n\} \cup \cdots = \{2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

لعناصر من τ_4 لا ينتمي لـ τ_4, اي ان τ_4 لا تحقق الشرط (II) من تعريف 1.1.1.

6.1.1 تعريف. لتكن X أي مجموعة غير خالية ولتكن τ عائلة كل المجموعات الجزئية من X. τ تسمى **التبولوجيا المتقطعة** (discrete topology) على المجموعة X. الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى **الفضاء المتقطع** (discrete space).

نلاحظ ان τ في تعريف 6.1.1 تحقق الشروط في تعريف 1.1.1 لذلك هي تبولوجيا.

لاحظ ان المجموعة X في تعريف 6.1.1 يمكن ان تكون اي مجموعة غير منتهية. لذلك هناك عدد غير منتهي من الفضاءات المتقطعة – واحد لكل مجموعة X.

7.1.1 تعريف. لتكن X أي مجموعة غير خالية ولتكن $\tau = \{X, \emptyset\}$. τ تسمى **التبولوجيا غير المتقطعة** (indiscrete topology) و (X, τ) يسمى **الفضاء غير المتقطع** (indiscrete space).

مرة اخرى يجب ان تتحقق من ان τ تحقق شروط التعريف 1.1.1 ولذلك τ هي تبولوجيا.

ونلاحظ مرة اخرى ان المجموعة X في تعريف 7.1.1 يمكن ان تكون اي مجموعة غير منتهية. لذلك يوجد عدد غير منتهي من الفضاءات غير المتقطعة – واحد لكل مجموعة X.

في مقدمة هذا الفصل وضحنا اهمية البراهين والاشياء المرتبطة بكتابتهم. خبرتنا الاولى مع البراهين في مثال 8.1.1 وتمهيدية 9.1.1. يجب ان تدرس هذه البراهين بتمعن.

8.1.1 مثال. اذا كانت $X = \{a, b, c\}$ و τ هي تبولوجيا على X وأن $\{a\}\in\tau$, $\{b\}\in\tau$, و $\{c\}\in\tau$ أثبت ان τ هي التبولوجيا المتقطعة.

البرهان.

المعطيات المتوفرة لدينا ان τ هي تبولوجيا و $\{a\}\in\tau$, $\{b\}\in\tau$, و $\{c\}\in\tau$.

المطلوب منا اثبات ان τ هي التبولوجيا المتقطعة, اي انه يجب ان نثبت (باستخدام تعريف 6.1.1) ان τ تحتوي كل المجموعات الجزئية من X . تذكر ان τ هي تبولوجيا ولذلك تحقق الشروط (I), (II) و (III) في تعريف 1.1.1.

لذلك يجب ان نبدأ برهاننا بكتابة جميع المجموعات الجزئية من X.

المجموعة X تملك 3 عناصر ولذلك تملك 3^2 مجموعات جزئية مختلفة وهي: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$,

$S_3 = \{b\}$, $S_4 = \{c\}$, $S_5 = \{a, b\}$, $S_6 = \{a, c\}$, $S_7 = \{b, c\}$, و $S_8 = \{a, b, c\} = X$.

يجب ان نثبت ان كل مجموعة من هذه المجموعات الجزئية هي في τ . لأن τ هي تبولوجيا, تعريف 1.1.1 (I) يعطي ان $\emptyset$ و X تنتمي لـ τ, اي ان $S_1\in\tau$ و $S_8\in\tau$.

معطى لدينا ان $\{a\}\in\tau$, $\{b\}\in\tau$, و $\{c\}\in\tau$, اي ان $S_2\in\tau$, $S_3\in\tau$ و $S_4\in\tau$.

لاتمام البرهان يجب ان نبين ان $S_5\in\tau$, $S_6\in\tau$ و $S_7\in\tau$. ولكن $S_5 = \{a, b\} = \{a\}\cup \{b\}$. ونحن نعلم ان $\{a\}$ و $\{b\}$ هي في τ, تعريف 1.1.1 (II) يعطي ان اتحادهم كذلك في τ, اي ان $S_5 = \{a, b\}\in\tau$.

بنفس الاسلوب $S_6 = \{a, c\} = \{a\} \cup \{c\}\in\tau$ و $S_7 = \{b, c\} = \{b\} \cup \{c\}\in\tau$. □

في الملاحظات التمهيدية لهذا الفصل لاحظنا ان الرياضيات ليست رياضة المتفرج. يجب ان تكون مشارك فعال. بالتأكيد مشاركتك تشمل حل بعض التمارين. ولكن اكثر من ذلك يعتمد عليك. يجب عليك ان تتفكر في المادة التي اعدت لك.

واحدة من واجباتك ان تنظر الى النتائج التي نثبتها وتسأل اسئلة ذات علاقة بالموضوع. على سبيل المثال, اثبتنا انه اذا كانت المجموعات الاحادية $\{a\}$, $\{b\}$ و $\{c\}$ في τ و $X = \{a, b, c\}$, فان τ هي التبولوجيا المتقطعة. يجب ان تسأل اذا كانت X هي مجموعة بالصورة العامة, اي اذا كان (X, τ) هو اي فضاء تبولوجي بحيث ان τ تحتوي كل المجموعات الاحادية, هل τ بالضرورة هي التبولوجيا المتقطعة؟ الجواب هو نعم, وهذا سيثبت في تمهيدية 9.1.1.

9.1.1 تمهيدية. اذا كان (X, τ) فضاءً تبولوجياً بحيث ان, لكل $x \in X$ المجموعة الاحادية $\{x\}$ تنتمي لـ τ فان τ هي التبولوجيا المتقطعة.

البرهان.

هذه النتيجة هي تعميم لمثال 8.1.1. لذلك يجب ان تتوقع ان البرهان سيكون مشابها. على كل حال, نحن لا نستطيع ان نكتب كل المجموعات الجزئية من X كما فعلنا في مثال 8.1.1 بسبب ان X يمكن ان تكون مجموعة غير منتهية. على الرغم من ذلك يجب ان نثبت ان كل مجموعة جزئية من X تنتمي لـ τ.

في هذه المرحلة يمكن ان تجرب ان تثبت النتيجة لبعض الحالات الخاصة, على سبيل المثال ان تأخذ X مكونة من 4, 5 او 100 عنصر. ولكن هذا الطريق سيفشل. تذكر ملاحظاتنا الافتتاحية في هذا الفصل حيث وصفنا البرهان الرياضي بانه حجة لا لبس فيها. لا يمكن ان نبدأ حجة لا لبس فيها باعتماد بعض الحالات الخاصة او حتى عدد كبير من الحالات الخاصة. الحجة التي لا لبس فيها يجب ان تغطي كل الحالات. لذلك يجب ان نعتمد الحالة العامة لاي مجموعة عشوائية غير خالية X. بطريقة ما يجب ان نثبت ان كل مجموعة جزئية من X تنتمي لـ τ.

بالنظر مرة اخرى الى برهان مثال 8.1.1 نرى ان المفتاح هو ان كل مجموعة جزئية من X هي اتحاد مجموعات احادية جزئية من X ونحن نعلم ان كل المجموعات الاحادية الجزئية موجودة في τ. وهذا صحيح كذلك في الحالة العامة.

سنبدأ البرهان بتسجيل حقيقة ان كل مجموعة هي اتحاد مجموعاتها الاحادية الجزئية. لتكن S هي اي مجموعة جزئية من X. اذا

$$S = \bigcup_{x \in S} \{x\}$$

بما انه معطى لدينا ان كل $\{x\}$ هو في τ, تعريف 1.1.1 (II) والمعادلة السابقة يعطيان ان $S \in \tau$. ولأن S هي مجموعة جزئية عشوائية من X, فان τ هي التبولوجيا المتقطعة. □

كون كل مجموعة S هي اتحاد مجموعاتها الاحادية الجزئية هي نتيجة سنستخدمها من وقت لآخر خلال هذا الكتاب باشكال مختلفة حسب السياق. لاحظ ان هذه النتيجة صحيحة حتى عندما $S = \emptyset$ في حينها سنشكل ما يسمى **الاتحاد الخالي** (empty union) ونحصل على $\emptyset$ كنتيجة.

تمارين 1.1

1- لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. حدد فيما انا كانت كل من العائلات التالية تمثل تبولوجيا على X ام لا

$\tau_1=\{X, \emptyset, \{a\}, \{a, f\}, \{b, f\}, \{a, b, f\}\}$;

$\tau_2= \{X, \emptyset, \{a, b, f\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, f\}\}$;

$\tau_3= \{X, \emptyset, \{f\}, \{e, f\}, \{a, f\}\}$.

2- لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$. اي من عائلات المجموعات الجزئية من X التالية تمثل تبولوجيا على X؟ (فسر اجابتك.)

$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{c\}, \{b, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{b\}\}$;

$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, d, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, d, e\}\}$;

$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{b\}, \{a, b, c\}, \{d, e, f\}, \{b, d, e, f\}\}$.

3- اذا كانت $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ و τ هي التبولوجيا المتقطعة على X, اي من العبارات التالية صحيحة؟

أ) $X\in\tau$,   ب) $\{X\}\in\tau$,   ج) $\{\emptyset\}\in\tau$,   د) $\emptyset\in\tau$,

ه) $\emptyset\in X$,   و) $\{\emptyset\}\in X$,   ز) $\{a\}\in\tau$,   ح) $a\in\tau$,

ط) $\emptyset\subseteq X$,   ي) $\{a\}\in X$,   ك) $\{\emptyset\}\subseteq X$,   ل) $a\in X$,

م) $X\subseteq\tau$,   ن) $\{a\}\subseteq\tau$,   س) $\{X\}\subseteq\tau$,   ع) $a\subseteq\tau$.

[مساعدة. فقط ستة من العبارات السابقة صحيحة.].

4- ليكن (X, τ) اي فضاء تبولوجي. اثبت ان **تقاطع اي عدد منتهي من عناصر τ هو عنصر في τ**.

5- لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية. اثبت ان كل من عائلات المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التالية تمثل تبولوجيا على $\mathbb{R}$

(I) τ_1 مكونة من $\mathbb{R}$, $\emptyset$ وكل الفترات $(-n, n)$ حيث n عدد صحيح موجب,

(II) τ_2 مكونة من $\mathbb{R}$, $\emptyset$ وكل الفترات $[-n, n]$ حيث n عدد صحيح موجب,

(III) τ_3 مكونة من $\mathbb{R}$, $\emptyset$ وكل الفترات $[n, \infty)$ حيث n عدد صحيح موجب.

6- لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبة. اثبت ان كل من عائلات المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ التالية تمثل تبولوجيا على $\mathbb{N}$

(I) τ_1 مكونة من $\mathbb{N}$, Ø وكل المجموعات $\{1, 2, . . . , n\}$ حيث n عدد صحيح موجب (هذا يسمى **تبولوجيا القطعة الابتدائية** initial segment topology).

(II) τ_2 مكونة من $\mathbb{N}$, Ø وكل المجموعات $\{n, n + 1, . . . \}$, حيث n عدد صحيح موجب (هذا يسمى **تبولوجيا القطعة النهائية** final segment topology).

7- اكتب كل انواع التبولوجيا الممكن تكوينها على المجموعات التالية

أ) $X = \{a, b\}$,

ب) $Y = \{a, b, c\}$.

8- لتكن X مجموعة غير منتهية و τ تبولوجيا على X. اذا كانت كل مجموعة جزئية غير منتهية من X تنتمي لـ τ, اثبت ان τ هي التبولوجيا المتقطعة.

9*- لتكن $\mathbb{R}$ هي مجموعة الاعداد الحقيقية. فقط ثلاثة من عائلات المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التالية تمثل تبولوجيا على $\mathbb{R}$. حدد هذه العائلات وفسر اجابتك

أ) τ_1 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات (a, b) حيث a و b اي اعداد حقيقية و $a < b$

ب) τ_2 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات (-r, r) حيث r اي عدد حقيقي موجب

ج) τ_3 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات (-r, r) حيث r اي عدد نسبي موجب

د) τ_4 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات [-r, r] حيث r اي عدد نسبي موجب

ه) τ_5 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات (-r, r) حيث r اي عدد غير نسبي موجب

و) τ_6 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات [-r, r] حيث r اي عدد غير نسبي موجب

ز) τ_7 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات[-r, r) حيث r اي عدد حقيقي موجب

ح) τ_8 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات (-r, r] حيث r اي عدد حقيقي موجب

ط) τ_9 مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات [-r, r] وكل الفترات (-r, r) حيث r اي عدد حقيقي موجب

ي) τ_{10} مكونة من $\mathbb{R}$, Ø وكل الفترات [-n, n] وكل الفترات (-r, r) حيث n اي عدد صحيح موجب و r اي عدد حقيقي موجب.

2.1 المجموعات المفتوحة (open sets), المجموعات المغلقة (closed sets) و المجموعات المغلقة المفتوحة (clopen sets)

بدلا من الاستمرار بالاشارة الى "عناصر في τ" نجد انه اكثر ملاءمة اعطاء مثل هذه المجموعات اسماً. سوف نسميهم "مجموعات مفتوحة". كذلك سوف نسمي متممات المجموعات المفتوحة. سوف نسميهم "مجموعات مغلقة". هذه التسمية ليست خيالية ولكنها مشتقة من ما يسمى "فترات مفتوحة" و "فترات مغلقة" على خط الاعداد الحقيقية. نحن نملك الكثير لنقوله عنها في الفصل الثاني.

1.2.1 تعريف. اذا كان (X, τ) اي فضاء تبولوجي, فان عناصر τ تسمى **مجموعات مفتوحة** (open sets).

2.2.1 تمهيدية. اذا كان (X, τ) اي فضاء تبولوجي, فان

(I) X و $\emptyset$ هي مجموعات مفتوحة

(II) اتحاد اي عدد (منتهي او غير منتهي) من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة

(III) تقاطع اي عدد منتهي من المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة.

البرهان. واضح ان (I) و (II) هي نتائج مباشرة من تعريف 1.2.1 (I) و (II). الحالة (III) تنتج من تعريف 1.2.1 و تمارين 1.1 # 4.

عند قراءة تمهيدية 2.2.1, سؤال سوف يظهر بعقلك: في حين ان اي اتحاد منتهي او غير منتهي للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة ولكن كتبنا ان فقط التقاطع المنتهي للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة. هل التقاطع غير المنتهي للمجموعات المفتوحة هو مجموعه مفتوحة ؟. المثال التالي يبين ان الاجابة هي " لا ".

3.2.1 مثال. لتكن $\mathbb{N}$ هي مجموعة كل الاعداد الصحيحة الموجبة ولتكن τ مكونة من $\emptyset$ وكل المجموعات الجزئية S من $\mathbb{N}$ بحيث ان متممة S في $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \setminus S$, هي مجموعة منتهية. من السهل اثبات ان τ تحقق تعريف 1.1.1 ولذلك هي تبولوجيا على $\mathbb{N}$. (في الجزء التالي سوف نناقش هذه التبولوجيا بشكل اوسع. انها تسمى التبولوجيا منتهي – مغلق (finite – closed topology). لكل عدد طبيعي n, عرف المجموعة S_n كما يلي

$$S_n = \{1\} \cup \{n+1\} \cup \{n+2\} \cup \{n+3\} \cup \cdots = \{1\} \cup \bigcup_{m=n+1}^{\infty}\{m\}$$

واضح ان كل S_n هي مجموعة مفتوحة في التبولوجيا τ, لان متممتها هي مجموعة منتهية. من ناحية اخرى

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{1\} \qquad (1)$$

بما ان متممة $\{1\}$ ليست $\mathbb{N}$ وليست مجموعة منتهية لذلك (1) تبين ان تقاطع المجموعات المفتوحة S_n ليس مجموعة مفتوحة. □

ربما تسأل: كيف تم ايجاد المثال المعروض في مثال 3.2.1 ؟ الاجابة غير ساحرة ! انها باستخدام التجربة والخطأ.

اذا جربنا, على سبيل المثال, التبولوجيا المتقطعة, سوف نجد ان كل تقاطع للمجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة. نفس الشيء هو صحيح في التبولوجيا غير المتقطعة. لذلك الشيء الذي تريد ان تفعله هو عمل تخمين بارع.

تذكر انه لاثبات ان تقاطع المجموعات المفتوحة ليس بالضرورة ان يكون مجموعة مفتوحة, يجب ان تجد فقط مثالا معاكسا.

4.2.1 تعريف. ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً. المجموعة الجزئية S من X تسمى **مجموعة مغلقة** (closed set) في (X, τ) اذا كانت متممتها في X, اي $X \setminus S$, هي مفتوحة في (X, τ).

في مثال 2.1.1, المجموعات المغلقة هي

$\{a\}$ و $\{b, c, d, e, f\}, \{a, b, e, f\}, \{b, e, f\}, \emptyset, X$

اذا كان (X, τ) هو الفضاء المتقطع, فان كل مجموعة من X هي مجموعة مغلقة. من ناحية اخرى في الفضاء غير المتقطع, (X, τ), المجموعات المغلقة الوحيدة هي $\emptyset$ و X .

5.2.1 تمهيدية. اذا كان (X, τ) اي فضاء تبولوجي فان

(I) $\emptyset$ و X مجموعات مغلقة

(II) تقاطع اي عدد (منتهي او غير منتهي) من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

(III) اتحاد اي عدد منتهي من المجموعات المغلقة هو مجموعة مغلقة

البرهان. (I) تنتج مباشرة من تمهيدية 2.2.1 (I) وتعريف 4.2.1 لان متممة X هي $\emptyset$ ومتممة $\emptyset$ هي X.

لاثبات ان (III) صحيحة, لتكن $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعات مغلقة. نريد اثبات ان $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ مجموعة مغلقة. باستخدام تعريف 4.2.1 يكفي ان نثبت ان $X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n)$ هي مجموعة مفتوحة.

لان $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مجموعات مغلقة فان متمماتها $X \setminus S_1, X \setminus S_2, \ldots, X \setminus S_n$ هي مجموعات مفتوحة. ولكن

$$X \setminus (S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n) = (X \setminus S_1) \cap (X \setminus S_2) \cap \cdots \cap (X \setminus S_n) \qquad (1)$$

لان جهة اليمين في (1) هي تقاطع عدد منتهي من المجموعات المفتوحة فانها مجموعة مفتوحة. ولذلك جهة اليسار في (1) هي مجموعة مفتوحة. وهذا يعني ان $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$ هي مجموعة مغلقة كما هو مطلوب. ولذلك (III) هي صحيحة.

برهان (II) مشابه لبرهان (III). [من ناحية اخرى, يجب ان تقرأ التحذير في برهان مثال 9.3.1.] □

تحذير. التسميات "مفتوح" و "مغلق" كثيرا ما تقود القادمين الجدد لعالم التبولوجيا الى الخطأ. على الرغم من التسميات, بعض المجموعات المفتوحة هي مجموعات مغلقة! اكثر من ذلك, بعض المجموعات ليست مجموعات مفتوحة وليست مجموعات مغلقة! في الواقع, اذا تأملنا مثال 2.1.1 نشاهد ان

أ) المجموعة {a} هي مجموعة مفتوحة ومغلقة

ب) المجموعة {b, c} ليست مفتوحة وليست مغلقة

ج) المجموعة {c, d} هي مفتوحة وليست مغلقة

د) المجموعة {a, b, e, f} هي مغلقة وليست مفتوحة

في الفضاء المتقطع كل مجموعة هي مفتوحة ومغلقة, في حين ان في الفضاء غير المتقطع (X, τ) كل المجموعات الجزئية من X عدا X و $\emptyset$ هي ليست مفتوحة وليست مغلقة.

لتذكيرك بأن المجموعات يمكن ان تكون مفتوحة ومغلقة بنفس الوقت نقدم التعريف التالي

6.2.1 تعريف. المجموعة الجزئية S من الفضاء التبولوجي (X, τ) تسمى **مغلقة مفتوحة** (clopen) اذا كانت مفتوحة ومغلقة في (X, τ).

في كل فضاء تبولوجي (X, τ), المجموعات X و $\emptyset$ هي مغلقة مفتوحة

في الفضاء المتقطع كل المجموعات الجزئية من X هي مغلقة مفتوحة

في الفضاء غير المتقطع X و $\emptyset$ هي فقط المجموعات المغلقة المفتوحة

تمارين 2.1

1- اكتب كل الـ 64 مجموعة جزئية من X في مثال 2.1.1. اكتب, مقابل كل مجموعة, فيما اذا كانت (I) مغلقة مفتوحة, (II) ليست مفتوحة وليست مغلقة, (III) مفتوحة وليست مغلقة, (IV) مغلقة وليست مفتوحة.

2- ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا يملك خاصية ان كل مجموعة جزئية هي مغلقة. اثبت انه فضاء متقطع.

3- لاحظ انه اذا كان (X,τ) هو فضاء متقطع او فضاء غير متقطع, فان كل مجموعة مفتوحة هي مغلقة مفتوحة. اوجد تبولوجيا τ على المجموعة $X = \{a, b, c, d\}$ بحيث تكون ليست التبولوجيا المتقطعة وليست التبولوجيا غير المتقطعة ولكنها تملك خاصية ان كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مغلقة مفتوحة.

4- لتكن X مجموعة غير منتهية. اذا كانت τ هي تبولوجيا على X بحيث ان كل مجموعة جزئية غير منتهية من X هي مغلقة, اثبت ان τ هي التبولوجيا المتقطعة.

5- لتكن X مجموعة غير منتهية و τ تبولوجيا على X تملك خاصية ان المجموعة الجزئية غير المنتهية من X التي تكون مفتوحة هي فقط X نفسها. هل (X, τ) بالضرورة هو فضاء غير متقطع.

6- (I) لتكن τ تبولوجيا على مجموعة X. بحيث ان τ تتكون فقط من اربع مجموعات, اي ان

$\tau= \{X, \emptyset, A, B\}$, بحيث ان A و B مجموعات جزئية من X غير خالية مختلفة ولا تساوي X. اثبت ان A و B يجب ان تحقق فقط حالة واحدة من الحالات التالية:

أ) $B = X \setminus A$ ب) $A \subset B$ ج) $B \subset A$

[مساعدة. في البداية بين ان A و B يجب ان تحقق على الاقل واحد من الشروط وبعد ذلك بين انهم لا يحققون اكثر من شرط واحد من الشروط]

(II) باستخدام (I) اكتب كل التبولوجيا على المجموعة $X = \{1, 2, 3, 4\}$ التي تتكون من اربع مجموعات فقط.

3.1 التبولوجيا منتهي – مغلق The Finite-Closed Topology

من المعتاد عليه ان تعرف تبولوجيا على مجموعة X بتحديد اي المجموعات هي المفتوحة. على الرغم من ذلك, بعض الاحيان من الافضل ان نصف التبولوجيا بتحديد المجموعات المغلقة. التعريف التالي يزودنا بمثال على ذلك.

1.3.1 تعريف. لتكن X اي مجموعة غير خالية. التبولوجيا τ على X تسمى **التبولوجيا منتهي – مغلق** (the finite-closed topology) او **تبولوجيا المتممات المنتهية** (the cofinite topology) اذا كانت المجموعات الجزئية المغلقة في X هي X وكل المجموعات الجزئية المنتهية من X, اي ان, المجموعات المفتوحة هي $\emptyset$ وكل المجموعات الجزئية من X التي متمماتها منتهية.

مرة اخرى انه من الضروري ان تختبر ان τ في تعريف 1.3.1 هي في الواقع تبولوجيا, اي انها تحقق شروط تعريف 1.1.1.

لاحظ ان تعريف 1.3.1 لا يقول ان كل تبولوجيا تملك ان X وكل مجموعة جزئية منتهية من X هي مغلقة هي التبولوجيا منتهي – مغلق. هذه المجموعات يجب ان تكون فقط هي المغلقة. [بالتاكيد, في التبولوجيا المتقطعة على اي مجموعة X, المجموعة X وكل المجموعات الجزئية المنتهية من X هي في الواقع مجموعات مغلقة ولكن كذلك ايضا اي مجموعات جزئية من X].

في التبولوجيا منتهي – مغلق كل المجموعات المنتهية مغلقة. على الرغم من ذلك, المثال التالي يبين ان المجموعات الجزئية غير المنتهية ليس بالضرورة ان تكون مجموعات مفتوحة.

2.3.1 مثال. اذا كانت $\mathbb{N}$ هي مجموعة الاعداد الصحيحة الموجبة, فان المجموعات مثل $\{1\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6, 8\}$ هي مجموعات منتهية ولذلك هي مغلقة في التبولوجيا منتهي – مغلق. لذلك متمماتها

$$\{2, 3, 4, 5, \ldots\}, \{1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, \ldots\}, \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, \ldots\}$$

هي مجموعات مفتوحة في التبولوجيا منتهي – مغلق. على الجانب الآخر, مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هي ليست مغلقة لانها ليست منتهية ولذلك متممتها مجموعة الاعداد الصحيحة الفردية الموجبة ليست مجموعة مفتوحة في التبولوجيا منتهي – مغلق.

لذلك في حين ان كل مجموعة منتهية هي مغلقة, ليست كل مجموعة غير منتهية مفتوحة. □

3.3.1 مثال. لتكن τ هي التبولوجيا منتهي – مغلق على مجموعة X. اذا كانت X تملك على الاقل 3 عناصر من المجموعات الجزئية المغلقة المفتوحة المختلفة, اثبت ان X هي مجموعة منتهية.

البرهان.

معطى لدينا ان τ هي التبولوجيا منتهي – مغلق, وان هناك على الاقل 3 مجموعات جزئية مغلقة مفتوحة مختلفة.

المطلوب هو اثبات ان X هي مجموعة منتهية.

تذكر ان τ هي التبولوجيا منتهي – مغلق تعني ان عائلة كل المجموعات المغلقة مكونة من X وكل المجموعات الجزئية المنتهية من X. وتذكر كذلك ان المجموعة هي مغلقة مفتوحة اذا وفقط اذا كانت مغلقة ومفتوحة بنفس الوقت.

تذكر انه في كل فضاء تبولوجي يوجد على الاقل مجموعتين مغلقة مفتوحة اي X و $\emptyset$. (انظر الى الملاحظة مباشرة بعد تعريف 6.2.1.) ولكن أخبرنا بان في الفضاء (X, τ) هناك على الاقل 3 مجموعات جزئية مغلقة مفتوحة. هذا يعطينا ان هناك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة عدا X و $\emptyset$. لذلك يجب ان يكون لدينا نظرة حذرة نحو هذه المجموعة الجزئية المغلقة المفتوحة !.

لأن فضاءنا (X, τ) يملك 3 مجموعات جزئية مغلقة مفتوحة مختلفة, عرفنا ان هناك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة S من X بحيث ان $S \neq X$ و $S \neq \emptyset$. لأن S مفتوحة في (X, τ), تعريف 4.2.1 يعطينا ان المتممة $X \setminus S$ هي مجموعة مغلقة.

لذلك S و $X \setminus S$ هي مغلقة في التبولوجيا منتهي – مغلق τ. وهذا يعني ان S و $X \setminus S$ هي منتهية لان اي منها لا يساوي X. ولكن $X = S \cup (X \setminus S)$ ولذلك X هي اتحاد مجموعتين منتهيتين. وهذا يعني ان X هي مجموعة منتهية كما هو مطلوب. □

اصبح الآ ن لدينا ثلاثة انواع مختلفة من التبولوجيا يمكن وضعها على اي مجموعة غير منتهية – وهناك العديد من انواع التبولوجيا. الثلاثة التي تعرفها هي التبولوجيا المتقطعة, التبولوجيا غير المتقطعة و التبولوجيا منتهي – مغلق. لذلك يجب دائما ان نكون حذرين في وصف التبولوجيا على المجموعة.

على سبيل المثال, المجموعة $\{n : n \geq 10\}$ هي مفتوحة في التبولوجيا منتهي – مغلق على مجموعة الاعداد الطبيعية, لكنها ليست مفتوحة في التبولوجيا غير المتقطعة. مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية هي مفتوحة في التبولوجيا المتقطعة على مجموعة الاعداد الطبيعية ولكنها ليست مفتوحة في التبولوجيا منتهي – مغلق.

الان سوف ندون بعض التعاريف التي على الأرجح شاهدتها سابقا

4.3.1 تعاريف. ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى مجموعة Y.

(I) الاقتران f يسمى **واحداً لواحد** (one to one أو injective) اذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ يعطي $x_1 = x_2$ لكل x_1, x_2 في X

(II) الاقتران f يسمى **شاملاً** (onto أو surjective) اذا كان لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ بحيث $f(x) = y$

(III) الاقتران f يسمى **تقابلاً** (bijective) اذا كان واحد لواحد وشامل.

5.3.1 تعاريف. ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى مجموعة Y. يقال ان الاقتران f يملك **نظيراً** (inverse) اذا وجد اقتران g من المجموعة Y الى المجموعة X بحيث ان $g(f(x)) = x$ لكل $x \in X$ و $f(g(y)) = y$ لكل $y \in Y$. الاقتران g يسمى **اقتراناً نظيراً** للاقتران f.

برهان التمهيدية التالية يترك لك كتمرين.

6.3.1 تمهيدية. ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى مجموعة Y.

(I) الاقتران f يملك نظيراً اذا وفقط اذا كان f اقتران تقابل.

(II) ليكن g_1 و g_2 اقترانين من Y الى X. اذا كان g_1 و g_2 كلاهما نظيراً للاقتران f فان $g_1 = g_2$، اي ان $g_1(y)=g_2(y)$ لكل $y \in Y$.

(III) ليكن g اقتراناً من Y الى X. الاقتران g هو اقتران نظير لـ f اذا وفقط اذا كان f هو اقتران نظير لـ g.

تحذير. انه خطأ مشترك للطلاب ان يعتقدوا ان الاقتران هو واحداً لواحد اذا كانت صورة النقطة الواحدة هي نقطة واحدة.

في جميع الإقترانات صورة النقطة الواحدة هي نقطة واحدة. في الواقع هذا جزء من تعريف الإقتران.

الإقتران الواحد لواحد هو إقتران تكون فيه صور النقاط المختلفة نقاطا مختلفة. □

سنتحول الآن الى مفهوم مهم من الممكن انك لم تشاهده مسبقا

7.3.1 تعريف. ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى مجموعة Y. اذا كانت S اي مجموعة جزئية من Y فان المجموعة $f^{-1}(S)$ تعرف على الصورة

$f^{-1}(S) = \{x : x \in X, f(x) \in S\}$.

المجموعة الجزئية $f^{-1}(S)$ من X تسمى **الصورة العكسية** (inverse image) للمجموعة S.

لاحظ ان الاقتران النظير للاقتران $f : X \to Y$ موجود اذا وفقط اذا كان f اقتران تقابل. ولكن الصورة العكسية لأي مجموعة جزئية من Y موجودة حتى لو كان الاقتران f ليس واحداً لواحد وليس شامل. المثال التالي يوضح ذلك

8.3.1 مثال. ليكن f اقتراناً من مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ الى نفس المجموعة معطى بالقاعدة

$f(z) = |z|$ لكل $z \in \mathbb{Z}$.

الاقتران f ليس واحداً لواحد لان $f(1) = f(-1)$

هو كذلك ليس شاملاً لانه لا يوجد $z \in \mathbb{Z}$ بحيث ان $f(z) = -1$. لذلك بالتاكيد f ليس اقتران تقابل. اذا, باستخدام تمهيدية 6.3.1 (ا), f لا يملك اقتران نظير. ولكن الصور العكسية موجودة. على سبيل المثال

$f^{-1}(\{1, 2, 3\}) = \{-1,-2,-3, 1, 2, 3\}$

$f^{-1}(\{-5, 3, 5, 7, 9\}) = \{-3,-5,-7,-9, 3, 5, 7, 9\}$ □

والآن سنختتم هذا الجزء مع مثال ممتع

9.3.1 مثال. ليكن (Y, τ) فضاءً تبولوجياً و X اي مجموعة غير خالية. بالاضافة لذلك, ليكن f اقتراناً من X الى Y. اجعل $\tau_1 = \{f^{-1}(S) : S \in \tau\}$ اثبت ان τ_1 هي تبولوجيا على X.

البرهان.

عملنا ان نثبت ان عائلة المجموعات τ_1 هي تبولوجيا على X, اي نريد اثبات ان τ_1 تحقق الشروط (I), (II) و (III) في تعريف 1.1.1.

$X \in \tau_1$ لأن $X = f^{-1}(Y)$ و $Y \in \tau$

$\emptyset \in \tau_1$ لأن $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$ و $\emptyset \in \tau$

لذلك τ_1 تملك الخاصية (I) من تعريف 1.1.1.

لاثبات الشرط (II) في تعريف 1.1.1, لتكن $\{A_j : j \in J\}$ عائلة كل عناصر τ_1 حيث J مجموعة مفهرسة. يجب ان نثبت ان $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$. لان $A_j \in \tau_1$, تعريف τ_1 يعطي ان $A_j = f^{-1}(B_j)$ حيث $B_j \in \tau$. وكذلك

$\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j)$. [انظر تمارين 3.1 # 1.]

الآن $B_j \in \tau$ لكل $j \in J$ ولذلك $\bigcup_{j\in J} B_j \in \tau$ لان τ هي تبولوجيا على Y. وهذا يعني, باستخدام تعريف τ_1, ان $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) \in \tau_1$, اي ان, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau_1$.

اذا τ_1 تملك الخاصية (II) في تعريف 1.1.1.

[**تحذير.** تم تذكيرك بأن ليس كل المجموعات هي معدودة (انظر الملحق للملاحظات على المجموعات المعدودة.) لذلك ليس كافيا في الاثبات السابق ان تفرض ان المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ هي في τ_1 وتثبت ان اتحادها $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ هو في τ_1. هذا سيثبت فقط ان اتحاد عدد معدود من عناصر τ_1 يقع في τ_1, ولكن لا يثبت ان τ_1 يحقق الخاصية (II) في تعريف 1.1.1 – هذه الخاصية تحتاج كل الاتحادات, اكانت معدودة ام غير معدودة, للمجموعات في τ_1 لتكون في τ_1.]

اخيرا, لتكن A_1 و A_2 في τ_1. يجب ان نثبت ان $A_1 \cap A_2 \in \tau_1$.

لأن $A_1, A_2 \in \tau_1$, $A_1 = f^{-1}(B_1)$ و $A_2 = f^{-1}(B_2)$ حيث $B_1, B_2 \in \tau$.

$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ [انظر تمارين 3.1 #1]

لأن $B_1 \cap B_2 \in \tau$ نستنتج ان $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \in \tau_1$. لذلك $A_1, A_2 \in \tau_1$, وبذلك نكون قد اثبتنا ان τ_1 تحقق الخاصية (III) في تعريف 1.1.1.

لذلك τ_1 هي تبولوجيا على X.

تمارين 3.1

1- ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى مجموعة Y. ذكرنا في مثال 9.3.1 ان

$$f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j) \qquad (1)$$

وكذلك

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \qquad (2)$$

لأي مجموعات جزئية B_j من Y ولأي مجموعة مفهرسة J.

أ) اثبت ان (1) صحيحة

[**مساعدة.** ابدأ برهانك بجعل x هي اي عنصر في جهة اليسار واثبات انها موجودة في المجموعة على الجهة اليمنى. وبعد ذلك اعمل العكس.]

ب) اثبت ان (2) صحيحة

ج) اوجد مجموعات A_1, A_2, X و Y واقتران $f : X \to Y$ بحيث ان

$f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$ حيث $A_1 \subseteq X$ و $A_2 \subseteq X$.

2- هل التبولوجيا الموصوفة في تمارين 1.1 # 6 (II) هي التبولوجيا منتهي – مغلق ؟ (فسر اجابتك).

3- الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى **فضاء – T_1** اذا كانت كل مجموعة احادية {x} هي مجموعة مغلقة في (X, τ). اثبت ان فقط فضاءين تبولوجيين من التسعة التالية هي فضاءات – T_1 (فسر اجابتك.)

أ) فضاء متقطع,

ب) فضاء غير متقطع يحتوي على الاقل نقطتين,

ج) مجموعة غير منتهية مع التبولوجيا منتهي – مغلق,

د) مثال 2.1.1,

ه) تمارين 1.1 # 5(I),

و) تمارين 1.1 # 5(II),

ز) تمارين 1.1 # 5(III),

ح) تمارين 1.1 # 6(I),

ط) تمارين 1.1 # 6(II).

4- لتكن τ هي التبولوجيا منتهي – مغلق على المجموعة X. اذا كانت τ هي كذلك التبولوجيا المتقطعة, اثبت ان المجموعة X منتهية.

5- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى **فضاء – T_0** اذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة a, b في X اما انه يوجد مجموعة مفتوحة تحوي a ولا تحوي b او يوجد مجموعة مفتوحة تحوي b ولا تحوي a.

(I) اثبت ان كل فضاء – T_1 هو فضاء – T_0 .

(II) اي من الافرع (أ) – (و) في تمرين 3 في الاعلى هو فضاء – T_0 ؟ (فسر اجابتك)

(III) ضع تبولوجيا τ على المجموعة $X = \{0, 1\}$ بحيث ان (X, τ) يصبح فضاء – T_0 وليس فضاء – T_1 [الفضاء التبولوجي الذي ستحصل عليه يسمى فضاء Sierpinski.]

(IV) اثبت ان كل الفضاءات التبولوجية الموصوفة في تمارين 1.1 # 6 هي فضاء – T_0. (لاحظ ان في تمرين 3 في الاعلى لاحظنا ان كل الفضاءات التبولوجية في تمارين 1.1 # 6 ليست فضاءات – T_1.)

6- لتكن X هي اي مجموعة غير منتهية. **التبولوجيا معدود – مغلق** (The countable – closed topology) تعرف لتكون التبولوجيا التي فيها المجموعات المغلقة هي X وكل المجموعات المعدودة الجزئية من X. اثبت ان هذه العائلة فعلاً تبولوجيا على X.

7- لتكن τ_1 و τ_2 نوعين من التبولوجيا على مجموعة X. اثبت كلاً من العبارات التالية

(I) اذا كانت τ_3 معرفة على الشكل $\tau_3=\tau_1 \cup \tau_2$ فان τ_3 ليست بالضرورة ان تكون تبولوجيا على X. (فسر اجابتك بعرض مثال توضيحي)

(II) اذا كانت τ_4 معرفة على الشكل $\tau_4 = \tau_1 \cap \tau_2$ فان τ_4 تشكل تبولوجيا على X. (التبولوجيا τ_4 تسمى تقاطع التبولوجيا τ_1 والتبولوجيا τ_2)

(III) اذا كان (X, τ_1) و (X, τ_2) فضائين – T_1 فان (X, τ_4) هو كذلك فضاء – T_1.

(IV) اذا كان (X, τ_1) و (X, τ_2) فضائين – T_0 فان (X, τ_4) ليس بالضرورة ان يكون فضاء – T_0. (فسر اجابتك بعرض مثال توضيحي)

(V) اذا كان كل من $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ تمثل تبولوجيا على مجموعة X فان $\tau = \bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$ هي تبولوجيا على X.

(VI) اذا كان لكل $i \in I$, حيث I مجموعة مفهرسة, كل τ_i هي تبولوجيا على مجموعة X فان $\tau = \bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$ هي تبولوجيا على X.

4.1 خلاصة

في هذا الفصل قدمنا التعريف الاصلي للفضاء التبولوجي. كامثلة شاهدنا فضاءات منتهية مختلفة بالاضافة الى فضاءات متقطعة, فضاءات غير متقطعة وفضاءات مع التبولوجيا منتهي – مغلق. ليس اي من هذه الامثلة يملك اهمية خاصة ولكن هذه الاهمية هي بمقدار التطبيقات المرتبطة بهذه الامثلة. من ناحية اخرى, في تمارين 3.3.4 # 8, يلاحظ ان كل فضاء تبولوجي غير منتهي "يحوي" فضاءً تبولوجياً غير منتهياً مع واحد من انواع التبولوجيا الخمسة: التبولوجيا غير المتقطعة, التبولوجيا المتقطعة, التبولوجيا منتهي – مغلق, تبولوجيا القطعة الابتدائية او تبولوجيا القطعة النهائية في تمارين 1.1 # 6. في الفصل التالي سنصف التبولوجيا المهمة جدا وهي التبولوجيا الاقليدية.

في الطريق سنلاقي المفاهيم "مجموعة مفتوحة" و "مجموعة مغلقة" و نحذر من ان هذه التسميات يمكن ان تضلل. المجموعات يمكن ان تكون مفتوحة و مغلقة بنفس الوقت, ليست مفتوحة وليست مغلقة, مفتوحة وليست مغلقة او مغلقة و ليست مفتوحة. من المهم ان نتذكر اننا لا نستطيع ان نثبت ان المجموعة مفتوحة باثبات انها ليست مغلقة.

عدا تعاريف التبولوجيا, الفضاء التبولوجي, المجموعة المفتوحة و المجموعة المغلقة اكثر موضوع مهم تم تغطيته كان كتابة البراهين.

في الملاحظات الافتتاحية لهذا الفصل اشرنا الى اهمية تعلم كتابة البراهين. في مثال 8.1.1, تمهيدية 9.1.1 ومثال 3.3.1 شاهدنا كيف نمعن النظر ونتفكر خلال البرهان. من الضروري ان تطور مهارتك الخاصة بكتابة البرهان. تمارين جيدة لتحقيق هذا الهدف تشمل تمارين 1.1 # 8, تمارين 2.1 # 4,2 وتمارين 3.1 # 4,1 .

بعض الطلاب يتشوش بمفهوم التبولوجيا باعتبار انه "مجموعات مجموعات". لاختبار فهمك حل تمارين 1.1 # 3.

التمارين التي تشتمل مفاهيم فضاء – T_0 و فضاء – T_1 سوف تقدم لاحقا. هذه تعرف بـ خواص الفصل (separation axioms).

في النهاية نشدد على اهمية الصور العكسية. وهذه مقسمة بين مثال 9.3.1 و تمارين 3.1 # 1. تعريفنا للاقتران المتصل سوف يعتمد على الصور العكسية.

الفصل الثاني

التبولوجيا الاقليدية The Euclidean Topology

مقدمة

في الفلم او الرواية هناك عادة بعض الشخصيات الرئيسية التي تدور حولها الحبكة. في قصة التبولوجيا, التبولوجيا الاقليدية على مجموعة الاعداد الحقيقية هي واحدة من الشخصيات الرئيسية. بالفعل هو مثال غني سنعود اليه مرارا.

لتكن $\mathbb{R}$ تشير الى مجموعة الاعداد الحقيقية. في الفصل الاول عرفنا ثلاثة انواع من التبولوجيا التي يمكن وضعها على اي مجموعة: التبولوجيا المتقطعة, التبولوجيا غير المتقطعة و التبولوجيا منتهي – مغلق. لذلك نحن نعرف ثلاثة انواع من التبولوجيا التي يمكن وضعها على المجموعة $\mathbb{R}$. ستة انواع اخرى من التبولوجيا على $\mathbb{R}$ عرفت في تمارين 1.1 # 5 و # 9. في هذا الفصل سنصف نوع من التبولوجيا اكثر اهمية واكثر امتاعا على $\mathbb{R}$ والذي يعرف بالتبولوجيا الاقليدية.

تحليل التبولوجيا الاقليدية يقودنا الى مفهوم "قاعدة التبولوجيا". في دراسة الجبر الخطي نتعلم ان كل فضاء متجه يملك قاعدة وكل متجه هو اتحاد خطي لعناصر من القاعدة. في الواقع, المجموعة هي مفتوحة اذا وفقط اذا كانت على شكل اتحاد لعناصر من القاعدة.

1.2 التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ The Euclidean Topology on $\mathbb{R}$

1.1.2 تعريف. المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$ تسمى مفتوحة في **التبولوجيا الاقليدية على** $\mathbb{R}$ اذا كانت تملك الخاصية التالية:

(*) لكل $x \in S$ يوجد a, b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ حيث $x \in (a, b) \subseteq S$.

ملاحظة. عندما نشير الى الفضاء التبولوجي $\mathbb{R}$ بدون ذكر التبولوجيا, نحن نعني $\mathbb{R}$ مع التبولوجيا الاقليدية.

2.1.2 ملاحظات. (I) "التبولوجيا الاقليدية" τ هي تبولوجيا.

البرهان.

يجب ان نثبت ان τ تحقق الشروط (I), (II) و (III) في تعريف 1.1.1.

معطى لدينا ان المجموعة تنتمي الى τوفقط اذا كانت تحقق الخاصية (*).

اولا, سنبين ان $\tau \in \mathbb{R}$. لتكن $x \in \mathbb{R}$. اذا جعلنا $a = x-1$ و $b = x+1$ فان $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ وهذا يعني ان $\mathbb{R}$ تملك الخاصية (*) ولذلك $\tau \in \mathbb{R}$.

ثانيا, $\tau \in Ø$ لان Ø تملك الخاصية (*) بالاهمال.

الآن لتكن $\{A_j : j \in J\}$, حيث J مجموعة مفهرسة, هي عائلة عناصر τ. يجب ان نبين ان $\bigcup_{j\in J} A_j \in \tau$ اي يجب ان نبين ان $\bigcup_{j\in J} A_j$ يملك الخاصية (*). لتكن $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$. اذا $x \in A_k$ لبعض $k \in J$. لان $A_k \in \tau$, يوجد a و b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ حيث $x \in (a, b) \subseteq A_k$. لان $k \in J$, $A_k \subseteq \bigcup_{j\in J} A_j$ ولذلك x $\in(a, b)\subseteq\bigcup_{j\in J} A_j$. وهذا يعني ان $\bigcup_{j\in J} A_j$ يملك الخاصية (*) ولذلك هو في τ كما هو مطلوب.

اخيرا, لتكن A_1 و A_2 في τ. يجب ان نثبت ان $A_1 \cap A_2 \in \tau$. لذلك اجعل $y \in A_1 \cap A_2$. اذا $y \in A_1$. لان $A_1 \in \tau$ يوجد a و b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ حيث $y \in (a, b) \subseteq A_1$. كذلك $y \in A_2 \in \tau$. اذا يوجد c و d في $\mathbb{R}$ مع $c < d$ حيث $y \in (c, d) \subseteq A_2$. لتكن e هي الاكبر من بين العددين a و c, وكذلك f هي الاصغر من بين العددين b و d. انه من السهل ان نختبر ان $e < y < f$ ولذلك $y \in (e, f)$. لان $(e, f) \subseteq (a, b) \subseteq A_1$ و $(e, f) \subseteq (c, d) \subseteq A_2$ نستنتج ان $y \in (e, f) \subseteq A_1 \cap A_2$. لذلك $A_1 \cap A_2$ تملك الخاصية (*) ولذلك هي في τ. مما يعني ان τ في الواقع هي تبولوجيا على $\mathbb{R}$. □

نكمل الآن لنصف المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة في التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. بشكل خاص, سوف نرى ان كل الفترات المفتوحة هي في الواقع مجموعات مفتوحة في هذه التبولوجيا وكل الفترات المغلقة هي مجموعات مغلقة.

(II) لتكن $r, s \in \mathbb{R}$ حيث $r < s$. في التبولوجيا الاقليدية τ على $\mathbb{R}$, الفترة المفتوحة (r, s) في الواقع تنتمي الى τ ولذلك هي مجموعة مفتوحة.

البرهان.

معطى لدينا الفترة المفتوحة (r, s).

يجب ان نثبت ان (r, s) مفتوحة في التبولوجيا الاقليدية, اي يجب ان نثبت ان (r, s) تملك الخاصية (*) في تعريف 1.1.2.

لذلك يجب ان نبدأ بجعل $x \in (r, s)$. نريد ان نجد a و b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ بحيث ان $x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

لتكن $x \in (r, s)$. اختار $a = r$ و $b = s$. واضح ان

$x \in (a, b) \subseteq (r, s)$.

لذلك (r, s) هي مجموعة مفتوحة في التبولوجيا الاقليدية.

(III) الفترات المفتوحة (r,∞) و $(-\infty, r)$ هي مجموعات مفتوحة في $\mathbb{R}$ لكل عدد حقيقي r.

البرهان.

اولا, يجب ان نبين ان (r,∞) هي مجموعة مفتوحة اي انها تحقق الخاصية (*).

لاثبات ذلك نجعل $x \in (r,\infty)$ ونجد $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث

$x \in (a, b) \subseteq (r,\infty)$.

لتكن $x \in (r,\infty)$. اجعل $a = r$ و $b = x + 1$. اذا $x \in (a, b) \subseteq (r,\infty)$ ولذلك $(r,\infty) \in \tau$.

نفس الاسلوب يبين ان $(-\infty, r)$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. □

(IV) انه من المهم ان تلاحظ انه في حين ان كل فترة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$, فان العكس ليس صحيحا. **ليس كل المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هي فترات**. على سبيل المثال, المجموعة $(1, 3) \cup (5, 6)$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكنها ليست فترة مفتوحة. حتى المجموعة $\bigcup_{n=1}^{\infty}(2n, 2n+1)$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. □

(V) لكل c و d في $\mathbb{R}$ حيث $c < d$, الفترة المغلقة $[c, d]$ ليست مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$.

البرهان.

يجب ان نثبت ان $[c, d]$ لا تملك الخاصية (*).

لعمل ذلك يكفي أن تجد اي عنصر x بحيث انه لا يوجد a و b تحقق الخاصية (*).

واضح ان c و d هما نقطتان مميزتان في الفترة $[c, d]$. لذلك سوف نختار $x = c$ ونثبت انه لا يوجد a و b تحقق الخاصية المطلوبة.

سنستخدم طريقة البرهان التي تسمى **البرهان بالتناقض**. سوف نفرض ان a و b موجودات وتحقق الخاصية المطلوبة ونبين ان هذا يقودنا الى تناقض, اي ظهور شيء غير صحيح. ولذلك يصبح الفرض غير صحيح ! وهذا يعني عدم وجود مثل هذه النقاط a و b. ولذلك $[c, d]$ لا تملك الخاصية (*) وهذا يدل على انها ليست مجموعة مفتوحة.

لاحظ ان $c \in [c, d]$. افرض انه يوجد a و b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ بحيث ان $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. اذا $c \in (a, b)$ مما يعني ان $a < c < b$ ولذلك $a < \frac{c+a}{2} < c < b$. اي ان $\frac{c+a}{2} \in (a, b)$ و $\frac{c+a}{2} \notin [c, d]$ لذلك $(a, b) \not\subseteq [c, d]$ وهذا تناقض. وهذا يعني عدم وجود a و b بحيث ان $c \in (a, b) \subseteq [c, d]$. لذلك $[c, d]$ لا تملك الخاصية (*) مما يدل على ان $[c, d] \notin \tau$. □

(VI) لكل a و b في $\mathbb{R}$ حيث $a < b$ الفترة المغلقة $[a, b]$ هي مجموعة مغلقة في التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

البرهان. حتى نبين انها مغلقة يجب ان نلاحظ فقط ان متممتها $(-\infty, a) \cup (b,\infty)$ هي مجموعة مفتوحة كونها اتحاد مجموعتين مفتوحتين. □

(VII) كل مجموعة احادية {a} هي مغلقة في $\mathbb{R}$.

البرهان. متممة {a} هي اتحاد المجموعتين المفتوحتين $(-\infty, a)$ و (a,∞) لذلك هي مفتوحة. وهذا يعني ان {a} هي مغلقة في $\mathbb{R}$ كما هو مطلوب.

[في المصطلح الموجود في تمارين 3.1# 3 هذه النتيجة تقول ان $\mathbb{R}$ هي فضاء $-T_1$.] □

(VIII) لاحظ انه يمكن ان نضم (VII) في (VI) ببساطة بابدال " $a < b$ " بواسطة " $a \leq b$ ". المجموعة الاحادية {a} هي فقط الحالة المنحطة للفترة المغلقة $[a, b]$. □

(IX) مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي الاتحاد $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(n, n+1)$ للمجموعات المفتوحة الجزئية $(n, n+1)$ من $\mathbb{R}$ ولذلك هي مفتوحة في $\mathbb{R}$. ولذلك τ هي مغلقة في $\mathbb{R}$. □

(X) مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هي ليست مغلقة وليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

البرهان.

سوف نثبت ان $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة مفتوحة ببيان انها لا تملك الخاصية (*).

لعمل ذلك يكفي ان نبين ان $\mathbb{Q}$ لا تحتوي اي فترة (a, b) حيث $a < b$.

افرض ان $\mathbb{Q} \supseteq (a, b)$ حيث a و b في $\mathbb{R}$ و $a < b$. بين اي عددين حقيقيين يوجد عدد غير نسبي. (هل تستطيع اثبات ذلك ؟). لذلك يوجد $c \in (a, b)$ بحيث ان $c \notin \mathbb{Q}$. وهذا يناقض $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$. ولهذا $\mathbb{Q}$ لا تحوي اي فترة (a, b), وهذا يعني ان $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة مفتوحة.

لاثبات ان $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة مغلقة يكفي ان نبين ان $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ليست مجموعة مفتوحة. باستخدام حقيقة ان بين كل عددين حقيقيين يوجد عدد نسبي نرى ان $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ لا تحوي اي فترة (a, b) حيث $a < b$. لذلك $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ وهذا يعني ان $\mathbb{Q}$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$. □

(XI) في الفصل الثالث سوف نثبت ان المجموعات المغلقة المفتوحة الوحيدة الجزئية من $\mathbb{R}$ هي المجموعات البديهية اي $\mathbb{R}$ و $\emptyset$. □

تمارين 1.2

1- اثبت انه اذا كانت $a, b \in \mathbb{R}$ بحيث ان $a < b$ فان $(a, b]$ و $[a, b)$ مجموعات جزئية ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$. وبين كذلك انها ليست مغلقة في $\mathbb{R}$.

2- اثبت ان المجموعات $[a,\infty)$ و $(-\infty, a]$ هي مجموعات جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$.

3- بين, بمثال, ان اتحاد عدد غير منتهي من المجموعات الجزئية المغلقة في $\mathbb{R}$ ليس بالضرورة ان يكون مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$.

4- اثبت كلا من العبارات التالية

مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ هي مجموعة جزئية ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

مجموعة الاعداد الاولية $\mathbb{S}$ هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$ ولكنها مجموعة جزئية ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{P}$ هي مجموعة جزئية ليست مغلقة و ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

5- اذا كانت F مجموعة جزئية غير خالية ومنتهية في $\mathbb{R}$, اثبت ان F مغلقة في $\mathbb{R}$ ولكنها ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

6- اذا كانت F مجموعة جزئية غير خالية ومعدودة في $\mathbb{R}$, اثبت ان F مجموعة ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$.

7- (I) لتكن $S = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$. اثبت ان S مغلقة في التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

(II) هل المجموعة $T = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots, 1/n, \ldots\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$ ؟

(III) هل المجموعة $\{\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, n\sqrt{2}, \ldots\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$ ؟

8- (I) ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا. المجموعة الجزئية S من X تسمى مجموعة - F_σ اذا كانت اتحاد عدد معدود من المجموعات المغلقة. اثبت ان كل الفترات المفتوحة (a, b) وكل الفترات المغلقة $[a, b]$ هي مجموعات - F_σ في $\mathbb{R}$.

(II) ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا. المجموعة الجزئية T من X تسمى مجموعة - G_δ اذا كانت تقاطع عدد معدود من المجموعات المفتوحة. اثبت ان كل الفترات المفتوحة (a, b) وكل الفترات المغلقة $[a, b]$ هي مجموعات - G_δ في $\mathbb{R}$.

(III) اثبت ان مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هي مجموعة - F_σ في $\mathbb{R}$ (في تمارين 5.6 # 3 نثبت ان $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة - G_δ في $\mathbb{R}$.

(V) اثبت ان متممة اي مجموعة - F_σ هي مجموعة - G_δ ومتممة اي مجموعة - G_δ هي مجموعة - F_σ.

2.2 قاعدة تبولوجيا Basis for a topology

ملاحظات 2.1.2 تسمح لنا بان نصف التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ باسلوب اكثر سهولة. لعمل ذلك, نقدم مفهوم القاعدة للتبولوجيا.

1.2.2 تمهيدية. المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$ هي مفتوحة اذا وفقط اذا كانت اتحادا لفترات مفتوحة.

البرهان.

مطلوب منا ان نثبت ان S هي مفتوحة اذا وفقط اذا كانت اتحادا لفترات مفتوحة, اي يجب ان نبين

اذا كانت S اتحادا لفترات مفتوحة فانها مجموعة مفتوحة وكذلك

اذا كانت S مجموعة مفتوحة فانها اتحاد لفترات مفتوحة.

افرض ان S هي اتحادا لفترات مفتوحة, اي ان هناك فترات مفتوحة (a_j , b_j), حيث j تنتمي لمجموعة مفهرسة J بحيث $S = \bigcup_{j\in J}(a_j ,b_j)$. باستخدام ملاحظات 2.1.2(II) كل فترة مفتوحة (a_j , b_j) هي مجموعة مفتوحة. لذلك S هي اتحاد لمجموعات مفتوحة ولذلك S هي مجموعة مفتوحة.

بالمقابل, افرض ان S مفتوحة في $\mathbb{R}$. اذا لكل $x \in S$ يوجد فترة $I_x = (a, b)$ بحيث ان $x \in I_x \subseteq S$. الآن ندعي ان $S = \bigcup_{x\in S} I_x$.

مطلوب منا ان نثبت ان المجموعتين S و $\bigcup_{x\in S} I_x$ متساويتين.

سيتم اثبات انهما متساويتان باثبات ان

اذا كان $y \in S$ فان $y \in \bigcup_{x\in S} I_x$ وكذلك

اذا كان $z \in \bigcup_{x\in S} I_x$ فان $z \in S$.

[لاحظ ان (I) مكافئة للعبارة $S \subseteq \bigcup_{x \in S} I_x$ في حين ان (II) مكافئة للعبارة $\bigcup_{x \in S} I_x \subseteq S$]

اولا اجعل $y \in S$. اذا $y \in I_y$. لذلك $y \in \bigcup_{x \in S} I_x$ كما هو مطلوب.

ثانيا اجعل $z \in \bigcup_{x \in S} I_x$. اذا $z \in I_t$ لبعض $t \in S$. بما ان $I_x \subseteq S$ نلاحظ ان $I_t \subseteq S$ ولذلك $z \in S$. و هذا يعني ان $S = \bigcup_{x \in S} I_x$ مما يدل على ان S هي اتحاد فترات مفتوحة كما هو مطلوب. □

التمهيدية السابقة تخبرنا بانه حتى نصف التبولوجيا على $\mathbb{R}$ يكفي ان نقول ان كل الفترات (a, b) هي مجموعات مفتوحة. كل المجموعات المفتوحة الاخرى هي اتحاد لهذه المجموعات المفتوحة. هذا يقودنا للتعريف التالي

2.2.2 تعريف. ليكن (X,τ) فضاء تبولوجيا. العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X تسمى قاعدة (basis) للتبولوجيا τ اذا كان كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$.

اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ على X فان المجموعة الجزئية U من X تقع في τ اذا وفقط اذا كانت اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. لذلك $\mathfrak{B}$ " تولد " التبولوجيا τ على الشكل التالي: اذا ابلغنا بالمجموعات التي تشكل عناصر $\mathfrak{B}$ فاننا نستطيع ان نحدد عناصر τ - هم فقط كل المجموعات التي هي اتحادات لعناصر من $\mathfrak{B}$.

3.2.2 مثال. لتكن $\mathfrak{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. فان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$, باستخدام تمهيدية 1.2.2. □

4.2.2 مثال. ليكن (X,τ) فضاءً متقطعاً و $\mathfrak{B}$ عائلة كل المجموعات الجزئية الاحادية في X, اي ان, $\mathfrak{B} = \{\{x\} : x \in X\}$. اذا, باستخدام تمهيدية 9.1.1, $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ. □

5.2.2 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

و $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$

فان $\mathfrak{B} = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ هي قاعدة لـ τ_1 لان $\mathfrak{B} \subseteq \tau_1$ وكل عنصر في τ_1 يمكن كتابته على شكل اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. (لاحظ ان $\emptyset$ هي اتحاد خالي لعناصر من $\mathfrak{B}$).

لاحظ ان τ_1 نفسها هي قاعدة لـ τ_1.

6.2.2 ملاحظة. لاحظ انه اذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً فان $\mathfrak{B} = \tau$ هي قاعدة للتبولوجيا τ. لذلك, على سبيل المثال, مجموعة كل المجموعات الجزئية من X هي قاعدة للتبولوجيا المتقطعة على X.

لذلك نشاهد ان **هناك العديد من القواعد المختلفة لنفس التبولوجيا**. في الواقع **اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ على المجموعة X و $\mathfrak{B}_1$ هي عائلة من المجموعات الجزئية من X بحيث ان $\tau \supseteq \mathfrak{B}_1 \supseteq \mathfrak{B}$ فان $\mathfrak{B}_1$ هي كذلك قاعدة للتبولوجيا τ** [اثبت ذلك.] □

كما اشير سابقا فان مفهوم " قاعدة التبولوجيا " يمكننا من تحديد التبولوجيا. على اية حال المثال التالي يبين انه يجب ان نكون حذرين.

7.2.2 مثال. لتكن $X = \{a, b, c\}$ و $\mathfrak{B} = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$. فان $\mathfrak{B}$ ليست قاعدة لاي تبولوجيا على X. لنشاهد ذلك, افرض ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ. اذا τ مكونة من كل اتحادات المجموعات في $\mathfrak{B}$, اي ان

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$

(مرة اخرى نستخدم حقيقة ان $\emptyset$ هي اتحاد خالي لعناصر من $\mathfrak{B}$ ولذلك $\emptyset \in \tau$.)

على اية حال, τ ليست تبولوجيا لان المجموعة $\{b, c\} \cap \{a, b\} = \{b\}$ ليست في τ ولذلك τ لا تملك الخاصية (III) في تعريف 1.1.1. وهذا تناقض, ولذلك فان فرضنا ليس صحيحا. وهذا يعني ان $\mathfrak{B}$ ليست قاعدة لاي تبولوجيا على X. □

هذا يقودنا ان نسال: اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي عائلة مجموعات جزئية من X, تحت اي شروط $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا ؟ هذا السؤال يجاب عليه باستخدام تمهيدية 8.2.2.

8.2.2 تمهيدية. لتكن X اي مجموعة غير خالية و $\mathfrak{B}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X. فان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على X اذا وفقط اذا كانت $\mathfrak{B}$ تملك الخواص التالية:

أ) $X = \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B$ وكذلك

ب) لاي $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, المجموعة $B_1 \cap B_2$ هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$.

البرهان. اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي قاعدة التبولوجيا τ فان τ يجب ان تملك الخواص (I), (II) و (III) في تعريف 1.1.1. بشكل خاص X يجب ان تكون مجموعة مفتوحة وتقاطع اي مجموعتين مفتوحتين هي مجموعة مفتوحة. بما ان المجموعات المفتوحة هي فقط اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$, هذا يعطي ان (أ) و (ب) اعلاه متحققة.

بالمقابل, افرض ان $\mathfrak{B}$ تملك الخواص (أ) و (ب) ولتكن τ هي عائلة كل المجموعات الجزئية من X والتي هي اتحادات لعناصر من $\mathfrak{B}$. يجب ان نثبت ان τ هي تبولوجيا على X. (اذا كان كذلك فان $\mathfrak{B}$ بالطبع هي قاعدة لهذه التبولوجيا τ ولذلك التمهيدية صحيحة.)

باستخدام (أ), $X = \bigcup_{B\in\mathfrak{B}} B$ ولذلك $X \in \tau$. لاحظ ان $\emptyset$ هي اتحاد خالي لعناصر من $\mathfrak{B}$ ولذلك $\emptyset \in \tau$. وهذا يعني ان τ تحقق الخاصية (I) في تعريف 1.1.1.

الآن لتكن $\{T_j\}$ عائلة عناصر τ. اذا كل T_j هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. ولذلك فان اتحاد كل المجموعات T_j هو كذلك اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$ اي انه في τ. وهذا يعني ان τ تحقق الشرط (II) في تعريف 1.1.1.

اخيرا لتكن C و D في τ. نريد ان نثبت ان $C \cap D \in \tau$. لكن $C = \bigcup_{k\in K} B_k$ حيث K هي مجموعة مفهرسة و $B_k \in \mathfrak{B}$. كذلك $D = \bigcup_{j\in J} B_j$, حيث J مجموعة مفهرسة و $B_j \in \mathfrak{B}$. لذلك

$$C \cap D = \left(\bigcup_{k\in K} B_k\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{k\in K,\, j\in J} (B_j \cap B_k)$$

يجب ان نثبت ان التعبيرين للمجموعة $C \cap D$ هم في الحقيقة متساويين !

في الحالة المنتهية هذا يتضمن عبارات مثل

$(B_1 \cup B_2) \cap (B_3 \cup B_4) = (B_1 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_4) \cup (B_2 \cap B_3) \cup (B_2 \cap B_4)$.

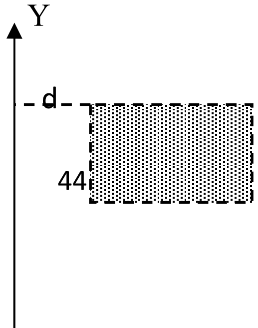
باستخدام فرضنا (ب), كل $B_k \cap B_j$ هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$ ولذلك $C \cap D$ هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. ولهذا $C \cap D \in \tau$. اذا τ تملك الخاصية (III) في تعريف 1.1.1. لذلك τ في الحقيقة هي تبولوجيا و $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لهذه التبولوجيا كما هو مطلوب.

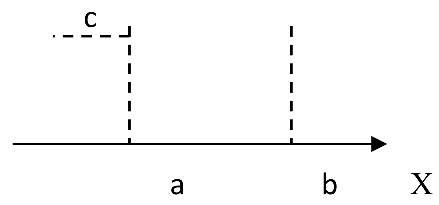
التمهيدية 8.2.2 نتيجة مفيدة جدا. انها تمكننا ان نعرف التبولوجيا ببساطة بكتابة القاعدة. هذا عادة اسهل من محاولة وصف جميع المجموعات المفتوحة.

الآن سوف نستخدم هذه التمهيدية لتعريف تبولوجيا على المستوى. هذه التبولوجيا تعرف بـ "التبولوجيا الاقليدية".

9.2.2 مثال. لتكن $\mathfrak{B}$ هي عائلة كل " المستطيلات المفتوحة "

$\{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, a < x < b, c < y < d\}$ في الفضاء والتي يكون فيها كل جانب موازي لمحور X او محور Y.





في هذه الحالة $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على المستوى. هذه التبولوجيا تسمى التبولوجيا الاقليدية.

عندما نستخدم الرمز $\mathbb{R}^2$ نحن نعني المستوى, وعندما نشير الى $\mathbb{R}^2$ كفضاء تبولوجي بدون ان نحدد ما هي التبولوجيا نحن نعني المستوى مع التبولوجيا الاقليدية.

حتى نرى ان $\mathfrak{B}$ فعلا هي قاعدة لتبولوجيا, لاحظ ان (I) المستوى هو اتحاد لكل المستطيلات المفتوحة, وكذلك (II) تقاطع اي مستطيلين هو مستطيل. [نعني بمستطيل هو الذي اضلاعه موازية للمحاور.]. لذلك الشروط في تمهيدية 8.2.2 متحققة ولذلك $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا.

10.2.2 ملاحظة. بتعميم مثال 9.2.2 نشاهد كيف يمكن ان نضع تبولوجيا على

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n\}$ لكل عدد صحيح $n > 2$.

نجعل $\mathfrak{B}$ هي عائلة كل المجموعات الجزئية $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{ni}) \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ من $\mathbb{R}^n$ حيث الاضلاع موازية للمحاور. هذه العائلة $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لـ **التبولوجيا الاقليدية** على $\mathbb{R}^n$. □

تمارين 2.2

1- في هذا التمرين سوف نثبت ان القرص $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ هو مجموعة جزئية مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ وبعد ذلك ان كل قرص مفتوح في المستوى هو مجموعة مفتوحة.

لتكن (a, b) هي اي نقطة في القرص $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. اجعل $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. ليكن $R_{(a,b)}$ هو المستطيل المفتوح الذي رؤوسه على النقاط $(a \pm \frac{1-r}{8}, b \pm \frac{1-r}{8})$ اثبت ان $R_{(a,b)} \subseteq D$.

باستخدام (I) اثبت ان $D = \bigcup_{(a,b)\in D} R_{(a,b)}$

استنتج من (II) ان D هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^2$.

اثبت ان كل قرص $\{(x, y) : (x - a)^2 + (y - b)^2 < c^2, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ هو مفتوحة في $\mathbb{R}^2$.

2- في هذا التمرين سوف نثبت ان عائلة كل الاقراص المفتوحة في $\mathbb{R}^2$ هي قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}^2$. [فيما بعد سوف نرى ان هذه هي التبولوجيا الاقليدية.]

لتكن D_1 و D_2 اي اقراص مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ حيث $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. اذا كانت (a, b) اي نقطة في $D_1 \cap D_2$ اثبت انه يوجد قرص مفتوح $D_{(a, b)}$ مركزه (a, b) بحيث ان $D_{(a, b)} \subseteq D_1 \cap D_2$.

[مساعدة. ارسم صورة واستخدم طريقة مشابهة للمستخدمة في تمرين 1 (I).]

اثبت ان $D_1 \cap D_2 = \bigcup_{(a,b) \in D_1 \cap D_2} D_{(a,b)}$.

باستخدام (II) تمهيدية 8.2.2, اثبت ان عائلة كل الاقراص المفتوحة في $\mathbb{R}^2$ هي قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}^2$.

3- لتكن $\mathfrak{B}$ عائلة كل الفترات المفتوحة (a, b) في $\mathbb{R}$ حيث $a < b$ و a و b اعداد نسبية. اثبت ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ [قارن هذا مع تمهيدية 1.2.2 و مثال 3.2.2 حيث a و b كانت ليس بالضرورة اعداد نسبية.]

[مساعدة. لا تستخدم تمهيدية 8.2.2 لان ذلك سوف يثبت ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا ليس بالضرورة للتبولوجيا الاقليدية.]

4- يقال ان الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق **مسلمة العد الثانية** (The second axiom of countability) اذا وجد قاعدة للتبولوجيا τ بحيث ان $\mathfrak{B}$ مكونة من فقط عدد معدود من المجموعات.

باستخدام تمرين 3 اعلاه اثبت ان $\mathbb{R}$ تحقق مسلمة العد الثانية.

اثبت ان التبولوجيا المتقطعة على مجموعة غير معدودة لا تحقق مسلمة العد الثانية.

[مساعدة. لا يكفي ان تثبت ان قاعدة معينة هي غير معدودة. يجب ان تبين ان كل قاعدة لهذه التبولوجيا هي غير معدودة.]

اثبت ان $\mathbb{R}^n$ يحقق مسلمة العد الثانية لكل عدد صحيح موجب n.

ليكن (X,τ) هو مجموعة كل الاعداد الصحيحة مع التبولوجيا منتهي – مغلق. هل الفضاء (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية.

5- اثبت العبارات التالية

(I) لتكن m و c اعداد حقيقية حيث $m \neq 0$. فان الخط $L = \{(x, y) : y = mx + c\}$ هو مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

(II) لتكن S هي دائرة الوحدة المعطاة على الشكل $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. فان S^1 هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

(III) لتكن S^n هي n-سطح كرة الوحدة المعطاة على الشكل

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

فان S^n هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^{n+1}$.

(IV) لتكن B^n n-كرة الوحدة المغلقة المعطاة على الشكل

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

فان B^n هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^n$.

(V) المنحنى $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: xy = 1\}$ هو مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}^2$.

6- لتكن $\mathfrak{B}_1$ هي قاعدة لتبولوجيا τ_1 على مجموعة X و $\mathfrak{B}_2$ قاعدة لتبولوجيا τ_2 على مجموعة Y. المجموعة $X \times Y$ مكونة من كل الازواج المرتبة (x, y) حيث $x \in X$ و $y \in Y$. لتكن $\mathfrak{B}$ هي عائلة المجموعات الجزئية من $X \times Y$ المكونة من كل المجموعات على الشكل $B_1 \times B_2$ حيث $B_1 \in \mathfrak{B}_1$ و $B_2 \in \mathfrak{B}_2$. اثبت ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على $X \times Y$. التبولوجيا المعرفة بهذا الشكل تسمى **تبولوجيا الضرب** على $X \times Y$.

[مساعدة. لاحظ مثال 9.2.2.]

7- باستخدام تمرين 3 اعلاه و تمارين 1.2 # 8, اثبت ان كل مجموعة جزئية مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي مجموعة - F_σ و مجموعة - G_δ.

3.2 القاعدة لتبولوجيا معطاة Basis for a Given Topology

تمهيدية 8.2.2 تخبرنا تحت اي شروط تكون العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية من X هي قاعدة لتبولوجيا على X. على كل حال في بعض الاوقات نعطى تبولوجيا τ على X ونريد ان نعرف فيما اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لهذه التبولوجيا المحددة τ. لاثبات ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ يجب ببساطة ان نطبق تعريف 2.2.2 ونبين ان كل عنصر في τ هو اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. على اية حال, تمهيدية 2.3.2 تزودنا بطريقة بديلة.

لكن في البداية سنقدم مثالا يرينا ان هناك فرقا بين قولنا ان العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية من X هي قاعدة لتبولوجيا وقولنا انها قاعدة لتبولوجيا معطاة.

1.3.2 مثال. لتكن $\mathfrak{B}$ هي عائلة كل الفترات نصف المفتوحة التي على الشكل (a, b], حيث $a < b$ $(a, b] = \{x : x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$. فإن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}$, لأن $\mathbb{R}$ هي اتحاد كل عناصر $\mathfrak{B}$ وتقاطع أي فترتين نصف مفتوحتين هي فترة نصف مفتوحة.

على اية حال, التبولوجيا τ_1 التي تملك $\mathfrak{B}$ كقاعدة لها هي ليست التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. يمكن ان نشاهد ذلك بملاحظة ان $(a, b]$ مجموعة ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ مع التبولوجيا الاقليدية. (انظر تمارين 1.2 # 1.) لذلك $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا ولكنها ليست قاعدةللتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. □

2.3.2 تمهيدية. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X هي قاعدة للتبولوجيا τ اذا وفقط اذا كان لكل نقطة x تنتمي لاي مجموعة مفتوحة U, يوجد $B \in \mathfrak{B}$ بحيث $x \in B \subseteq U$.

البرهان.

مطلوب منا ان نثبت ان

(I) اذا كانت $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ وان $x \in U \in \tau$ فإنه يوجد $B \in \mathfrak{B}$ بحيث $x \in B \subseteq U$ وكذلك

(II) اذا كان لكل $U \in \tau$ ولكل $x \in U$ يوجد $B \in \mathfrak{B}$ بحيث $x \in B \subseteq U$ فإن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ.

افرض ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ وان $x \in U \in \tau$. لأن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لـ τ فإن المجموعة المفتوحة U هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$ اي ان $U = \bigcup_{j\in J} B_j$ حيث $B_j \in \mathfrak{B}$ لكل j في مجموعة مفهرسة J. ولكن $x \in U$ يعطينا ان $x \in B_j$ لبعض $j \in J$. لذلك $x \in B_j \subseteq U$ كما هو مطلوب.

بالمقابل افرض ان لكل $U \in \tau$ ولكل $x \in U$ يوجد $B \in \mathfrak{B}$ بحيث $x \in B \subseteq U$. يجب ان نثبت ان كل مجموعة مفتوحة هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$. لذلك لتكن V هي اي مجموعة مفتوحة. اذاً لكل $x \in V$, يوجد $B_x \in \mathfrak{B}$ بحيث ان $x \in B_x \subseteq V$. واضح ان $V = \bigcup_{x\in V} B_x$ (اختبر ذلك !) لذلك V هي اتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$.

3.3.2 تمهيدية. لتكن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا τ على مجموعة X. المجموعة الجزئية U من X هي مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل $x \in U$ يوجد يوجد $B \in \mathfrak{B}$ بحيث ان $x \in B \subseteq U$.

البرهان. لتكن U هي اي مجموعة جزئية من X. افرض ان لكل $x \in U$ يوجد $\mathfrak{B} \in B_x$ بحيث ان $x \in B_x \subseteq U$. واضح ان $U = \bigcup_{x\in U} B_x$. لذلك U هي اتحاد لمجموعات مفتوحة وهذا يعني انها مفتوحة كما هو مطلوب. التجاه العكسي يتبع من تمهيدية 2.3.2. □

لاحظ ان خاصية القاعدة الموصوفة في تمهيدية 3.3.2 هي بالضبط الذي استخدمناه في تعريف التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. قلنا ان المجموعة الجزئية U من $\mathbb{R}$ هي مفتوحة اذا وفقط اذا كان لكل $x \in U$ يوجد a و b في $\mathbb{R}$ مع $a < b$ حيث $x \in (a, b) \subseteq U$.

تحذير. تأكد من انك فهمت الفرق بين تمهيدية 8.2.2 وتمهيدية 2.3.2. تمهيدية 8.2.2 تعطي الشروط حتى تكون العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية من X لتكون قاعدة لتبولوجيا على X. في حين ان تمهيدية 2.3.2 تعطي الشروط حتى تكون العائلة $\mathfrak{B}$ من المجموعات الجزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ) قاعدة لتبولوجيا معطاة على X.

شاهدنا ان التبولوجيا ممكن ان تملك عدة قواعد مختلفة. التمهيدية التالية تخبرنا متى قاعدتين $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ على نفس المجموعة X تنتجان نفس التبولوجيا

4.3.2 تمهيدية. لتكن $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ قاعدتين للتبولوجيا τ_1 و τ_2, على التوالي, على المجموعة غير الخالية X. فإن $\tau_1 = \tau_2$ اذا وفقط اذا كان

(I) لكل $B \in \mathfrak{B}_1$ ولكل $x \in B$ يوجد $B' \in \mathfrak{B}_2$ بحيث ان $x \in B' \subseteq B$ وكذلك

(II) لكل $B \in \mathfrak{B}_2$ ولكل $x \in B$ يوجد $B' \in \mathfrak{B}_1$ بحيث ان $x \in B' \subseteq B$.

البرهان.

مطلوب منا ان نبين ان $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ هي قواعد لنفس التبولوجيا اذا وفقط اذا كانت (I) و (II) صحيحتان.
أولا نفرض انهما قاعدتان لنفس التبولوجيا اي أن $\tau_1 = \tau_2$ ونبين ان الشرطين (I) و (II) متحققان.
وبعد ذلك نفرض ان (I) و (II) متحققان ونبين ان $\tau_1 = \tau_2$.

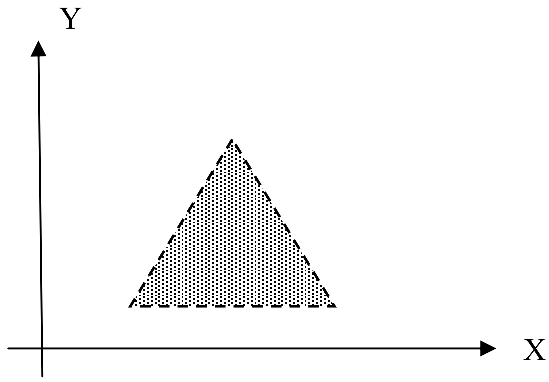
اولا, افرض أن $\tau_1 = \tau_2$. نلاحظ ان (I) و (II) هي نتائج مباشرة لتمهيدية 2.3.2.

بالمقابل, افرض ان $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ تحققان الشروط (I) و (II). باستخدام تمهيدية 2.3.2, (I) تعطي ان كل $B \in \mathfrak{B}_1$ مفتوحة في (X,τ_2) أي ان $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_2$. لأن كل عنصر في τ_1 هو اتحاد لعناصر من τ_2 هذا يدل على ان $\tau_1 \subseteq \tau_2$. بنفس الاسلوب (II) تعطي ان $\tau_2 \subseteq \tau_1$. لذلك $\tau_1 = \tau_2$ كما هو مطلوب.

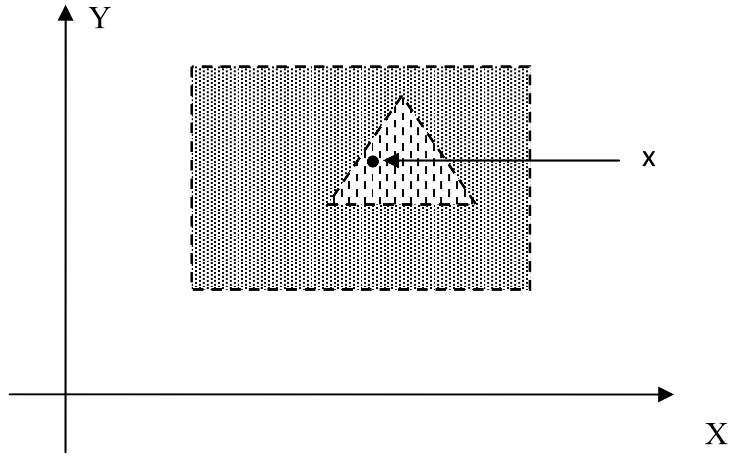
5.3.2 مثال. اثبت ان المجموعة $\mathfrak{B}$ المكونة من كل " المثلثات متساوية الأضلاع المفتوحة " ذات القواعد الموازية لمحور X هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^2$.
(نعني بالمثلث المفتوح ان الحدود عي داخلة)

برهان بخطوط عريضة. (نعطي هنا فقط برهان تصويري. يترك لك كتابة برهان تفصيلي)

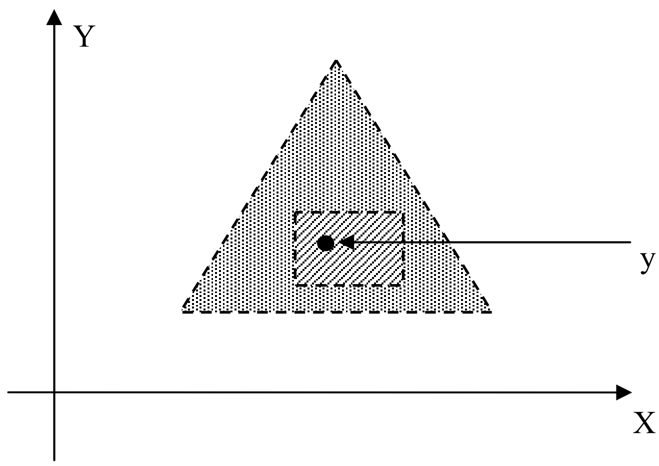
مطلوب منا ان نبين ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية.
سوف نطبق تمهيدية 4.3.2, ولكن في البداية نحتاج ان نبين ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على $\mathbb{R}^2$.
لعمل ذلك نبين ان $\mathfrak{B}$ تحقق شروط تمهيدية 8.2.2.



أول شيء نلاحظه هو ان $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا لأنها تحقق شروط تمهيدية 8.2.2. (لمشاهدة أن $\mathfrak{B}$ تحقق التمهيدية 8.2.2, لاحظ ان $\mathbb{R}^2$ تساوي اتحاد كل المثلثات متساوية الاضلاع المفتوحة التي قواعدها توازي محور X, وأن تقاطع أي مثلثين من هذا النوع هو مثلث من نفس النوع.)
بعد ذلك سنبين ان الشروط (I) و (II) في تمهيدية 4.3.2 متحققة.
في البداية نثبت الشرط (I). لتكن $\mathbb{R}$ هي مستطيل مفتوح جوانبه موازية للمحاور ولتكن x هي اي نقطة في $\mathbb{R}$.
يجب ان نبين ان هناك مثلث متساوي الأضلاع مفتوح T قاعدته موازية لمحور X بحيث ان $x \in T \subseteq \mathbb{R}$.
تصويرياً هذا سهل ان نراه.



أخيراً نثبت الشرط (II) في تمهيدية 4.3.2. لتكن T' هي مثلث متساوي الأضلاع مفتوح قاعدته موازية لمحور X ولتكن y هي اي نقطة في T'. فإنه يوجد مستطيل مفتوح R' بحيث أن $y \in R' \subseteq T'$. تصويرياً هذا أيضاً سهل المشاهدة.



لذلك الشروط في تمهيدية 4.3.2 متحققة. وهذا يعني أن $\mathfrak{B}$ في الحقيقة هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^2$. □

في مثال 9.2.2 عرفنا قاعدة للتبولوجيا الاقليدية لتكون عائلة كل " المستطيلات المفتوحة " (مع الاضلاع موازية للمحاور.). مثال 5.3.2 يبين ان " المستطيلات المفتوحة " يمكن استبدالها بـ " المثلثات متساوية الاضلاع المفتوحة " (مع القاعدة موازية لمحور X) بدون تبديل التبولوجيا. في تمارين 3.2 #1 نرى ان الشروط أعلاه داخل الأقواس يمكن الغاؤها بدون تغيير التبولوجيا. كذلك " المستطيلات المفتوحة " يمكن استبدالها بـ " الأقراص المفتوحة " [1]

---

[1] في الحقيقة, معظم الكتب تصف التبولوجيا الاقليدية على R^2 بواسطة الأقراص المفتوحة.

تمارين 3.2

1- حدد فيما اذا كانت كل من العائلات التالية تمثل قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^2$ أم لا

(I) عائلة كل المربعات " المفتوحة " التي اضلاعها موازية للمحاور.

(II) عائلة كل الأقراص " المفتوحة ".

(III) عائلة كل المربعات " المفتوحة ".

(IV) عائلة كل المستطيلات " المفتوحة ".

(V) عائلة كل المثلثات " المفتوحة ".

2- (I) لتكن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا على مجموعة غير خالية X. اذا كانت $\mathfrak{B}_1$ هي عائلة مجموعات جزئية من X بحيث ان $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_1 \subseteq \tau$, أثبت ان $\mathfrak{B}_1$ هي كذلك قاعدة للتبولوجيا τ.

(III) استنتج من (I) انه يوجد عدد غير معدود من القواعد المختلفة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

3- لتكن $\mathfrak{B} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. كما شوهد في مثال 1.3.2, $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا τ على $\mathbb{R}$ و τ ليست التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. على الرغم من ذلك, بين ان كل فترة (a, b) هي مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau)$.

4*- لتكن $C[0, 1]$ هي مجموعة كل اقترانات القيمة الحقيقية المتصلة على $[0, 1]$.

(I) أثبت ان العائلة M, حيث

$$M= \{M(f, \varepsilon) : f \in C[0, 1], \text{ و } \varepsilon \text{ عددحقيقي موجب}\}$$

و

$$M(f, \varepsilon) = \{ g : g \in C[0, 1], \int_0^1 |f-g| < \varepsilon \}$$

هي قاعدة لتبولوجيا τ_1 على $C[0, 1]$.

(II) اثبت ان العائلة $\mathcal{U}$ حيث

$$\mathcal{U} = \{U (f, \varepsilon) : f \in C[0, 1], \text{ و } \varepsilon \text{ عددحقيقي موجب}\}$$

و

$$U (f, \varepsilon) = \{ g : g \in C[0, 1], \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon \}$$

هي قاعدة لتبولوجيا τ_2 على $C[0, 1]$.

(III) اثبت ان $\tau_1 \neq \tau_2$.

5- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. العائلة غير الخالية $\mathcal{S}$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X تسمى قاعدة جزئية للتبولوجيا τ اذا كانت عائلة كل التقاطعات المنتهية لعناصر $\mathcal{S}$ تشكل قاعدة للتبولوجيا τ.

(I) اثبت ان عائلة كل الفترات المفتوحة التي على الشكل (a,∞) او $(-\infty, b)$ هي قاعدة جزئية للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

(II) اثبت ان $\mathcal{S} = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ هي قاعدة جزئية للتبولوجيا τ_1 في مثال 2.1.1.

6- لتكن $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية لتبولوجيا τ على المجموعة $\mathbb{R}$ (انظر تمرين 5 أعلاه.) اذاكانت كل الفترات المغلقة $[a, b]$ حيث $a < b$ هي في $\mathcal{S}$, أثبت أن τ هي التبولوجيا المتقطعة.

7- لتكن X مجموعة غير خالية و $\mathcal{S}$ عائلة كل المجموعات $X \setminus \{x\}$ حيث $x \in X$. أثبت أن $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية للتبولوجيا منتهي – مغلق على X.

8- لتكن X أي مجموعة غير منتهية و τ التبولوجيا المتقطعة على X. أوجد قاعدة جزئية $\mathcal{S}$ للتبولوجيا τ بحيث أن $\mathcal{S}$ لا تحوي أي مجموعة احادية.

9- لتكن $\mathcal{S}$ عائلة كل الخطوط المستقيمة في المستوى $\mathbb{R}^2$. اذا كانت $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية للتبولوجيا τ على المجموعة $\mathbb{R}^2$ ما هي التبولوجيا ؟

10- لتكن $\mathcal{S}$ هي عائلة كل الخطوط المستقيمة في المستوى التي توازي محور X. اذا كانت $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية لتبولوجيا τ على $\mathbb{R}^2$, صف المجموعات المفتوحة في $(\mathbb{R}^2,\tau)$.

11- لتكن $\mathcal{S}$ عائلة كل الدوائر في المستوى. اذا كانت $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية لتبولوجيا τ على $\mathbb{R}^2$, صف المجموعات المفتوحة في $(\mathbb{R}^2,\tau)$.

12- لتكن $\mathcal{S}$ عائلة كل الدوائر في المستوى التي مركزها على محور X. اذا كانت $\mathcal{S}$ هي قاعدة جزئية لتبولوجيا τ على $\mathbb{R}^2$, صف المجموعات المفتوحة في $(\mathbb{R}^2,\tau)$.

4.2. خلاصة

في هذا الفصل عرفنا فضاءً تبولوجياً مهماً جداً - $\mathbb{R}$, مجموعة الأعداد الحقيقية مع التبولوجيا الاقليدية وأمضينا بعض الوقت بتحليله. لاحظنا, في هذه التبولوجيا, أن الفترات المفتوحة هي بالحقيقة مجموعات مفتوحة (والفترات المغلقة هي مجموعات مغلقة). على كل حال, ليس كل المجموعات المفتوحة هي فترات مفتوحة. على الرغم من ذلك, كل مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي اتحاد فترات مفتوحة. هذا قادنا الى تقديم مفهوم " قاعدة التبولوجيا " ولننشيء حقيقة أن عائلة كل الفترات المفتوحة هي قاعدة للتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

في مقدمة الفصل الأول وصفنا البرهان الرياضي بأنه حجة لا لبس فيها وأشرنا الى أهمية كتابة البراهين. في هذا الفصل قدمنا للبرهان بالتناقض في ملاحظات 21.2 (V) مع مثال آخر في مثال 7.2.2. اثبات شروط " الضروري والكافي ", أي شروط " اذا وفقط اذا كان ", وضح في تمهيدية 1.2.2 مع أمثلة اضافية في تمهيديات 8.2.2, 2.3.2, 3.3.2 و 4.3.2.

القواعد للتبولوجيا موضوع هام بحكم حقه الشخصي. شاهدنا, على سبيل المثال, أن عائلة كل المجموعات الاحادية هي قاعدة للتبولوجيا المتقطعة. تمهيدية 8.2.2 تعطي الشروط الضرورية والكافية لعائلة من المجموعات الجزئية من X حتى تكون قاعدة لتبولوجيا على X. هذا مغاير لتمهيدية 2.3.2 التي تعطي الشروط الضرورية والكافية لعائلة من المجموعات الجزئية من X لتكون قاعدة لتبولوجيا معطاة على X. لوحظ أن عائلتين مختلفتين $\mathfrak{B}_1$ و $\mathfrak{B}_2$ يمكن أن تكونا قواعد لنفس التبولوجيا. الشروط الضرورية والكافية لذلك اعطيت في تمهيدية 4.3.2.

عرفنا التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^n$, حبث n أي عدد صحيح موجب. شاهدنا أن عائلة كل الاقراص المفتوحة هي قاعدة لـ $\mathbb{R}^2$ كما هو الحال بالنسبة لعائلة المربعات المفتوحة او عائلة المستطيلات المفتوحة.

التمارين قدمت ثلاثة أفكار مهمة. تمارين 1.2 # 8 غطت مفاهيم مجموعة - F_σ و مجموعة - G_δ التي هي مهمة في نظرية القياس. تمارين 3.2 # 4 قدمت فضاء اقترانات القيمة الحقيقية المتصلة. مثل هذه الفضاءات تسمى فضاءات الاقتران التي هي الاهداف الرئيسية لدراسة التحليل الاقتراني. التحليل الاقتراني هو مزيج من التحليل (الكلاسيكي) والتبولوجيا والذي سمي في بعض الاحيان بالتحليل الحديث (Simmons [196]). اخيراً, تمارين 3.2 # 12 – 5 تعاملت مع مفهوم القاعدة الجزئية.

الفصل الثالث

نقاط النهاية Limit points

مقدمة

على خط الأعداد الحقيقية لدينا مفهوم "التقارب". على سبيل المثال كل نقطة في المتتالية 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ... قريبة من الصفر أكثر من النقطة السابقة لها. في الواقع, بشكل ما, 0 هي نقطة نهاية لهذه المتتالية. لذلك الفترة [0, 1) ليست مغلقة لأنها لا تحوي نقطة النهاية 0. في الفضاء التبولوجي العام ليس لدينا "اقتران مسافة" لذلك يجب ان نكمل بشكل مختلف. يجب ان نعرف مفهوم نقطة النهاية بدون اللجوء الى مسافات. حتى مع تعريفنا الجديد لنقطة النهاية النقطة 0 ستبقى نقطة نهاية للفترة [0, 1). مقدمة تعريف نقطة النهاية ستقودنا لفهم أفضل لمفهوم المجموعة المغلقة.

مفهوم تبولوجي آخر مهم جداً سوف نقدمه في هذا الفصل وهو الترابط. اعتبر أن لدينا الفضاء التبولوجي $\mathbb{R}$. في حين ان المجموعتين [2, 3] ∪ [0, 1] و [4, 6] يمكن وصفهما بأن لهما الطول نفسه وهو 2 ولكن هاتان المجموعتان من نوعين مختلفين ... الاولى مكونة من قطعتين منفصلتين والاخرى فقط قطعة واحدة. الفرق بينهما هو "تبولوجياً" وسوف يكشف عنه باستخدام مفهوم الترابط.

1.3 نقاط النهاية والغلاقة Limit points and closure

اذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً فعادة يشار لعناصر المجموعة X بـ نقاط.

1.1.3 تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). النقطة $x \in X$ تسمى نقطة نهاية (limit point) او نقطة تراكم accumulation point او نقطة تجمع cluster point) للمجموعة A اذا كانت كل مجموعة مفتوحة U تحوي x تحوي نقطة من A غير x.

2.1.3 مثال. تأمل الفضاء التبولوجي (X,τ) حيث $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\tau = \{X,\emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ و $A = \{a, b, c\}$. لاحظ ان b, d و e هي نقاط نهاية للمجموعة A ولكن a و c ليست نقاط نهاية للمجموعة A.

البرهان.

النقطة a هي نقطة نهاية للمجموعة A اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة مفتوحة تحوي a تحوي نقطة اخرى من المجموعة A.

لذلك لإثبات أن a ليست نقطة نهاية للمجموعة A يكفي ان نجد مجموعة مفتوحة واحدة تحوي a ولكنها لا تحوي أي نقطة اخرى من A.

المجموعة $\{a\}$ هي مفتوحة ولا تحوي أي نقاط اخرى من A. لذلك a ليست نقطة نهاية للمجموعة A.

المجموعة $\{c, d\}$ مفتوحة تحوي c ولا تحوي أي نقطة اخرى من A. لذلك c ليست نقطة نهاية للمجموعة A.

لإثبات ان b هي نقطة نهاية للمجموعة A يجب ان نبين ان كل مجموعة مفتوحة تحوي b تحوي نقطة اخرى من A غير b.

سوف نبين هذا الشيء بكتابة كل المجموعات المفتوحة التي تحوي b ونبين ان كلاً منها تحوي نقطة اخرى من A غير b.

المجموعات المفتوحة التي تحوي b هي X و $\{b, c, d, e\}$ وكلاً من هاتين المجموعتين تحوي نقطة اخرى من A وهي c. لذلك b هي نقطة نهاية للمجموعة A.

النقطة d هي نقطة نهاية للمجموعة A, على الرغم من انها ليست في A. وهذا بسبب ان كل مجموعة مفتوحة تحوي d تحوي نقطة من A. بنفس الاسلوب e هي نقطة نهاية للمجموعة A, على الرغم من انها ليست في A. □

3.1.3 مثال. ليكن (X,τ) فضاءً متقطعاً و A مجموعة جزئية من X. فإن A لا تملك نقطة نهاية لأن لكل $x \in X$, $\{x\}$ هي مجموعة مفتوحة لا تحوي أي نقطة من A مختلفة عن x. □

4.1.3 مثال. تأمل المجموعة الجزئية $A = [a, b)$ من $\mathbb{R}$. من السهل اثبات ان كل نقطة في $[a, b)$ هي نقطة نهاية للمجموعة A. النقطة b هي كذلك نقطة نهاية للمجموعة A. □

5.1.3 مثال. ليكن (X,τ) فضاءً غير متقطعاً و A مجموعة جزئية من X تحوي على الأقل عنصرين. فإن من السهل مشاهدة ان كل نقطة في X هي نقطة نهاية للمجموعة A. (لماذا أصرينا على ان تكون A تحوي على الأقل عنصرين ؟). □

التمهيدية التالية تزودنا بطريقة مفيدة لاختبار فيما اذا كانت مجموعة هي مغلقة ام لا.

6.1.3 تمهيدية. لتكن A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي (X,τ). فإن A مغلقة في (X,τ) اذا وفقط اذا كانت A تحوي كل نقاط النهاية لـ A.

البرهان.
مطلوب منا اثبات ان A مغلقة في (X,τ) اذا وفقط اذا كانت A تحوي كل نقاط النهاية لـ A, أي يجب ان نبين ان

(I) اذا كانت A مغلقة, فإن A تحوي كل نقاط النهاية لـ A

(II) A تحوي كل نقاط النهاية لـ A فإن A مجموعة مغلقة.

افرض أن A مغلقة في (X,τ). افرض أن p هي نقطة نهاية للمجموعة A والتي تنتمي الى $X \setminus A$. اذاً $X \setminus A$ هي مجموعة مفتوحة تحوي نقطة النهاية p للمجموعة A. لذلك $X \setminus A$ تحوي نقطة من A. هذا واضح انه خطأ ولذلك لدينا تناقض مع فرضنا. وهذا يعني ان كل نقطة نهاية للمجموعة A تنتمي لـ A.

بالمقابل, افرض ان A تحوي كل نقاط النهاية لـ A. لكل $z \in X \setminus A$ من الفرض يوجد مجموعة مفتوحة U_z بحيث $z \in U_z$ و $U_z \cap A = \emptyset$ أي ان $U_z \subseteq X \setminus A$ لذلك $X \setminus A = \bigcup_{z \in X \setminus A} U_z$. (اختبر ذلك!) وهذا يعني ان $X \setminus A$ هي اتحاد لمجموعات مفتوحة ولذلك هي مفتوحة. ولذلك متممتها A هي مغلقة. □

7.1.3 مثال. كتطبيق لتمهيدية 6.1.3 لدينا الآتي

(I) المجموعة $[a, b)$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$ لأن b هي نقطة نهاية و $b \notin [a, b)$

(II) المجموعة $[a, b]$ مغلقة في $\mathbb{R}$ لأن كل نقاط النهاية للمجموعة $[a, b]$ (أي جميع نقاط $[a, b]$) تقع في $[a, b]$

(III) (a, b) مجموعة جزئية ليست مغلقة في $\mathbb{R}$ لأنها لا تحوي نقطة النهاية a

(IV) $[a,\infty)$ هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$. □

8.1.3 تمهيدية. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ) و A' مجموعة كل نقاط النهاية للمجموعة A. فإن $A \cup A'$ هي مجموعة مغلقة.

البرهان. من تمهيدية 6.1.3, يكفي ان نبين ان المجموعة $A \cup A'$ تحوي كل نقاط النهاية للمجموعة $A \cup A'$ و هذا يكافىء ان نبين ان كل نقطة في $X \setminus (A \cup A')$ هي ليست نقطة نهاية للمجموعة $A \cup A'$.
لتكن $p \in X \setminus (A \cup A')$. لأن $p \notin A'$, يوجد مجموعة مفتوحة U تحوي p بحيث أن $U \cap A = \{p\}$ أو $U \cap A = \emptyset$. ولكن $p \notin A$, لذلك $U \cap A = \emptyset$. ندعي أن $U \cap A' = \emptyset$. لأنه اذا كان $x \in U$ ولأن U هي مجموعة مفتوحة و $U \cap A = \emptyset$ فإن $x \notin A'$. لذلك $U \cap A' = \emptyset$ أي أن $U \cap (A \cup A') = \emptyset$ و $p \in U$. هذا يعطينا أن p ليست نقطة نهاية للمجموعة $A \cup A'$ ولذلك $A \cup A'$ هي مجموعة مغلقة. □

3.1.9 تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). المجموعة $A \cup A'$ المكونه من A وكل نقاط النهاية للمجموعة A تسمى **غلاقة A** (closure of A) ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

10.1.3 ملاحظة. واضح من تمهيدية 8.1.3 أن $\overline{A}$ هي مجموعة مغلقة. بأستخدام تمهيدية 3.1.6 وتمارين 1.3 # 5(I), كل مجموعة مغلقة تحوي A يجب كذلك ان تحوي A'. لذلك $A \cup A' = \overline{A}$ هي أصغر مجموعة مغلقة تحوي A. هذا يعطي أن $\overline{A}$ هي تقاطع كل المجموعات المغلقة التي تحوي A.

11.1.3 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و
$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$
أثبت أن $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$, $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$

البرهان.
لايجاد غلاقة مجموعة معينة يجب أن نجد كل المجموعات المغلقة التي تحوي المجموعة وبعد ذلك نختار أصغرها. لذلك نبدأ بكتابة كل المجموعات المغلقة – هذه ببساطة هي متممات المجموعات المفتوحة.
المجموعات المغلقة هي X, $\emptyset$, $\{b, c, d, e\}$, $\{a, b, e\}$, $\{b, e\}$ و $\{a\}$. لذلك أصغر مجموعة مغلقة تحوي $\{b\}$ هي $\{b, e\}$ أي أن $\overline{\{b\}} = \{b, e\}$. وبنفس الاسلوب $\overline{\{a, c\}} = X$ و $\overline{\{b, d\}} = \{b, c, d, e\}$. □

12.1.3 مثال. لتكن $\mathbb{Q}$ المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}$ المكونة من كل الاعداد النسبية. أثبت أن $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

البرهان. افرض أن $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{R}$. اذاً يوجد $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. لأن $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ مفتوحة في $\mathbb{R}$ فيوجد a و b, $a < b$ بحيث أن $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. ولكن في كل فترة (a, b) يوجد عدد نسبي q أي أن $q \in (a, b)$. لذلك $q \in \mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ مما يعني أن $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. وهذا تناقض لأن $q \in \mathbb{Q}$. لذلك $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. □

13.1.3 تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). A تسمى **كثيفة** (dense) في X أو **كثيفة في كل مكان** (everywhere dense) في X اذا كان $\bar{A} = X$.

الآن نستطيع أن نعيد كتابة مثال 12.1.3 كما يلي: **$\mathbb{Q}$ هي مجموعة كثيفة في $\mathbb{R}$.**

لاحظ أنه في مثال 11.1.3 شاهدنا أن $\{a, c\}$ هي مجموعة كثيفة في X.

14.1.3 مثال. ليكن (X,τ) فضاءً متقطعاً. كل مجموعة جزئية من X هي مغلقة (لأن متممتها هي مفتوحة). لذلك المجموعة الجزئية الكثيفة الوحيدة في X هي X نفسها لأن غلاقة كل مجموعة جزئية من X هي المجموعة نفسها. □

15.1.3 تمهيدية. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). A هي كثيفة في X اذا وفقط اذا كانت كل مجموعة جزئية غير خالية ومفتوحة في X تتقاطع مع A بغير المجموعة الخالية (أي أنه اذا كانت $U \in \tau$ و $U \neq \emptyset$ فإن $A \cap U \neq \emptyset$).

البرهان. افرض في البداية أن كل مجموعة جزئية غير خالية ومفتوحة في X تتقاطع مع A بغير المجموعة الخالية. اذا كانت $A = X$ فمن الواضح أن A هي كثيفة في X. اذا كانت $A \neq X$ اجعل $x \in X \setminus A$. اذا كانت $U \in \tau$ و $x \in U$ فإن $U \cap A \neq \emptyset$. لذلك x هي نقطة نهاية للمجموعة A. لأن x هي نقطة عشوائية في $X \setminus A$ فإن كل نقطة في $X \setminus A$ هي نقطة نهاية للمجموعة A. لذلك $X \setminus A \subseteq A'$ ولذلك, باستخدام تعريف 9.1.3, $\bar{A} = A \cup A' = X$, أي أن A هي كثيفة في X.

بالمقابل, افرض أن A هي كثيفة في X. لتكن U هي أي مجموعة جزئية غير خالية ومفتوحة في X. افرض أن $U \cap A = \emptyset$. اذا كانت $x \in U$ فإن $x \notin A$ و x هي ليست نقطة نهاية للمجموعة A لأن U هي مجموعة مفتوحة تحوي x والتي لا تحوي أي نقطة من A. وهذا تناقض لأن كون A هي كثيفة في X يعني ان كل نقطة في $X \setminus A$ هي نقطة نهاية للمجموعة A. لذلك فرضنا خطأ أي أن $U \cap A \neq \emptyset$ كما هو مطلوب. □

تمارين 1.3

1- (أ) في مثال 2.1.1, أوجد كل نقاط النهاية للمجموعات التالية

(I) $\{a\}$

(II) $\{b, c\}$

(III) $\{a, c, d\}$

(IV) $\{b, d, e, f\}$

(ب) بعد ذلك, أوجد غلاقة كل من المجموعات أعلاه

(ج) الآن أوجد غلاقة كل من المجموعات أعلاه باستخدام طريقة مثال 11.1.3.

2- لتكن $(\mathbb{Z},\tau)$ مجموعة كل الأعداد الصحيحة مع التبولوجيا منتهي – مغلق. اكتب مجموعة نقاط النهاية للمجموعات التالية

(I) $A = \{1, 2, 3, \ldots , 10\}$

(II) المجموعة E المكونة من كل الأعداد الصحيحة الزوجية.

3- أوجد كل نقاط النهاية للفترة المفتوحة (a, b) في $\mathbb{R}$ حيث $a < b$.

4- (ا) ما هي غلاقة كل من المجموعات التالية في $\mathbb{R}$؟

(I) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$

(II) مجموعة الاعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

(III) مجموعة كل الاعداد غير النسبية $\mathbb{P}$

(ب) لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}$. أثبت ان $a \in \bar{S}$ اذا وفقط اذا كان لكل عدد صحيح موجب n يوجد $x_n \in S$ بحيث أن $|x_n - a| < \frac{1}{n}$.

5- لتكن S و T مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من فضاء تبولوجي (X,τ) حيث $S \subseteq T$.

(I) اذا كانت p نقطة نهاية للمجموعة S, أثبت أن p كذلك هي نقطة نهاية للمجموعة T.

(II) استنتج من (I) أن $\bar{S} \subseteq \bar{T}$.

(III) لذلك بين انه اذا كانت S كثيفة في X فإن T كثيفة في X.

(IV) باستخدام (III) اثبت أن $\mathbb{R}$ تملك عدد غير معدود من المجموعات الجزئية الكثيفة المختلفة.

(V)* مرة اخرى باستخدام (III) اثبت أن $\mathbb{R}$ تملك عدد غير معدود من المجموعات الجزئية الكثيفة المعدودة المختلفة وتملك كذلك 2^c من المجموعات الجزئية الكثيفة غير المعدودة المختلفة.

2.3 جوارات Neighbourhoods

1.2.3 تعريف. ليكن ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً, N مجموعة جزئية من X و p نقطة في N. N تسمى جواراً (neighbourhood) للنقطة p اذا وجد مجموعة مفتوحة U بحيث أن $p \in U \subseteq N$.

2.2.3 مثال. الفترة المغلقة $[0, 1]$ في $\mathbb{R}$ هي جوار للنقطة $\frac{1}{2}$ لأن $\frac{1}{2} \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) \subseteq [0, 1]$.

3.2.3 مثال. الفترة $(0, 1]$ في $\mathbb{R}$ هي جوار للنقطة $\frac{1}{4}$ لأن $\frac{1}{4} \in (0, \frac{1}{2}) \subseteq (0, 1]$. ولكن $(0, 1]$ ليست جواراً للنقطة 1. (أثبت ذلك). □

4.2.3 مثال. اذا كان (X,τ) هو أي فضاء تبولوجي و $U \in \tau$ فإن من تعريف 1.2.3 ينتج أن U هي جوار لكل نقطة $p \in U$. لذلك, على سبيل المثال, كل فترة مفتوحة (a, b) في $\mathbb{R}$ هي جوار لكل نقطة فيها.

5.2.3 مثال. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و N جواراً لنقطة p. اذا كانت S هي أي مجموعة جزئية من X بحيث أن $S \supseteq N$ فإن S هي جوار للنقطة p. □

التمهيدية التالية سهلة التحقق, لذلك يترك برهانها للقارىء.

6.2.3 تمهيدية. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). النقطة $x \in X$ هي نقطة نهاية للمجموعة A اذا وفقط اذا كان كل جوار للنقطة x يحوي نقطة من A تختلف عن x.

لأن المجموعة هي مغلقة اذا وفقط اذا كانت تحوي كل النقاط النهائية لها فإننا نستنتج التالي

7.2.3 نتيجة. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). المجموعة A هي مغلقة اذا وفقط اذا كان لكل $x \in X \setminus A$ يوجد جوار N للنقطة x بحيث أن $N \subseteq X \setminus A$. □

8.2.3 نتيجة. لتكن U مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). فإن $U \in \tau$ اذا وفقط اذا كان لكل $x \in U$ يوجد جوار N للنقطة x بحيث أن $N \subseteq U$. □

النتيجة التالية تستنتج بسهولة من نتيجة 8.2.3.

9.2.3 نتيجة. لتكن U مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). فإن $U \in \tau$ اذا وفقط اذا كان لكل $x \in U$ يوجد مجموعة $V \in \tau$ بحيث أن $x \in V \subseteq U$.

نتيجة 9.2.3 تزودنا باختبار مفيد لكون المجموعة مفتوحة ام لا. انها تقول أن المجموعة مفتوحة اذا وفقط اذا احتوت مجموعة مفتوحة حول كل نقطة من نقاطها.

تمارين 2.3

1- لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). أثبت أن A هي كثيفة في X اذا وفقط اذا كان كل جوار لكل نقطة في $X \setminus A$ يتقاطع مع A بغير $\emptyset$.

2- (I) لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من فضاء تبولوجي (X,τ). أثبت بعناية أن

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

(III) اكتب مثالاً يبين أن

$$\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$$

3- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. أثبت أن τ هي التبولوجيا منتهي مغلق على X اذا وفقط اذا كان (I) (X,τ) هو فضاء T_1 – و (II) كل مجموعة جزئية غير منتهية من X هي كثيفة في X.

4- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى انفصالياً (separable) اذا كان يملك مجموعة جزئية كثيفة معدودة. حدد أي من الفضاءات التالية انفصالية.

(I) المجموعة $\mathbb{R}$ مع التبولوجيا الطبيعية.
(II) مجموعة معدودة مع التبولوجيا المتقطعة.
(III) مجموعة معدودة مع التبولوجيا منتهي – مغلق.
(IV) (X,τ) حيث X منتهية.
(V) (X,τ) حيث τ منتهية.
(VI) مجموعة غير معدودة مع التبولوجيا المتقطعة.
(VII) مجموعة غير معدودة مع التبولوجيا منتهي – مغلق.
(VIII) فضاء (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية.

5- ليكن (X,τ) أي فضاء تبولوجي و A أي مجموعة جزئية من X. أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A تسمى **داخلية A** (interior of A) ويرمز لها بالرمز **$Int(A)$**.[هي اتحاد كل المجموعات المفتوحة في X والتي تقع بأكملها داخل A.]

(I) أثبت أن $Int([0, 1]) = (0, 1)$ في $\mathbb{R}$.

(II) أثبت ان $Int((3, 4)) = (3, 4)$ في $\mathbb{R}$.

(III) اثبت أنه اذا كانت A مجموعة مفتوحة في (X,τ) فإن $Int(A) = A$.

(IV) بين أن $Int(\{3\}) = Ø$ في $\mathbb{R}$.

(V) اثبت أنه اذا كان (X,τ) هو فضاء غير متقطع فإن لكل مجموعة جزئية A من X و $A \neq X$, $Int(A) = Ø$.

(VI) أثبت أن لكل مجموعة جزئية معدودة من $\mathbb{R}$, $Int(A) = Ø$.

6- أثبت أنه اذا كانت A أي مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ) فإن $Int(A) = X \setminus (\overline{X \setminus A})$. (انظر تمرين 5 أعلاه لتعريف Int).

7- باستخدام تمرين 6 أعلاه, اثبت أن A هي كثيفة في (X,τ) اذا وفقط اذا كان $Int(X \setminus A) = Ø$.

8- باستخدام تعريف Int في تمرين 5 أعلاه حدد أي من العبارات التالية صحيحة لأي مجموعات جزئية عشوائية A_1 و A_2 من الفضاء التبولوجي (X,τ) ؟

(I) $Int(A_1 \cap A_2) = Int(A_1) \cap Int(A_2)$

(II) $Int(A_1 \cup A_2) = Int(A_1) \cup Int(A_2)$

(III) $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$.

(اذا كانت اجابتك لاي فرع هي "صح" يجب ان تكتب البرهان. اذا كانت اجابتك "خطا" يجب أن تعطي مثالاً مخالفاً).

9*- لتكن S مجموعة جزئية كثيفة من فضاء تبولوجي (X,τ). أثبت أنه لكل مجموعة جزئية مفتوحة U من X, $\overline{S \cap U} = \overline{U}$.

10- لتكن S و T مجموعتين جزئيتين كثيفتين في فضاء (X,τ). اذا كانت T كذلك مفتوحة, استنتج من تمرين 9 أعلاه أن $S \cap T$ هي كثيفة في X.

10- لتكن $\mathfrak{B} = \{[a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$. أثبت أن كلاً من العبارات التالية

(I) $\mathfrak{B}$ هي قاعدة لتبولوجيا τ_1 على $\mathbb{R}$. (الفضاء) $(\mathbb{R},\tau_1)$ يسمى **خط سورجنيفري** (Sorgenfrey line)

(II) اذا كانت τ هي التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ فإن $\tau \subseteq \tau_1$.

(III) لكل $a, b \in \mathbb{R}$ مع $a < b$, $[a, b)$ هي مجموعة مغلقة مفتوحة في $(\mathbb{R},\tau_1)$.

(IV) خط سورجنيفري هو فضاء انفصالي.

(V*) خط سورجنيفري لا يحقق مسلمة العد الثانية.

3.3 الترابط Connectedness

1.3.3 ملاحظة. سنذكر هنا بعض التعاريف والحقائق التي يجب ان تكون تعرفها. لتكن S أي مجموعة من الاعداد الحقيقية. اذا كان هناك عنصر b في S بحيث أن $x \le b$ لكل $x \in S$, فإن ما يسمى **العنصر الأعظم** (the greatest element) للمجموعة S. وبنفس الشكل اذا كانت S تحوي عنصراً a بحيث $a \le x$ لكل $x \in S$ فإن a يسمى **العنصر الأقل** (the least element) للمجموعة S. المجموعة S من الأعداد الحقيقية تسمى **محدودة من أعلى** (bounded above) اذا وجد عدد حقيقي c بحيث أن $x \le c$ لكل $x \in S$ و c تسمى **حد أعلى** (upper bound) للمجموعة S. وبنفس الطريقة تُعرف المفاهيم "**محدودة من أسفل**" (bounded below) و "**حد أدنى**" (lower bound). المجموعة التي تكون محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل تسمى **محدودة** (bounded). □

مسلمة أقل حد أعلى (least upper bound axiom): لتكن S مجموعة غير خالية من الأعداد الحقيقية. اذا كانت S محدودة من الأعلى فإنها تملك أقل حد أعلى.

أقل حد أعلى للمجموعة S يرمز له بالرمز **sup(S)**,ويمكن أن ينتمي للمجموعة S أو لا ينتمي لها. في الحقيقة, أقل حد أعلى للمجموعة S هو عنصر في S اذا وفقط اذا كانت S تملك عنصر أعظم. على سبيل المثال, أقل حد اعلى للفترة المفتوحة $S = (1, 2)$ هو 2 ولكن $2 \notin (1, 2)$ في حين أن اقل حد أعلى للفترة $[3, 4]$ هو 4 و $4 \in [3, 4]$ وكذلك 4 هو العنصر الأعظم للفترة $[3, 4]$. أي مجموعة S من الأعداد الحقيقية والتي تكون محدودة من الأسفل تملك **أعظم حد أدنى** (greatest lower bound) ويرمز له بالرمز **inf(S)**.

2.3.3 مساندة. لتكن S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأعلى ولتكن p هي أقل حد أعلى للمجموعة S. اذا كانت S هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$ فإن $p \in S$.

البرهان. افرض أن $p \in \mathbb{R} \setminus S$. لأن $\mathbb{R} \setminus S$ هي مفتوحة فيوجد اعداد حقيقية a و b, $a < b$ حيث $p \in (a, b) \subseteq R\backslash S$. لأن p هي أقل حد أعلى للمجموعة S و $a < p$ فمن الواضح أنه يوجد $x \in S$ بحيث أن $a < x$. كذلك $x < p < b$ ولذلك $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \setminus S$. ولكن هذا تناقض لأن $x \in S$. ولذلك فرضنا خاطىء و $p \in S$. □

3.3.3 تمهيدية. لتكن T مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة في $\mathbb{R}$. فإن $T = \mathbb{R}$ أو $T = \emptyset$.

البرهان. افرض أن $T \neq \mathbb{R}$ و $T \neq \emptyset$. اذاً يوجد عنصر $x \in T$ وعنصر $z \in \mathbb{R} \setminus T$. بدون خسارة التعميم, افرض أن $x < z$. اجعل $S = T \cap [x, z]$. اذا المجموعة S هي مغلقة لأنها تقاطع لمجموعتين مغلقتين وكذلك هي محدودة من أعلى, لأن من الواضح أن z هي الحد الأعلى. لتكن p هي أقل حد أعلى للمجموعة S. بواسطة مساندة 2.3.3, $p \in S$. بما أن $p \in [x, z]$ فإن $p \leq z$. لأن $z \in \mathbb{R} \setminus S$, $p \neq z$ ولذلك $p < z$.

الآن T هي كذلك مجموعة مفتوحة و $p \in T$. لذلك يوجد a و b في $\mathbb{R}$, $a < b$ بحيث $p \in (a, b) \subseteq T$. لتكن t نقطة بحيث $p < t < \min(b, z)$ حيث $\min(b, z)$ يرمز لأصغر العنصرين b و z. لذلك $t \in T$ و $t \in [p, z]$. وهذا يعني أن $t \in T \cap [x, z] = S$. وهذا تناقض لأن $t > p$ و p هي أقل حد أعلى للمجموعة S. ولذلك فرضنا خاطىء ولهذا $T = \mathbb{R}$ أو $T = \emptyset$.

4.3.3 تعريف. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. هذا الفضاء يسمى مترابط (connected) اذا كانت المجموعات الجزئية مغلقة مفتوحة من X هي فقط X و $\emptyset$.

لذلك بإعادة كتابة تمهيدية 3.3.3 نحصل على

5.3.3 تمهيدية. الفضاء التبولوجي $\mathbb{R}$ هو مترابط. □

6.3.3 مثال. اذا كان (X,τ) هو فضاء متقطع يحوي أكثر من نقطة فإن (X,τ) ليس مترابطاً لأن كل مجموعة احادية هي مغلقة مفتوحة. □

7.3.3 مثال. اذا كان (X,τ) هو فضاء غير متقطع فإنه مترابط لأن المجموعات المغلقة المفتوحة الوحيدة هي X و Ø (في الواقع المجموعات المفتوحة هي فقط X و Ø).

8.3.3 مثال. اذا كانت $X = \{a, b, c, d, e\}$ و

$$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

فإن (X,τ) ليس مترابطاً لأن $\{b, c, d, e\}$ هي مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة.

9.3.3 ملاحظة. من تعريف 4.3.3 ينتج ان الفضاء التبولوجي (X,τ) **ليس مترابطاً** (disconnected) اذا وفقط اذا كان يوجد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين A و B بحيث أن $A \cap B = \emptyset$ و $A \cup B = X$.[1] (انظر تمارين 3.3 # 3).

نختم هذا الجزء بذكر أن $\mathbb{R}^2$ (وفي الحقيقة, $\mathbb{R}^n$ لكل $n \geq 1$) هو فضاء مترابط. على كل حال البرهان سيؤخر الى الفصل الخامس.

تمارين 3.3

-1 لتكن S مجموعة من الأعداد الحقيقية و $T = \{x : -x \in S\}$

(أ) اثبت أن العدد الحقيقي a هو أعظم حد أدنى للمجموعة S اذا وفقط اذا كانت $-a$ هي أقل حد أعلى للمجموعة T.

(ب) باستخدام (أ) ومسلمة أقل حد أعلى أثبت أن كل مجموعة غير خالية من الاعداد الحقيقية التي تكون محدودة من أسفل تملك أعظم حد أدنى.

---

[1] معظم الكتب تستخدم هذه الخاصية لتعريف الترابط.

2- لكل مجموعة من مجموعات الاعداد الحقيقية التالية أوجد أعظم حد وأقل حد أعلى اذا وجدت:

(I) $S = \mathbb{R}$.

(II) $S = Z$ حيث Z مجموعة كل الاعداد الصحيحة.

(III) $S = [9, 10)$.

(IV) S = مجموعة كل الاعداد الحقيقية التي على الشكل $1 - \frac{3}{n^2}$ حيث n عدد صحيح موجب.

(V) $S = (-1, 3]$.

3- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. أثبت أن (X,τ) ليس مترابطاً اذا وفقط اذا كان يملك مجموعتين جزئيتين مفتوحتين غير خاليتين ومنفصلتين A و B بحيث أن $A \cup B = X$.

4- هل الفضاء (X,τ) في مثال 2.1.1 مترابط ؟

5- ليكن (X,τ) هو مجموعة غير منتهية مع التبولوجيا منتهي – مغلق. هل (X,τ) مترابط ؟

6- ليكن (X,τ) هو مجموعة غير منتهية مع التبولوجيا معدود – مغلق. هل (X,τ) مترابط ؟

7- أي من الفضاءات التبولوجية في تمارين 1.1 # 9 مترابطة ؟

4.3 خلاصة

في هذا الفصل قدمنا مفهوم نقطة النهاية وبينا ان المجموعة تكون مغلقة اذا وفقط اذا كانت تحوي كل نقاط النهاية الخاصة بها. تمهيدية 8.1.3 تخبرنا بعد ذلك أن أي مجموعة A تملك أصغر مجموعة مغلقة $\overline{A}$ تحوي A. المجموعة $\overline{A}$ تسمى غلاقة المجموعة A.

المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X,τ) يقال أنها كثيفة في X اذا كان اذا كان $\overline{A} = X$. شاهدنا أن $\mathbb{Q}$ هي كثيفة في $\mathbb{R}$ ومجموعة الأعداد غير النسبية $\mathbb{P}$ كذلك هي كثيفة في $\mathbb{R}$. قدمنا مفهوم جوار النقطة ومفهوم القضاء التبولوجي المترابط. أثبتنا نتيجة مهمة, وهي أن الفضاء $\mathbb{R}$ مترابطز لدينا الشيء الكثير لنقوله عن الترابط لاحقاً.

في التمارين قدمنا مفهوم داخلية المجموعة وهذا مكمل للكلام عن غلاقة المجموعة.

الفصل الرابع

تشاكلات تبولوجية (هوميومورفزم) Homeomorphisms

مقدمة

في كل فرع من فروع الرياضيات من الضروري ان ندرك متى تركيبين يكونان متكافئان. على سبيل المثال أي مجموعتين تكونان متكافئتان, باعتبار اننا نتكلم في نظرية المجموعات, اذا وجد اقتران تقابل من مجموعة الى الأخرى. أي زمرتين تكونان متكافئتان اذا وجد هومومورفزم (homomorphism) من مجموعة الى الاخرى بحيث يكون واحد لواحد وشامل. أي فضائين تبولوجيين يكونان متكافئان اذا وجد هوميومورفزم (homeomorphism) من أحدهما للآخر.

1.4 فضاءات جزئية subspaces

1.1.4 تعريف. لتكن Y مجموعة جزئية غير خالية في فضاء تبولوجي (X,τ). العائلة $\tau_Y = \{O \cap Y : O \in \tau\}$ من المجموعات الجزئية من Y هي تبولوجيا على Y تسمى **تبولوجيا الفضاء الجزئي** (subspace topology) أو **تبولوجيا نسبية** (relative topology) أو **التبولوجيا المُحدثة** (induced topology) أو **التبولوجيا المُحدثة على Y بواسطة τ** (the topology induced on Y by τ) الفضاء التبولوجي (Y, τ_Y) يسمى فضاء جزئي من (X,τ).

بالتأكيد يجب أن تتحقق أن τ_Y في الحقيقة هي تبولوجيا على Y.

2.1.4 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e, f\}\}$

و $Y = \{b, c, e\}$. فإن تبولوجيا الفضاء الجزئي على Y هي

$\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{c\}\}$. □

3.1.4 مثال. لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

و $Y = \{a, d, e\}$. فإن التبولوجيا المحدثة على Y هي

$\tau_Y = \{Y, \emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$. □

4.1.4 مثال. لتكن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ على X ولتكن Y مجموعة جزئية من X. ليس صعباً أن تبين أن العائلة $\mathfrak{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathfrak{B}\}$ هي قاعدة لتبولوجيا الفضاء الجزئي τ_Y على Y. [تمرين: أثبت ذلك.]

لذلك دعنا نتأمل المجموعة الجزئية $(1, 2)$ من $\mathbb{R}$. العائلة $\{(a, b) \cap (1, 2) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ تعتبر قاعدة للتبولوجيا المحدثة على $(1, 2)$ أي أن $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, 1 \leq a < b \leq 2\}$ هي قاعدة للتبولوجيا المحدثة على $(1, 2)$. □

5.1.4 مثال. تأمل المجموعة الجزئية $[1, 2]$ من $\mathbb{R}$. العائلة $\{(a, b) \cap [1, 2] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ هي قاعدة لتبولوجيا الفضاء الجزئي τ على $[1, 2]$. أي أن

$\{(a, b) : 1 \leq a < b \leq 2\} \cup \{[1, b) : 1 < b \leq 2\} \cup \{(a, 2] : 1 \leq a < 2\} \cup \{[1, 2]\}$

هي قاعدة للتبولوجيا τ.

لكن هنا شاهدنا بعض الأشياء المفاجئة مثل الفترة $[1, 1\frac{1}{2})$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكن

$[1, 1\frac{1}{2}) = (0, 1\frac{1}{2}) \cap [1, 2]$ هي مجموعة مفتوحة في الفضاء الجزئي $[1, 2]$.

كذلك $(1, 2]$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكنها مجموعة مفتوحة في $[1, 2]$. حتى $[1, 2]$ ليست مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولكنها مجموعة مفتوحة في $[1, 2]$.

لذلك عندما نقول أن المجموعة مفتوحة يجب أن نوضح في أي فضاء أو أي تبولوجيا هي مجموعة مفتوحة. □

6.1.4 مثال. لتكن $\mathbb{Z}$ المجموعة الجزئية من $\mathbb{R}$ المكونة من كل الاعداد الصحيحة. أثبت أن التبولوجيا المحدثة على $\mathbb{Z}$ بالتبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ هي التبولوجيا المتقطعة.

البرهان.

لاثبات أن التبولوجيا $\tau_{\mathbb{Z}}$ المحدثة على $\mathbb{Z}$ هي التبولوجيا المتقطعة يكفي, باستخدام تمهيدية 9.1.1, ان نبين أن كل مجموعة احادية في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة مفتوحة في $\tau_{\mathbb{Z}}$ أي اذا كانت $n \in \mathbb{Z}$ فإن $\{n\} \in \tau_{\mathbb{Z}}$.

لتكن $n \in \mathbb{Z}$. اذاً $\mathbb{Z} \cap (n-1, n+1) = \{n\}$. ولكن $(n-1, n+1)$ هي مفتوحة في $\mathbb{R}$ ولذلك $\{n\}$ هي مفتوحة في التبولوجيا المحدثة على $\mathbb{Z}$. وهذا يعني أن كل مجموعة احادية في $\mathbb{Z}$ هي مجموعة مفتوحة في التبولوجيا المحدثة على $\mathbb{Z}$. لذلك التبولوجيا المحدثة هي متقطعة. □

مجموعة رموز. عندما نشير الى

$\mathbb{Q}$ = مجموعة كل الأعداد النسبية

$\mathbb{Z}$ = مجموعة كل الأعداد الصحيحة

$\mathbb{N}$ = مجموعة كل الأعداد الصحيحة الموجبة

$\mathbb{P}$ = مجموعة كل الأعداد غير النسبية

(a, b), $[a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a,∞), أو $[a,\infty)$

كفضاءات تبولوجية بدون ذكر نوع التبولوجيا نحن نعني التبولوجيا المحدثة كفضاء جزئي من $\mathbb{R}$ (في بعض الأحيان سوف نشير الى التبولوجيا المحدثة على هذه المجموعات بالتبولوجيا العادية "usual topology").

تمارين 1.4

1- لتكن $X = \{a, b, c, d, e\}$ و $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$. اكتب عناصر التبولوجيا المحدثة τ_Y على $Y = \{a, c, e\}$ والتبولوجيا المحدثة $\tau_{\mathbb{Z}}$ على $Z = \{b, c, d, e\}$.

2- صف التبولوجيا المحدثة على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\mathbb{N}$ بواسطة التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$.

3- اكتب قاعدة للتبولوجيا العادية على كل من المجموعات الآتية

(I) $[a, b)$ حيث $a < b$,

(II) $(a, b]$ حيث $a < b$,

(III) $(-\infty, a]$,

(IV) $(-\infty, a)$,

(V) (a,∞),

(VI) $[a,\infty)$.

[مساعدة: انظر الامثلة 4.1.4 و 5.1.4.]

4- لتكن $A \subseteq B \subseteq X$ و X تملك التبولوجيا τ. لتكن τ_B هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على B. بالاضافة لذلك لتكن τ_1 هي التبولوجيا المحدثة على A بواسطة τ_B. أثبت أن $\tau_1 = \tau_2$. (لذلك الفضاء الجزئي من الفضاء الجزئي هو فضاء جزئي).

5- ليكن (Y, τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء (X,τ). أثبت أن المجموعة الجزئية Z من Y هي مغلقة في (Y, τ_Y) اذا وفقط اذا كانت $Z = A \cap Y$ حيث A هي مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ).

6- أثبت أن كل فضاء جزئي من الفضاء المتقطع هو متقطع.

7- أثبت أن كل فضاء جزئي من الفضاء غير المتقطع هو غير متقطع.

8. أثبت أن الفضاء الجزئي $[0, 1] \cup [3, 4]$ في $\mathbb{R}$ يملك على الأقل 4 مجموعات جزئية مغلقة مفتوحة. بالضبط كم مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة يملك ؟.

9- هل صحيح أن كل فضاء جزئي من الفضاء المترابط هو مترابط ؟

10- ليكن (Y, τ_Y) فضاءً جزئياً من الفضاء (X,τ). أثبت أن $\tau_Y \subseteq \tau$ اذا وفقط اذا كان $Y \in \tau$. [مساعدة. تذكر ان $Y \in \tau_Y$].

11- لتكن A و B فضائين جزئيين من (X,τ). اذا كان $A \cap B \neq \emptyset$, أثبت أن الفضاء الجزئي $A \cup B$ مترابط.

12- ليكن (Y, τ_1) فضاءً جزئياً من فضاء $-T_1$ (X,τ). أثبت ان (Y, τ_1) هو كذلك فضاء $-T_1$.

13- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى **هوسدورف** Hausdorff (او **فضاء $-T_2$**) اذا كان لكل نقطتين مختلفتين a و b في X يوجد مجموعتين مفتوحتين U و V بحيث أن $a \in U$, $b \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

(I) أثبت ان الفضاء $\mathbb{R}$ هو هوسدورف.

(II) أثبت ان كل فضاء متقطع هو هوسدورف.

(III) اثبت أن كل فضاء $-T_2$ هو فضاء $-T_1$.

(IV) أثبت ان $\mathbb{Z}$ مع التبولوجيا منتهي مغلق هو فضاء $-T_1$ ولكنه ليس فضاء $-T_2$.

(V) أثبت ان كل فضاء جزئي من فضاء $-T_2$ هو فضاء $-T_2$.

14- ليكن (Y, τ_1) فضاءص جزئياً من فضاء تبولوجي (X,τ). اذا كان (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية أثبت أن (Y, τ_1) كذلك يحقق مسلمة العد الثانية.

15- لتكن a و b في $\mathbb{R}$ حيث $a < b$. أثبت أن $[a, b]$ مترابطة.

[مساعدة. في نص وبرهان تمهيدية 3.3.3 أبدل $\mathbb{R}$ بالفترة $[a, b]$ في كل مكان.]

16- لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة كل الأعداد النسبية مع التبولوجيا العادية ولتكن $\mathbb{P}$ هي مجموعة كل الأعداد غير النسبية مع التبولوجيا العادية.

(I) اثبت ان $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ ليست الفضاء المتقطع.

(II) هل $\mathbb{Q}$ او $\mathbb{P}$ فضاء مترابط ؟

(III) هل $\mathbb{Q}$ او $\mathbb{P}$ فضاء هوسدورف ؟

(IV) هل $\mathbb{Q}$ او $\mathbb{P}$ تملك التبولوجيا منتهي - مغلق ؟

17- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى **فضاء منتظم** regular space اذا كان لكل مجموعة جزئية مغلقة A من X ولكل نقطة $x \in X \setminus A$ يوجد مجموعتين مفتوحتين U و V بحيث $x \in U$، $A \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$. اذا كان (X,τ) فضاء منتظم و فضاء $-T_1$ فإنه يسمى **فضاء $-T_3$**. أثبت العبارات التالية

(I) كل فضاء جزئي من فضاء منتظم هو فضاء منتظم.

(II) الفضاءات $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{P}$ و $\mathbb{R}^2$ هي فضاءات منتظمة.

(III) اذا كان (X,τ) هو فضاء منتظم فضاء $-T_1$ فإنه فضاء $-T_2$.

(IV) خط سورجينفري هو فضاء منتظم.

(*V) لتكن X هي المجموعة $\mathbb{R}$ المكونة من كل الأعداد الحقيقية و $S = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. عرف مجموعة $C \subseteq \mathbb{R}$ لتكون مغلقة اذا كان $C = A \cup T$ حيث A مغلقة في التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ و T هي أي مجموعة جزئية من S. متممات هذه المجموعات المغلقة تشكل تبولوجيا τ على $\mathbb{R}$ يكون هوسدورف ولكنه ليس منتظم.

2.4 تشاكلات تبولوجية (هوميومورفزميات) Homeomorphisms

نعود الان لمفهوم الفضاءات التبولوجية المتكافئة. نبدأ بتامل المثال التالي:

$X = \{a, b, c, d, e\}$، $Y = \{g, h, i, j, k\}$

$\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$

و

$\tau_1 = \{Y, \emptyset, \{g\}, \{i, j\}, \{g, i, j\}, \{h, i, j, k\}\}$

واضح بالاحساس الحدسي أن (X,τ) "مكافىء" لـ (Y, τ_1). الاقتران $f : X \to Y$ المعرف على الشكل $f(a) = g$، $f(b) = h$، $f(c) = i$، $f(d) = j$ و $f(e) = k$ يزودنا بالتكافؤ. الآن سنكتب ذلك بالصيغة التالية.

1.2.4 تعريف. ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين. نقول أن هذين الفضائين هوميومورفك (homeomorphic) اذا وجد اقتران $f : X \to Y$ يملك الخواص التالية

(I) f هو واحد لواحد (أي أن $f(x_1) = f(x_2)$ يعطي أن $x_1 = x_2$)

(II) f هو شامل (أي أن لكل $y \in Y$ يوجد $x \in X$ بحيث $f(x) = y$)

(III) لكل $U \in \tau_1$، $f^{-1}(U) \in \tau$

(IV) لكل $V \in \tau$، $f(V) \in \tau_1$

بالاضافة لذلك f يسمى هوميومورفزم (homeomorphism) بين (X,τ) و (Y, τ_1). ونكتبه على الشكل $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$.

□

سوف نبين أن "$\cong$" هي علاقة تكافؤ ونستخدم ذلك لاثبات ان كل الفترات المفتوحة (a, b) هوميومورفك لبعضها البعض. مثال 2.2.4 هو الخطوة الاولى لأنه يبين أن "$\cong$" هي علاقة تعدي.

2.2.4 مثال. لتكن (X,τ)، (Y, τ_1) و (Z, τ_2) فضاءات تبولوجية. اذا كان $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$ و $(Z, \tau_2) \cong (Y, \tau_1)$ اثبت أن $(Z, \tau_2) \cong (X,\tau)$.

البرهان.

معطى لدينا أن $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$ أي ان هناك هوميومورفزم $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$. وكذلك معطى لدينا أن $(Z, \tau_2) \cong (Y, \tau_1)$ أي أن هناك هوميومورفزم $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$.

مطلوب منا أن نثبت أن $(Z, \tau_2) \cong (X,\tau)$ أي يجب أن نجد هوميومورفزم $h : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$. سوف نثبت أن الاقتران المركب $gof : X \to Z$ هو الهوميومورفزم المطلوب.

لأن $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$ و $(Z, \tau_2) \cong (Y, \tau_1)$ فيوجد هوميومورفزمين $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ و $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$. تأمل الاقتران المركب $gof : X \to Z$ [$gof(x) = g(f(x))$ لكل $x \in X$]. انه عمل روتيني أن تثبت أن gof هو وهحد لواحد وشامل. الآن لتكن $U \in \tau_2$. لأن g هو هوميومورفزم فإن $g^{-1}(U) \in \tau_1$. باستخدام حقيقة أن f هو هوميومورفزم نحصل على أن $f^{-1}(g^{-1}(U)) \in \tau_1$. ولكن $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gof)^{-1}(U)$. لذلك gof يملك الخاصية (III) في تعريف 1.2.4. الآن لتكن $V \in \tau$. اذاً $f(V) \in \tau_1$ ولذلك $g(f(V)) \in \tau_2$ أي أن $gof(V) \in \tau_2$ وبهذا الشكل بينا أن gof يحقق الخاصية (IV) من تعريف 1.2.4 لذلك gof هو هوميومورفزم.

□

3.2.4 ملاحظة. مثال 2.2.4 يبين أن "$\cong$" هي علاقة تعدي. في الحقيقة من السهل اثبات انها علاقة تكافؤ أي أن

(I) $(X,\tau) \cong (X,\tau)$ (انعكاس)

(II) $(X,\tau) \cong (Y, \tau_1)$ يعطي أن $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$ (تماثل)

[لاحظ انه اذا كان $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ هو هوميومورفزم فإن نظيره $f^{-1}: (Y, \tau_1) \to (X, \tau)$ هو كذلك هوميومورفزم.]

(III) $(X,\tau) \cong (Y, \tau_1)$ و $(Y, \tau_1) \cong (Z, \tau_2)$ يعطي أن $(X,\tau) \cong (Z, \tau_2)$ (تعدي) □

الأمثلة الثلاثة التالية تبين أن كل الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$ هي هوميومورفك. الطول بالتأكيد هو ليس خاصية تبولوجية. بشكل خاص, الفترة المفتوحة ذات الطول المنتهي مثل $(0, 1)$ هي هوميومورفك لفترة ذات طول غير منتهي مثل $(-\infty, 1)$. في الواقع كل الفترات المفتوحة هي هوميومورفك لـ $\mathbb{R}$.

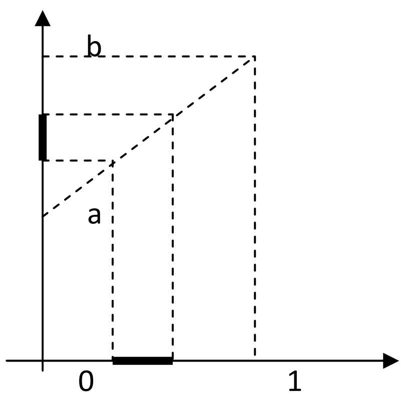
4.2.4 مثال. اثبت أن أي فترتين مفتوحتين غير خاليتين (a, b) و (c, d) هما هوميومورفك.

برهان بالخطوط العريضة.

باستخدام ملاحظة 3.2.4 يكفي أن نبين أن (a, b) هوميومورفك لـ $(0, 1)$ وكذلك (c, d) هوميومورفك لـ $(0, 1)$. ولكن لأن a و b عشوائيات, (ما عدا أن $a < b$), اذا كانت (a, b) هوميومورفك لـ $(0, 1)$ فإن (c, d) هوميومورفك لـ $(0, 1)$. لإثبات أن (a, b) هوميومورفك لـ $(0, 1)$ يكفي أن نجد هوميومورفزم $f : (0, 1) \to (a, b)$.

لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$. تأمل الاقتران $f : (0, 1) \to (a, b)$ المعطى بالقاعدة

$$f(x) = a(1 - x) + bx$$



واضح أن $f : (0, 1) \to (a, b)$ هو واحد لواحد وشامل. وكذلك واضح من الرسم أن صورة أي فترة مفتوحة في $(0, 1)$ باستخدام f هي فترة مفتوحة في (a, b) أي أن

$f($الفترة المفتوحة في $(0, 1)) =$ فترة مفتوحة في (a, b)

ولكن كل مجموعة مفتوحة في $(0, 1)$ هي اتحاد فترات مفتوحة في $(0, 1)$ ولذلك

$f($المجموعة المفتوحة في $(0, 1)) = f($اتحاد فترات مفتوحة في $(0, 1))$

= اتحاد فترات مفتوحة في (a, b)

= مجموعة مفتوحة في (a, b)

لذلك الشرط (IV) في تعريف 1.2.4 متحقق. بنفس الاسلوب نلاحظ أن

$f^{-1}($المجموعة المفتوحة في $(a, b))$ هي مجموعة مفتوحة في $(0, 1)$. لذلك الشرط (III) في تعريف 1.2.4 كذلك متحقق.

[**تمرين:** اكتب البرهان أعلاه بالتفصيل]

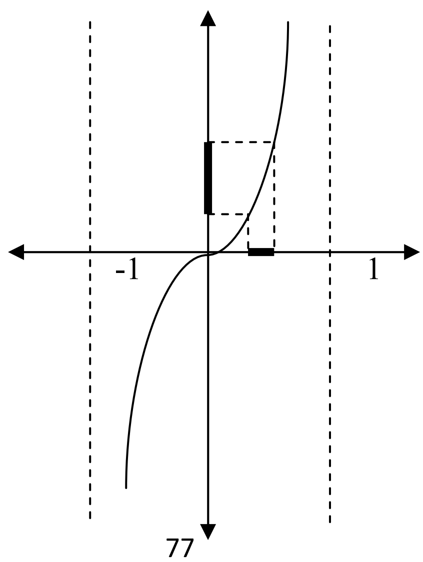
لذلك f هو هوميومورفزم و $(a, b) \cong (0, 1)$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$. مما ورد أعلاه ينتج مباشرة أن $(a, b) \cong (c, d)$ كما هو مطلوب. □

5.2.4 مثال. اثبن أن الفضاء $\mathbb{R}$ هوميومورفك للفترة المفتوحة $(-1, 1)$ مع التبولوجيا العادية.

برهان بالخطوط العريضة. عرف $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ على الشكل

$$f(x) = \frac{x}{1-|x|}$$

من السهولة اثبات أن f هو واحد لواحد وشامل, وبحجة بيانية كالتي في مثال 2.2.4 تبين أن f هو هوميومورفزم.



[اكتب برهان أن f هو هوميومورفزم.]

6.2.4 مثال. أثبت أن كل فترة مفتوحة (a, b) حيث $a < b$ هي هوميومورفك لـ $\mathbb{R}$.

البرهان. هذا ينتج مباشرة من الأمثلة 5.2.4 و 4.2.4 وملاحظة 3.2.4. □

7.2.4 ملاحظة. يمكن أن يثبت بنفس الأسلوب أن أي فترتين $[a, b]$ و $[c, d]$ حيث $a < b$ و $c < d$ هما هوميومورفك. □

تمارين 2.4

1- (I) اذا كانت a, b, c و d أعداد حقيقية حيث $a < b$ و $c < d$ أثبت أن $[a, b] \cong [c, d]$.

(II) اذا كانت a و b أعداداً حقيقية أثبت أن

$$(-\infty, a] \cong (-\infty, b] \cong [a,\infty) \cong [b,\infty)$$

(III) اذا كانت c, d, e و f أعداداً حقيقية حيث $c < d$ و $e < f$ أثبت أن

$$[c, d) \cong [e, f) \cong (c, d] \cong (e, f]$$

(IV) استنتج أنه لأي أعداد حقيقية a و b حيث $a < b$

$$[0, 1) \cong (-\infty, a] \cong [a,\infty) \cong [a, b) \cong (a, b]$$

2- أثبت أن $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$

3- لتكن m و c أعداداً حقيقية لا تساوي الصفر و X فضاء جزئي من $\mathbb{R}^2$ معطى على الشكل

$X = \{(x, y) : y = mx + c\}$. أثبت أن X هوميومورفك لـ $\mathbb{R}$.

4- (I) لتكن X_1 و X_2 المناطق المستطيلة المغلقة في $\mathbb{R}^2$ المعطاة على الشكل

$$X_1 = \{(x, y) : |x| \leq a_1 \text{ and } |y| \leq b_1\}$$

$$X_2 = \{(x, y) : |x| \leq a_2 \text{ and } |y| \leq b_2\}$$

حيث a_1, b_1, a_2 و b_2 هي أعداد حقيقية موجبة. اذا اعطيت X_1 و X_2 التبولوجيا المحدثة من $\mathbb{R}^2$ اثبت أن $X_2 \cong X_1$.

(II) لتكن D_1 و D_2 الأقراص المغلقة المعطاة على الشكل

$$D_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq c_1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq c_2\}$$

حيث c_1 و c_2 هي اعداد حقيقية موجبة. أثبت أن الفضائين التبولوجيين $D_2 \cong D_1$ حيث D_1 و D_2 تملك تبولوجيا الفضاء الجزئي.

(III) أثبت أن $X_1 \cong D_1$.

5- ليكن X_1 و X_2 فضائين جزئيين من $\mathbb{R}$ حيث $X_1 = (0, 1) \cup (3, 4)$ و $X_2 = (0, 1) \cup (1, 2)$. هل $X_2 \cong X_1$ (برر اجابتك.)

6- (زمرة من الهوميومورفزميات Group of homeomorphisms) ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و G مجموعة كل الهوميومورفزميات من X الى X.

(I) أثبت أن G هي زمرة تحت عملية تركيب الاقترانات
(II) اذا كانت $X = [0, 1]$ أثبت أن G غير منتهية
(III) اذا كانت $X = [0, 1]$ هل G زمرة أبيلية (abelian group)؟

7- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين هوميومورفك. أثبت أن

(I) اذا كان (X,τ) فضاء-T_0 فإن (Y, τ_1) فضاء-T_0.
(II) اذا كان (X,τ) فضاء-T_1 فإن (Y, τ_1) فضاء-T_1.
(III) اذا كان (X,τ) فضاء هوسدورف فإن (Y, τ_1) فضاء هوسدورف.
(IV) اذا كان (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية فإن (Y, τ_1) يحقق مسلمة العد الثانية.
(V) اذا كان (X,τ) فضاءً انفصالياً فإن (Y, τ_1) فضاءً انفصالياً.

8*- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً متقطعاً. أثبت أن (X,τ) هوميومورفك لفضاء جزئي من $\mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كانت X معدودة.

3.4 فضاءات ليست هوميومورفك Non-Homeomorphic Spaces

لإثبات أن فضائين تبولوجيين هوميومورفك يجب أن نجد هوميومورفزم بينهما.

ولكن, لإثبات أن فضائين تبولوجيين ليسا هوميومورفك بالعادة هو أصعب لأننا نريد أن نثبت أن ليس هناك هوميومورفزم بينهما. المثال التالي يعطينا فكرة عن كيفية السير في اثبات ذلك.

1.3.4 مثال. أثبت أن $[0, 2]$ ليست هوميومورفك للفضاء الجزئي $[2, 3] \cup [0, 1]$ من $\mathbb{R}$.

البرهان. ليكن $(X,\tau) = [0, 2]$ و $(Y, \tau_1) = [0, 1] \cup [2, 3]$. بما أن

$Y \cap [0, 1] = [0, 1]$ فإن $[0, 1]$ مغلقة في (Y, τ_1) وكذلك بما أن

$Y \cap (-1, 1\frac{1}{2}) = [0, 1]$ فإن $[0, 1]$ مفتوحة في (Y, τ_1).

لذلك Y ليست مترابطة لأن $[0, 1]$ مجموعة جزئية غير خالية مغلقة مفتوحة في Y ولا تساوي Y.

افرض أن $(X,\tau) \cong (Y, \tau_1)$. اذاً يوجد هوميومورفزم $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau_1)$. لذلك $f^{-1}([0, 1])$ مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة في X وهذا يعني أن X ليست مترابطة. هذا خطأ لأن $X = [0, 2]$ هي مترابطة. (انظر تمارين 1.4 # 15.). لذلك لدينا تناقض ولهذا $(X,\tau) \ncong (Y, \tau_1)$. □

ما الذي نتعلمه من هذا؟

2.3.3 تمهيدية. أي فضاء تبولوجي هوميومورفك لفضاء مترابط هو مترابط. □

تمهيدية 2.3.4 تعطينا طريقة واحدة لمحاولة اثبات أن فضائين تبولوجيين ليسا هوميومورفك ... بايجاد خاصية "محفوظة بالهوميومورفزمات" يملكها أحد الفضائين ولا يملكها الآخر.

خلال التمارين قابلنا عدة خصائص "محفوظة بالهوميومورفزمات":

(I) فضاء-T_0,
(II) فضاء-T_1,
(III) فضاء-T_2 أو فضاء هوسدورف,
(IV) فضاء منتظم,
(V) فضاء-T_3,
(VI) تحقيق مسلمة العد الثانية,
(VII) فضاء انفصالي [انظر تمارين 2.4 # 7.]

هناك ايضاً خصائص اخرى

(VIII) فضاء متقطع,
(IX) فضاء غير متقطع,
(X) تبولوجيا منتهي – مغلق,
(XI) تبولوجيا معدود – مغلق.

لذلك مع الترابط نحن نعرف اثنتا عشر خاصية محفوظة بالهوميومورفزمات. كذلك الفضائين التبولوجيين (X,τ) و (Y, τ_1) لا يمكن ان يكونا هوميومورفك اذا كانت X وY لهما عدد مختلف من العناصر. (مثل أن تكون X معدودة وY غير معدودة) او اذا كانت τ وτ_1 لهما عدد مختلف من العناصر.

على الرغم من ذلك عندما نجابه مسألة معينة يمكن ان لا يكون لدينا أي من ما ذكر اعلاه. على سبيل المثال, اثبت ان $(0, 1)$ ليست هوميومورفك لـ $[0, 1]$ أو أثبت أن $\mathbb{R}$ ليست هوميومورفك لـ $\mathbb{R}^2$. سوف نرى كيف نثبت ان هذه الفضاءات ليست هوميومورفك باختصار.

قبل ان نذهب لذلك دعنل نحسم مسألة السؤال التالي: أي الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}$ هي مترابطة؟

3.3.4 تعريف. المجموعة الجزئية S من $\mathbb{R}$ تسمى فترة (interval) اذا كانت تملك الخاصية التالية: اذا كانت $x \in S$, $z \in S$ و $y \in \mathbb{R}$ بحيث ان $x < y < z$, فإن $y \in S$.

4.3.4 ملاحظات. (I) لاحظ أن كل مجموعة أحادية $\{x\}$ هي فترة.

(II) كل فترة لها احد الاشكال التالية $\{a\}$, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,\infty)$.

(III) ينتج من مثال 6.2.4, ملاحظة 7.2.4 وتمارين 2.4 # 1 أن كل فترة هي هوميومورفك لـ $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$ أو $\{0\}$. في تمارين 3.4 # 1 باستطاعتنا أن نعطي عبارة أقوى مستوى.

5.3.4 تمهيدية. الفضاء الجزئي S من $\mathbb{R}$ هو مترابط اذا وفقط اذا كان فترة.

البرهان. أن كل الفترات مترابطة يمكن اثباته بطريقة مشابهة لتمهيدية 3.3.3 باستبدال $\mathbb{R}$ في كل مكان في البرهان بالفترة التي نحاول اثبات انها مترابطة.

بالمقابل, لتكن S مترابطة. افرض أن $x \in S$, $z \in S$, $x < y < z$ و $y \notin S$. اذا $(-\infty, y) \cap S = (-\infty, y] \cap S$ هي مجموعة جزئية مفتوحة ومغلقة في S. لذلك S تملك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة وهي $S \cap (-\infty, y)$. لبيان ان S غير مترابطة يجب أن نبين ان هذه المجموعة المغلقة المفتوحة لا تساوي S وليست خالية. وهي ليست خالية لانها تحوي x. وهي لا تساوي S لأن $z \in S$ ولكن $z \notin S \cap (-\infty, y)$. لذلك S ليست مترابطة. وهذا تناقض. لذلك S هي فترة. □

الآن سنرى سبب التسمية "مترابط". الفضاءات الجزئية من $\mathbb{R}$ مثل $[a, b]$, (a, b) الى آخره هي مترابطة في حين أن فضاءات جزئية مثل

$$X = [0, 1] \cup [2, 3] \cup [5, 6]$$

والتي هي اتحاد لقطع "غير مترابطة" ليست مترابطة

دعنا الآن نعود لمسألة اثبات أن $[0, 1] \ncong (0, 1)$. بداية نقدم ملاحظة تبدو انها بديهية.

6.3.4 ملاحظة. ليكن $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ هوميومورفزماً. لتكن $a \in X$ لذلك $X \setminus \{a\}$ هو فضاء جزئي من X ويملك تبولوجيا محدثة τ_2. كذلك $Y \setminus \{f(a)\}$ هو فضاء جزئي من Y ويملك تبولوجيا محدثة τ_3. اذاً $(X \setminus \{a\}, \tau_2)$ هوميومورفك لـ $(Y \setminus \{f(a)\}, \tau_3)$.

برهان بالخطوط العريضة. عرف $g : X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{f(a)\}$ على الشكل $g(x) = f(x)$ لكل $x \in X \setminus \{a\}$. من السهل اثبات أن g هو هوميومورفزم (اكتب برهان ذلك). □

كنتيجة مباشرة لذلك لدينا

7.3.4 نتيجة. اذا كان a, b, c و d أعداد حقيقية حيث $a < b$ و $c < d$ فإن

(I) $(a, b) \ncong [c, d)$

(II) $(a, b) \ncong [c, d]$

(III) $[a, b) \ncong [c, d]$

البرهان. (I) ليكن $(X, \tau) = [c, d)$ و $(Y, \tau_1) = (a, b)$. افرض أن $(X,\tau) \cong (Y, \tau_1)$. اذا $X \setminus \{c\} \cong Y \setminus \{y\}$ لبعض $y \in Y$. ولكن $X \setminus \{c\} = (c, d)$ هو فترة ولذلك هو مترابط, في حين انن عندما نزيل أي نقطة من (a, b) فإن الفضاء الناتج هو غير مترابط. لذلك باستخدام تمهيدية 2.3.4,

$X \setminus \{c\} \ncong Y \setminus \{y\}$ لكل $y \in Y$.

وهذا تناقض. لذلك $(a, b) \ncong [c, d)$.

(II) $[c, d] \setminus \{c\}$ هي مترابطة في حين ان $(a, b) \setminus \{y\}$ ليست مترابطة لكل $y \in (a, b)$. لذلك $(a, b) \ncong [c, d]$.

(III) افرض أن $[a, b) \cong [c, d]$. اذا $[c, d]\setminus\{c\} \cong [a, b)\setminus\{y\}$ لبعض $y \in [a, b)$. لذلك

$([c, d] \setminus \{c\}) \setminus \{d\} \cong ([a, b) \setminus \{y\}) \setminus \{z\}$ لبعض $z \in [a, b) \setminus \{y\}$ أي أن

لبعض y وz في $[a, b)$ حيث $z \neq y$. ولكن (c, d) مترابطة في حين أن $[a, b) \setminus \{y, z\}$ $(c, d) \cong [a, b) \setminus \{y, z\}$ لبعض y وz في $[a, b)$ حيث $z \neq y$, ليست مترابطة. لذلك لدينا تناقض. وهذا يعني أن $[a, b) \ncong [c, d]$. □

3.4 تمارين

1- استنتج من اعلاه أن كل فترة هي هوميومورفك لواحدة فقط من الفضاءات التالية

$\{0\}$, $(0, 1)$, $[0, 1]$, $[0, 1)$.

2- استنتج من تمهيدية 5.3.4 ان كل فضاء جزئي معدود من $\mathbb{R}$ والذي يملك اكثر من نقطة هو غير مترابط (بشكل خاص $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ هي غير مترابطة).

3- لتكن X هي دائرة الوحدة في $\mathbb{R}^2$ أي أن $X = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ وتملك تبولوجيا الفضاء الجزئي.

(I) أثبت أن $X \setminus \{(1, 0)\}$ هوميومورفك للفترة المفتوحة $(0, 1)$.

(II) استنتج أن $X \ncong (0, 1)$ و $X \ncong [0, 1]$.

(III) ملاحظاً أن لكل نقطة $a \in X$ الفضاء الجزئي $X \setminus \{a\}$ هو مترابط أثبت أن $X \ncong [0, 1)$.

(IV) استنتج أن X ليست هوميومورفك لأي فترة.

4- لتكن Y الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المعطى على الشكل

$$Y = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$$

(I) هل Y هوميومورفك للفضاء X في تمرين 3 أعلاه؟

(II) هل Y هوميومورفك لأي فترة؟

5- لتكن Z الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ المعطى على الشكل

$$Z = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : (x - 3/2)^2 + y^2 = 1\}$$

أثبت أن

(I) Z ليست هوميومورفك لأي فترة, و

(II) Z ليست هوميومورفك لـ X أو Y المعرفان في تمارين 3 و 4 أعلاه.

6- أثبت أن خط سورجنفري ليس هوميومورفك لـ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ أو أي فضاء جزئي من هذه الفضاءات.

7- (I) أثبت أن الفضاء التبولوجي في تمارين 1.1 # 5 (I) ليس هوميومورفك للفضاء في تمارين 1.1 # 9 (II).

(II)* في تمارين 1.1 # 5, هل $(X, \tau_2) \cong (X, \tau_1)$؟

(III)* في تمارين 1.1 # 9, هل $(X, \tau_9) \cong (X, \tau_1)$؟

8- ليكن (X, τ) فضاءً تبولوجياً حيث X هي مجموعة غير منتهية. أثبت كلاً من العبارات التالية (اثبتت أصلاً من قبل John Ginsburg و Bill Sands).

(I)* (X, τ) يملك فضاءً جزئياً هوميومورفك لـ $(\mathbb{N}, \tau_1)$ حيث اما τ_1 هي التبولوجيا غير المتقطعة أو ($\mathbb{N}, \tau_1$) هو فضاء-T_0.

(II)** ليكن (X, τ) فضاء-T_1. اذا كان (X, τ) يملك فضاءً جزئياً هوميومورفك لـ $(\mathbb{N}, \tau_2)$ حيث τ_2 اما ان تكون التبولوجيا منتهي – مغلق أو التبولوجيا المتقطعة.

(III) استنتج من (II) أن أي فضاء هوسدورف غير منتهي يحوي فضاءً جزئياً متقطعاً غير منتهياً ولذلك فضاء جزئي هوميومورفك لـ $\mathbb{N}$ مع التبولوجيا المتقطعة.

(IV)** ليكن (X, τ) فضاء-T_0 وليس فضاء-T_1. اذاً الفضاء (X, τ) يملك فضاءً جزئياً هوميومورفك لـ $(\mathbb{N}, \tau_3)$ حيث τ_3 مكون من $\mathbb{N}$, $\emptyset$ وكل المجموعات $\{n, n + 1, \dots\}$, $n \in N$.

(V)   استنتج من أعلاه أن كل فضاء تبولوجي غير منتهي يملك فضاءً جزئياً هوميومورفك لـ $(\mathbb{N}, \tau_4)$ حيث τ_4 هي التبولوجيا غير المتقطعة, التبولوجيا المتقطعة, التبولوجيا منتهي – مغلق, أو واحد من التبولوجيين الموصوفين في (IV) والمعروفين بتبولوجيا القطعة الابتدائية (initial segment topology) وتبولوجيا القطعة النهائية (final segment topology) على التوالي. بالاضافة لذلك, ليس أي اثنين من هذه التبولوجيات الخمسة على $\mathbb{N}$ هي هوميومورفيك.

9- ليكن (X, τ) و (Y, τ_1) فضاءات تبولوجية. الاقتران $f : X \to Y$ يسمى هوميومورفزم موضعي (local homeomorphism) اذا كانت كل نقطة $x \in X$ تملك جواراً مفتوحاً U بحيث تكون صورة U باستخدام f هي فضاء جزئي مفتوح V في (Y, τ_1) أي أنه اذا كانت التبولوجيا المحدثة على U بواسطة τ هي τ_2 والتبولوجيا المحدثة على $V = f(U)$ بواسطة τ_1 هي τ_3 فإن f هو هوميومورفزم من (U, τ_2) الى (V, τ_3). يقال أن الفضاء التبولوجي (X, τ) هوميومورفك موضعياً للفضاء (Y, τ_1) اذا وجد هوميومورفزم موضعي من (X, τ) الى (Y, τ_1).

(I) اذا كان (X, τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين هوميومورفك أثبت أن (X, τ) هوميومورفك موضعياً للفضاء (Y, τ_1).

(II) اذا كان (X, τ) فضاءً جزئياً مفتوحاً من (Y, τ_1), أثبت أن (X, τ) هوميومورفك موضعياً للفضاء (Y, τ_1).

(III)* أثبت أنه اذا كان $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ هو هوميومورفزم موضعي فإن f يصور كل مجموعة جزئية مفتوحة من (X, τ) الى مجموعة جزئية مفتوحة في (Y, τ_1).

4.4 خلاصة

هناك ثلاثة طرق مهمة لخلق فضاءات تبولوجية جديدة من اخرى قديمة: تكوين فضاءات جزئية, فضاءات الضرب, فضاءات النسبة. سنفحص الثلاثة في الوقت المناسب. تكوين فضاءات جزئية تم دراسته في هذا الفصل. هذا سمح لنا أن نقدم الفضاءات المهمة $\mathbb{Q}$, $[a, b]$, (a, b) الى آخره.

عرفنا المفهوم الرئيسي للهوميومورفزم. لاحظنا أن "$\cong$" هي علاقة تكافؤ. الخاصية تسمى تبولوجية (topological) اذا كانت محفوظة بالهوميومورفزم أي اذا كان $(Y, \tau_1) \cong (X,\tau)$ و (X,τ) يملك الخاصية فإن (Y, τ_1) يجب أن يملك هذه الخاصية. تم بيان أن الترابط هو خاصية تبولوجية. لذلك أي فضاء هوميومورفك لفضاء مترابط هو كذلك مترابط. (عدد آخر من الخواص التبولوجية تم ذكرها). قمنا كذلك بتعريف مفهوم الفترة في $\mathbb{R}$ على شكل صيغة وبينا كذلك أن الفترات هم فقط الفضاءات الجزئية المترابطة في $\mathbb{R}$.

اذا أعطيت فضائين تبولوجيين (X,τ) و (Y, τ_1) فإنه عمل ممتع أن تبين فيما اذا كانا هوميومورفك أم لا. أثبتنا أن كل فترة في $\mathbb{R}$ هي هوميومورفك لواحدة وواحدة فقط من المجموعات $[0, 1]$, $(0, 1)$, $[0, 1)$ و $\{0\}$. في الجزء التالي نرى أن $\mathbb{R}$ هوميومورفك لـ $\mathbb{R}^2$. المسألة الأصعب هي أن تبين أن $\mathbb{R}^2$ ليست هوميومورفك لـ $\mathbb{R}^3$. هذا سوف يعمل لاحقاً بواسطة نظرية منحنى جمردان. لا زالت الحقيقة القائمة أن $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$ اذا وفقط اذا كان $n = m$. هذا يتم التوصل إليه بشكل أفضل عن طريق التبولوجيا الجبرية والتي لها مساس بسيط مع هذا الكتاب.

تمارين 2.4 # 6 قدمت تعريف زمرة من الهوميومورفزميات والذي هو موضوع ممتع ومهم.

الفصل الخامس

الاقترانات المتصلة Continuous Mappings

مقدمة

في معظم فروع الرياضيات البحتة ندرس ما يسمى في نظرية التصنيف "الأشياء" و "الأسهم". في الجبر الخطي الأشياء هي فضاءات متجهة (vector spaces) والأسهم هي التحويلات الخطية (linear transformations). في نظرية الزمر الأشياء هي الزمر (groups) والأسهم هي الهومومورفزمات (homomorphisms) في حين أن في نظرية المجموعات الأشياء هي المجموعات والأسهم هي الاقترانات. في التبولوجيا الأشياء هي الفضاءات التبولوجية. والآن سنقدم الأسهم .... الاقترانات المتصلة.

1.5 الاقترانات المتصلة continuous mappings

بالتأكيد مألوف[1] لدينا تعريف الاقتران المتصل من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$.

الاقتران $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يسمى متصلاً (continuous) اذا كان لكل $a \in R$ ولكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث أن $| x - a | < \delta$ يعطي $| f(x) - f(a) | < \varepsilon$.

ليس واضحاً بشكل مطلق كيف نعمم هذا التعريف في الفضاءات التبولوجية حيث لا نملك "قيمة مطلقة" أو "طرح". لذلك سوف نبحث عن تعريف آخر (مكافيء) للاتصال بحيث يكون ملائماً أكثر للتعميم.

من السهل مشاهدة أن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هو متصل اذا وفقط اذا كان لكل $a \in R$ ولكل فترة $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ حيث $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن $f(x) \in (f(a) - \varepsilon , f(a) + \varepsilon)$ لكل $x \in (a - \delta , a + \delta)$.

هذا التعريف هو تحسين لأنه لا يشمل مفهوم "القيمة المطلقة" ولكنه لا يزال يحوي "طرح". المساندة التالية تبين كيف نتجنب الطرح

---

[1] الجزء المبكر من هذا الفصل يفترض أنك تملك بعض المعرفة في التحليل الحقيقي وبشكل خاص تعريف الاتصال بواسطة ε–δ. اذا لم تكن هذه الحالة صحيحة تحول مباشرة الى تعريف 3.1.5.

1.1.5 مساندة. ليكن f اقتران من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$. F متصل اذا وفقط اذا كان لكل $a \in R$ ولكل مجموعة مفتوحة U تحوي f(a) يوجد مجموعة مفتوحة V تحوي a بحيث $f(V) \subseteq U$.

البرهان. افرض أن f متصل. لتكن $a \in R$ و U مجموعة مفتوحة تحوي f(a). اذاً يوجد أعداد حقيقية c و d بحيث $f(a) \in (c, d) \subseteq U$. اجعل ε تساوي اصغر العددين $d - f(a)$ و $f(a) - c$ لكي يصبح

$$(f(a) - \varepsilon , f(a) + \varepsilon) \subseteq U$$

لأن الأقتران f متصل يوجد $\delta > 0$ بحيث $f(x) \in (f(a) - \varepsilon , f(a) + \varepsilon)$ لكل $x \in (a - \delta , a + \delta)$. لتكن V هي المجموعة المفتوحة $(a - \delta , a + \delta)$. اذاً $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$ كما هو مطلوب.

بالمقابل افرض أن لكل $a \in R$ ولكل مجموعة مفتوحة V تحوي a بحيث $f(V) \subseteq U$. يجب أن نبين أن f متصل. لتكن $a \in R$ و ε أي عدد حقيقي موجب. اجعل $U = (f(a) - \varepsilon , f(a) + \varepsilon)$. لذلك U هي مجموعة مفتوحة تحوي f(a). ولذلك يوجد مجموعة مفتوحة V تحوي a بحيث أن $f(V) \subseteq U$. لأن V هي مجموعة مفتوحة تحوي a يوجد أعداد حقيقية c و d بحيث $a \in (c, d) \subseteq V$. اجعل δ تساوي اصغر الرقمين $d - a$ و $a - c$ لكي يصبح $(a - \delta , a + \delta) \subseteq V$. اذاً لكل $x \in (a - \delta , a + \delta)$, $f(x) \in f(V) \subseteq U$ كما هو مطلوب. لذلك f متصل. □

يمكن أن نستخدم الخاصية الموصوفة في مساندة 1.1.5 لتعريف الاتصال, على أية حال المساندة التالية تمكننا ان نضع تعريفاً أكثر روعة.

2.1.5 مساندة. ليكن f اقتراناً من فضاء تبولوجي (X,τ) الى فضاء تبولوجي (Y, τ'). فإن الشرطين التاليين متكافئين:

(I) لكل $U \in \tau'$، $f^{-1}(U) \in \tau$.

(II) لكل $a \in X$ و $U \in \tau'$ حيث $f(a) \in U$ يوجد $V \in \tau$ بحيث $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$.

البرهان. افرض أن الشرط (I) متحقق. لتكن $a \in X$ و $U \in \tau'$ حيث $f(a) \in U$. اذاً $f^{-1}(U) \in \tau$. اجعل $V = f^{-1}(U)$ فأصبح لدينا $a \in V$، $V \in \tau$ و $f(V) \subseteq U$. لذلك الشرط (II) متحقق.

بالمقابل افرض أن الشرط (II) متحقق. لتكن $U \in \tau'$. اذا كان $f^{-1}(U) = \emptyset$ فمن الواضح ان $f^{-1}(U) \in \tau$. اذا كان $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ افرض أن $a \in f^{-1}(U)$. اذاً $f(a) \in U$. لذلك يوجد $V \in \tau$ بحيث $a \in V$ و $f(V) \subseteq U$. لذلك لكل $a \in f^{-1}(U)$ يوجد $V \in \tau$ بحيث $a \in V \subseteq f^{-1}(U)$. باستخدام نتيجة 9.2.3 هذا يعطي ان $f^{-1}(U) \in \tau$. لذلك الشرط (I) متحقق.

بوضع المساندات 1.1.5 و 2.1.5 معاً نلاحظ ان $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هو متصل اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة U في $\mathbb{R}$، $f^{-1}(U)$ هي مجموعة مفتوحة.

هذا يقودنا لتعريف مفهوم الاقتران المتصل بين فضائين تبولوجيين كما يلي:

3.1.5 تعريف. ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتراناً من X الى Y. الاقتران $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ يسمى اقتراناً متصلاً (continuous mapping) اذا كان لكل $U \in \tau_1$، $f^{-1}(U) \in \tau$.

من الملاحظات أعلاه نلاحظ أن هذا التعريف للاتصال ينطبق مع التعريف العادي عندما $(X, \tau) = (Y, \tau_1) = \mathbb{R}$.

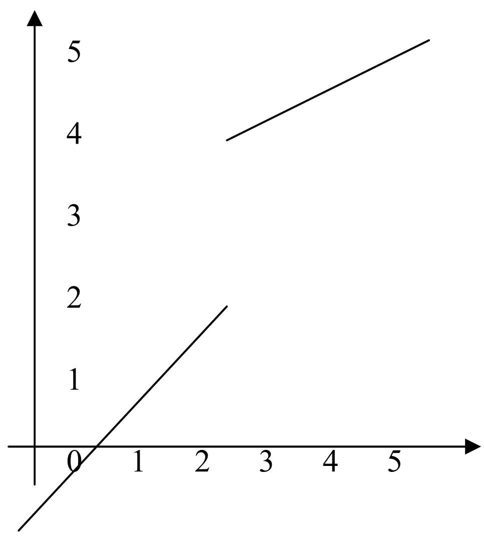
دعنا نذهب الى بعض الامثلة السهلة لنرى جمال هذا التعريف للاتصال عند التطبيق والممارسة.

4.1.5 مثال. تأمل الاقتران $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على لشكل $f(x) = x$ لكل $x \in \mathbb{R}$ أي أن f هو الاقتران المحايد. لأي مجموعة مفتوحة U في $\mathbb{R}$ نلاحظ أن $f^{-1}(U) = U$ ولذلك هي مفتوحة وهذا يعني أن f متصل.□

5.1.5 مثال. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى بالقاعدة $f(x) = c$ حيث c ثابت ولكل $x \in \mathbb{R}$. لتكن U أي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}$. واضح أن $f^{-1}(U) = \mathbb{R}$ اذا كانت $c \in U$ و $\emptyset$ اذا كانت $c \notin U$. في كلتا الحالتين $f^{-1}(U)$ مفتوحة. لذلك f متصل. □

6.1.5 مثال. تأمل الاقتران $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرف على الشكل

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \le 3 \\ \frac{1}{2}(x + 5), & x > 3 \end{cases}$$



تذكر أن الاقتران هو متصل اذا وفقط اذا كانت الصورة العكسية للمجموعة المفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

لذلك لإثبات أن f ليس متصلا يجب أن نجد فقط مجموعة مفتوحة واحدة U بحيث أن $f^{-1}(U)$ ليست مفتوحة.

لاحظ أن $f^{-1}((1, 3)) = (2, 3]$ هي مجموعة ليست مفتوحة. لذلك f ليس متصلاً. □

لاحظ أن مساندة 2.1.5 يمكن اعادة صياغتها الآن بالطريقة التالية[2].

7.1.5 تمهيدية. ليكن f اقتراناً من فضاء تبولوجي (X, τ) الى الفضاء (Y, τ'). الاقتران f متصل اذا وفقط اذا كان لكل $X \ni x$ ولكل $\tau' \ni U$ حيث $f(x) \in U$, يوجد $V \in \tau$ بحيث أن $x \in V$ و $f(V) \subseteq U$.

8.1.5 تمهيدية. لتكن (X, τ), (Y, τ') و (Z, τ_2) فضاءات تبولوجية. اذا كان $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ و $g : (Y, \tau_1) \to (Z, \tau_2)$ اقترانات متصلة فإن الاقتران المركب $g \text{ o } f : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$ متصل.

البرهان.

لإثبات أن الاقتران المركب $g \text{ o } f : (X, \tau) \to (Z, \tau_2)$ هو متصل يجب أن نبين انه اذا كانت $U \in \tau_2$ فإن $(g \text{ o } f)^{-1}(U) \in \tau$.

لكن $(g \text{ o } f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

لتكن U مفتوحة في (Z, τ_2). بما أن g متصل فإن $g^{-1}(U)$ مفتوحة في τ_1. لذلك $f^{-1}(g^{-1}(U))$ مفتوحة في τ لأن f متصل. ولكن $(g \text{ o } f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. لذلك $g \text{ o } f$ متصل. □

النتيجة التالية تبين أن الاتصال يمكن أن يوصف عن طريق المجموعات المغلقة بدلاً من المجموعات المفتوحة اذا رغبنا.

9.1.5 تمهيدية. ليكن (X, τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين. الاقتران $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ متصل اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزءية مغلقة S في Y, $f^{-1}(S)$ مجموعة جزئية مغلقة في X.

البرهان. هذه النتيجة تنتج مباشرة من ملاحظة أن

$f^{-1}(S \text{ متممة}) = f^{-1}(S) \text{ متممة}$ □

---

[2] اذا لم تكن قد قرأت مساندة 2.1.5 وبرهانها يجب أن تعمل ذلك الآن.

10.1.5 ملاحظة. هناك علاقة بين الاقترانات المتصلة والهوميومورفزمات: اذا كان $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ هوميومورفزم فإنه اقتران متصل. بالتأكيد ليس كل اقتران متصل هو هوميومورفزم.

على كل حال التمهيدية التالية, التي برهانها ينتج من تعريف "الاتصال" وتعريف "هوميومورفزم" تخبر بكامل القصة.

11.1.5 تمهيدية. ليكن (X, τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتران من X الى Y. فإن f هو هوميومورفزم اذا وفقط اذا كان

(I) f متصل,

(II) f واحد لواحد وشامل أي أن الاقتران النظير $f^{-1} : Y \to X$ موجود,

(III) f^{-1} متصل. □

التمهيدية التالية هي نتيجة مفيدة تخبرنا أن تقييد (restriction) الاقتران المتصل هو اقتران متصل. برهانها الروتيني ترك للقارىء – انظر كذلك تمارين 1.5 # 8.

12.1.5 تمهيدية. ليكن (X, τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين, $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتران متصل, A مجموعة جزئية من X و τ_2 التبولوجيا المحدثة على A. بالاضافة لذلك ليكن $g : (A, \tau_2) \to (Y, \tau_1)$ هو تقتتد f على A, أي أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in A$. فإن g متصل.

تمارين 1.5

1- (I) ليكن $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتراناً ثابتاً. أثبت أن f متصل.

(II) ليكن $f : (X, \tau) \to (X, \tau)$ الاقتران المحايد. أثبت أن f متصل.

2- ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى بالشكل التالي

(I) أثبت أن f غير متصل باستخدام طريقة مثال 6.1.5.

(II) أوجد $f^{-1}(\{1\})$ وباستخدام تمهيدية 9.1.5 استنتج أن f

3- ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى بالشكل التالي

هل f متصل؟ (برر اجابتك.)

4- ليكن (X,τ) الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}$ المعطى على الشكل $X = [0, 1] \cup [2, 4]$. عرف $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ على الشكل

أثبت أن f متصل (هل هذا فاجأك؟)

5- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و $\mathfrak{B}_1$ قاعدة للتبولوجيا τ_1. أثبت أن الاقتران $f :$ $(X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ هو متصل اذا وفقط اذا كان $f^{-1}(U) \in \tau$ لكل $U \in \mathfrak{B}_1$.

6- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتران من X الى Y. اذا كان (X,τ) فضاءً متقطعاً, أثبت أن f متصل.

7- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتران من X الى Y. اذا كان (X,τ) فضاءً غير متقطعاً, أثبت أن f متصل.

8- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتراناً متصلاً. لتكن A مجموعة جزئية من X, و τ_2 التبولوجيا المحدثة على A, $B = f(A)$, τ_2 التبولوجيا المحدثة على B و g $(A, \tau_2) \to (B, \tau_3)$: هو تقييد f على A. أثبت أن g متصل.

9- ليكن f اقتراناً من الفضاء (X,τ) الى الفضاء (Y, τ'). اثبت أن f متصل اذا وفقط اذا كان لكل $x \in X$ ولكل جوار N لـ $f(x)$ يوجد جوار M لـ x بحيث أن $f(M) \subseteq N$.

10- لتكن τ_1 و τ_2 تبولوجيان على مجموعة X. τ_1 تسمى تبولوجيا أرق (finer topology) من τ_2 (و τ_2 تسمى تبولوجيا أشد (coarser topology) من τ_1) اذا كان $\tau_2 \subseteq \tau_1$. أثبت أن

(I) التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ أرق من التبولوجيا منتهي – مغلق على $\mathbb{R}$.

(II) الاقتران المحايد $f : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ متصل اذا وفقط اذا كان τ_1 تبولوجيا أرق من τ_2.

11- ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اقتراناً متصلاً بحيث أن $f(q) = 0$ لكل عدد نسبي q. أثبت أن $f(x) = 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

12- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتراناً متصلاً. اذا كان f واحداً لواحد, أثبت أن

(I) (Y, τ_1) هوسدورف يعطي أن (X,τ) هوسدورف.

(II) (Y, τ_1) فضاء-T_1 يعطي أن (X,τ) فضاء-T_1.

13- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتران من X الى Y. أثبت ان f متصل اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة جزئية A من X, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

[مساعدة: استخدم تمهيدية 9.1.5.]

2.5 نظرية القيمة الوسيطية Intermediate Value Theorem

1.2.5 تمهيدية. ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ شامل ومتصل. اذا كان (X,τ) مترابط فإن (Y, τ_1) مترابط.

البرهان. افرض أن (Y, τ_1) ليس مترابطاً. اذاً هو يملك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة U بحيث $U \neq \emptyset$ و $U \neq Y$. بما أن f متصل فإن $f^{-1}(U)$ هي مجموعة مفتوحة وكذلك مغلقة باستخدام تمهيدية 9.1.5 أي أن $f^{-1}(U)$ هي مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة في X. الآن $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ لأن f شامل و $U \neq \emptyset$. كذلك $f^{-1}(U) \neq X$ لأن لو ذلك كان صحيحاً فإن $U = Y$ لكون f شاملاً. لذلك (X,τ) ليس مترابطاً. وهذا تناقض. لذلك (Y, τ_1) هو مترابط. □

2.2.5 ملاحظات. (I) التمهيدية أعلاه ستكون خاطئة اذا تم اسقاط شرط "شامل". (جد مثالاً على ذلك.)

(II) ببساطة, تمهيدية 1.2.5 تقول: أي صورة متصلة لمجموعة مترابطة هي مترابطة.

(III) تمهيدية 1.2.5 تخبرنا أنه اذا كان (X,τ) فضاءً مترابطاً و (Y, τ') غير مترابط فإنه لا يوجد أي اقتران شامل من (X,τ) الى (Y, τ') بحيث يكون متصلاً. على سبيل المثال, في حين أن هناك عدد غير منتهي من الاقترانات الشاملة من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{Q}$ (أو $\mathbb{Z}$) ليس أي منهم متصلاً. في الواقع في تمارين 2.5 # 10 لاحظنا أن الاقترانات المتصلة من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{Q}$ (أو الى $\mathbb{Z}$) هي الاقترانات الثابتة. □

النسخة المقوية التالية لمفهوم الترابط مفيدة في أغلب الأحيان

3.2.5 تعريف. الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى مترابط مسارياً (path-connected) اذا كان لكل زوج a و b من النقاط المختلفة في X يوجد اقتران متصل $f : [0, 1] \to (X, \tau)$ بحيث $f(0) = a$ و $f(1) = b$. الاقتران f يسمى مساراً يربط a و b.

4.2.5 مثال. من السهل مشاهدة أن كل فترة هي مترابطة مسارياً. □

5.2.5 مثال. لكل $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ مترابط مسارياً. □

6.2.5 تمهيدية. كل فضاء مترابط مسارياً هو مترابط.

البرهان. ليكن (X,τ) فضاءً مترابطاً مسارياً وافرض انه ليس مترابطاً. اذاً هو يملك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة U بحيث $U \neq \emptyset$ و $U \neq X$. لذلك يوجد a و b بحيث $a \in U$ و $b \in X \setminus U$. لأن (X,τ) مترابط مسارياً يوجد اقتران $f : [0, 1] \to (X, \tau)$ بحيث $f(0) = a$ و $f(1) = b$.

على كل حال, $f^{-1}(U)$ هي مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة من $[0, 1]$. لان $a \in U$, $0 \in f^{-1}(U)$ ولذلك $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. لأن $b \notin U$, $1 \notin f^{-1}(U)$ ولذلك $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$. وهذا يعني أن $f^{-1}(U)$ هي مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة من $[0, 1]$, $f^{-1}(U) \neq \emptyset$ و $f^{-1}(U) \neq [0, 1]$ مما يناقض ترابط المجموعة $[0, 1]$. لذلك (X,τ) مترابط. □

7.2.5 ملاحظة. عكس تمهيدية 6.2.5 ليس صحيحاً أي أن ليس كل فضاء مترابط هو مترابط مسارياً. كمثال على مثل هذا الفضاء هو الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^2$ التالي:

$$X = \{(x, y) : y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

[تمارين 2.5 # 6 يبين أن X مترابط. كون X ليس مترابطاً مسارياً يمكن مشاهدته باثبات عدم وجود مسار يربط $(0, 0)$ مع مثلاً النقطة $(1/\pi, 0)$. ارسم شكلاً وحاول أن تقنع نفسك بذلك.] □

نستطيع الآن أن نبين أن $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}$.

8.2.5 مثال. واضح أن $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ليس مترابطاً مسارياً ولذلك باستخدام تمهيدية 6.2.5 هو مترابط. ولكن $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ لأي $a \in \mathbb{R}$ ليس مترابطاً. لذلك $\mathbb{R}^2 \ncong \mathbb{R}$. □

الآن سنقدم نظرية ويرستراص (Weirestrass) للقيمة الوسيطية والتي هي تطبيق جميل للتبولوجيا على نظرية الاقترانات للمتغير الحقيقي. المفهوم التبولوجي الحاسم في النتيجة هو الترابط.

9.2.5 نظرية. (نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية) ليكن $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلاً وليكن $f(a) \neq f(b)$. اذا لكل عدد p بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد نقطة $c \in [a, b]$ بحيث $f(c) = p$.

البرهان. لأن $[a, b]$ مترابطة و f متصل, تمهيدية 1.2.5 تقول أن $f([a, b])$ مترابطة. باستخدام تمهيدية 5.3.4 هذا يعطي أن $f([a, b])$ هي فترة. الآن $f(a)$ و $f(b)$ هما في $f([a, b])$. لذلك اذا كانت p بين $f(a)$ و $f(b)$, فإن $p \in f([a, b])$ أي أن $p = f(c)$ لبعض $c \in [a, b]$. □

10.2.5 نتيجة. اذا كان $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ متصلاً بحيث أن $f(a) > 0$ و $f(b) < 0$ فإنه يوجد $x \in [a, b]$ بحيث $f(x) = 0$. □

11.2.5 نتيجة. (نظرية النقطة الثابتة) ليكن f اقتراناً متصلاً من $[0, 1]$ الى $[0, 1]$. اذاً يوجد $z \in [0, 1]$ بحيث $f(z) = z$ (النقطة z تسمى نقطة ثابتة fixed point).

البرهان. اذا كان $f(0) = 0$ أو $f(1) = 1$ النتيجة واضح أنها صحيحة. لذلك يكفي أن نعتمد الحالة عندما $f(0) > 0$ و $f(1) < 1$.

ليكن $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ معرف على الشكل $g(x) = x - f(x)$. واضح أن g متصل, $g(0) = -f(0) < 0$ و $g(1) = 1 - f(1) > 0$. لذلك باستخدام نتيجة 10.2.5 يوجد $z \in [0, 1]$ بحيث أن $g(z) = 0$ أي أن $z - f(z) = 0$ أو $f(z) = z$.

12.2.5 ملاحظة. نتيجة 11.2.5 هي حالة خاصة من نظرية مهمة جداً تسمى نظرية برووير (Brouwer) للنقطة الثابتة والتي تقول: اذا صورت مكعب بعده n (n-dimensional cube) باقتران متصل الى نفسه فإنه يوجد نقطة ثابتة. هناك عدة براهين لهذه النظرية, ولكن معظمها تعتمد على طرق التبولوجيا الجبرية. أحد البراهين المبسطة معطى في الصفحات 238 – 239 من كتاب

"Introduction to Set Theory and Topology" لـ K. Kuratowski, (Pergamon Press, 1961)

تمارين 2.5

1- أثبت أن الصورة المتصلة لفضاء مترابط مسارياً هي مترابطة مسارياً.

2- ليكن f اقتراناً متصلاً من الفترة $[a, b]$ لنفسها, حيث a و b في $\mathbb{R}$ و $a < b$. أثبت أنه يوجد نقطة ثابتة.

3- (I) أعط مثالاً يبين أن نتيجة 11.2.5 خاطئة اذا بدلنا $[0, 1]$ في كل مكان بالفترة $(0, 1)$.

(II) يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يملك خاصية النقطة الثابتة (fixed point property) اذا كان كل اقتران متصل من (X,τ) لنفسه يملك نقطة ثابتة. أثبت أن الفترات الوحيدة التي تملك خاصية النقطة الثابتة هي الفترات المغلقة.

(III) لتكن X مجموعة تحوي على الأقل نقطتين. أثبت أن الفضاء المتقطع (X,τ) و الفضاء غير المتقطع (X,τ') لا يملكان خاصية النقطة الثابتة.

(IV) هل الفضاء الذي له التبولوجيا منتهي – مغلق يملك خاصية النقطة الثابتة؟

(V) أثبت أنه اذا كان الفضاء (X,τ) يملك خاصية النقطة الثابتة و (Y, τ_1) فضاء هوميومورفك لـ (X,τ) فإن (Y, τ_1) يملك خاصية النقطة الثابتة.

4- لتكن $\{A_j : j \in J\}$ عائلة من الفضاءات الجزئية المترابطة من فضاء تبولوجي (X,τ). اذا كان $\bigcap_{j\in J} A_j \neq \phi$, أثبت أن $\bigcap_{j\in J} A_j$ مترابط.

5- لتكن A فضاء جزئي مترابط من الفضاء التبولوجي (X,τ). أثبت أن $\overline{A}$ كذلك هو مترابط. في الواقع بين أنه اذا كان $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ فإن B مترابطة.

6- (I) أثبت أن الفضاء الجزئي $Y = \{(x, y) : y = \sin (1/x) , 0 < x \leq 1\}$ من $\mathbb{R}^2$ هو مترابط.

[مساعدة: استخدم تمهيدية 5.2.1.]

(II) أثبت أن $\overline{Y} = Y \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$

(III) باستخدلم تمرين 5 لاحظ أن $\overline{Y}$ مترابطة.

7- لتكن E مجموعة كل النقاط في $\mathbb{R}^2$ التي احداثياها الاثنان أعداد نسبية. أثبت أن الفضاء $\mathbb{R}^2 \setminus E$ مترابط مسارياً.

*8- لتكن C أي مجموعة جزئية معدودة من $\mathbb{R}^2$. أثبت أن $\mathbb{R}^2 \setminus C$ مترابط مسارياً.

9- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و a أي نقطة في X. مركبة a في X (The component in X of a), $C_X(a)$ تعرف بأنها اتحاد كل المجموعات الجزئية المترابطة من X والتي تحوي a. أثبت أن

(I) $C_X(a)$ مترابطة. (استخدم تمرين 4 أعلاه.)

(II) $C_X(a)$ هي أكبر مجموعة مترابطة تحوي a.

(III) $C_X(a)$ مغلقة في X. (استخدم تمرين 5 أعلاه.)

10- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى غير مترابط بالكامل (totally disconnected) اذا كانت كل مجموعة جزئية مترابطة وغير خالية هي مجموعة احادية. أثبت العبارات التالية:

(I) (X,τ) غير مترابط بالكامل اذا وفقط اذا كان لكل $X \ni a$, $C_X(a) = \{a\}$. (لاحظ الرمز في تمرين 9.)

(II) المجموعة $\mathbb{Q}$ المكونة من كل الأعداد النسبية مع التبولوجيا العادية هي غير مترابطة بالكامل.

(III) اذا كان f اقتران متصل من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{Q}$ أثبت أنه يوجد $c \in \mathbb{Q}$ بحيث $f(x) = c$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

(IV) كل فضاء جزئي من فضاء غير مترابط بالكامل هو غير مترابط بالكامل.

(V) كل فضاء جزئي معدود من $\mathbb{R}^2$ هو غير مترابط بالكامل.

(VI) خط سورجنفري هو غير مترابط بالكامل.

11- (I) باستخدام تمرين 9 عرف بطريقة فطرية "المركبة المسارية" (path – component) لنقطة في فضاء تبولوجي.

(II) أثبت أن في أي فضاء تبولوجي كل مركبة مسارية هي فضاء مترابط مسارياً.

(III) اذا كان (X,τ) فضاءً تبولوجياً يملك خاصية أن كل نقطة في X لها جواراً مترابطاً مسارياً, أثبت أن كل مركبة مسارية هي مجموعة مفتوحة. استنتج أن كل مركبة مسارية هي كذلك مجموعة مغلقة.

(IV) باستخدام (III) أثبت أن أي مجموعة جزئية مفتوحة في $\mathbb{R}^2$ هي مترابطة اذا وفقط اذا كانت مترابطة مسارياً.

12*- لتكن A و B مجموعات جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). اذا كانت كلتا المجموعتين A و B مفتوحتين أو كلتاهما مغلقتين وكلتا $A \cup B$ و $A \cap B$ مترابطتين, أثبت أن A و B مترابطتين.

13- يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) بعده صفر (zero dimensional) اذا وجد قاعدة للتبولوجيا مكونة من مجموعات مغلقة مفتوحة, أثبت العبارات التالية:

(I) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ فضاءات بعدها صفر

(II) القضاء الجزئي من فضاء بعده صفر يكون بعده صفر

(III) أي فضاء هوسدورف وبعده صفر هو غير مترابط بالكامل. (هنظر تمرين 10 أعلاه.)

(IV) كل فضاء غير متقطع يكون بعده صفر

(V) كل فضاء متقطع يكون بعده صفر

(VI) الفضاءات غير المتقطعة التي تحوي أكثر من نقطة هي ليست غير مترابطة بالكامل

(VII) أي فضاء-T_0 وبعده صفر هو فضاء-T_2

(VIII)* أي فضاء جزئي من $\mathbb{R}$ يكون بعده صفر اذا وفقط اذا كان غير مترابط بالكامل.

14- أثبت أن كل هوميومورفزم موضعي هو اقتران متصل. (انظر تمارين 3.4 # 9.)

3.5 خلاصة

في هذا الفصل قلنا أن الاقتران بين فضاءين تبولوجيين يسمى "متصل" اذا كان يملك الخاصية أن الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة. هذا تعريف رائع وسهل الفهم. تم مقارنة هذا التعريف مع ما شاهدناه في التحليل الحقيقي والذي ذكر في بداية هذا الفصل. لقد عممنا تعريف التحليل الحقيقي ليس من أجل التعميم ولكن بالاحرى لرؤية الذي يحدث حقاً.

تبدو نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية بالحدس أنها واضحة ولكن الآن نرى انها تتبع من حقيقة أن $\mathbb{R}$ مترابطة وأن أي صورة متصلة لفضاء مترابط هي مترابطة.

قدمنا خاصية أقوى من مترابط وهي مترابط مسارياً. في عدة حالات لا يكفي أن يكون الفضاء مترابطاً يجب أن يكون مترابطاً مسارياً. هذه الخاصية تلعب دوراً مهماً في التبولوجيا الجبرية.

سوف نعود لنظرية برووير للنقطة الثابتة في الوقت المناسب. هي نظرية قوية. نظريات النقطة الثابتة تلعب أدواراً مهمة في فروع مختلفة من الرياضيات تشمل التبولوجيا, التحليل الأقتراني والمعادلات التفاضلية. لا زال هو موضوع للنشاط البحثي الآن.

في تمارين 2.5 # 9 و # 10 قابلنا مفاهيم "مركبة" و "غير مترابط بالكامل". كلا الاثنين مهمان لفهم الترابط.

الفصل السادس

الفضاءات المترية Metric Spaces

مقدمة

إن الصنف الأكثر أهمية في الفضاءات التبولوجية هو صنف الفضاءات المترية. الفضاءات المترية تزودنا بمصدر غني للأمثلة في التبولوجيا. ولكن أكثر من ذلك, معظم التطبيقات التبولوجية في التحليل هي عن طريق الفضاءات المترية.

مفهوم الفضاء المتري قدم في عام 1906 بواسطة Maurice Frechet وطور وأعطي إسماً بواسطة Felix Hausdorff في 1914 (Hausdorff [97]).

1.6 الفضاءات المترية Metric Spaces

1.1.6 تعريف. لتكن X مجموعة غير خالية و d اقتران قيمة حقيقية معرف على $X \times X$ بحيث لكل $a, b \in X$:

(I) $d(a, b) \geq 0$ و $d(a, b) = 0$ اذا وفقط اذا كان $a = b$

(II) $d(a, b) = d(b, a)$ و

(III) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ [المتباينة المثلثية] لكل a, b و c في X.

فإن d يسمى مسافة (metric) على X, (X, d) يسمى فضاء متري و $d(a, b)$ يشار إليها كمسافة بين a و b.

2.1.6 مثال. الاقتران $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل

$d(a, b) = |a - b|$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$

هو مسافة على المجموعة $\mathbb{R}$ لأن

(I) $|a - b| \geq 0$ لكل a و b في $\mathbb{R}$ و$|a - b| = 0$ اذا وفقط اذا كان $a = b$.

(II) $|a - b| = |b - a|$ و

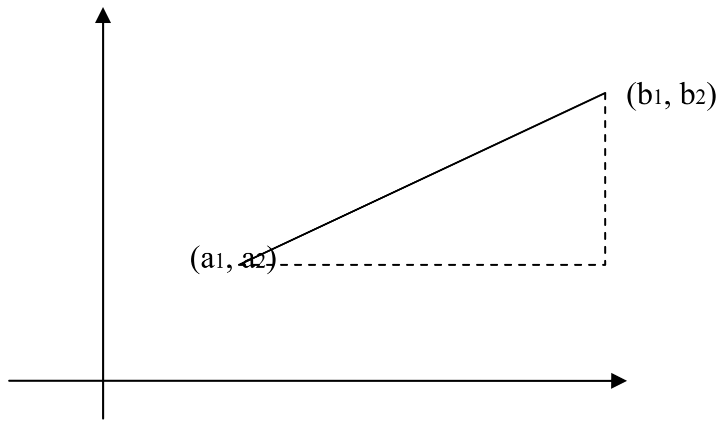
(III) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ (استنتج ذلك من $|x + y| \leq |x| + |y|$.)

نسمي d المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}$ (Euclidean metric on $\mathbb{R}$) □

3.1.6 مثال. الاقتران $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل

$$d((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

هو مسافة على $\mathbb{R}^2$ تسمى المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}^2$.



4.1.6 مثال. لتكن X مجموعة غير خالية و d الاقتران من $X \times X$ الى $\mathbb{R}$ المعرف على الشكل

$$d(a,b) = \begin{cases} 0, & a = b \\ 1, & a \neq b \end{cases}$$

فإن d هو مسافة على X تسمى المسافة المتقطعة (the discrete metric) □

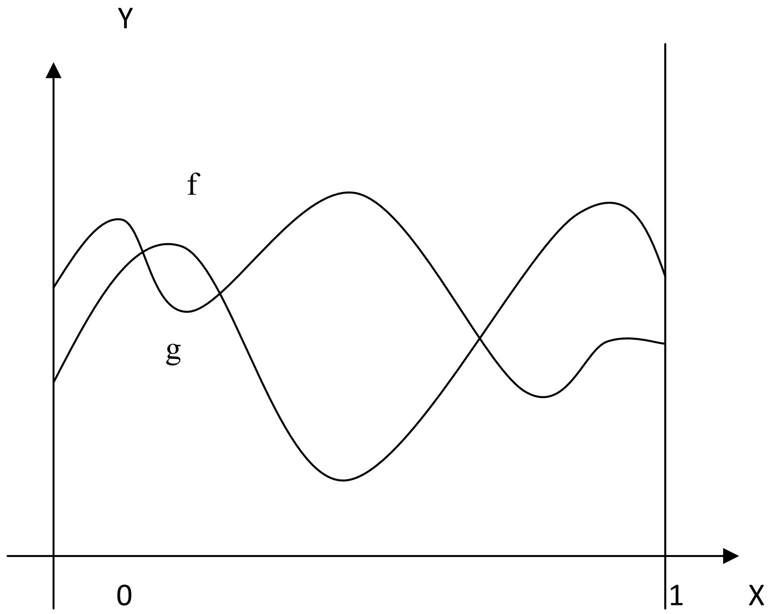
من الامثلة المهمة على الفضاءات المترية هي فضاءات الاقترانات (function spaces). في هذه الفضاءات المجموعة X التي نضع عليها مسافة هي مجموعة اقترانات.

5.1.6 مثال. لتكن $C[0, 1]$ تشير الى مجموعة الاقترانات المتصلة من $[0, 1]$ الى $\mathbb{R}$. المسافة تعرف على هذه المجموعة على الشكل

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

حيث f و g في $C[0, 1]$.

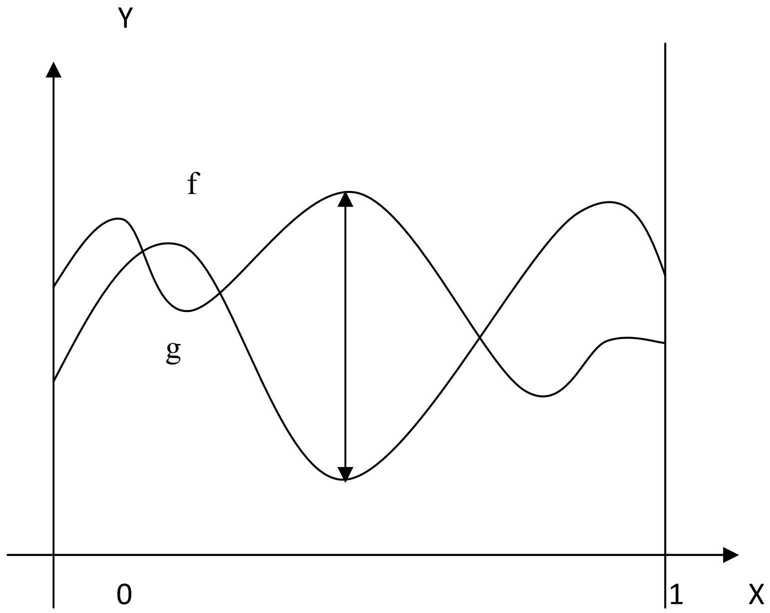
التفكير اللحظي يجب ان يخبرك ان $d(f, g)$ هو مساحة المنطقة الواقعة بين منحنيي الاقترانين والخطين $x = 0$ و $x = 1$ كما هو موضح أدناه



6.1.6 مثال. مرة اخرى لتكن [0, 1]C هي مجموعة كل الاقترانات المتصلة من [0, 1] الى $\mathbb{R}$. مسافة اخرى تعرف على [0, 1]C كما يلي:

$$d^*(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$$

واضح ان $d^*(f, g)$ هو فقط أكبر فجوة بين رسمي الاقترانين f و g



7.1.6 مثال. يمكن أن نعرف مسافة اخرى على $\mathbb{R}^2$ بجعل

$$d^*((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{| a_1 - b_1|, | a_2 - b_2|\}$$

حيث $\max\{x, y\}$ يساوي أكبر القيمتين x و y.

8.1.6 مثال. أيضاً مسافة اخرى على $\mathbb{R}^2$ تعطى على الشكل

$$d_1((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = | a_1 - b_1| + | a_2 - b_2|$$

مصدر غني للأمثلة في الفضاءات المترية هو عائلة الفضاءات المتجهة المقاسة (normed vector spaces)

9.1.6 مثال. لتكن V فضاء متجه على حقل الاعداد الحقيقية او المركبة. الطول || || على V هو اقتران من V الى $\mathbb{R}$ بحيث أن لكل $a, b \in V$ ولكل λ في الحقل

(I) $\|a\| \geq 0$ و $\|a\| = 0$ اذا وفقط اذا كان $a = 0$

(II) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ و

(III) $\|\lambda a\| = |\lambda|\, \|a\|$.

الفضاء المتجه المقاس (a normed vector space) (|| ||, V) هو فضاء متجه V مع طول || ||.

ليكن (|| ||, V) هو أي فضاء متجه مقاس. اذا يوجد مسافة d على المجموعة V معطاة على الشكل $d(a, b) = \|a - b\|$ حيث $a, b \in V$. من السهل اختبار أن d هو في الواقع مسافة. لذلك كل فضاء متجه مقاس هو فضاء متري.

على سبيل المثال $\mathbb{R}^3$ هو فضاء متجه مقاس اذا جعلنا

$$\|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad \text{لكل} \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$$

لذلك $\mathbb{R}^3$ يصبح فضاءً مترياً اذا جعلنا

$$d((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) = \|(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)\|$$

$$= \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}$$

في الحقيقة $\mathbb{R}^n$, لاي عدد صحيح موجب n, هو فضاء متجه مقاس اذا جعلنا

$$\|(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2}$$

لذلك $\mathbb{R}^n$ يصبح فضاءً مترياً اذا جعلنا

$$d((a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n)) = \|(a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)\|$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2} \qquad \square$$

في $(\mathbb{N}, \|\ \ \|)$ الكرة المفتوحة التي مركزها a ونصف قطرها r تعرف بأنها المجموعة

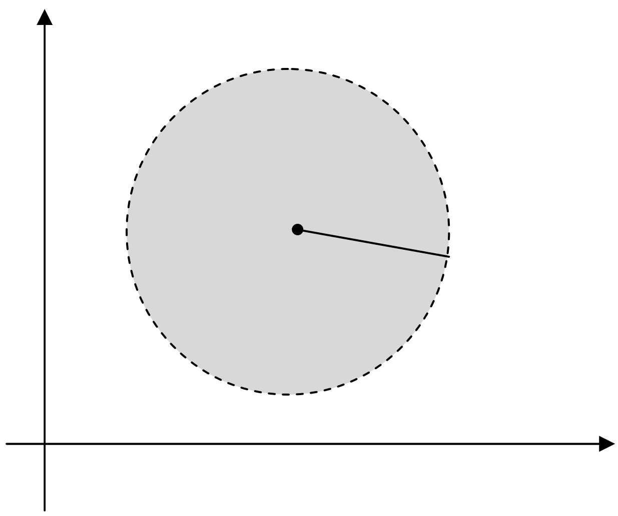
$$B_r(a) = \{x : x \in N, \|x - a\| < r\}$$

هذا يوحي بالتعريف التالي للفضاءات المترية

10.1.6 تعريف. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و r أي عدد حقيقي موجب. الكرة المفتوحة حول $a \in X$ وبنصف قطر r هي المجموعة $B_r(a) = \{x : x \in X, d(a, x) < r\}$.

11.1.6 مثال. في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية, $B_r(a)$ هي الفترة المفتوحة $(a - r, a + r)$. □

12.1.6 مثال. في $\mathbb{R}^2$ مع المسافة الاقليدية, $B_r(a)$ هي القرص المفتوح الذي مركزه a ونصف قطره r.

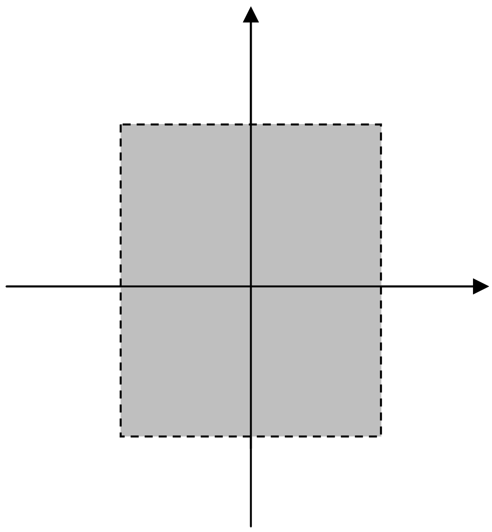


□

13.1.6 مثال. في $\mathbb{R}^2$ مع المسافة d^* المعطاة على الشكل

$$d^*((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

الكرة المفتوحة $B_1((0, 0))$ تشبه

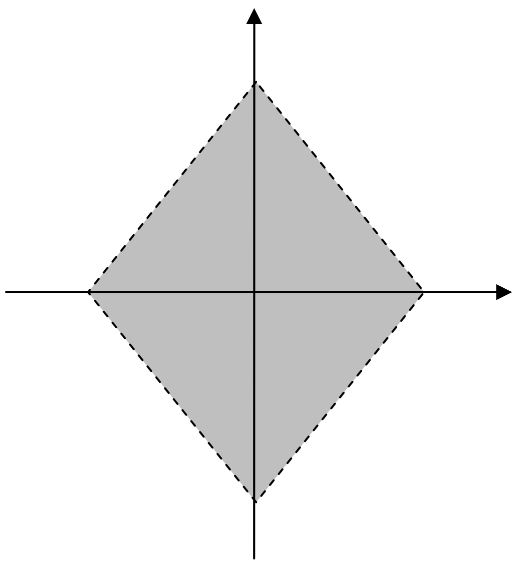


□

14.1.6 مثال. في $\mathbb{R}^2$ مع المسافة d_1 المعطاة على الشكل

$$d_1((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

الكرة المفتوحة $B_1((0, 0))$ تشبه



□

برهان المساندة التالية سهل الى حد بعيد (خاصة اذا رسمت رسماً بيانياً) ولذلك يترك للقارىء لتجهيزه.

15.1.6 مساندة. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و a و b نقطتين في X. بالاضافة لذلك لتكن δ_1 و δ_2 عددين حقيقيين موجبين. اذا كانت $c \in B_{\delta 1}(a) \cap B_{\delta 2}(b)$ فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث $B_\delta(c) \subseteq B_{\delta 1}(a) \cap B_{\delta 2}(b)$.

النتيجة التالية تنتج بطريقة روتينية من مساندة 15.1.6.

16.1.6 نتيجة. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و B_1 و B_2 كرات مفتوحة في (X, d) فإن $B_1 \cap B_2$ هو اتحاد كرات مفتوحة في (X, d).

أخيراً نحن قادرون على ربط الفضاءات المترية مع الفضاءات التبولوجية.

17.1.6 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاءً مترياً. فإن عائلة كل الكرات المفتوحة في (X, d) هي قاعدة لتبولوجيا τ على X.

[التبولوجيا τ يشار اليها بالتبولوجيا المحدثة بواسطة المسافة d (the topology induced by the metric d) و (X, τ) فضاء تبولوجي محدث (induced topological space)].

البرهان. هذا يتبع من تمهيدية 8.2.2 و نتيجة 16.1.6.

18.1.6 مثال. اذا كانت d هي المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}$ فإن القاعدة للتبولوجيا τ المحدثة بالمسافة d هي مجموعة كل الكرات المفتوحة. ولكن $B_\delta(a) = (a - \delta , a + \delta)$. من ذلك نرى بسهولة أن τ هي التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. لذلك المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}$ تحدث التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$. □

19.1.6 مثال. من تمارين 3.2. # 1(II) ومثال 12.1.6 ينتج ان المسافة الاقليدية على المجموعة $\mathbb{R}^2$ تحدث التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^2$. □

20.1.6 مثال. من تمارين 3.2 # 1 ومثال 13.1.6 ينتج أن المسافة d^* كذلك تحدث التبولوجيا الاقليدية على المجموعة $\mathbb{R}^2$. □

ترك لك كتمرين أن تثبت أن المسافة d_1 في مثال 14.1.6 كذلك تحدث التبولوجيا الاقليدية على المجموعة $\mathbb{R}^2$.

21.1.6 مثال. اذا كان d هو المسافة المتقطعة على المجموعة X فإن لكل $x \in X$, $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$. لذلك كل المجموعات الاحادية مفتوحة في التبولوجيا τ المحدثة على X بواسطة d. وبناءً على ذلك τ هي التبولوجيا المتقطعة. □

شاهدنا في الامثلة 19.1.6, 20.1.6 و 14.1.6 ثلاث أمثلة مختلفة من المسافات على نفس المجموعة والتي تحدث نفس التبولوجيا.

22.1.6 تعريف. المسافات على المجموعة X تسمى متكافئة (equivalent) اذا كانت تحدث نفس التبولوجيا على X.

لذلك المسافات d, d^* و d_1 في الامثلة 3.1.6 في الامثلة 3.1.6, 13.1.6 و 14.1.6 على $\mathbb{R}^2$ هي متكافئة.

23.1.6 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاءً متريًا و τ التبولوجيا المحدثة على X بواسطة المسافة d. المجموعة الجزئية U من X مفتوحة في (X,τ) اذا وفقط اذا كان لكل $a \in U$ يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث ان الكرة المفتوحة $B_\varepsilon(a)$ هي مجموعة جزئية من U.

البرهان. افرض أن $U \in \tau$. لذلك, باستخدام التمهيديات 2.3.2 و17.1.6, لكل $a \in U$ يوجد نقطة $b \in X$ و $\delta > 0$ بحيث $a \in B_\delta(b) \subseteq U$. لتكن $\varepsilon = \delta - d(a, b)$. لذلك يمكن بسهولة رؤية أن $a \in B_\varepsilon(a) \subseteq U$.

بالمقابل افرض أن U هي مجموعة جزئية من X تملك خاصية أن لكل $a \in U$ يوجد $\varepsilon_a > 0$ بحيث $B_{\varepsilon a}(a) \subseteq U$. لذلك باستخدام التمهيديات 3.3.2 و 17.1.6, U هي مجموعة مفتوحة.

شاهدنا أن كل مسافة على المجموعة X تحدث تبولوجيا على المجموعة X. على الرغم من ذلك سوف نبين الآن ان ليس كل تبولوجيا على مجموعة تحدث بواسطة مسافة. في البداية نرى تعريف قابلناه سابقاً في التمارين. (شاهد تمارين 1.4 # 13.)

24.1.6 تعريف. الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى فضاء هوسدورف (Hausdorff) (أو فضاء-T_2) اذا كان لكل زوج من النقاط المختلفة a و b في X يوجد مجموعتين مفتوحتين U و V بحيث $a \in U$, $b \in V$ و $U \cap V = \emptyset$.

بالتأكيد $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ وكل الفضاءات المتقطعة هي أمثلة على فضاءات هوسدورف في حين أن أي مجموعة تحوي على الأقل عنصرين والتي تملك التبولوجيا غير المتقطعة ليست فضاء هوسدورف. مع تفكير قليل تشاهد أن $\mathbb{Z}$ مع التبولوجيا منتهي – مغلق كذلك ليست فضاء هوسدورف. (أقنع نفسك بكل هذه الحقائق.)

25.1.6 تمهيدية. ليكن (X, d) أي فضاء متري و τ التبولوجيا المحدثة على X بواسطة d. فإن (X,τ) فضاء هوسدورف.

البرهان. لتكن a و b هي أي نقاط في X حيث $a \neq b$ فإن $d(a, b) > 0$. اجعل $\varepsilon = d(a, b)$. تأمل الكرات المفتوحة $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ و $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. إن هذه مجموعات مفتوحة في (X,τ) حيث $a \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ و $b \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. لذلك حتى نبين أن τ هوسدورف يجب أن نبين فقط أن $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \emptyset$.

افرض أن $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$. لذلك $d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $d(x, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. لذلك

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

أي ان $d(a, b) < \varepsilon$ وهذا خطأ. مما يعني عدم وجود x في $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$ أي أن $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) = \emptyset$ كما هو مطلوب. □

26.1.6 ملاحظة. وضع تمهيدية 25.1.6 مع الملاحظات التي سبقتها نلاحظ أن أي فضاء غير متقطع والذي يحوي على الأقل نقطتين يملك تبولوجيا غي محدثة بأي مسافة. كذلك $\mathbb{Z}$ مع التبولوجيا منتهي – مغلق τ هو فضاء حيث τ ليست محدثة بأي مسافة. □

27.1.6 تعريف. الفضاء (X,τ) يسمى قابل للقياس (metrizable) اذا وجد مسافة d على المجموعة X حيث أن τ هي التبولوجيا المحدثة بواسطة d.

لذلك على سبيل المثال, المجموعة $\mathbb{Z}$ مع التبولوجيا منتهي – مغلق هو فضاء غير قابل للقياس.

تحذير. يجب أن لا نخدع بواسطة تمهيدية 25.1.6 بالاعتقاد أن كل فضاء هوسدورف هو قابل للقياس. لاحقاً سوف نكون قادرين على انتاج (باستخدام الضرب غير المنتهي) أمثلة على فضاءات هوسدورف ليست قابلة للقياس [قابلية القياس للفضاءات التبولوجية هو تماماً موضوع تقني. للشروط الضرورية والكافية لقابلية القياس انظر نظرية 1.9 صفحة 195 في كتاب Dugundji [66].].

تمارين 1.6

1- أثبت أن المسافة d_1 في مثال 8.1.6 تحدث التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^2$.

2- لتكن d مسافة على مجموعة غير خالية X

(I) أثبت أن الأقتران e المعرف على الشكل $e(a, b) = \min\{1, d(a, b)\}$ حيث $a, b \in X$ هو كذلك مسافة على X.

(II) أثبت أن d و e مسافتين متكافئتين.

(III) الفضاء المتري (X, d) يسمى محدوداً (bounded) و d تسمى مسافة محدودة (bounded metric) اذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث أن $d(x, y) < M$ لكل $x, y \in X$. باستخدام (II) استنتج أن كل مسافة مكافئة لمسافة محدودة.

3- (I) لتكن d مسافة على مجموعة غير خالية X. أثبت أن الأقتران e المعرف على الشكل

$$e(a, b) = \frac{d(a,b)}{1 + d(a,b)}$$

حيث $a, b \in X$ هو كذلك مسافة على X.

(III) أثبت أن d و e مسافتين متكافئتين.

4- لتكن d_1 و d_2 مسافتين على المجموعات X و Y على التوالي. أثبت أن

(I) d هي مسافة على $X \times Y$ حيث

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\}$$

(II) e هي مسافة على $X \times Y$ حيث

$$e((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2)\}$$

(III) d و e مسافتين متكافئتين.

5- ليكن (X, d) فضاءً مترياً و τ التبولوجيا المحدثة على X. ثبت $a \in X$. أثبت أن الاقتران $f : (X,\tau) \to \mathbb{R}$ المعرف على الشكل $f(x) = d(a, x)$ هو متصل.

6- ليكن (X, d) فضاءً مترياً و τ التبولوجيا المحدثة على X بواسطة d. لتكن Y مجموعة جزئية من X و d_1 المسافة على Y التي يحصل عليها بتقييد d, أي أن $d_1(a, b) = d(a, b)$ لكل a و b في Y. اذا كان τ_1 هي التبولوجيا المحدثة على Y بواسطة d_1 و τ_2 هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على Y (المحدثة بواسطة τ على X), أثبت أن $\tau_1 = \tau_2$. [هذا يبين أن كل فضاء جزئي من فضاء قابل للقياس هو قابل للقياس].

7- (I) لتكن ℓ_1 هي مجموعة كل متتاليات الاعداد الحقيقية

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

التي تملك خاصية أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ متقاربة. اذا عرفنا

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|$$

لكل x و y في ℓ_1, أثبت أن (ℓ_1, d_1) هو فضاء متري.

(II) لتكن ℓ_2 مجموعة كل متتاليات الاعداد الحقيقية

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

التي تملك خاصية أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ متقاربة. اذا عرفنا

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n - y_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

لكل x و y في ℓ_2, أثبت أن (ℓ_2, d_2) هو فضاء متري.

(III) لتكن ℓ_∞ تشير الى كل متتاليات الاعداد الحقيقية المحدودة $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

اذا عرفنا

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in N\}$$

حيث $x, y \in \ell_\infty$, أثبت أن (ℓ_∞, d_∞) هو فضاء متري.

(IV) لتكن c_0 المجموعة الجزئية من ℓ_∞ المكونة من كل المتتاليات التي تقترب من صفر ولتكن d_0 هي المسافة على c_0 التي يحصل عليها بتقييد المسافة d_∞ على ℓ_∞ كما في تمرين 6. أثبت أن c_0 مجموعة جزئية مغلقة في (ℓ_∞, d_∞).

(V) أثبت أن كل من الفضاءات (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2) و (c_0, d_0) هو فضاء انفصالي.

(VI)* هل (ℓ_∞, d_∞) فضاء انفصالي؟

(VII) أثبت أن كل من الفضاءات المترية أعلاه هو فضاء متجه مقاس.

8- ليكن f اقتراناً متصلاً وشاملاً من فضاء قابل للقياس (X,τ) الى فضاء تبولوجي (Y,τ_1). هل (Y,τ_1) بالضرورة قابل للقياس؟ (برر اجابتك).

9- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى فضاء طبيعي (normal space) اذا كان لكل زوج من المجموعات المغلقة المنفصلة A و B يوجد مجموعتين مفتوحتين U و V حيث $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$. أثبت أن

(I) كل فضاء قابل للقياس هو فضاء طبيعي.

(II) كل فضاء-T_1 وطبيعي هو هوسدورف [الفضاء الطبيعي الذي هو كذلك هوسدورف يسمى فضاء-T_4.]

10- ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين. (X, d) يسمى متقايس (isometric) مع (Y, d_1) اذا وجد اقتران شامل $f : (X, d) \to (Y, d_1)$ بحيث أن لكل x_1 و x_2 في X

$$d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$$

مثل هذا الاقتران يسمى تقايساً (isometry). أثبت أن كل تقايساً هو هوميومورفزم للفضاءات التبولوجية المحدثة. (لذلك الفضاءات المترية المتقايسة هي هوميومورفك!)

11- يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الاولى (first axiom of countability) أو قابل للعد الأول (first countable) اذا كان لكل $x \in X$ يوجد عائلة معدودة $\{U_i(x)\}$ من المجموعات المفتوحة التي تحوي x مع خاصية أن كل مجموعة مفتوحة تحوي x تملك على الأقل واحدة من المجموعات $U_i(x)$ كمجموعة جزئية منها. العائلة المعدودة $\{U_i(x)\}$ تسمى قاعدة معدودة (countable base) عند x. أثبت ما يلي:

(I) كل فضاء قابل للقياس يحقق مسلمة العد الاولى

(II) كل فضاء تبولوجي يحقق مسلمة العد الثانية يحقق كذلك مسلمة العد الاولى.

12- لتكن X هي المجموعة $\{1\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$. عرف اقتران $f : \mathbb{R} \to X$ على الشكل

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ 1, & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

بالاضافة لذلك عرف تبولوجيا τ على X على الشكل

$\tau = \{ U : $ و $U \subseteq X$ $f^{-1}(U)$ مفتوحة في التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}$ $\}$

أثبت ما يلي:

(I) f متصل.

(II) كل جوار مفتوح لـ 1 في (X,τ) هو على الشكل $\{1\} \cup (U \setminus \mathbb{N})$ حيث U مفتوحة في $\mathbb{R}$.

(III) (X,τ) ليس قابل للعد الاول.

[مساعدة: افرض أن $\{1\} \cup (U_1 \setminus \mathbb{N})$, $\{1\} \cup (U_2 \setminus \mathbb{N})$, ..., $\{1\} \cup (U_n \setminus \mathbb{N})$, ... هي قاعدة معدودة عند 1. أثبت أن لكل عدد صحيح موجب n نستطيع اختيار $x_n \in U_n \setminus N$ بحيث $x_n > n$. أثبت أن المجموعة $U = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$ مفتوحة في $\mathbb{R}$. استنتج أن $(U \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\} = V$ هي جوار مفتوح لـ 1 لا يحوي أي من المجموعات $\{1\} \cup (U_n \setminus \mathbb{N})$ وهذا تناقض. لذلك (X,τ) ليس قابل للعد الاول.]

(IV) (X,τ) هو فضاء هوسدورف.

(V) الصورة المتصلة لـ $\mathbb{R}$ والتي تكون هوسدورف ليس بالضرورة أن تكون قابلة للعد الأول.

13- المجموعة الجزئية S من الفضاء المتري (X, d) تسمى محدودة بالكامل (totally bounded) اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد x_1, x_2, ..., x_n في X بحيث أن $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$ أي أن S يمكن أن تغطى بعدد منتهي من الكرات المفتوحة التي نصف قطرها ε.

(I) أثبت أن كل فضاء متري محدود بالكامل هو فضاء متري محدود. (انظر تمرين 2 أعلاه)

(II) أثبت أن $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية ليست محدودة بالكامل ولكن لكل $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$، الفترة المغلقة $[a, b]$ هي محدودة بالكامل.

(III) ليكن (Y, d) فضاءً جزئياً من فضاء متري (X, d_1) مع المسافة المحدثة. اذا كان (X, d_1) محدود بالكامل فإن (Y, d) محدود بالكامل, أي أن كل فضاء جزئي من فضاء متري محدود بالكامل هو محدود بالكامل.

[مساعدة: افرض أن $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$. اذا كان $y_i \in B_\varepsilon(x_i) \cap Y$ فباستخدام المتباينة المثلثية $B_\varepsilon(x_i) \subseteq B_{2\varepsilon}(y_i)$.]

(IV) من (III) و (II) استنتج أن الفضاء المتري المحدود بالكامل $(0, 1)$ هوميومورفك لـ $\mathbb{R}$ والذي هو ليس محدود بالكامل.

(V) من (III) و (II) استنتج أن لكل $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ مع المسافة الاقليدية هي محدمدة بالكامل.

(VI) ملاحظاً أن لكل $a, b \in \mathbb{R}$ الفترة المغلقة $[a, b]$ محدودة بالكامل, أثبت أن أي فضاء جزئي متري من $\mathbb{R}$ هو محدود اذا وفقط اذا كان محدود بالكامل.

(VII) أثبت أن لكل $n > 1$, أي فضاء جزئي متري من $\mathbb{R}^n$ هو محدود اذا وفقط اذا كان محدود بالكامل.

14- أثبت أن كل فضاء متري محدود بالكامل هو انفصالياً. (انظر تمرين 13 أعلاه و تمارين 2.3 # 4.)

15- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى اقليدي موضعياً (locally euclidean) اذا وجد عدد صحيح موجب n بحيث كل نقطة $x \in X$ تملك جواراً مفتوحاً هوميومورفيك لكرة مفتوحة حول 0 في $\mathbb{R}^n$ مع المسافة الاقليدية. أي فضاء هوسدورف اقليدي موضعياً يسمى متنوع تبولوجياً (topological manifold)

(I) أثبت أن كل فترة غير تافهة (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ هي اقليدية موضعياً.

(II) لتكن T المجموعة الجزئية من المستوى المركب المكونة من الاعداد المركبة التي معاملها (modulus) يساوي واحد. طابق المستوى المركب مع $\mathbb{R}^2$ واجعل T تملك تبولوجيا الفضاء الجزئي. أثبت أن الفضاء T اقليدي موضعياً.

(III) أثبت أن كل فضاء تبولوجي هوميومورفك موضعياً لـ $\mathbb{R}^n$, لأي عدد صحيح موجب n, هو اقليدي موضعياً. (انظر تمارين 3.4 # 9.)

*(IV) أوجد مثالاً على فضاء اقليدي موضعياً ليس متنوع تبولوجياً.

2.6 تقارب المتتاليات Convergence of Sequences

لديك اطلاع جيد على المتتالية المتقاربة في الاعداد الحقيقية. هي معرفة على الشكل التالي: يقال أن المتتالية x_1, x_2, ..., x_n, ... من الاعداد الحقيقية تقترب (converge) من العدد الحقيقي x اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح n_0 بحيث أن لكل $n \geq n_0$, $|x_n - x| < \varepsilon$.

انه من الواضح كيف أن هذا التعريف يمكن توسيعه من $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية الى أي فضاء متري.

1.2.6 تعاريف. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و x_1, x_2, ..., x_n, ... متتالية من النقاط في X. يقال أن المتتالية تقترب من $x \in X$ (converge to) اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح n_0 بحيث أن لكل $n \geq n_0$, $d(x, x_n) < \varepsilon$ وهذا يرمز له بالرمز $x_n \to x$.

يقال أن المتتالية y_1, y_2, ..., y_n, ... من النقاط في (X, d) متقاربة (convergent) اذا وجد نقطة $y \in X$ بحيث $y_n \to y$.

التمهيدية التالية يمكن اثباتها بسهولة لذلك يترك برهانها كتمرين.

2.2.6 تمهيدية. لتكن x_1, x_2, ..., x_n, ... متتالية من النقاط في فضاء متري (X, d). بالاضافة لذلك لتكن x و y نقاط في (X, d) بحيث $x_n \to x$ و $x_n \to y$. اذاً $x = y$. □

من الملائم ان نقول أن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري (X, d) هي مغلقة (على التوالي, مفتوحة) في الفضاء المتري (X, d) اذا كانت مغلقة (على التوالي, مفتوحة) في التبولوجيا τ المحدثة على X بواسطة المسافة d.

التمهيدية التالية تخبرنا بالحقيقة المدهشة ان تبولوجيا الفضاء المتري يمكن ان توصف كاملة عن طريق متتالياته المتقاربة.

3.2.6 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاءً مترياً. أي مجموعة جزئية A من X هي مغلقة في (X, d) اذا وفقط اذا كانت كل متتالية متقاربة من النقاط في A تقترب من نقطة في A. (بمعنى آخر, A مغلقة في (X, d) اذا وفقط اذا كان عندما $a_n \to x$ حيث $x \in X$ و $a_n \in A$ لكل n يعطي أن $x \in A$.)

البرهان. افرض أن A مغلقة في (X, d) ولتكن $a_n \to x$ حيث $a_n \in A$ لكل عدد صحيح موجب n. افرض أن $x \in X \setminus A$. لأن $X \setminus A$ مجموعة مفتوحة تحوي x فإنه يوجد كرة مفتوحة $B_\varepsilon(x)$ بحيث $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$. ملاحظاً أن $a_n \in A$ هذا يعطي أن $d(x, a_n) > \varepsilon$ لكل n. لذلك المتتالية $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ لا تقترب من x. وهذا تناقض. لذلك $x \in A$ كما هو مطلوب.

بالمقابل, افرض أن كل متتالية متقاربة من النقاط في A تقترب من نقطة في A. افرض أن $X \setminus A$ ليست مفتوحة. اذاً يوجد نقطة $y \in X \setminus A$ بحيث لكل $\varepsilon > 0$, $B_\varepsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. لكل عدد صحيح موجب n, لتكن x_n هي أي نقطة في $B_{1/n}(y) \cap A$. نحن ندعي أن $x_n \to y$. لرؤية ذلك لتكن ε أي عدد حقيقي موجب و n_0 أي عدد صحيح أكبر من $1/\varepsilon$. اذاً لكل $n \geq n_0$

$$x_n \in B_{1/n}(y) \subseteq B_{1/n_0}(y) \subseteq B_\varepsilon(y)$$

لذلك $x_n \to y$, وباستخدام الفرض, $y \in A$. وهذا تناقض لذلك $X \setminus A$ مفتوحة وهذا يعني أن A مغلقة في (X, d). □

بعد أن رأينا أن تبولوجيا الفضاء المتري يمكن أن توصف عن طريق المتتاليات المتقاربة, يجب أن لانندهش بأن الاقترانات المتصلة يمكن كذلك أن توصف بهذا الاسلوب.

4.2.6 تمهيدية. ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين و f اقتران من X الى Y. لتكن τ و τ_1 تبولوجيين مصممين بواسطة d و d_1 على التوالي. $f : (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ متصل اذا وفقط اذا كان عندما $x_n \to x$ فإن $f(x_n) \to f(x)$ أي اذا كانت $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ هي متتالية من النقاط في (X, d) تقترب من x فإن متتالية النقاط $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ في (Y, d_1) تقترب من $f(x)$.

البرهان. افرض أنه عندما $x_n \to x$ فإن $f(x_n) \to f(x)$. لإثبات أن f متصل يكفي أن نبين أن الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في (Y, τ_1) هي مغلقة في (X,τ). لذلك لتكن A مغلقة في (Y, τ_1). لتكن x_1, x_2, ..., x_n, ... متتالية من النقاط في $f^{-1}(A)$ تقترب من نقطة $x \in X$. لأن $x_n \to x$ فإن $f(x_n) \to f(x)$. ولكن لأي $f(x_n) \in A$ و A مغلقة, تمهيدية 3.2.6 تعطي أن $f(x) \in A$. لذلك $x \in f^{-1}(A)$. وبهذا نكون قد بينا أن كل متتالية متقاربة من النقاط في $f^{-1}(A)$ تقترب من نقطة في $f^{-1}(A)$. لذلك $f^{-1}(A)$ مغلقة وهذا يعني أن f متصل.

بالمقابل, ليكن f متصل و $x_n \to x$. لتكن ε عدد حقيقي موجب. اذاً الكرة المفتوحة $B_\varepsilon(f(x))$ هي مجموعة مفتوحة في (Y, τ_1). لأن f متصل فإن $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ هي مجموعة مفتوحة في (X,τ) وتحوي x. لذلك يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

لأن $x_n \to x$ يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن لكل $n \geq n_0$, $x_n \in B_\delta(x)$. لذلك

$f(x_n) \in f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ لكل $n \geq n_0$.

وهذا يعني أن $f(x_n) \to f(x)$. □

النتيجة أدناه تستنتج بسهولة من تمهيدية 4.2.6.

5.2.6 نتيجة. ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين و f اقتران من X الى Y. لتكن τ و τ_1 تبولوجيين المنتجين بواسطة d و d_1 على التوالي. الاقتران $f : (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ متصل اذا وفقط اذا كان لكل $x_0 \in X$ و $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $x \in X$ و $d(x, x_0) < \delta$ يعطي $d_1(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. □

تمارين 2.6

1- لتكن $C[0, 1]$ و d كما في مثال 5.1.6. عرف متتالية من الاقترانات f_1, f_2, ..., f_n,... في $(C[0, 1], d)$ على الشكل

$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, $x \in [0, 1]$.

أثبت أن $f_n \to f_0$ حيث $f_0(x) = 0$ لكل $x \in [0, 1]$.

2- ليكن (X, d) فضاءً مترياً و $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ متتالية بحيث أن $x_n \to x$ و $x_n \to y$. أثبت أن $x = y$.

3- (I) ليكن (X, d) فضاءً مترياً و τ التبولوجيا المحدثة على X و $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ متتالية من النقاط في X. أثبت أن $x_n \to x$ اذا وفقط اذا كان لكل مجموعة مفتوحة U حيث $x \in U$ يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن $x_n \in U$ لكل $n \geq n_0$.

(II) لتكن X مجموعة و d و d_1 مسافتين متكافئتين على X. استنتج من (I) أنه اذا كان $x_n \to x$ في (X, d) فإن $x_n \to x$ في (X, d_1).

4- اكتب البرهان لنتيجة 5.2.6.

5- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ متتالية من نقاط X. نقول أن $x_n \to x$ اذا كان لكل مجموعة مفتوحة U حيث $x \in U$ يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن $x_n \in U$ لكل $n \geq n_0$. جد مثالاً لفضاء تبولوجي ومتتالية بحيث $x_n \to x$ و $x_n \to y$ ولكن $x \neq y$.

6- (I) ليكن (X, d) فضاءً مترياً و $x_n \to x$ حيث كل $x_n \in X$ و $x \in X$. لتكن A المجموعة الجزئية من X المكونة من x وكل النقاط x_n. أثبت أن A مغلقة في (X, d).

(II) استنتج من (I) أن المجموعة $\{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{2\}$ مغلقة في $\mathbb{R}$.

(III) أثبت أن المجموعة $\{2 - \frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$.

7- (I) لتكن $d_1, d_2, \ldots, d_m$ مسافات على المجموعة X و $a_1, a_2, \ldots, a_m$ أعداد حقيقية موجبة. أثبت أن d هي مسافة على X حيث d معرف على الشكل

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{m} a_i d_i(x, y) \quad \text{لكل } x, y \in X.$$

(II) اذا كانت $x \in X$ و $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ هي متتالية من النقاط في X بحيث أن $x_n \to x$ في كل فضاء متري (X, d_i). أثبت أن $x_n \to x$ في الفضاء المتري (X, d).

8- لتكن X, Y, d_1, d_2 و d كما في تمارين 1.6 # 4. اذا كانت $x_n \to x$ في (X, d_1) و $y_n \to y$ في (Y, d_2)، أثبت أن

.$(X \times Y, d)$ في $(x_n, y_n) \to (x, y)$

9- لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين في فضاء متري (X, d). عرف

$$\rho(A,B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

[يشار الى $\rho(A,B)$ بانها المسافة بين المجموعتين A و B.]

(I) اذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية في (X, d) أثبت أن

$$\bar{S} = \{x : x \in X, \rho(\{x\}, S) = 0\}$$

(II) اذا كانت S مجموعة جزئية غير خالية في (X, d) فإن الاقتران $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ المعرف على الشكل: $f(x) = \rho(\{x\}, S)$ حيث $x \in X$ هو متصل.

10- (I) لكل عدد صحيح موجب n ليكن f_n اقتران متصل من $[0, 1]$ الى نفسها ولتكن $a \in [0, 1]$ حيث $f_n(a) = a$ لكل n. بالاضافة لذلك ليكن f اقتران متصل من $[0, 1]$ الى نفسها. اذا كان $f_n \to f$ في $(C[0, 1],\ d^*)$ حيث d^* هي المسافة في مثال 6.1.6, أثبت أن a هي كذلك نقطة ثابتة لـ f.

(II) أثبت أن (I) يكون خاطئاً اذا استبدل d^* بالمسافة d في مثال 5.1.6.

3.6 التتام Completeness

1.3.6 تعريف. المتتالية $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ من نقاط فضاء متري (X, d) تسمى متتالية كوشي (Cauchy sequence) اذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن لكل أعداد صحيحة $m \geq n_0$ و $n \geq n_0$، $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

2.3.6 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ هي متتالية من النقاط في (X, d). اذا وجد نقطة $a \in X$ بحيث أن المتتالية تقترب من a أي أن $x_n \to a$ فإن المتتالية هي متتالية كوشي.

البرهان. لتكن ε أي عدد حقيقي موجب. اجعل $\delta = \varepsilon/2$. لأن $x_n \to a$ يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن $d(x_n, a) < \delta$ لكل $n > n_0$.

لذلك اجعل $m > n_0$ و $n > n_0$. اذاً $d(x_n, a) < \delta$ و $d(x_m, a) < \delta$.

باستخدام المتباينة المثلثية للمسافات

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a)$$

$$< \delta + \delta$$

$$= \varepsilon$$

ولذلك المتتالية في الحقيقة هي متتالية كوشي. □

من الطبيعي أن يقودنا ذلك الى التفكير بالعبارة العكسية ولنسأل اذا كانت كل متتاية كوشي هي متتالية متقاربة. المثال التالي يبين أن ذلك ليس صحيحاً.

3.3.6 مثال. تأمل الفترة المفتوحة $(0, 1)$ مع المسافة الاقليدية d. من الواضح أن المتتالية 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, ... هي متتالية كوشي ولكنها لا تقترب من أي نقطة في $(0, 1)$.

4.3.6 تعريف. الفضاء المتري (X, d) يسمى تاماً (complete) اذا كانت كل متتالية كوشي في (X, d) تقترب من نقطة في (X, d).

نرى مباشرة من مثال 3.3.6 أن الفترة $(0, 1)$ مع المسافة الاقليدية ليست فضاء متري تام. على الجانب الآخر, اذا كانت X هي أي مجموعة منتهية و d هي المسافة المتقطعة على X فإن (X, d) هو فضاء متري تام.

سوف نبين أن $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هو فضاء متري تام. أولاً نحتاج اجراء بعض التحضير.

كاختصار سوف نرمز للمتتالية $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ بالرمز $\{x_n\}$.

5.3.6 تعريف. اذا كانت $\{x_n\}$ أي متتالية فإن المتتالية $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ تسمى متتالية جزئية (subsequence) اذا كان $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

6.3.6 تعاريف. لتكن $\{x_n\}$ متتالية في $\mathbb{R}$. تسمى هذه المتتالية متتالية متزايدة (increasing sequence) اذا كان $x_n < x_{n+1}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. وتسمى متتالية متناقصة (decreasing sequence) اذا كان $x_n > x_{n+1}$ لكل n $\in \mathbb{N}$. المتتالية التي تكون اما متزايدة او متناقصة تسمى رتيبة (monotonic).

معظم المتتاليات بالتأكيد ليست متزايدة وليست متناقصة.

7.3.6 تعريف. لتكن $\{x_n\}$ متتالية في $\mathbb{R}$. النقطة $n_0 \in \mathbb{N}$ تسمى نقطة قمة (peak point) اذا كان $x_n \le x_{n_0}$ لكل $n \ge n_0$.

8.3.6 مساندة. لتكن $\{x_n\}$ أي متتالية في $\mathbb{R}$. فإن $\{x_n\}$ تملك متتالية جزئية رتيبة.

البرهان. افرض أولاً أن المتتالية $\{x_n\}$ تملك عدد غير منتهي من نقاط القمة. اختار متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ حيث n_k هي نقطة قمة. هذا يعطي بشكل خاص أن $x_{n_k} \ge x_{n_{k+1}}$ لكل $k \in \mathbb{N}$ أي أن $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية متناقصة من $\{x_n\}$ لذلك هي متتالية جزئية رتيبة.

افرض بعد ذلك أنه يوجد فقط عدد منتهي من نقاط القمة. لذلك يوجد عدد صحيح N, بحيث أنه لا يوجد نقطة قمة n حيث $n > N$. اختار أي $n_1 > N$. اذاً n_1 ليست نقطة قمة. لذلك يوجد $n_2 > n_1$ حيث $x_{n_2} > x_{n_1}$. الآن $n_2 > N$ ولذلك هي أيضاً ليست نقطة قمة. وهذا يعني أن هناك $n_3 > n_2$ حيث $x_{n_3} > x_{n_2}$. بالاستمرار بهذه الطريقة (بالاستقراء الرياضي), ينتج لدينا متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ من $\{x_n\}$ حيث $x_{n_k} < x_{n_{k+1}}$ لكل $k \in \mathbb{N}$ أي أن $\{x_{n_k}\}$ هي متتالية جزئية متزايدة من $\{x_n\}$. هذا يكمل برهان المساندة. □

9.3.6 تمهيدية. لتكن $\{x_n\}$ متتالية رتيبة في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية. المتتالية $\{x_n\}$ تقترب من نقطة في $\mathbb{R}$ اذا وفقط اذا كانت $\{x_n\}$ محدودة.

البرهان. تذكر أن "محدودة" عرف في ملاحظة 1.3.3.

واضح أنه اذا كانت $\{x_n\}$ غير محدودة فإنها ليست متقاربة.

لذلك افرض أن $\{x_n\}$ متتالية متزايدة ومحدودة. بواسطة مسلمة أقل حد أعلى, يوجد أقل حد أعلى L للمجموعة $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. اذا كانت ε أي عدد حقيقي موجب, فإنه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $d(x_N, L) < \varepsilon$, في الحقيقة, $x_N > L - \varepsilon$.

ولكن لأن $\{x_n\}$ متتالية متزايدة و L حد أعلى فإن

$$L - \varepsilon < x_n < L \quad \text{لكل} \quad n > N$$

أي أن $x_n \to L$.

الحالة أن $\{x_n\}$ متتالية متناقصة ومحدودة تثبت بطريقة مماثلة. وهذا يكمل البرهان. □

10.3.6 نظرية. (**نظرية بلزانو ويرستراس Bolzano-Weierstrass Theorem**) كل متتالية محدودة في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية تملك متتالية جزئية متقاربة. □

أخيراً نحن قادرون أن نثبت أن $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هي فضاء متري تام.

11.3.6 نتيجة. الفضاء المتري $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هو فضاء متري تام.

البرهان. لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في $(\mathbb{R}, d)$.

اذا بينا أن متتالية كوشي العشوائية هذه هي متقاربة في $\mathbb{R}$ سوف نكون قد أثبتنا أن الفضاء المتري تام. الخطوة الاولى سوف تكون لبيان أت هذه المتتالية محدودة.

لأن $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي يوجد عدد صحيح موجب N بحيث لكل $n \geq N$ و $m \geq N$, $d(x_n, x_m) < 1$ أي أن $|x_n - x_m| < 1$. اجعل $M = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_N| + 1$. اذا $|x_n| < M$ لكل $n \in \mathbb{N}$, أي أن، المتتالية $\{x_n\}$ محدودة.

لذلك بواسطة نظرية بلزانو ويرستراص 10.3.6 هذه المتتالية تملك متتالية جزئية متقاربة أي يوجد $a \in \mathbb{R}$ و متتالية جزئية $\{x_{n_k}\}$ حيث $x_{n_k} \to a$.

سوف نبين أنه ليس فقط المتتالية الجزئية تقترب من a ولكن كذلك المتتالية $\{x_n\}$ نفسها تقترب من a.

لتكن ε أي عدد حقيقي موجب. لأن $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي يوجد عدد صحيح موجب N_0 بحيث

$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $m \geq N_0$ و $n \geq N_0$.

لأن $x_{n_k} \to a$ يوجد عدد صحيح موجب N_1 بحيث أن

$|x_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ لكل $n_k \geq N_1$.

لذلك اذا جعلنا $N_2 = \max\{N_0, N_1\}$, بدمج المتتاليتين أعلاه ينتج

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

لذلك $x_n \to a$ وهذا يكمل برهان النتيجة. □

12.3.6 نتيجة. لكل عدد صحيح موجب m الفضاء المتري $\mathbb{R}^m$ مع المسافة الاقليدية هو فضاء متري تام.

البرهان. انظر تمارين 3.6 # 4. □

13.3.6 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاءً مترياً, Y مجموعة جزئية من X و d_1 المسافة المحدثة على Y بواسطة d.

(I) اذا كان (X, d) فضاءً مترياً تاماً و Y فضاء جزئي مغلق في (X, d) فإن (Y, d_1) هو فضاء متري تام.

(II) اذا كان (Y, d_1) فضاءً مترياً تاماً فإن Y فضاء جزئي مغلق في (X, d).

البرهان. انظر تمارين 3.6 # 5. □

14.3.6 ملاحظة. مثال 3.3.6بين أن $(0, 1)$ مع المسافة الاقليدية ليس فضاءً مترياً تاماً. كذلك نتيجة 11.3.6 بينت أن $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هو فضاء متري تام. نعرف أن الفضاءات التبولوجية $(0, 1)$ و $\mathbb{R}$ هي هوميومورفيك. لذلك التتام لا يحفظ بالهوميومورفزم ولذلك ليس خاصية تبولوجية.

15.3.6 تعريف. الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى قابل للقياس تماماً (completely metrizable) اذا وجدت مسافة d على X بحيث أن τ هي التبولوجيا على X المحددة بواسطة d و (X, d) هو فضاء متري تام.

16.3.6 ملاحظة. لاحظ أن خاصية ان يكون الفضاء قابلاً للقياس تماماً هي في الحقيقة خاصية تبولوجية. بالاضافة لذلك من السهل اثبات (انظر تمارين 3.6 # 7) أن كل فضاء متقطع وكل فترة في $\mathbb{R}$ مع التبولوجيا المحدثة هو قابل للقياس تماماً. لذلك لأي $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$ الفضاءات التبولوجية $\mathbb{R}$، $[a, b]$، (a, b)، $[a, b)$، $(a, b]$، $(-\infty, a)$، $(-\infty, a]$، (a,∞)، $[a,\infty)$ و $\{a\}$ مع التبولوجيا المحدثة على كل منهم هي قابلة للقياس تماماً. شيء مشابه ومدهش سوف نراه لاحقاً أن حتى الفضاء $\mathbb{P}$ المكون من كل الاعداد غير النسبية مع التبولوجيا المحدثة هو قابل للقياس تماماً. وكذلك بما أن $(0, 1)$ فضاء جزئي قابل للقياس تماماً في $\mathbb{R}$ وهي مجموعة جزئية غير مغلقة نرى أن تمهيدية 13.3.9 (II) لا تكون صحيحة اذا استبدلنا فضاء متري تام بفضاء قابل للقياس تماماً. □

17.3.6 تعريف. الفضاء التبولوجي يسمى انفصالياً (separable) اذا كان يملك مجموعة جزئية كثيفة معدودة.

شوهد في تمارين 2.3 # 4 أن $\mathbb{R}$ وكل فضاء تبولوجي معدود هو فضاء انفصالي. أمثلة أخرى اعطيت في تمارين 1.6 # 7.

18.3.6 تعريف. الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى فضاء بولندي (Polish space) اذا كان انفصالياً وقابل للقياس تماماً.

واضح أن $\mathbb{R}$ هو فضاء بولندي. بواسطة تمارين 3.6 # 6, $\mathbb{R}^n$ هو فضاء بولندي لكل عدد صحيح موجب n.

19.3.6 تعريف. الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى فضاء سوسلن (Souslin space) اذا هوسدورف وصورة متصلة لفضاء بولندي. اذا كانت A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (Y, τ_1) بحيث أن (A, τ_2) هو فضاء سوسلن حيث τ_2 هي التبولوجيا المحدثة على A فإن A تسمى مجموعة تحليلية (analytic set) في (Y, τ_1).

واضح أن كل فضاء بولندي هو فضاء سوسلن. تمارين 6. 1#12 و # 11 تبين أن العكس غير صحيح لأن فضاء سوسلن ليس بالضرورة أن يكون قابل للقياس. على كل حال سوف نبين حتى أن فضاء سوسلن القابل للقياس ليس بالضرورة أن يكون فضاء بولندي. لرؤية ذلك نلاحظ أن كل فضاء تبولوجي معدود هو فضاء سوسلن لأنه صورة متصلة للفضاء المتقطع $\mathbb{N}$, واحد من مثل هذه الفضاءات هو الفضاء القابل للقياس $\mathbb{Q}$ الذي سوف نرى في مثال 8.5.6 أنه ليس فضاء بولندي.

نعرف أن أي فضائين تبولوجيين هما متكافئين اذا كانا هوميومورفك. من الطبيعي أن نسأل متى أي فضائين يكونان متكافئان (كفضاءات مترية)؟. المفهوم ذا الصلة بالموضوع قدم في تمارين 1.6 # 10 أي متقايس (isometric).

20.3.6 تعريف. ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين. (X, d) يسمى متقايس (isometric) مع (Y, d_1) اذا وجد اقتران شامل $f : X \to Y$ بحيث أن لكل x_1 و x_2 في X, $d(x_1, x_2) = d_1(f(x_1), f(x_2))$. الاقتران f يسمى تقايساً (isometry).

لتكن d أي مسافة على $\mathbb{R}$ و a أي عدد حقيقي موجب. اذا كانت d_1 معرفة على الشكل $d_1(x, y) = a.d(x, y)$ لكل $x, y \in \mathbb{R}$ فإن من السهل اثبات أن $(\mathbb{R}, d_1)$ هو فضاء متري متقايس مع $(\mathbb{R}, d)$.

كذلك من السهل اثبات أن في أي فضائين متريين متقايسين يكون الفضائين التبولوجيين المرافقين هوميومورفك وكل تقايس هو كذلك هوميومورفزم للفضائين التبولوجيين المرافقين.

21.3.6 تعريف. ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين و f اقتران من X الى Y. لتكن $Z = f(X)$ و d_2 المسافة المحدثة على Z بواسطة d_1. اذا كان $f : (X, d) \rightarrow (Z, d_2)$ هو تقايس فإن f يسمى تضمين متقايس (isometric embedding) لـ (X, d) في (Y, d_1).

بالتأكيد التضمين الطبيعي لـ $\mathbb{Q}$ مع المسافة الاقليدية في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هو تضمين متقايس. وطذلك نفس الحالة $\mathbb{N}$ مع المسافة الاقليدية تملك تضمين متقايس طبيعي في كل من $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}$ مع المسافة الاقليدية.

22.3.6 تعريف. ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين و f اقتران من X الى Y. اذا كان (Y, d_1) فضاءً مترياً تاماً, $f : (X, d) \rightarrow (Y, d_1)$ هو تضمين متقايس و $f(X)$ مجموعة جزئية كثيفة من Y في الفضاء التبولوجي المرافق, فإن (Y, d_1) يسمى إتمام (completion) لـ (X, d).

واضح أن $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هي إتمام لمجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$ مع المسافة الاقليدية. كذلك $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هي إتمام لمجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{P}$ مع المسافة الاقليدية.

سؤالين يظهران حالاً في أذهاننا: (1) هل كل فضاء متري يملك إتماماً ؟

(2) هل الإتمام للفضاء المتري وحيد ؟ سوف نرى أن الاجابة للسؤالين هي "نعم".

23.3.6تمهيدية. ليكن (X, d) أي فضاء متري. اذاً (X, d) يملك إتماماً.

برهان بالخطوط العريضة. نبدأ بالقول أن أي متتاليتي كوشي $\{y_n\}$ و $\{z_n\}$ في (X, d) هما متكفئتين اذا كان $d(y_n, z_n) \to 0$ في $\mathbb{R}$. في الحقيقة هذه علاقة تكافؤ أي أنها انعكاس, تماثل وتعدي. الآن لتكن $\tilde{X}$ هي مجموعة كل صفوف التكافؤ لمتتاليات كوشي المتكافئة في (X, d). نرغب في وضع مسافة على $\tilde{X}$.

لتكن $\tilde{y}$ و $\tilde{z}$ أي نقطتين في $\tilde{X}$. لتكن متتاليات كوشي $\tilde{y} \in \{y_n\}$ و $\tilde{z} \in \{z_n\}$. الآن المتتالية $\{d(y_n, z_n)\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ (انظر تمارين 3.6 # 8). بما أن $\mathbb{R}$ هو فضاء متري تام, متتالية كوشي في $\mathbb{R}$ تقترب من نقطة معينة سوف نرمز لها بالرمز $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$. من السهل اثبات أن $d_1(\tilde{y}, \tilde{z})$ لا تعتمد على اختيار المتتالية $\{y_n\}$ في $\tilde{y}$ و $\{z_n\}$ في $\tilde{z}$.

لكل $x \in X$, المتتالية الثابتة $x, x, ..., x, ...$ هي متتالية كوشي في (X, d) تقترب من x. لتكن $\tilde{x}$ ترمز الى صف التكافؤ لكل متتاليات كوشي التي تقترب من $x \in X$. عرف المجموعة الجزئية Y من $\tilde{X}$ لتكون $\{\tilde{x} : x \in X\}$. اذا كانت d_2 هي المسافة على Y المحدثة بواسطة المسافة d_1 على $\tilde{X}$ فإن من الواضح أن الاقتران $f : (X, d) \to (Y, d_2)$ المعطى على الشكل $f(x) = \tilde{x}$ هو تقايس.

الآن سنبين أن Y كثيفة في $\tilde{X}$. لعمل ذلك سنبين أن لكل عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ و $z \in \tilde{X}$ يوجد $\tilde{x} \in Y$ بحيث أن $d_1(z, \tilde{x}) < \varepsilon$. لاحظ أن z هو صف تكافؤ لمتتاليات كوشي. لتكن $\{x_n\}$ متتالية كوشي في صف التكافؤ z. يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث أن لكل $n > n_0$, $d_1(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$. الآن تأمل المتتالية الثابتة $x_{n_0}, x_{n_0}, ..., x_{n_0}, ...$ هذه تقع في صف التكافؤ $\widetilde{x_{n_0}}$ والذي هو في Y. بالاضافة لذلك, $d_1(\widetilde{x_{n_0}}, z) < \varepsilon$. لذلك Y في الحقيقة كثيفة في $\tilde{X}$.

أخيراً سنبين أن $(\tilde{X}, d_1)$ هو فضاء متري تام. لتكن $\{z_n\}$ متتالية كوشي في هذا الفضاء. يجب أن نبين أن هذه المتتالية متقاربة في $\tilde{X}$. بما أن Y كثيفة, لكل عدد صحيح موجب n يوجد $\widetilde{x_n} \in Y$. بحيث أن $d_1(\widetilde{x_n}, z_n) < 1/n$. سنبين أن $\{\widetilde{x_n}\}$ هي متتالية كوشي في Y.

لتكن $\varepsilon > 0$ أي عدد حقيقي. يوجد عدد صحيح موجب N بحيث أن $d_1(z_n, z_m) < \varepsilon/2$ لكل $n,m > N$. الآن خذ عدد صحيح موجب n_1 حيث $1/n_1 < \varepsilon/4$ لكل $n,m > n_1 + N$ لدينا

$$d_1(\widetilde{x_n}, \widetilde{x_m}) < d_1(\widetilde{x_n}, z_n) + d_1(z_n, z_m) + d_1(z_m, \widetilde{x_m}) < 1/n + \varepsilon/2 + 1/m < \varepsilon$$

لذلك $\{\widetilde{x_n}\}$ هي متتالية كوشي في Y. هذا يعطي أن $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي في (X, d). لذلك $z \in \{x_n\}$ لبعض $z \in \tilde{X}$. الآن بطريقة مباشرة يمكن أولاً اثبات أن $\widetilde{x_n} \to z$ وبعد ذلك أن $z_n \to z$ والذي يكمل البرهان.

24.3.6 تمهيدية. لتكن (A, d_1) و (B, d_2) فضائين متريين تامين. لتكن X مجموعة جزئية من (A, d_1) مع المسافة المحدثة d_3 و Y مجموعة جزئية من (B, d_2) مع المسافة المحدثة d_4. بالاضافة لذلك لتكن X كثيفة في (A, d_1) و Y كثيفة في (B, d_2). اذا وجد تقايس $f : (X, d_3) \to (Y, d_4)$ فإنه يوجد تقايس $g :$ $(A, d_1) \to (B, d_2)$ بحيث أن $g(x) = f(x)$ لكل $x \in X$.

برهان مختصر. لتكن $a \in A$. بما أن X كثيفة في (A, d_1) يوجد متتالية $x_n \to a$ حيث كل $x_n \in X$. لذلك $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي. بما أن f تقايس, $\{f(x_n)\}$ هي متتالية كوشي في (Y, d_4) ولذلك متتالية كوشي في (B, d_2). لأن (B, d_2) فضاء متري تام يوجد $b \in B$ بحيث أن $f(x_n) \to b$. لذلك سنعرف $g(a) = b$.

لإثبات أن g اقتران معرف حسناً من A الى B من الضروري أن نثبت أنه اذا كانت $\{z_n\}$ متتالية اخرى في X تقترب من a فإن $f(z_n) \to b$. هذا يتبع من حقيقة أن $d_1(x_n, z_n) \to 0$ ولذلك $d_2(f(x_n), f(z_n)) = d_4(f(x_n), f(z_n)) \to 0$.

بعد ذلك نحتاج أن نثبت أن $g : A \to B$ هو واحد لواحد وشامل. هذا يترك كتمرين لأنه روتيني.

أخيراً, لتكن $a_1, a_2 \in A$ و $x_{1n} \to a_1$ و $x_{2n} \to a_2$ حيث كل a_{1n} وكل a_{2n} في X. اذاً

$$d_1(a_1, a_2) = \lim_{n\to\infty} d_3(a_{1n}, a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} d_4(f(a_{1n}), f(a_{2n})) = d_2(g(a_1), g(a_2))$$

ولذلك g في الحقيقة هو تقايساً كما هو مطلوب. □

تمهيدية 24.3.6 تقول أن إتمام الفضاءات المترية هو وحيد.

نختم هذا الجزء مع مفهوم آخر. تذكر أننا في مثال 9.1.6 قدمنا مفهوم الفضاء المتجه المقاس. الآن سنعرف صف مهم جداً من الفضاءات المتجهة المقاسة.

25.3.6 تعريف. ليكن $(N, \|\ \|)$ فضاءً متجهاً مقاساً و d المسافة المرافقة على المجموعة N. $(N, \|\ \|)$ يسمى فضاء بناخ (Banach space) اذا كان (N, d) هو فضاء متري تام.

من تمهيدية 23.3.6 نعرف أن كل فضاء متجه مقاس يملك إتماماً. على أي حال الميزة اللطيفة هي أن هذا الإتمام هو في الحقيقة كذلك فضاء متجه مقاس ولذلك فضاء بناخ (انظر تمارين 3.6 # 12).

تمارين 3.6

1- أثبت أن المتتالية $\{x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{Q}$ مع المسافة الاقليدية.

[هذه المتتالية ليست متقاربة في $\mathbb{Q}$. في $\mathbb{R}$ هي تقترب من العدد e والذي من المعروف أنه غير نسبي. لإثبات أن e هو غير نسبي انظر .Jones et al [128].]

2- أثبت أن كل متتالية جزئية من متتالية كوشي هي متتالية كوشي.

3- أعط مثالاً لمتتالية في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية والتي لا تملك متتالية جزئية تكون متتالية كوشي.

4- باستخدام نتيجة 11.3.6 أثبت أن لكل عدد صحيح موجب m الفضاء المتري $\mathbb{R}^m$ مع المسافة الاقليدية هو فضاء متري تام.

[مساعدة: لتكن $\{(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}): n = 1, 2, \ldots\}$ متتالية كوشي في $\mathbb{R}^m$. أثبت أن لكل $i = 1, 2, \ldots, m$ المتتالية $\{x_{in} : n = 1, 2, \ldots\}$ في $\mathbb{R}$ مع المسافة الاقليدية هي متتالية كوشي ولذلك تقترب من نقطة a_i. بعد ذلك بين ان المتتالية $\{(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{mn}): n = 1, 2, \ldots\}$ تقترب من النقطة $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.]

5- أثبت أن كل فضاء جزئي مغلق في فضاء متري تام هو تام وكذلك كل فضاء جزئي متري تام من فضاء متري هو مغلق.

6- أثبت أن لكل عدد صحيح موجب n, $\mathbb{R}^n$ هو فضاء بولندي.

7- لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a < b$. أثبت أن كل فضاء متقطع وكل من الفضاءات $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, (a, ∞), $[a, \infty)$ و $\{a\}$ مع التبولوجيا المحدثة على كل منها هو فضاء بولندي.

8- اذا كان (X, d) فضاءً مترياً و $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ متتاليات كوشي, أثبت أن $\{d(x_n, y_n)\}$ هي متتالية كوشي في $\mathbb{R}$.

9- املأ التفاصيل المفقودة في برهان تمهيدية 23.3.6.

10- املأ التفاصيل المفقودة في برهان تمهيدية 24.3.6.

11*- أثبت أن كلاً من الفضاءات (ℓ_1, d_1), (ℓ_2, d_2), (c_0, d_0) و (ℓ_∞, d_∞) في تمارين 1.6 # 7 هو فضاء متري تام. في الحقيقة أثبت أن كل من هذه الفضاءات هو فضاء بناخ بالطريقة الطبيعية.

12*- لتكن X أي فضاء متجه مقاس. أثبت أنه يمكن وضع تركيب فضاء متجه مقاس على $\tilde{X}$, الفضاء المتري التام المكون في تمهيدية 23.3.6. لذلك كل فضاء متجه مقاس يملك إتماماً يكون فضاء بناخ.

13- ليكن (X, d) فضاءً مترياً و S مجموعة جزئية من X. المجموعة S تسمى محدودة (bounded) اذا وجد عدد صحيح موجب M بحيث $d(x, y) < M$ لكل $x, y \in S$.

(I) أثبت أنه اذا كانت S مجموعة محدودة في (X, d) و $S = X$ فإن (X, d) فضاء متري محدود. (انظر تمارين 1.6 # 2).

(II) لتكن $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ متتالية متقاربة في فضاء متري (X, d). اذا كانت المجوعة S مكونة من النقاط (المختلفة) في هذه المتتالية, أثبت أن S هي مجموعة محدودة.

(III) لتكن $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ متتالية كوشي في فضاء متري تام (X, d). اذا كانت T مجموعة النقاط في هذه المتتالية, أثبت أن T مجموعة محدودة.

(IV) هل (III) أعلاه تبقى صحيحة اذا لم نشترط أن يكون (X, d) تاماً؟

14- أثبت أن الفضاء المتري (X, d) انفصالياً اذا وفقط اذا كان الفضاء التبولوجي المرافق (X, τ) يحقق مسلمة العد الثانية (انظر تمارين 2.2 # 4).

15- استنتج من تمرين 14 أعلاه أنه اذا كان (X, d) فضاءً مترياً انفصالياً و d_1 هي المسافة المحدثة على المجموعة الجزئية Y من X بواسطة d فإن (Y, d_1) هو انفصالياً, بمعنى آخر كل فضاء جزئي من فضاء متري انفصالي هو انفصالي (يجب أن يلاحظ أنه ليس من الضروري أن يكون صحيحاً أن الفضاء الجزئي من الفضاء التبولوجي الانفصالي هو انفصالياً).

4.6 اقترانات انكماش Contraction Mappings

في الفصل الخامس كان لدينا النظرة الاولى على نظرية النقطة الثابتة. في هذا الجزء سوف نلاقي نوع آخر من نظرية النقطة الثابتة. هذا الجزء هو جزء مرتبط جداً بموضوع الفضاء المتري أكثر من التبولوجيا العامة. على الرغم من ذلك الموضوع مهم في التطبيقات.

1.4.6 تعريف. ليكن f اقتراناً من مجموعة X الى نفسها. النقطة $x \in X$ تسمى نقطة ثابتة (fixed point) للاقتران f اذا كان $f(x) = x$.

2.4.6 تعريف. ليكن (X, d) فضاءً مترياً و f اقتران من X الى نفسها. f يسمى اقتران انكماش (contraction mapping) اذا وجدت $r \in (0, 1)$ بحيث أن

$$d(f(x_1), f(x_2)) \le r.d(x_1, x_2) \quad \text{لكل} \quad x_1, x_2 \in X$$

3.4.6 تمهيدية. ليكن f اقتران انكماش للفضاء المتري (X, d). فإن f هو اقتران متصل.

البرهان. انظر تمارين 4.6 # 1. □

4.4.6 نظرية. **(نظرية اقتران الانكماش أو نظرية بناخ للنقطة الثابتة)** ليكن (X, d) هو فضاء متري تام و f اقتران انكماش من (X, d) الى نفسه. فإن f يملك فقط نقطة ثابتة واحدة.

البرهان. لتكن x أي نقطة في X وتأمل المتتالية التالي

$$x, f(x), f(f(x)) = f^2(x), f(f(f(x))) = f^3(x), \dots, f^n(x), \dots$$

سوف نبين أن هذه متتالية كوشي. اجعل $a = d(x, f(x))$. بما أن f هو اقتران انكماش, يوجد $r \in (0, 1)$ بحيث $d(f(x_1), f(x_2)) \le r.d(x_1, x_2)$ لكل $x_1, x_2 \in X$.

واضح أن $d(f(x), f^2(x)) \le r.d(x, f(x)) = r.a$, $f^3(x)) \le r^2.d(x, f(x)) = r^2.a$ وبالاستقراء نحصل على أن لكل $k \in \mathbb{N}$, $d(f^k(x), f^{k+1}(x)) \le r^k.d(x, f(x)) = r^k.a$.

لتكن m و n أي أعداد صحيحة موجبة حيث $n > m$. اذاً

$$d(f^m(x), f^n(x)) = d(f^m(x), f^m(f^{n-m}(x)))$$

$$\leq r^m.d(x, f^{n-m}(x))$$

$$\leq r^m.[d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \cdots + d(f^{n-m-1}(x), f^{n-m}(x))]$$

$$\leq r^m.d(x, f(x))[1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-m-1}]$$

$$\leq \frac{r^m.a}{1-r}$$

بما أن $r < 1$ واضح أن $\{f^n(x)\}$ هي متتالية كوشي. لأن (X, d) تام يوجد $z \in X$ بحيث أن $f^n(x) \to z$.

بواسطة تمهيدية 3.4.6, f متصل ولذلك

$$f(z) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = z \qquad (1.6)$$

ولذلك z هي نقطة ثابتة للاقتران f.

أخيراً, لتكن t أي نقطة ثابتة للاقتران f. اذاً

$$d(t, z) = d(f(t), f(z)) \leq r.d(t, z) \qquad (2.6)$$

بما أن $r < 1$ هذا يعطي أن $d(t, z) = 0$ ولذلك $t = z$ و f يملك فقط نقطة ثابتة واحدة. □

من الجدير ذكره أن نظرية اقتران الانكماش لا تزودنا فقط باثبات وجود نقطة ثابتة ولكن كذلك تعطينا طريقة لايجادها أي نجعل x هي أي نقطة في X ونجد نهاية المتتالية $\{f^n(x)\}$. هذه الطريقة تمكننا من كتابة برنامج حاسوبي لتقريب النقطة الثابتة لأي دقة مطلوبة.

4.6 تمارين

1- أثبت تمهيدية 3.4.6.

2- عمم نظرية اقتران الانكماش باثبات أنه اذا كان f هو اقتران من فضاء متري تام الى نفسه و f^N هو اقتران انكماش لبعض N حيث N عدد صحيح موجب فإن f يملك فقط نقطة ثابتة واحدة.

3- نظرية القيمة المتوسطة (The Mean Value Theorem) تقول: ليكن f اقتران قيمة حقيقية على فترة الوحدة المغلقة [a, b] حيث f متصل على [a, b] وقابل للاشتقاق على (a, b). فإنه يوجد نقطة $c \in [a, b]$

بحيث $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ (تذكر أن f يسمى قابلاً للاشتقاق عند النقطة s اذا كانت $=$ $f'(s)$ $\lim_{x\to s}\frac{f(x)-f(s)}{x-s}$ موجودة.)

باستخدام نظرية القيمة المتوسطة أثبت ما يلي:

ليكن $f : [a, b] \to [a, b]$ قابلاً للاشتقاق. فإن f هو انكماش اذا وفقط اذا كان هناك $r \in (0, 1)$ بحيث $|f'(x)| \le r$ لكل $x \in [a, b]$.

4- باستخدام تمارين 3 و 2 أعلاه أثبت أنه في حين أن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل $f(x) = \cos x$ لا يحقق شروط نظرية اقتران الانكماش, هو على الرغم من ذلك يملك نقطة ثابتة وحيدة.

5.6 فضاءات بير Baire Spaces

1.5.6 نظرية. (نظرية مقولة بير Baire Category Theorem) ليكن (X, d) فضاءً مترياً. اذا كانت X_1, X_2, ..., X_n, ... متتالية مجموعات جزئية مفتوحة كثيفة في X فإن المجموعة $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ هي كذلك كثيفة في X.

البرهان. يكفس أن نبين أنه اذا كانت U أي مجموعة جزئية مفتوحة في (X, d) فإن $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \phi$.

بما ان X_1 مفتوحة وكثيفة في X, المجموعة $U \cap X_1$ هي مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية في (X, d). لتكن U_1 هي كرة مفتوحة مع نصف قطر على الأكثر 1 بحيث أن $\overline{U_1} \subset U \cap X_1$.

استقرائياً عرف لكل عدد صحيح موجب $n > 1$, كرة مفتوحة U_n مع نصف قطر على الأكثر $1/n$ بحيث أن $\overline{U_n} \subset U_{n-1} \cap X_n$.

لكل عدد صحيح موجب n, لتكن x_n أي نقطة في U_n. واضح أن المتتالية $\{x_n\}$ هي متتالية كوشي. بما أن (X, d) هو فضاء متري تام هذه المتتالية تقترب من نقطة $x \in X$.

لاحظ أن لكل عدد صحيح موجب m كل حد من حدود المتتالية $\{x_n\}$ يقع في المجموعة المغلقة $\overline{U_m}$ ولذلك نقطة النهاية x هي كذلك في المجموعة $\overline{U_m}$.

اذاً $x \in \overline{U_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$. لذلك $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$.

ولكن بما أن $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subset U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ فإن $U \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \phi$ والذي يكمل برهان النظرية. □

في تمارين 2.3 # 5 قدمنا مفهوم داخلية المجموعة الجزئية من الفضاء التبولوجي.

2.5.6 تعريف. ليكن (X, τ) أي فضاء تبولوجي و A مجموعة جزئية من X. أكبر مجموعة مفتوحة محتواة في A تسمى داخلية A (interior of A) ويرمز لها بالرمز Int(A).

3.5.6 تعريف. المجموعة الجزئية A من الفضاء التبولوجي (X, τ) تسمى كثيفة ليس في أي مكان (nowhere dense) اذا كانت داخلية $\overline{A}$ خالية.

هذه التعاريف تمكننا من إعادة صياغة نظرية 1.5.6.

4.5.6 نتيجة. (نظرية مقولة بير Baire Category Theorem) ليكن (X, τ) فضاءً مترياً تاماً. اذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ متتالية من المجموعات الجزئية من X بحيث أن $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ فإن لعلى الأقل واحدة من قيم $n \in \mathbb{N}$, المجموعة $\overline{X_n}$ تملك داخلية غير خالية أي أن X_n كثيفة ليس في أي مكان.

البرهان. تمارين 5.6 # 2. □

5.5.6 تعريف. الفضاء التبولوجي (X, d) يسمى فضاء بير (Baire space) اذا كان لكل متتالية $\{x_n\}$ من المجموعات الجزئية الكثيفة المفتوحة في X, المجموعة $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ هي كذلك كثيفة في X.

6.5.6 نتيجة. كل فضاء قابل للقياس تام هو فضاء بير. □

7.5.6 ملاحظات. من المهم أن نلاحظ أن نتيجة 6.5.6 هي نتيجة في التبولوجيا أكثر من كونها نتيجة في نظرية الفضاء المتري.

لاحظ كذلك أن هناك فضاءات بير والتي ليست قابلة للقياس تماماً. (انظر تمارين 5.6 # 4(IV))

8.5.6 مثال. الفضاء التبولوجي $\mathbb{Q}$ ليس فضاء بير ولذلك ليس قابلاً للقياس تماماً. لرؤية ذلك, لاحظ أن مجموعة الأعداد النسبية معدودة ولتكن $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. كل من المجموعات $X_n = \mathbb{Q} \setminus \{x_n\}$ هي مفتوحة وكثيفة في $\mathbb{Q}$, على أية حال $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \phi$. لذلك $\mathbb{Q}$ لا تملك خاصية فضاء بير. □

9.5.6 ملاحظة. يجب أن تلاحظ (عندما كان لدينا نظرية مقولة بير) أن اثبات أن $\mathbb{Q}$ ليست قابلة للقياس تماماً أكثر صعوبة من اثبات النتيجة الأكثر تعميماً و هي أن $\mathbb{Q}$ ليست فضاء بير.

من المدهش والمهم ليس فقط في التبولوجيا ولكن في الرياضيات بشكل عام أن ترى ان الحالة الأكثر تعميماً في بعض الأحيان أسهل لإثباتها. □

10.5.6 تعاريف. لتكن Y مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X, τ). اذا كانت Y هي اتحاد عدد معدود من المجموعات الجزئية من X التي تكون كثيفة ليس في أي مكان فإن Y تسمى مجموعة من الفئة الاولى (first category) أو قياس (meager) في (X, τ). اذا كانت Y ليست من الفئة الاولى تسمى مجموعة من الفئة الثانية (second category) في (X, τ).

نظرية مقولة بير لها عدة تطبيقات في التحليل ولكن هذا يقع خارج دراستنا في التبولوجيا. على كل حال سوف نختم هذا الجزء مع نظرية مهمة في نظرية فضاء بناخ أي نظرية الاقتران المفتوح (Open Mapping Theorem). هذه النظرية هي نتيجة لنظرية مقولة بير.

11.5.6 تمهيدية. اذا كانت Y مجموعة جزئية من الفئة الاولى في فضاء (X, τ) فإن داخلية Y مجموعة خالية.

البرهان. بما أن Y من الفئة الاولى, $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ حيث كل Y_n, $n \in \mathbb{N}$ كثيفة ليس في أي مكان.

لتكن $U \in \tau$ حيث $U \subseteq Y$. اذاً $U \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{Y_n}$.

لذلك $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash \overline{Y_n})$ وكل مجموعة من المجموعات $X \backslash \overline{Y_n}$ مفتوحة وكثيفة في (X, τ). بما أن (X, τ) هو بير فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \backslash \overline{Y_n})$ هي كثيفة في (X, τ). لذلك المجموعة المغلقة $X \setminus U$ هي كثيفة في (X, τ). وهذا يعطي أن $X \setminus U = X$. لذلك $U = \emptyset$. وهذا يكمل البرهان. □

12.5.6 نتيجة. اذا كانت Y مجموعة جزئية من الفئة الاولى من فضاء بير (X, τ), فإن $X \setminus Y$ هي مجموعة من الفئة الثانية.

البرهان. اذا لم تكن هذه الحالة فإن فضاء بير (X, τ) سوف يكون اتحاد عدد معدود من المجموعات الكثيفة ليس في أي مكان. □

13.5.6 ملاحظة. بما أن $\mathbb{Q}$ مجموعة جزئية من الفئة الاولى في $\mathbb{R}$ فينتج من نتيجة 12.5.6 أن مجموعة الاعداد غير النسبية $\mathbb{P}$ هي مجموعة من الفئة الثانية. □

14.5.6 تعريف. لتكن S مجموعة جزئية من فضاء متجه حقيقي V. المجموعة S تسمى محدبة (convex) اذا كان لكل $x, y \in S$ ولكل عدد حقيقي $0 < \lambda < 1$, النقطة $\lambda x + (1-\lambda)y$ هي في S.

واضح أن كل فضاء جزئي من فضاء متجه هو محدب. وكذلك في أي فضاء متجه مقاس كل كرة مفتوحة وكل كرة مغلقة هي محدبة.

15.5.6 نظرية. (نظرية الاقتران المفتوح Open Mapping Theorem) ليكن $(B, \|\ \|)$ و $(B_1, \|\ \|_1)$ فضاءات بناخ و $L : B \to B_1$ اقتران خطي متصل (في فضاء المتجه) وشامل من B الى B_1. فإن L هو اقتران مفتوح.

البرهان. باستخدام تمارين 5.6 # 1 (IV) يكفي أن نبين انه يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث أن $B_s(0) \subset L(B_N(0))$ لبعض $s > 0$. واضح أن $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0)$ ولأن L شامل فإن $B_1 = L(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_n(0))$.

بما أن B_1 هو فضاء بناخ, بواسطة نتيجة 4.5.6 لنظرية مقولة بير, يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث أن $\overline{L(B_N(0))}$ تملك داخلية غير خالية.

لذلك يوجد $z \in B_1$ و $t > 0$ بحيث أن $B_t(z)) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

بواسطة تمارين 5.6 # 3 ليس هناك فقدان للتعميم بفرض أن $z \in L(B_N(0))$.

ولكن $B_t(z) = B_t(0) + z$ ولذلك

$$B_t(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} - z = \overline{L(B_N(0)) - z} \subseteq \overline{L(B_N(0)) - L(B_N(0)} \subseteq \overline{L(B_{2N}(0))}.$$

ولكون L خطي هذا يعطي أن $B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

سوف نبين أن هذا يعطي أن $B_{t/4}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))}$.

لتكن $w \in B_{t/2}(0)$. اذاً يوجد $x_1 \in B_N(0)$ بحيث أن $\|w - L(x_1)\|_1 < t/4$.

لاحظ أنه لكون L خطي, لكل عدد صحيح $k > 0$

$$B_{t/2}(0) \subseteq \overline{L(B_N(0))} \Rightarrow B_{t/(2k)}(0) \subseteq \overline{L(B_{N/k}(0))}.$$

لذلك يوجد $x_2 \in B_{N/2}(0)$ بحيث أن

$$\|(w - L(x_1)) - L(x_2)\|_1 = \|w - L(x_1) - L(x_2)\|_1 < t/8.$$

بالاستمرار على هذه الطريقة نحصل بالاستقراء على متتالية $\{x_m\}$ بحيث أن $\|x_m\| < \frac{N}{2^{m-1}}$ وكذلك

$$\|w - L(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\|_1 = \|w - L(x_1) - L(x_2) - \cdots - L(x_m)\|_1 < \frac{t}{2^m}.$$

بما أن B تامة فإن المتسلسلة $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ تقترب من نهاية a.

واضح أن $\|a\| < 2N$ وباتصال L لدينا $w = L(a)\ 2\ L(B_{2N}(0))$.

لذلك $B_{t/2}(0) \subseteq L(B_{2N}(0))$ ولهذا $B_{t/4}(0) \subseteq L(B_N(0))$ وهذا يكمل البرهان. □

النتيجة التالية لنظرية الاقتران المفتوح تتبع مباشرة وهي حالة خاصة مهمة جداً.

16.5.6 نتيجة. أي اقتران خطي متصل وواحد لواحد وشامل من فضاء بناخ الى فضاء بناخ آخر هو هوميومورفزم. بشكل خاص أي اقتران خطي متصل وواحد لواحد وشامل من فضاء بناخ لنفسه هو هوميومورفزم. □

تمارين 5.6

1- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين. الاقتران $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ يسمى اقتراناً مفتوحاً (open mapping) اذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة A في (X, τ), المجموعة $f(A)$ هي مفتوحة في (Y, τ_1).

(I) أثبت أن f هو اقتران مفتوح اذا وفقط اذا كان لكل $U \in \tau$ ولكل $x \in U$ المجموعة $f(U)$ هي جوار لـ $f(x)$.

(II) ليكن (X, d) و (Y, d_1) فضائين متريين و f اقتران من X الى Y. أثبت أن f اقتران مفتوح اذا وفقط اذا كان لكل $n \in \mathbb{N}$ ولكل $x \in X$ فإن $B_r(f(x)) \subseteq f(B_{1/n}(x))$ لبعض $r > 0$.

(III) ليكن $(N, \|\ \|)$ و $(N_1, \|\ \|_1)$ فضائين متجهين مقاسين و f اقتران خطي من N الى N_1. أثبت أن f هو اقتران مفتوح اذا وفقط اذا كان لكل $n \in \mathbb{N}$, $B_r(0) \subseteq f(B_{1/n}(0))$ لبعض $r > 0$.

(IV) ليكن $(N, \|\ \|)$ و $(N_1, \|\ \|_1)$ فضائين متجهين مقاسين و f اقتران خطي من N الى N_1. أثبت أن f هو اقتران مفتوح اذا وفقط اذا كان هناك $s > 0$ بحيث أن $B_r(0) \subseteq f(B_s(0))$ لبعض $r > 0$.

2- باستخدام نظرية مقولة بير أثبت نتيجة 4.5.6.

3- لتكن A مجموعة جزئية من فضاء بناخ B. أثبت أن الآتية متكافئة:

(I) المجموعة $\bar{A}$ تملك داخلية غير خالية.

(II) يوجد $z \in \bar{A}$ و $t > 0$ بحيث أن $B_t(z) \subseteq \bar{A}$.

(III) يوجد $y \in A$ و $r > 0$ بحيث أن $Br(y) \subseteq \bar{A}$.

4- النقطة x في الفضاء التبولوجي (X,τ) تسمى نقطة منعزلة (isolated point) اذا كان $\{x\} \in \tau$. أثبت أنه اذا كان (X,τ) هو فضاء-T_1 معدود و لا يملك نقاط منعزلة فإنه ليس فضاء بير.

5- (I) باستخدام نسخة نظرية مقولة بير في نتيجة 4.5.6 أثبت أن $\mathbb{P}$ ليست مجموعة-F_σ و $\mathbb{Q}$ ليست مجموعة-G_δ في $\mathbb{R}$.

[مساعدة: افرض أن $\mathbb{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ حيث كل F_n هي مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$. بعد ذلك طبق نتيجة 4.5.6 لـ $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cup \bigcup_{q\in Q}\{q\}$.]

(II) ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اقتران من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$. F يسمى متصلاً عند النقطة $a \in \mathbb{R}$ اذا كان لكل مجموعة مفتوحة U تحوي $f(a)$ يوجد مجموعة مفتوحة V تحوي a بحيث أن $f(V) \subseteq U$. أثبت أن مجموعة نقاط $\mathbb{R}$ التي عندها يكون f متصلاً هي مجموعة-G_δ.

(III) استنتج من (I) و (II) بأنه لايوجد اقتران $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث يكون متصل فقط عند مجموعة الاعداد النسبية.

6- (I) ليكن (X,τ) أي فضاء تبولوجي و Y و S مجموعات جزئية كثيفة في X. اذا كانت S هي كذلك مفتوحة في (X,τ), أثبت أن $Y \cap S$ هي كثيفة في كل من X و Y.

(II) لتكن τ_1 التبولوجيا المحدثة على Y بواسطة τ على X. لتكن $\{X_n\}$ متتالية مجموعات جزئية مفتوحة وكثيفة في Y. باستخدام (I) أثبت أن $\{X_n \cap Y\}$ هي متتالية مجموعات جزئية مفتوحة وكثيفة في (Y, τ_1).

(III) استنتج من تعريف 5.5.6 و (II) أعلاه أن (Y, τ_1) هو فضاء بير وبعد ذلك أن (X,τ) هو فضاء بير. [لذلك غلاقة فضاء بير هو فضاء بير.]

(IV) باستخدام (III) أثبت أن الفضاء الجزئي (Z, τ_2) من $\mathbb{R}^2$ والمعطى على الشكل

$$Z = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$$

هو فضاء بير ولكن ليس قابلاً للقياس تماماً لأن الفضاء الجزئي المغلق $\{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$ هو هوميومورفك لـ $\mathbb{Q}$ والذي ليس قابلاً للقياس تماماً. وهذا كذلك يبين أن كل فضاء جزئي مغلق من فضاء بير ليس بالضرورة أن يكون فضاء بير.

7- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتران متصل ومفتوح. اذا كان (X,τ) فضاء بير أثبت أن (Y, τ_1) هو فضاء بير. [لذلك الصورة المتصلة المفتوحة لفضاء بير هي فضاء بير.]

8- ليكن (Y, τ_1) فضاءً جزئياً مفتوحاً من فضاء بير (X,τ). أثبت أن (Y, τ_1) هو فضاء بير.[لذلك الفضاء الجزئي المفتوح من فضاء بير هو فضاء بير.]

9- ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. الأقتران $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ يسمى نصف متصل من أدنى (lower semicontinuous) اذا كان لكل $r \in \mathbb{R}$، المجموعة $f^{-1}((-\infty, r])$ هي مغلقة في (X,τ). الاقتران $f : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ يسمى نصف متصل من أعلى (upper semicontinuous) اذا كان لكل $r \in \mathbb{R}$، المجموعة $f^{-1}((-\infty, r))$ هي مفتوحة في (X,τ).

(I) أثبت أن f متصل اذا وفقط اذا كان نصف متصل من أدنى ونصف متصل من أعلى.

(II) ليكن (X,τ) فضاء بير, I مجموعة مفهرسة ولكل $x \in X$، لتكن المجموعة $\{f_i(x) : i \in I\}$ محدودة من أعلى حيث كل اقتران $f_i : (X, \tau) \to \mathbb{R}$ نصف متصل من أدنى. باستخدام نظرية مقولة بير أثبت أنه يوجد مجموعة جزئية مفتوحة O من (X,τ) بحيث أن المجموعة $\{f_i(x) : x \in O, i \in I\}$ هي محدودة من أعلى.

[مساعدة. اجعل $X_n = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}((-\infty, n])$.]

10- لتكن B فضاء بناخ حيث بعد الفضاء المتجه الاساسي معدود. باستخدام نظرية مقولة بير أثبت أن بعد الفضاء المتجه الاساسي في الحقيقة هو منتهي.

11- ليكن $(N, \|\ \|)$ فضاء متجه مقاس و (X,τ) مجموعة جزئية محدبة من $(N, \|\ \|)$ مع التبولوجيا المحدثة. أثبت أن (X,τ) مترابط مسارياً ولذلك هو كذلك مترابط. استنتج أن كل كرة مفتوحة في $(N, \|\ \|)$ هي مترابطة مسارياً كما هو $(N, \|\ \|)$ نفسه.

6.6 خلاصة

نظرية الفضاء المتري موضوع مهم بحد ذاته. أيضاً الفضاءات المترية تحتل موقعاً مهماً في دراسة التبولوجيا. في الواقع العديد من الكتب في التبولوجيا تبدأ بالفضاءات المترية و تقوم بدراسة التبولوجيا من خلالهم.

شاهدنا أن مسافات مختلفة على نفس المجموعة يمكن أن تنتج نفس التبولوجيا. مثل هذه المسافات تسمى مسافات متكافئة. قدمنا لدراسة فضاءات الاقترانات وبشكل خاص $C[0, 1]$. وفي الطريق قابلنا الفضاءات المتجهة المقاسة وهو الموضوع المركزي في التحليل الاقتراني.

ليس كل الفضاءات التبولوجية تنتج من فضاءات مترية. شاهدنا ذلك بملاحظة أن التبولوجيا المحدثة بواسطة المسافات هي هوسدورف.

شاهدنا أن تبولوجيا الفضاء المتري يمكن أن توصف بشكل كامل عن طريق متتاليلتها المتقاربة وأن الاقترانات المتصلة بين الفضاءات المترية يمكن كذلك أن توصف بنفس المبدأ.

تمارين 2.6 # 9 قدمت المفهوم الممتع للمسافة بين المجموعات في الفضاء المتري.

قابلنا مفاهيم متتالية كوشي, فضاء متري تام, فضاء قابل للقياس تماماً, فضاء بناخ, فضاء بولندي وفضاء سوسلن. التتام هو موضوع مهم في نظرية الفضاء المتري بسبب الدور الرئيسي الذي يلعبه في تطبيقات التحليل. فضاءات بناخ هي فضاءات متجهة مقاسة تامة وتستخدم في عدة مجالات في التحليل. شاهدنا أن كل فضاء متري له إتمام أي يمكن تضمينه بتقايس في فضاء متري تام. على سبيل المثال كل فضاء متجه مقاس له إتمام وهو قضاء بناخ.

اقترانات الانكماش قدمت في مفهوم النقاط الثابتة وشاهدنا برهان نظرية اقتران الانكماش والتي تعرف كذلك بنظرية بناخ للنقطة الثابتة. هذه نظرية مفيدة جداً في التطبيقات على سبيل المثال في برهان وجود حلول للمعادلات التفاضلية.

نظرية مفيدة اخرى برهنت في هذا الفصل وهي نظرية مقولة بير. قدمنا المفهوم التبولوجي لفضاء بير وشاهدنا أن كل فضاء قابل للقياس تماماً هو فضاء بير. وفي الطريق تم تقديم مفهوم الفئة الاولى أو القياس وبعد ذلك برهنا نظرية الاقتران المفتوح والتي تقول أن الاقتران الخطي المتصل الشامل من فضاء بناخ الى فضاء بناخ آخر يجب أن يكون اقتران مفتوح.

الفصل السابع

التراص Compactness

مقدمة

أهم خاصية تبولوجية هي التراص. انه يلعب دور المفتاح في عدة فروع من الرياضيات. من العدل القول أن من لم يفهم لغاية الآن التراص فهو لم يفهم التبولوجيا!

اذاً ما هو التراص؟ يمكن أن يوصف بأنه تعميم التبولوجيين للتناهي. التعريف الاصطلاحي يقول أن الفضاء التبولوجي هو متراص اذا حقق الخاصية أنه عندما يكون مجموعة جزئية من اتحاد عدد غير منتهي من المجموعات المفتوحة فهو كذلك مجموعة جزئية من اتحاد عدد منتهي من هذه المجموعات المفتوحة. واضح أن كل مجموعة جزئية منتهية من فضاء تبولوجي هي متراصة. وبسرعة يمكن أن نشاهد أن في الفضاء المتقطع المجموعة هي متراصة اذا وفقط اذا كانت منتهية. عندما نذهب الى الفضاءات التبولوجية مع تراكيب تبولوجية غنية مثل $\mathbb{R}$ نكتشف أن مجموعات غير منتهية يمكن أن تكون متراصة. في الحقيقة كل الفترات المغلقة $[a, b]$ في $\mathbb{R}$ هي متراصة. ولكن فترات من هذا النوع هي الوحيدة التي تكون متراصة.

لذلك هذا يقودنا لنسأل: بالضبط أي المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ هي متراصة؟ نظرية هين بورل سوف تخبرنا أن المجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}$ هي فقط المجموعات التي تكون مغلقة ومحدودة في نفس الوقت.

عندما نذهب بعيداً في دراسة التبولوجيا سوف نشاهد أن التراص يلعب دوراً حاسماً. هذا خصوصاً في تطبيقات التبولوجيا في التحليل.

1.7 فضاءات متراصة Compact spaces

1.1.7 تعريف. لتكن A مجموعة جزئية من فضاء تبولوجي (X,τ). A تسى متراصة (Compact) إذا كان لكل مجموعة I ولكل عائلة من المجموعات المفتوحة O_i, $i\in I$، بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ يوجد عائلة جزئية منتهية $O_{i1}, O_{i2}, \dots, O_{in}$ بحيث أن $A \subseteq O_{i1} \cup O_{i2} \cup \cdots \cup O_{in}$.

1.1.7 مثال. إذا كان $(X, \tau) = R$ و $A = (0,\infty)$ فإن A ليست متراصة.

البرهان. لكل عدد صحيح موجب i، لتكن O_i الفترة المفتوحة $(0, i)$، فإن من الواضح ان $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$ ، ولكن لا يوجد $i_1, i_2, \dots, i_n$ بحيث أن:

$(0, i_1) \cup (0, i_2) \cup \cdots \cup (0, i_n) \supseteq A$ لذلك A ليست متراصة. □

3.1.7 مثال. ليكن (X,τ) أي فضاء تبولوجي و $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ أي مجموعة جزئية منتهية في (X,τ)، فإن A متراصة.

البرهان. لتكن O_i, $i\in I$ أي عائلة من المجموعات المفتوحة بحيث أن $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.

إذاً لكل $x_j \in A$ يوجد O_{ij} بحيث $x_j \in O_{ij}$ لذلك $A \subseteq O_{i1} \cup O_{i2} \cup \cdots \cup O_{in}$ مما يعني أن A هي متراصة. □

4.1.7 ملاحظة. شاهدنا في مثال 3.1.7 أن كل مجموعة منتهية (في فضاء تبولوجي) هي متراصة، في الحقيقة "التراص" يمكن أن ينظر له كتعميم تبولوجي لـ "التناهي" □

5.1.7 مثال. المجموعة الجزئية A من فضاء منقطع (X,τ) هي متراصة إذا وفقط إذا كانت منتهية.

البرهان. إذا كانت A منتهية فإن مثال 3.1.7 يبين أن A متراصة.

بالمقابل، لتكن A متراصة، فإن عائلة المجموعات الأحادية $O_x = \{x\}$، $x \in A$ هي بحيث أن كل O_x هي مفتوحة و $A \subseteq \bigcup_{x\in A} O_x$. بما أن A متراصة يوجد $O_{x1}, O_{x2}, \dots, O_{xn}$ بحيث أن $A \subseteq O_{x1} \cup O_{x2} \cup \cdots \cup O_{xn}$ أي أن $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ لذلك A مجموعة منتهية. □

بالتأكيد إذا كانت كل المجموعات المتراصة منتهية فإن دراسة "التراص" ستكون غير ممتعة، على أي حال سوف نرى باختصار أن على سبيل المثال كل فترة مغلقة $[a, b]$ هي متراصة، بداية سنقدم بعض المصطلحات.

6.1.7 تعاريف. لتكن I أي مجموعة و O_i, $i\in I$ عائلة من المجموعات المفتوحة في فضاء تبولوجي (X,τ).
لتكن A مجموعة جزئية من (X,τ)، فإن O_i, $i\in I$ تسمى غطاء مفتوح (open covering) لـ A إذا كانت $A \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$ ، العائلة الجزئية المنتهية $O_{i1}, O_{i2}, \ldots, O_{in}$ من O_i, $i\in I$ ، تسمى غطاء جزئياً منتهياً (finite subcovering) لـ A إذا كانت $A \subseteq O_{i1} \cup O_{i2} \cup \cdots \cup O_{in}$.

لذلك يمكن إعادة كتابة تعريف التراص على الشكل التالي:

7.1.7 تعاريف. المجموعة الجزئية A من فضاء بتولوجي (X,τ) تسمى متراصة (compact) إذا كان كل غطاء مفتوح لـ A يملك غطاء جزئي منتهي. إذا كانت المجموعة الجزئية المتراصة A تساوي X فإن (X,τ) يسمى فضاء متراص (compact space).

8.1.7 ملاحظة. نترك كتمرين إثبات العبارة التالية:

لتكن A مجموعة جزئية من (X,τ) و τ_1 التبولوجيا المحدثة على A بواسطة τ. فإن A مجموعة جزئية متراصة من (X,τ) إذا وفقط إذا كان (A, τ_1) فضاء متراصة.

[هذه العبارة ليست مباشرة كما تظهر من أول نظرة.] □

9.1.7 تمهيدية. الفترة المغلقة $[0, 1]$ متراصة.

البرهان. لتكن O_i, $i\in I$ أي غطاء مفتوح للفترة $[0, 1]$. إذا لكل $x\in[0,1]$ يوجد O_i بحيث أن $x\in O_i$. بما أن O_i مفتوحة حول x يوجد فترة U_x مفتوحة في $[0, 1]$ بحيث أن $x\in U_x \subseteq O_i$.

الآن عرِّف مجموعة جزئية S من $[0, 1]$ كما يلي:

$S = \{z : [0, z]$ يمكن تغطيتها بعدد منتهي من المجموعات $U_x\}$

[لذلك إذا كانت $x\in S$ فإن $[0,y]\subseteq U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\ldots\cup U_{x_n}$ لبعض $x_1, x_2, \ldots, x_n$.] الآن لتكن $x\in S$ و $y\in U_x$ بما أن U_x هي فترة تحوي x و y فإن $[x,y]\subseteq U_x$. (هنا فرضنا، بدون ان نفقد التعميم، أن $x \le y$.) لذلك

$$[0,y]\subseteq U_{x_1}\cup U_{x_2}\cup\ldots\cup U_{x_n}\cup U_x$$

ولذلك $y \in S$.

لذلك لكل $x \in [0,1]$ ، $U_x \cap S = U_x$ أو ϕ. وهذا يعطي أن

$$S = \bigcup_{x\in S} U_x$$

و

$$[0,1] \setminus S = \bigcup_{x\notin S} U_x$$

مما يعني أن S مفتوحة في [0, 1] و S مغلقة في [0, 1]. ولكن [0, 1] مترابطة. لذلك $S = [0,1]$ أو $S = \phi$.

ولكن $0 \in S$ ولذلك $S = [0,1]$ أي أن [0, 1] يمكن تغطيتها بعدد منتهي من المجموعات U_x. لذلك $[0,1] \subseteq U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \ldots \cup U_{x_m}$. ولكن كل U_{x_i} محتواة في مجموعة O_i، $i \in I$. لذلك $[0,1] \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_m}$ وهذا يعني أن [0, 1] متراصة. □

1.7 تمارين

1- ليكن (X,τ) فضاء غير متقطع. أثبت أن كل مجموعة جزئية من X متراصة.

2- لتكن τ التبولوجيا منتهي- مغلق على أي مجموعة X. أثبت أن كل مجموعة جزئية من (X,τ) هي متراصة.

3- أثبت أن كل من الفضاءات التالية ليست متراصة.

(I) $(0, 1)$؛

(II) $[0, 1)$؛

(III) $\mathbb{Q}$؛

(IV) $\mathbb{P}$؛

(V) $\mathbb{R}^2$؛

(VI) القرص المفتوح $D=\{(x,y): x^2+y^5<1\}$ باعتباره فضاءً جزئياً من $\mathbb{R}^2$؛

(VII) خط سورجنفري

(VIII) C [0, 1] مع التبولوجيا المحدثة بواسطة المسافة d في مثال 5.1.6.

(IX) C_o, l_∞, l_2, l_1 مع التبولوجيا المحدثة على التوالي بواسطة المسافات d_o, d_∞, d_2, d_1 في تمارين 1.6 # 7.

4- هل [0, 1] مجموعة جزئية متراصة من خط سورجنفري؟

5- هل $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{Q}$ ؟

6- أثبت أن $S=\{0\}\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\})$ مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}$ في حين أن $\bigcup_{h=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}$ ليست متراصة.

2.7 نظرية هين بورل The Heine-Borel Theorem

التمهيدية التالية تقول أن "الصورة المتصلة لفضاء متراص هي متراصة"

1.2.7 تمهيدية. ليكن $f: (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتران متصل وشامل، إذا كان (X,τ) متراص فإن (Y, τ_1) متراص.

البرهان. ليكن O_i، $i \in I$ أي غطاء مفتوح لـ Y أي أن $Y \subseteq \bigcup_{i=I} O_i$. إذاً $f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i=I} O_i)$ أي أن $X \subseteq \bigcup_{i=I} f^{-1}(O_i)$.

لذلك $f^{-1}(O_i)$ ، $i \in I$ هو غطاء مفتوح لـ X.

بما أن X متراص يوجد $i_1, i_2, \ldots, i_n$ في I بحيث أن:

$$X \subseteq f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{i_n})$$

لذلك

$$Y = f(X)$$

$$\subseteq f\left(f^{-1}(O_{i_1}) \cup f^{-1}(O_{i_2}) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{i_n})\right)$$

$$= f\left(f^{-1}(O_{i_1})\right) \cup f\left(f^{-1}(O_{i_2})\right) \cup \ldots \cup f\left(f^{-1}(O_{i_n})\right)$$

لأن f شامل

$$= O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_n}$$

لذلك لدينا $Y \subseteq O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \ldots \cup O_{i_n}$ ، أي أن Y تغطى بعدد منتهي من O_i، لذلك Y متراصة. □

2.2.7 نتيجة. ليكن (X,τ) و (Y,τ_1) فضائين تبولوجيين هوميومورفك. إذا كان (X,τ) متراص فإن (Y, τ_1) متراص. □

3.2.7 نتيجة. لأي a و b في ℝ حيث a < b، [a, b] متراصة في حين أن (a, b) ليست متراصة.

البرهان. الفضاء [a, b] هوميومورفك للفضاء المتراص [0, 1] ولذلك باستخدام تمهيدية 1.2.7 الفضاء [a, b] متراص.

الفضاء (a, b) هوميومورفك لـ $(0,\infty)$. إذا كانت (a, b) متراصة فإن $(0,\infty)$ متراصة ولكن شاهدنا في مثال 2.1.7 أن $(0,\infty)$ ليست متراصة. لذلك (a, b) ليست متراصة. □

4.2.7 تمهيدية. كل مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متراص هي متراصة.

البرهان. لتكن A مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متراص (X,τ). لتكن $U_i \in \tau$, $i \in I$ هي غطاء مفتوح للمجموعة A. إذا

$$X \subseteq (\bigcup_{i \in I} U_i) \bigcup (X \setminus A)$$

أي أن $i \in I, U_i$ مع المجموعة المفتوحة X \ A هي غطاء مفتوح لـ X. لذلك يوجد غطاء جزئي منتهي $U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}$ ، X \ A. [إذا كانت X \ A ليست في الغطاء الجزئي المنتهي يمكن نضيفها ويبقى لدينا غطاء جزئي منتهي لـ X].

لذلك:

$$X \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

وهذا يعني أن:

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k} \cup (X \setminus A)$$

والذي يعطي أن:

$$A \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \ldots \cup U_{i_k}$$

لأن $A \cap (X \setminus A) = \phi$.

لذلك A تملك غطاءً جزئياً منتهياً وهذا يعني أنها متراصة. □

5.2.7 تمهيدية. المجموعة الجزئية المتراصة من فضاء تبولوجي هوسدورف هي مغلقة.

البرهان. لتكن A مجموعة جزئية متراصة من فضاء هوسدورف (X,τ). سوف نبين أن A تحوي كل نقاط النهاية الخاصة بها ولذلك هي مغلقة. لتكن $p \in X \setminus A$. إذاً لكل $a \in A$ يوجد مجموعتين مفتوحتين U_a و V_a بحيث أن $p \in V_a, a \in U_a$ و $U_a \cap V_a = \phi$.

هذا يعني أن $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$. بما أن A متراصة يوجد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ في A بحيث أن:

$$A \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \ldots \cup U_{a_n}$$

اجعل $U = U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \ldots \cup U_{a_n}$ و $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \ldots \cap V_{a_n}$

إذاً $p \in V$ و $V_a \cap U_a = \phi$ تعطي أن $V \cap U = \phi$ والتي بدورها تعطي أن $V \cap A = \phi$. لذلك p ليست نقطة نهاية للمجموعة A و V هي مجموعة مفتوحة تحوي p ولا تتقاطع مع A.

لذلك A تحوي كل نقاط النهاية الخاصة بها ولذلك هي مغلقة. □

6.2.7 نتيجة. أي مجموعة جزئية متراصة من فضاء قابل للقياس هي مغلقة. □

7.2.7 مثال. لأي a و b في $\mathbb{R}$ حيث $a < b$، الفترات $[a, b)$، و $(a, b]$ ليست متراصة لأنها مجموعات جزئية ليست مغلقة في الفضاء القابل للقياس $\mathbb{R}$. □

8.2.7 تمهيدية. أي مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}$ هي محدودة.

البرهان. لتكن $A \subseteq R$ غير محدودة. إذاً $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$ ولكن $\{(-n, n): n=1, 2, 3, \ldots\}$ لا تملك أي غطاء جزئي منتهي للمجموعة A لأن A غير محدودة. لذلك A غير متراصة. وهذا يعني أن كل مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}$ هي محدودة. □

9.2.7 نظرية. (نظرية هين – بورل Heine-Borel Theorem) كل مجموعة جزئية محدودة ومغلقة في $\mathbb{R}$ هي متراصة.

البرهان. إذا كانت A مجموعة جزئية محدودة ومغلقة في $\mathbb{R}$ فإن $A \subseteq [a, b]$ لبعض a و b في $\mathbb{R}$. بما أن $[a, b]$ متراصة و A مجموعة جزئية مغلقة فإن A متراصة. □

نظرية هين- بورل هي نتيجة مهمة. البرهان أعلاه قصير فقط لأننا أولاً أثبتنا تمهيدية1.7 .9.

10.2.7 تمهيدية (عكس نظرية هين – بورل). كل مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}$ هي مغلقة ومحدودة.

البرهان. هذا ينتج مباشرة من تمهيدية 8.2.7 وتمهيدية 5.2.7. □

11.2.7 تعريف. المجموعة الجزئية A من فضاء متري (X, d) تسمى محدودة (bounded) إذا وجد عدد حقيقي r بحيث أن $d(a_1, a_2) \leq r$ لكل a_1 و a_2 في A.

12.2.7 تمهيدية. لتكن A مجموعة جزئية متراصة في فضاء متري (X, d). فإن A مغلقة ومحدودة.

البرهان. بواسطة نتيجة 6.2.7، A مجموعة مغلقة. الآن ثبت $x_0 \in X$ ، وعرِّف الاقتران $f: (A, \tau) \to \mathbb{R}$ على الشكل:

$f(a) = d(a, x_0)$ لكل $a \in A$

حيث τ التبولوجيا المحدثة على A. إذاً f متصل ولذلك، باستخدام تمهيدية 1.2.7، f(A) متراصة. لذلك، بواسطة تمهيدية 10.2.7، f(A) محدودة أي يوجد عدد حقيقي M بحيث أن:

$f(a) \leq M$ لكل $a \in A$

لذلك $d(a, x_0) \leq M$ لكل $a \in A$. بوضع r=2M نرى باستخدام المتباينة المثلثية $d(a_1, a_2) \leq r$ لكل a_1 و a_2 في A. □

تذكر أن $\mathbb{R}^n$ يشير إلى الفضاء الإقليدي n- بعدي مع التبولوجيا المحدثة بواسطة المسافة الإقليدية. من الممكن أن نعمم نظرية هين- بورل وعكسها من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}^n$، n>1. سوف نكتب النتيجة هنا ولكن نؤجل برهانها إلى الفصل القادم.

13.2.7 نظرية. (نظرية هين- بورل المعممة). أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$، n≥1 هي متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

تحذير. على الرغم من أن نظرية 13.2.7 تقول أن كل مجوعة جزئية محدودة ومغلقة في $\mathbb{R}^n$ هي متراصة، المجموعات الجزئية المحدودة والمغلقة في الفضاءات المترية الأخرى ليس بالضرورة أن تكون متراصة. (انظر تمارين 2.7#9).

14.2.7 تمهيدية. ليكن (X,τ) فضاء متراص و f اقتران متصل من (X,τ) إلى $\mathbb{R}$. فإن المجموعة f(X) تملك عنصراً أعظم وعنصراً أصغر.

البرهان. بما أن f متصل فإن f(X) متراصة. لذلك f(X) مجموعة جزئية محدودة ومغلقة في $\mathbb{R}$. بما أن f(X) محدودة فإنها تملك أقل حد أعلى.

لأن f(X) مغلقة، مساندة 2.3.3 تعطي أن أقل حد أعلى هو في f(X). لذلك f(X) تملك عنصراً أعظم أي أقل حداً أعلى. بنفس الأسلوب يمكن إثبات أن f(X) لها عنصراً أصغر. □

15.2.7 تمهيدية. لتكن a و b في $\mathbb{R}$ و f اقتران متصل من [a, b] إلى $\mathbb{R}$. إذا f([a, b]) = [c, d] لبعض c و d في $\mathbb{R}$.

البرهان. بما أن [a, b] مترابطة فإن([a, b])f مجموعة جزئية مترابطة من $\mathbb{R}$ ولذلك هي فترة. بما أن[a, b] متراصة فإن f [a, b] متراصة. لذلك ([a, b])f فترة مغلقة ومحدودة. لذلك

f [a, b] = [c, d]

لبعض c و d في $\mathbb{R}$. □

2.7 تمارين

1- أي من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ التالية متراصة؟ (برر إجابتك)

(I) $\mathbb{Z}$؛

(II) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{n} : n = 1,2,3,...\right\}$ ؛

(III) $\{x : x = \cos y, y \in [0,1]\}$ ؛

(IV) $\left\{x : x = \tan y, y \in [0, \frac{\pi}{2})\right\}$.

2- أي من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}^2$ التالية متراصة؟ (برر إجابتك)

(I) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$ ؛

(II) $\{(x, y) : x \geq y + 1\}$ ؛

(III) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4\}$ ؛

(IV) $\{(x, y) : 0 < x < 2, 0 \leq y \leq 4\}$.

3- ليكن (X,τ) فضاء متراص. إذا كانت $\{F_i : i \in I\}$ عائلة من المجموعات الجزئية المغلقة في X بحيث أن $\bigcap_{i \in I} F_i = \phi$ ، أثبت أنه يوجد عائلة جزئية منتهية $F_{i_1}, F_{i_2}, ..., F_{i_m}$ بحيث $F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap ... \cap F_{i_m} = \phi$.

4- نتيجة 7.3.4 تقول أن لكل أعداد حقيقية c, b, a و d حيث a<b و c<d

(I) $(a,b) \not\cong [c,d]$

(II) $[a,b) \not\cong [c,d]$

أثبت كل منهما باستخدام التراص (بدلاً من الترابط كما فعل في نتيجة 7.3.4).

5- ليكن (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين، الاقتران $f: (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$؛ f يسمى اقتران مغلق (closed mapping) إذا كان لكل مجموعة جزئية مغلقة A من (X,τ), $f(A)$ مغلقة في (Y,τ_1). الاقتران $f: (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ يسمى اقتران مفتوح (open mapping) إذا كان لكل مجموعة جزئية مفتوحة A من (X,τ), $f(A)$ مفتوحة في (Y, τ_1).

(أ) جد أمثلة على اقترانات f تكون

(I) مفتوحة وليست مغلقة

(II) مغلقة وليست مفتوحة

(III) مفتوحة وليست متصلة

(IV) مغلقة وليست متصلة

(V) متصلة وليست مفتوحة

(VI) متصلة وليست مغلقة

(ب) إذا كان (X,τ) و (Y, τ_1) فضائين هوسدورف متراصين و $f: (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتران متصل، أثبت أن f اقتران مغلق.

6- ليكن $f: (X,\tau) \to (Y, \tau_1)$ اقتران تقابل متصل. إذا كان (X,τ) متراص، و (Y, τ_1) هوسدورف، أثبت أن f هوميومورفزم.

7- لتكن $\{Cj : j \in J\}$ عائلة من المجموعات الجزئية المتراصة والمغلقة في فضاء تبولوجي (X,τ). أثبت أن $\bigcap_{j \in J} C_j$ متراصة.

8- لتكن n عدد صحيح موجب, d المسافة الاقليدية على $\mathbb{R}^n$ و X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$. أثبت أن X محدودة في $(\mathbb{R}^n,d)$ إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب M بحيث لكل $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X$ ، $-M \le x_i \le M$ ، i=1,2,…n

9- ليكن $(C[0,1],d^*)$ الفضاء المتري المعرّف في مثال 6.1.6. لتكن $B = \{f : f \in C[0,1], d^*(f,0) \le 1\}$ حيث 0 يرمز للاقتران الثابت من [0, 1] إلى $\mathbb{R}$ والذي يجعل صورة كل عنصر صفراً. (المجموعة B تسمى كرة الوحدة المغلقة closed unit ball).

(I) أثبت أن B مغلقة ومحدودة في $(C[0, 1], d^*)$

(II) أثبت أن B ليست متراصة. [مساعدة: لتكن $\{B_i : i \in I\}$ عائلة كل الكرات المفتوحة التي نصف قطرها $\frac{1}{2}$ في $(C[0,1], d^*)$. إذاً $\{B_i : i \in I\}$ هو غطاء مفتوح لـ B. افرض أنه يوجد غطاء جزئي منتهي B_1, B_2, …, B_N. تأمل الاقترانات التي عددها N+1 التالية: $f_\alpha : [0,1] \to R$ المعرّفة على الشكل $f_\alpha(x) = \sin(2^{N-\alpha}.\pi.x)$ ، $\alpha = 1, 2, ..., N+1$

(أ) أثبت أن كل $f_\alpha \in B$

(ب) ملاحظاً أن $f_{N+1}(1) = 1$ و $f_m(1) = 0$ لكل $m \le N$ استنتج أنه إذا كان $f_{N+1} \in B_1$ فإن $f_m \notin B$ ، $m = 1, \dots, N$

(ج) ملاحظاً أن $f_N\left(\frac{1}{2}\right)=1$ و $f_m\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لكل $m \le N-1$ استنتج أنه إذا كان $f_N \in B_2$ فإن $f_m \notin B_2$ ، $m = 1, \dots, N-1$

(د) مستمراً بهذا الأسلوب أثبت أن $f_{N+1}, \dots, f_2, f_1$ تقع في B_i مختلفة – تناقض.]

10- أثبت أن كل فضاء متراص هوسدورف هو فضاء طبيعي.

11*- لتكن A و B مجموعتين جزئيتين متراصتين منفصلتين في فضاء هوسدورف (X,τ) أثبت أنه يوجد مجموعتين مفتوحتين ومنفصلتين G و H بحيث أن $A \subseteq G$ و $B \subseteq H$.

12- ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي غير منتهي مع خاصية أن كل فضاء جزئي هو متراص، أثبت أن (X,τ) ليس فضاء هوسدورف.

13- أثبت أن كل فضاء تبولوجي غير معدود وغير متراص يملك عدد غير معدود من المجموعات الجزئية المتراصة وعدد غير معدود من المجموعات الجزئية غير المتراصة.

14- إذا كان (X,τ) فضاء هوسدورف بحيث أن كل فضاء جزئي مغلق ولا يساوي X هو متراص، أثبت أن (X,τ) متراص.

3.7 خلاصة

التراص يلعب دور مفتاحي في تطبيقات التبولوجيا في كل فروع التحليل، كما لوحظ في ملاحظة 7ز4.1 يمكن أن ينظر للتراص كتعميم تبولوجي للتناهي.

نظرية هين- بورل المعممة تشخص المجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$ بأنها المجموعات المغلقة والمحدودة.

التراص هو خاصة تبولوجية، في الحقيقة الصورة المتصلة لفضاء متراص هي متراصة.

المجموعات الجزئية المغلقة في الفضاءات المتراصة هي متراصة والفضاءات الجزئية المتراصة من فضاءات هوسدورف هي مغلقة.

تمارين 2.7 #5 تقدم مفاهيم الاقترانات المفتوحة والاقترانات المغلقة، تمارين 2.7 #10 تشير إلى أن فضاء هوسدورف المتراص هو فضاء طبيعي (في الواقع فضاء - T_4). أن تكون كرة الوحدة المغلقة في كل $\mathbb{R}^n$ متراصة يتناقض مع تمارين 2.7 #9. هذا التمرين أشار إلى أن كرة الوحدة المغلقة في الفضاء المتري $(C[0,1], d^*)$ ليست متراصة. ولو أننا لن نثبته هنا، يمكن أن يثبت أن فضاء المتجه هو بعدي منتهي إذا وفقط إذا كانت كرات الوحدة المغلقة فيه متراصة.

تحذير. إنه من سوء الحظ أن "متراص" يعرَّف بعدة طرق في كتب مختلفة وبعض هذه التعاريف غير مكافئة للتعريف المعروض هنا، بعض الكتب تضيف هوسدورف في تعريف متراص، بعض الكتب، خاصة القديمة، تستخدم "متراص" لتعني خاصية أضعف مما عرفناه – والذي عادة يسمى متراص تتالياً.

الفصل الثامن

الضرب المنتهي The Finite Product

مقدمة

هناك ثلاث طرق مهمة لإنتاج فضاءات تبولوجية جديدة من فضاءات قديمة، هي بتكوين "فضاءات جزئية"، "فضاءات النسبة" و"فضاءات الضرب"، الفصول الثلاثة التالية مخصصة لدراسة فضاءات الضرب، في هذا الفصل نبحث في الضرب المنتهي ونثبت نظرية تيخنوف (Tychonoff's Theorem) وهي نظرية فيما يبدو أنها مفيدة وتقول أنه أي ضرب لفضاءات متراصة هو متراص.

أيضاً نحن نقاد إلى أن نسأل: بالضبط أي المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ هي متراصة؟ نظرية هين – بورل سوف تخبرنا ان المجموعات الجزئية المتراصة من $\mathbb{R}$ هي فقط المجموعات التي تكون مغلقة ومحدودة في نفس الوقت.

عندما نذهب بعيداً في دراسة التبولوجيا سوف نرى أن التراص يلعب دوراً محورياً، وهذا خاصة في تطبيقات التبولوجيا في التحليل.

1.8 تبولوجيا الضرب The Product Topology

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مجموعات فإن الضرب $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ هو المجموعة المكونة من كل العناصر التي على الشكل $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $x_i \in X_i$ ، $i = 1,\ldots, n$.

المسألة التي نناقشها الآن هي:

إذا كان لدينا فضاءات تبولوجية (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) كيف نعرّف تبولوجيا معقولة على مجموعة الضرب $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$؟

المرشح المباشر (ولكن الخاطئ) للتبولوجيا ح هو مجموعة كل المجموعات $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_2$ حيث $O_i \in \tau_i$، $i = 1, \ldots, n$. لسوء الحظ هذه ليست تبولوجيا.

على سبيل المثال، إذا كانت $n = 2$ و $(X, \tau_1) = (X, \tau_2) = \mathbb{R}$ فإن τ تحتوي المستطيلات $(0, 1) \times (0, 1)$ و $(2, 3) \times (2, 3)$ ولكن ليس المجموعات $[(0, 1) \times (0, 1)] \cup [(2, 3) \times (2, 3)]$ لأن هذه ليست $O_1 \times O_2$ لأي اختيار لـ O_1 و O_2.

إذا كانت $O_1 \times O_2$ لبعض O_1 و O_2 فإن $\frac{1}{2} \in (0,1) \subseteq O_1$ و $2\frac{1}{2} \in (2,3) \subseteq O_2$ ولذلك الزوج المرتب $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \in O_1 \times O_2$ ولكن $(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \notin [(0,1)\times(0,1)] \cup [(2,3)\times(2,3)]$. لذلك τ ليست مغلقة تحت عملية الاتحاد ولذلك ليست تبولوجيا.

على أية حال شاهدنا كيف يمكن وضع تبولوجيا (التبولوجيا الاقليدية) على $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هذا عمل في مثال 9.2.2. في الحقيقة هذا المثال يوحي بكيفية تعريف تبولوجيا الضرب بشكل عام.

1.1.8 تعاريف. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية فإن تبولوجيا الضرب (Product Topology) τ على المجموعة $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ هي التبولوجيا التي تملك العائلة $\{O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n : O_i \in \tau_i, i = 1, \ldots, n\}$ كقاعدة. المجموعة $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ مع التبولوجيا τ تسمى ضرب الفضاءات (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) ويرمز لها بالرمز $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$ أو $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$.

بالتأكيد يجب أن يثبت أن العائلة $\{O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n : O_i \in \tau_i, i = 1, \ldots, n\}$ هي قاعدة لتبولوجيا أي أنها تحقق شروط تمهيدية 8.2.2 (هذا يترك كتمرين لك).

2.1.8 تمهيدية. لتكن $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ قواعد لفضاءات تبولوجية (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) على التوالي. فإن العائلة $\{O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n : O_i \in \mathfrak{B}_i, i=1, \ldots, n\}$ هي قاعدة لتبولوجيا الضرب على $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

برهان تمهيدية 2.1.8 مباشر وكذلك يترك كتمرين لك.

3.1.8 ملاحظات. (I) الآن نحن نرى أن التبولوجيا الاقليدية على $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq 2$ هي فقط تبولوجيا الضرب على المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. (انظر مثال 9.2.2 و ملاحظة 10.2.2).

(II) واضح من تعريف 1.1.8 بأن كل ضرب لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة أو أكثر تحديداً: إذا كانت $O_1, O_2, \ldots, O_n$ مجموعات جزئية مفتوحة في فضاءات تبولوجية (X_1, τ_1) ، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) على التوالي فإن $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n$ هي مجموعة جزئية مفتوحة من $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$ التمهيدية التالية تقول أن أي ضرب لمجموعات مغلقة هو مجموعة مغلقة.

4.1.8 تمهيدية. لتكن $C_1, C_2, \ldots, C_n$ مجموعات جزئية مغلقة في فضاءات تبولوجية (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) على التوالي. فإن $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ هي مجموعة جزئية مغلقة في فضاء الضرب $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$.

البرهان. لاحظ أن:

$$(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n) \setminus (C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n)$$

$$= [(X_1 \setminus C_1) \times X_2 \times \ldots \times X_n] \cup [X_1 \times (X_2 \setminus C_2) \times X_3 \times \ldots \times X_n] \cup$$
$$\ldots \cup [X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{n-1} \times (X_n \setminus C_n)]$$

والذي هو اتحاد لمجموعات مفتوحة (لأن ضرب المجموعات المفتوحة هو مجموعة مفتوحة) ولذلك هو مجموعة مفتوحة في $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$. مما يعني أن المتممة $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ هي مجموعة مغلقة كما هو مطلوب. □

تمارين 1.8

1- أثبت تمهيدية 2.1.8.

2- إذا كانت (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات متقطعة، أثبت أن فضاء الضرب $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$ كذلك هو فضاء متقطع.

3- لتكن X_1 و X_2 مجموعات غير منتهية و τ_1, τ_2 التبولوجيا منتهي – مغلق على X_1 و X_2 على التوالي. أثبت أن تبولوجيا الضرب τ على $X_1 \times X_2$ ليست التبولوجيا منتهي – مغلق.

4- أثبت أن ضرب أي عدد منتهي من فضاءات غير متقطعة هو فضاء غير متقطع.

5- أثبت أن ضرب أي عدد منتهي من فضاءات هوسدورف هو هوسدورف.

6- ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي و $D=\{(x,x): x\in X\}$ هي القطر في فضاء الضرب $(X,\tau)\times(X,\tau)=(X\times X,\tau_1)$. أثبت أن (X, τ) هو فضاء هوسدورف إذا وفقط إذا كانت D مغلقة في $(X\times X,\tau_1)$.

7- لتكن $(X_1,\tau_1),(X_2,\tau_2)$ و (X_3,τ_3) فضاءات تبولوجية. أثبت أن $[(X_1,\tau_1)\times(X_2,\tau_2)]\times(X_3,\tau_3)\cong(X_1,\tau_1)\times(X_2,\tau_2)\times(X_3,\tau_3)$

8- (I) لتكن (X_1, τ_1) و (X_2, τ_2) فضاءات تبولوجية. أثبت أن

$$(X_1,\tau_1)\times(X_2,\tau_2)\cong(X_2,\tau_2)\times(X_1,\tau_1)$$

(II) عمم النتيجة أعلاه لضرب أي عدد منتهي من الفضاءات التبولوجية.

9- لتكن C_1, C_2, …, C_n مجموعات جزئية من فضاءات تبولوجية (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) على التوالي لكي تصبح $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ مجموعة جزئية من $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$. أثبت كل من العبارات التالية:

(I) $(C_1\times C_2\times\ldots\times C_n)'\supseteq C_1'\times C_2'\times\ldots\times C_n'$

(II) $\overline{C_1\times C_2\times\ldots\times C_n}=\overline{C}_1\times\overline{C}_2\times\ldots\times\overline{C}_n$

(III) إذا كانت C_1, C_2, …, C_n كثيفة في (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، …. ، (X_n, τ_n) على التوالي فإن $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ كثيفة في فضاء الضرب $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$.

(IV) إذا كان (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، …. ، (X_n, τ_n) فضاءات انفصالية فإن $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$ فضاءً انفصالياً.

(V) لكل $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ فضاء انفصالي.

10- أثبت أن ضرب عدد منتهي من فضاءات - T_1 هو فضاء - T_1

11- إذا كانت (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، …. ، (X_n, τ_n) تحقق مسلمة العدد الثانية فإن $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$ تحقق مسلمة العد الثانية.

12- ليكن $(\mathbb{R}, \tau_1)$ خط سورجنفري المعرف في تمارين 2.3 # 11 و $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$ فضاء الضرب $(\mathbb{R}, \tau_1) \times (\mathbb{R}, \tau_1)$ أثبت العبارات التالية.

(I) $\{(x, y): a \leq x \leq b , c \leq y < d , a , b , c , d \in \mathbb{R} \}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ_2

(II) $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$ هو فضاء منتظم انفصالي هوسدورف غير مترابط بالكامل.

(III) لتكن $L = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R} , x + y = 0\}$. فإن الخط L مغلق في التبولوجيا الإقليدية على المستوى ولذلك كذلك على $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$.

(IV) إذا كانت τ_3 تبولوجيا الفضاء الجزئي المحدثة على الخط L بواسطة τ_2 فإن τ_3 هي التبولوجيا المنقطعة ولذلك (L, τ_3) فضاء غير انفصالي.

[بما أن (L, τ_3) فضاء جزئي مغلق من الفضاء الانفصالي $(\mathbb{R}^2, \tau_2)$ نحن نعلم الآن أن الفضاء الجزئي المغلق من فضاء انفصالي ليس بالضرورة أن يكون انفصاليا.]

[مساعدة: أثبت أن $L \cap \{(x, y): a \leq x < a+1, -a \leq y < -a+1, a \in R\}$ هي المجموعة الأحادية.]

2.8 إسقاطات شاملة على مركبات الضرب

Projections onto factors of a product

قبل المضي إلى نتيجتنا اللاحقة نحتاج زوج من التعاريف.

1.2.8 تعاريف. لتكن τ_1, τ_2 تبولوجيان على مجموعة X. فإن τ_1 تسمى تبولوجيا أرق (finer topology) من τ_2 (و τ_2 تسمى تبولوجيا أشد Coarser Topology من τ_1) إذا كان $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

2.2.8 مثال. التبولوجيا المتقطعة على مجموعة X هي أرق من أي تبولوجيا أخرى على X. التبولوجيا غير المتقطعة على X هي أشد من أي تبولوجيا أخرى على X. [انظر كذلك تمارين 1.5 # 10]

3.2.8 تعاريف. ليكن (X, τ) و (Y, τ_1) فضائين تبولوجيين و f اقتران من X إلى Y. فإن f يسمى اقتران مفتوح (open mapping) إذا كان لكل $A \in \tau$، $f(A) \in \tau_1$. الاقتران f يسمى اقتران مغلق (closed mapping) إذا كان لكل مجموعة مغلقة B في (X, τ), f(B) مغلقة في (Y, τ_1).

4.2.8 ملاحظة. في تمارين 2.7 # 5 سؤلت أن تبين أن ليس أي من الحالات "اقتران متصل"، "اقتران مفتوح"، "اقتران مغلق" يعطي اي من الحالتين الأخريين. في الواقع ليس أي حالتين إذا أخذتا معاً تعطي الحالة الثالثة. (جد أمثلة تبين ذلك).

□

5.2.8 تمهيدية. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية من $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$ فضاء الضرب الخاص بها. لكل $i \in \{1,\ldots,n\}$ ، ليكن $p_i : X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to X_i$ اقتران الإسقاط؛ أي أن، $p_i\left((x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n)\right) = x_i$ لكل $(x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.
فإن:

(I) كل p_i هو اقتران متصل شامل ومفتوح و

(II) τ هي أشد تبولوجيا على المجموعة $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ بحيث أن كل p_i هو متصل.

البرهان. واضح أن كل p_i هو شامل. لرؤية أن كل p_i هو متصل، لتكن U أي مجموعة مفتوحة في (X_i, τ_i). إذاً

$$p_i^{-1}(U) = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$$

والذي هو ضرب لمجموعات مفتوحة في $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$. لذلك كل p_i هو متصل.

لإثبات أن p_i اقتران مفتوح يكفي أن نثبت أن لكل مجموعة مفتوحة قاعدية $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$ حيث U_j مفتوحة في (X_j, τ_j) لكل $j = 1, \ldots, n$؛ المجموعة $p_i (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n)$ مفتوحة في (X_i, τ_i). ولكن $p_i (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) = U_i$ والتي هي بالتأكيد مفتوحة في (X_i, τ_i). لذلك كل p_i هو اقتران مفتوح وبذلك نكون قد أكملنا برهان (I) في التمهيدية.

الآن لتكن τ' أي تبولوجيا على المجموعة $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ بحيث أن كل اقتران إسقاط $p_i: (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ هو متصل. يجب أن نبين أن $\tau \subseteq \tau'$.

بإعادة تذكر تعريف القاعدة للتبولوجيا τ (المعطى في تعريف 1.1.8) يكفي أن نبين أنه كانت $O_1, O_2, \ldots, O_n$ مجموعات مفتوحة في (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) على التوالي فإن $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n \in \tau'$ لإثبات ذلك، لاحظ أنه لكون p_i متصل فإن $p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$ لكل $i = 1, \ldots, n$. الآن

$$p_i^{-1}(O_i) = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times O_i \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$$

وبذلك يصبح $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) = O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n$

إذاً $p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$ لكل i = 1, …, n وهذا يعطي $\bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(O_i) \in \tau'$ أي أن $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n \in \tau'$ كما هو مطلوبز □

6.2.8 ملاحظة. تمهيدية 5.2.8 (II) تعطينا طريقة أخرى لتعريف تبولوجيا الضرب. إذا كان لدينا فضاءات تبولوجية (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، …. (X_n, τ_n) فإن تبولوجيا الضرب يمكن أن تعرّف بأنها أشد تبولوجيا على $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ بحيث أن كل إسقاط $p_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i$ هو متصل. هذه الملاحظة ستكون لها فعالية كبيرة في الجزء اللاحق عندما نمضي لوصف الضرب في حالة العدد غير المنتهي من الفضاءات التبولوجية. □

7.2.8 نتيجة. لكل $n \geq 2$ اقترانات الإسقاط الشاملة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}$ هي متصلة ومفتوحة. □

8.2.8 تمهيدية. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)،….، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية و $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$ فضاء الضرب. فإن كل (X_i, τ_i) هو ميوموفك لفضاء جزئي من $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$.

البرهان. لكل j، اجعل a_j أي نقطة (محددة) في X_j.. لكل i عرِّف اقتران $f_i : (X_i, \tau_i) \to (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n, \tau)$ على الشكل

$$f_i(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

ندَّعي أن $f_i : (X_i, \tau_i) \to (f_i(X_i), \tau')$ هو هوميومورفزم حيث τ' هي التبولوجيا المحدثة على $f_i(X_i)$ بواسطة τ. واضح أن هذا الاقتران هو واحد لواحد وشامل. لتكن $U \in \tau_i$. فإن؛

$$f_i(U) = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times U \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}$$

$$= (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n) \cap$$

$$(\{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\})$$

$$= (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n) \cap f_i(X_i) \in \tau'$$

لأن $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n \in \tau$. لذلك $U \in \tau_i$ وهذا يعطي أن $f_i(U) \in \tau'$.

أخيراً، لاحظ أن العائلة؛

$$\{ (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap f_i (X_i) : U_i \in \tau_i ,\ i = 1, \ldots , n \}$$

هي قاعدة لـ 'τ ، لذلك لإثبات أن f_i متصل يكفي أن تثبت أن الصورة العكسية تحت f_i لكل عنصر من هذه العائلة هي مفتوحة في (X_i , τ_i)، ولكن؛

$$f_i^{-1} [(U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap f_i (X_i)] = f_i^{-1} (U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n) \cap f_i^{-1} (f_i (X_i))$$

$$= \begin{cases} U_i \cap X_i ; \quad j \neq i \text{ ، } {}_j \in U_j \text{ إذا كانت} \\ \phi ; \quad j \neq i \text{ لبعض } \quad a_j \notin U_j \text{ إذا كانت} \end{cases}$$

بما أن $U_i \cap X_i = U_i \in \tau_i$ و $\phi \in \tau_i$ نستنتج أن f_i متصل وهذا هو المطلوب. □

ترميز. إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مجموعات فإن الضرب $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ يرمز له بالرمز $\prod_{i=1}^{n} X_i$. إذا كانت (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية فإن فضاء الضرب (X_1, τ_1) $\times (X_2, \tau_2) \times \ldots \times (X_n, \tau_n)$ يرمز له بالرمز $\prod_{i=1}^{n} (X_i , \tau_i)$ □

تمارين 2.8

1- أثبت أن التبولوجيا الإقليدية على $\mathbb{R}$ هي أرق من التبولوجيا منتهي – مغلق

2- ليكن (X_i, τ_i) فضاءً تبولوجياً لكل $i = 1, .., n$ أثبت أن

(I) إذا كان $\prod_{i=1}^{n} (X_i , \tau_i)$ مترابطاً فإن كل من (X_i, τ_i) مترابطاً.

(II) إذا كان $\prod_{i=1}^{n} (X_i , \tau_i)$ متراصاً فإن كل من (X_i, τ_i) متراصاً.

(III) إذا كان $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ مترابطاً مسارياً فإن كل من (X_i, τ_i) مترابطاً مسارياً.

(IV) إذا كان $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ هوسدورف فإن كل من (X_i, τ_i) هوسدورف.

(V) إذا كان $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ فضاء- T_1 فإن كل من (X_i, τ_i) فضاء- T_1.

3- لتكن (Y, τ) و (X_i, τ_i)، $i = 1, \ldots, n$ فضاءات تبولوجية، بالإضافة لذلك لكل i ليكن f_i اقتران من (Y, τ) إلى (X_i, τ_i). أثبت أن الاقتران $f:(Y,\tau)\to\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ المعطى على الشكل

$$f(y) = (f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y))$$

هو متصل إذا وفقط إذا كان كل f_i متصل.

[مساعدة: لاحظت أن $f_i = p_i \text{ of}$ حيث p_i هو اقتران الإسقاط الشامل من $\prod_{j=1}^{n}(X_j, \tau_j)$. إلى (X_i, τ_i).]

4- لتكن (X, d_1) و (Y, d_2) فضاءات مترية. بالإضافة لذلك لتكن e المسافة على $X \times Y$ المعرفة في تمارين 1.6 # 4. كذلك لتكن τ التبولوجيا المحدثة على $X \times Y$ بواسطة e. إذا كانت d_1 و d_2 تحدث التبولوجين τ_1 و τ_2 على X و Y، على التوالي، و τ_3 هي تبولوجيا الضرب على $(X, \tau_1) \times (Y, \tau_2)$، أثبت أن $\tau = \tau_3$.

[هذا يثبت أن ضرب فضائين قابلين للقياس هو فضاء قابل للقياس.]

5- لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية. أثبت أن $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$. فضاء قابل للقياس إذا وفقط إذا كان كل من (X_i, τ_i) قابل للقياس.

[مساعدة: استخدم تمارين 1.6 #6 والتي تقول أن كل فضاء جزئي من فضاء قابل للقياس هو قابل للقياس، وتمرين 4 أعلاه].

3.8 نظرية تيخونوف للضرب المنتهي

Tychonoff's Theorem for finite products

1.3.8 (نظرية تيخونوف للضرب المنتهي). إذا كانت (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات متراصة فإن $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ فضاء متراص.

البرهان. تأمل في البداية ضرب فضائين تبولوجيين (X, τ_1) و (Y, τ_2). لتكن U_i، $i \in I$ أي غطاء مفتوح لـ $X \times Y$. فإن لكل $x \in X$ و $y \in Y$ يوجد $i \in I$. بحيث أن $(x, y) \in U_i$. لذلك يوجد مجموعة مفتوحة قاعدية $V(x, y) \times W(x, y)$ بحيث أن $V_{(x,y)} \in \tau_1$، $W_{(x,y)} \in \tau_2$ و $(x, y) \in V_{(x,y)} \times W_{(x,y)}$

بما أن مدى النقطة (x, y) هو كل نقاط $X \times Y$ فإننا نحصل على غطاء مفتوح $V_{(x,y)} \times W_{(x,y)}$, $x \in X$, $y \in Y$ للمجموعة $X \times Y$ بحيث أن كل من $V_{(x,y)} \times W_{(x,y)}$ هي مجموعة جزئية من بعض U_i، $i \in I$. لذلك لإثبات أن $(X, \tau_1) \times (Y, \tau_2)$ متراص يكفي أن نجد غطاء جزئي منتهي من الغطاء المفتوح $V_{(x,y)} \times W_{(x,y)}$ ، $x \in X$، $y \in Y$.

الآن ثبت $x_o \in X$ وتأمل الفضاء الجزئي $\{x_o\} \times Y$ من $X \times Y$. كما شوهد في تمهيدية 8.2.8 هذا الفضاء الجزئي هوميومرفك لـ (Y, τ_2) ولذلك هو متراص. بما أن $V(x_o, y) \times W(x_o, y)$ ، $y \in Y$ هو غطاء مفتوح لـ $\{x_o\} \times Y$ فهو يملك غطاءً جزئياً منتهياً:

$$V(x_o, y_1) \times W(x_o, y_1),\ V(x_o, y_2) \times W(x_o, y_2),\ \dots,\ V(x_o, y_m) \times W(x_o, y_m)$$

اجعل $V(x_o) = V(x_o, y_1) \cap V(x_o, y_2) \cap \dots \cap V(x_o, y_m)$. نشاهد أن المجموعة $V(x_o) \times Y$ محتواة في اتحاد عدد منتهي من المجموعات التي على الشكل $V(x_o, y) \times W(x_o, y)$ ، $y \in Y$.

لذلك لإثبات أن $X \times Y$ متراص يكفي أن نبين أن $X \times Y$ محتواة في اتحاد عدد منتهي من المجموعات التي على الشكل $V(x) \times Y$. بما أن كل مجموعة $V(x)$ هي مجموعة مفتوحة تحوي $x \in X$، فإن العائلة $V(x)$، $x \in X$، هي غطاء مفتوح للفضاء المتراص (X, τ_1). لذلك يوجد $x_1, x_2, \dots, x_k$ بحيث أن $X \subseteq V(x_1) \cup V(x_2) \cup V(x_k)$. لذلك $X \times Y \subseteq (V(x_1) \times Y) \cup (V(x_2) \times Y) \cup \dots \cup (V(x_k) \times Y)$ كما هو مطلوب. لذلك $(X, \tau_1) \times (Y, \tau_2)$ هو متراص.

البرهان يكمل بالاستقراء. افرض أن ضرب أي N من الفضاءات المتراصة هو متراص. تأمل الضرب $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2) \times \dots \times (X_{n+1}, \tau_{n+1})$ لفضاءات متراصة (X_i, τ_i)، $i = 1, \dots, N+1$. إذاً

$$(X_1,\tau_1)\times(X_2,\tau_2)\times\ldots\times(X_{N+1},\tau_{N+1})\cong[(X_1,\tau_1)\times\ldots\times(X_N,\tau_N)](X_{N+1}\times\tau_{N+1})$$

ومن الفرض في الاستقراء $(X_1, \tau_1) \times \ldots \times (X_N, \tau_N)$ هو متراص، لذلك جهة اليمين هي ضرب فضائين متراصين ولذلك هو متراص. لذلك جهة اليسار كذلك متراصة، هكذا يكمل الاستقراء ويكمل برهان النظرية. □

باستخدام تمهيدية 1.2.7 و 5.2.8 (I) نحصل مباشرة على:

2.3.8 تمهيدية (عكس نظرية تيخونوف). لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية. إذا كان $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ متراص فإن كل من (X_i, τ_i) هو متراص. □

نستطيع الآن إثبات نظرية 13.2.7 التي سبق ذكرها

3.3.8 نظرية (نظرية هين- بورل المعممة). أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$، $n \geq 1$ هي متراصة إذا وفقط إذا كانت مغلقة ومحدودة.

البرهان. أنَّ كل مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$ هي محدودة يمكن إثباته بنفس الأسلوب المتبع في تمهيدية 8.2.7 لذلك باستخدام تمهيدية 5.2.7 أي مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$ هي مغلقة ومحدودة.

بالمقابل، لتكن S أي مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة متراصة من $\mathbb{R}^n$. بواسطة تمارين 2.7#8، S مجموعة جزئية مغلقة من الضرب

$$\overbrace{[-M,M]\times[-M,M]\times\ldots\times[-M,M]}^{n-\text{من المرات}}$$

لبعض M حيث M عدد حقيقي موجب. بما أن كل فترة مغلقة $[-M,M]$ هي متراصة، بواسطة نتيجة 3.2.7، نظرية تيخونوف تعطي أن فضاء الضرب $[-M,M]\times[-M,M]\times\ldots\times[-M,M]$

هو كذلك متراص. بما أن S هي مجموعة جزئية مغلقة من مجموعة متراصة فهي كذلك متراصة. □

4.3.8 مثال. عرِّف الفضاء الجزئي S^1 من $\mathbb{R}^2$ على الشكل $S^1=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$

فان S^1 هي مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}^2$ ولذلك هي متراصة.

بنفس الأسلوب تعرَّف n– سطح الكرة S^n كفضاء جزئي من $\mathbb{R}^{n+1}$ والمعطى على الشكل

$$S^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}):x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1\}$$

فإن S^n هي مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}^{n+1}$ ولذلك هي متراصة. □

5.3.8 مثال. الفضاء الجزئي $S^1 \times [0,1]$ من $\mathbb{R}^3$ هو ضرب فضائين متراصين ولذلك هو متراص. (اقنع نفسك أن $S^1 \times [0,1]$ هو سطح اسطوانة.) □

3.8 تمارين

1- الفضاء التبولوجي (X, τ) يسمى متراص موضعياً (locally compact) إذا كانت كل نقطة $x \in X$ تملك على الأقل جوار متراص. أثبت أن

(I) كل فضاء متراص هو متراص موضعياً.

(II) $\mathbb{R}$ و $\mathbb{Z}$ متراصة موضعياً (لكنها ليست متراصة).

(III) كل فضاء متقطع هو متراص موضعياً.

(IV) إذا كانت (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات متراصة موضعياً فإن $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ متراص موضعياً.

(V) كل فضاء جزئي مغلق من فضاء متراص موضعياً هو متراص موضعياً.

(VI) الصورة المتصلة لفضاء متراص موضعياً ليس بالضرورة أن تكون متراصة موضعياً.

(VII) إذا كان f اقتران متصل ومفتوح وشامل من فضاء متراص موضعياً (X, τ) إلى فضاء تبولوجي (Y, τ_1) فإن (Y, τ_1) هو متراص موضعياً.

(VIII) إذا كان (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية بحيث أن $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ متراص موضعياً فإن كل من (X_i, τ_i) هو متراص موضعياً.

2*. ليكن (Y, τ_1) فضاء جزئي متراص موضعياً من فضاء هوسدورف (X, τ). إذا كانت Y كثيفة في (X, τ)، أثبت أن Y مفتوحة في (X, τ).

[مساعدة: استخدم تمارين 2.3#9.]

4.8 الضرب والترابط

1.4.8 تعريف. ليكن (X, τ) فضاء تبولوجي و x أي نقطة في X. مركبة x في X (The component in X of x)، $C_X(x)$ تُعرَّف بأنها اتحاد كل المجموعات الجزئية المترابطة من X والتي تحوي x.

2.4.8 تمهيدية. لتكن x أي نقطة في فضاء تبولوجي (X, τ). فإن $C_X(x)$ مترابطة.

البرهان. لتكن $\{C_i : i \in I\}$ عائلة كل المجموعات الجزئية المترابطة من (X, τ) والتي تحوي x. (لاحظ أن $\{x\} \in \{C_i : i \in I\}$.) فإن $C_X(x) = \prod_{i \in I} C$.

لتكن O مجموعة جزئية من $C_X(x)$ حيث O مغلقة مفتوحة في التبولوجيا المحدثة على $C_X(x)$ بواسطة τ. فإن $O \cap C_i$ مغلقة مفتوحة في التبولوجيا المحدثة على C_i لكل i.

ولكن بما أن كل من C_i مترابطة، $O \cap C_i = C_i$ أو $O \cap C_i = \phi$ لكل i. إذا كانت $O \cap C_j = C_j$ لبعض $j \in I$ فإن $x \in O$. لذلك في هذه الحالة $O \cap C_i \neq \phi$ لكل $i \in I$ لأن كل C_i تحوي x. لذلك $O \cap C_i = C_i$ لكل $i \in I$ أي أن $O = C_X(x)$ أو $O = \phi$.

لذلك $C_X(x)$ لا يملك مجموعة جزئية مغلقة مفتوحة غير خالية ولا تساوي $C_X(x)$ وهذا يعني أنها مترابطة.

□

3.4.8 ملاحظة. نشاهد من تعريف 1.4.8 وتمهيدية 2.4.8 أن $C_X(x)$ هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة من X والتي تحوي x. □

4.4.8 مساندة. لتكن a و b نقاط في فضاء تبولوجي (X, τ). إذا وجد مجموعة مترابطة C تحوي كلا النقطتين a و b فإن $C_X(a) = C_X(b)$.

البرهان. بواسطة تعريف 1.4.8، $C \subseteq C_X(a)$ و $C \subseteq C_X(b)$. لذلك $a \in C_X(b)$.

بواسطة تمهيدية 2.4.8، $C_X(b)$ مترابطة ولذلك هي مجموعة مترابطة تحوي a. ولذلك بواسطة تعريف 1.4.8، $C_X(b) \subseteq C_X(a)$.

بنفس الأسلوب $C_X(a) \subseteq C_X(b)$ أي أن $C_X(a) = C_X(b)$. □

5.4.8 تمهيدية. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية. $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ مترابط إذا وفقط إذا كان كل من (X_i,τ_i) مترابط.

البرهان. لإثبات أن ضرب عدد منتهي من الفضاءات المترابطة هو مترابط يكفي أن نثبت أن ضرب أي فضائين مترابطين هو فضاء مترابط حيث النتيجة تتبع عن طريق الاستقراء.

لذلك ليكن (X,τ) و (Y,τ_1) فضائين مترابطين و (x_o,y_o) أي نقطة في فضاء الضرب $(X\times Y,\tau_2)$. لتكن (x_1,y_1) أي نقطة أخرى في $X\times Y$. فإن الفضاء الجزئي $\{x_o\}\times Y$ من $(X\times Y,\tau)$ هو هوميومورفك للفضاء المترابط (Y,τ_1) ولذلك هو مترابط.

بنفس الأسلوب الفضاء الجزئي $X\times\{y_1\}$ مترابط. بالإضافة لذلك، (x_o,y_1) تقع في الفضاء المترابط $\{x_o\}\times Y$، لذلك $(x_o,y_o)\in\{x_o\}\times Y\subseteq C_{X\times Y}((x_o,y_1))$، في حين أن $(x_o,y_1)\in X\times\{y_1\}$ ولذلك $(x_1,y_1)\in X\times\{y_1\}\subseteq C_{X\times Y}((x_o,y_1))$.

لذلك (x_o,y_o) و (x_1,y_1) تقع في المجموعة المترابطة $C_{X\times Y}((x_o,y_1))$، ولذلك بواسطة مساندة 4.4.8، $C_{X\times Y}((x_o,y_0))=C_{X\times Y}((x_1,y_1))$. بشكل خاص، $(x_1,y_1)\in C_{X\times Y}((x_o,y_0))$. بما أن (x_1,y_1) نقطة عشوائية في $X\times Y$ فيصبح لدينا $C_{X\times Y}((x_o,y_0))=X\times Y$. لذلك $(X\times Y,\tau_2)$ هو مترابط.

بالمقابل إذا كان $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ مترابط فإن تمهيديات 5.2.8 و 1.2.5 تعطي أن كل من (X_i,τ_i) هو مترابط. □

6.4.8 ملاحظة. في تمارين 2.5#9 تظهر النتيجة التالية: لأي نقطة x في أي فضاء تبولوجي (X,τ)، المركبة $C_X(x)$ هي مجموعة مغلقة. □

7.4.8 تعريف. الفضاء التبولوجي يسمى مستمر (continuum) إذا كان متراص ومترابط.

كنتيجة مباشرة لنظرية 1.3.8 وتمهيديات 5.4.8 و 2.3.8 لدينا التمهيدية التالية:

8.4.8 تمهيدية. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية. $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ مستمر إذا وفقط إذا كان كل من (X_i,τ_i) هو مستمر. □

تمارين 4.8

1- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى متضام (compactum) إذا كان متراص وقابل للقياس. لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبوولوجية. باستخدام تمارين 2.8#5 أثبت أن $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ متضام إذا وفقط إذا كان كل من (X_i,τ_i) هو متضام.

2- ليكن (X,d) فضاء متري و τ التبولوجيا المحدثة على X بواسطة d.

(I) أثبت أن الاقتران d من فضاء الضرب $(X,\tau)\times(X,\tau)$ إلى $\mathbb{R}$ هو متصل.

(II) باستخدام (I) أثبت أنه إذا كان الفضاء القابل للقياس (X,τ) مترابط و X فيها على الأقل نقطتين فإن X تملك عدد غير معدود من النقاط.

3- إذا كانت (X,τ) و (Y,τ_1) فضاءات مترابطة مسارياً، أثبت أن فضاء الضرب $(X,\tau)\times(Y,\tau_1)$ هو مترابط مسارياً.

4- (I) لتكن $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ أي نقطة في فضاء الضرب $(Y,\tau)=\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$. أثبت أن $C_Y(x)=C_{X_1}(x_1)\times C_{X_2}(x_2)\times\ldots\times C_{X_n}(x_n)$.

(II) استنتج من (I) وتمارين 2.5#10 أن $\prod_{i=1}^{n}(X_i,\tau_i)$ غير متبرابط بالكامل إذا وفقط إذا كان كل من (X_i,τ_i) غير مترابط بالكامل.

5- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى مترابط موضعياً (locally connected) إذا كان يملك قاعدة $\mathfrak{B}$ مكونة من مجموعات مترابطة ومفتوحة.

(I) أثبت أن $\mathbb{Z}$ فضاء مترابط موضعياً ولكنه غير مترابط.

(II) أثبت أن $\mathbb{R}^n$ و S^n مترابطة موضعياً لكل $n\geq 1$.

(III) ليكن (X,τ) الفضاء الجزئي من $\mathbb{R}^n$ المكون من كل النقاط الواقعة على الخط الواصل بين $(0,1)$ و $(0,0)$ والنقاط الواقعة على الخطوط الواصلة بين النقطة $(0,1)$ والنقاط $(\frac{1}{n},0)$، $n=1,2,3,\dots$. أثبت أن (X,τ) مترابط ولكنه ليس مترابط موضعياً.

(IV) أثبت أن كل مجموعة جزئية مفتوحة في فضاء مترابط موضعياً هي مترابطة موضعياً.

(V) لتكن (X_1, τ_1)، (X_2, τ_2)، ....، (X_n, τ_n) فضاءات تبولوجية. أثبت أن $\prod_{i=1}^{n}(X_i, \tau_i)$ مترابط موضعياً إذا وفقط إذا كان كل من (X_i, τ_i) هو مترابط موضعياً.

5.8 النظرية الأساسية في الجبر

Fundamental Theorem of Algebra

في هذا الجزء نقدم تطبيق للتبولوجيا في فرع آخر من فروع الرياضيات. نبين كيف نستخدم التراص ونظرية هين- بورل المعممة في إثبات النظرية الأساسية في الجبر.

1.5.8 نظرية (النظرية الأساسية في الجبر). كل كثير حدود $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ حيث كل a_i هو عدد مركب، $a_n \neq 0$ و $n \geq 1$، يملك جذر أي يوجد عدد مركب z_o بحيث $f(z_0) = 0$.

البرهان.

$$|f(z)| = |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0|$$

$$\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{|z|} + \ldots + \frac{|a_0|}{|z|^{n-1}}\right]$$

$$\geq |a_n||z|^n - |z|^{n-1}\left[|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|\right], \qquad$$ لأن $|z| \geq 1$

$$= |z|^{n-1}\left[|a_n||z| - R\right], \qquad R = |a_{n-1}| + \ldots + |a_0|$$ و $|z| \geq 1$ لأن

$$\geq |z|^{n-1}, \qquad |z| \geq \max\left\{1, \frac{R+1}{|a_n|}\right\}$$ لأن ....(1)

إذا جعلنا $p_0 = |f(0)| = |a_0|$ فإنه، باستخدام المتباينة (1)، يوجد $T > 0$ بحيث

$|f(z)| > p_0$ لكل $|z| > T$. ....(2)

تأمل المجموعة $D=\{z: z\in$ والمستوى المركب $|z|\le T\}$. هذه المجموعة هي مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة من المستوى المركب $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ ولذلك، بواسطة نظرية هين- بورل المعممة، هي متراصة. لذلك، باستخدام تمهيدية 14.2.7، الاقتران المتصل $|f|: D\to \mathrm{R}$ له قيمة صغرى عند نقطة z_0. وهذا يعني

$|f(z_0)|\le |f(z)|$ لكل $z\in D$.

بواسطة (2)، لكل $z\notin D$ ، $|f(z)|>p_0=|f(0)|\ge |f(z_0)|$. لذلك

$$|f(z_0)|\le |f(z)| \text{، لكل } z\in\mathbb{C}. \quad ....(3)$$

لذلك نحتاج أن نثبت أن $f(z_0)=0$. لعمل ذلك من الملائم أن نجري "ترجمة". اجعل $p(z)=f(z+z_0)$.

إذاً بواسطة (2)،

$$|p(0)|\le |p(z)| \text{، لكل } z\in\mathbb{C}. \quad ....(4)$$

مسألة إثبات أن $f(z_0)=0$ تحولت للحالة المكافئة وهي إثبات أن $p(0)=0$.

الآن $p(z)=b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+...+b_0$ ، $b_i\in\mathbb{C}$. لذلك $p(0)=b_0$. سوف نبين أن $b_0=0$.

افرض أن $b_0\ne 0$. إذاً

$$p(z)=b_0+b_k z^k+z^{k+1}Q(z) \quad ....(5)$$

حيث $Q(z)$ كثير حدود و b_k هو أصفر $b_i\ne 0$ ، $i>0$

على سبيل المثال إذا كان $p(z)=10z^7+6z^5+3z^4+4z^3+2z^2+1$ فإن $b_0=1$ ، $b_k=2$ ، $(b_1=0)$ و $p(z)=1+2z^2+z^3\overbrace{(4+3z+6z^2+10z^4)}^{Q(z)}$

لتكن $w\in\mathbb{C}$ هي الجذر ذي الرتبة k للعدد $-b_0/b_k$ أي أن $w^k=-b_0/b_k$.

بما أن $Q(z)$ كثير حدود، إذا كان t عدد حقيقي فإن

$t|Q(tw)|\to 0$ عندما $t\to 0$

هذا يعطي $t\left|w^{k+1}Q(tw)\right| \to 0$ عندما $t \to 0$

لذلك يوجد عدد حقيقي t_0 حيث $0 < t_0 < 1$ بحيث أن

$$t_0\left|w^{k+1}Q(t_0 w)\right| < |b_0| \qquad \text{................(6)}$$

لذلك بواسطة (5)،

$$p(t_0 w) = b_0 + b_k (t_0 w)^k + (t_0 w)^{k+1} Q(t_0 w)$$

$$= b_0 + b_k\left[t_0^k\left(\frac{-b_0}{b_k}\right)\right] + (t_0 w)^{k+1} Q(t_0 w)$$

$$= b_0(1 - t_0^k) + (t_0 w)^{k+1} Q(t_0 w)$$

لذلك

$$\left|p(t_0 w)\right| \le (1 - t_0^k)\left|b_0\right| + t_0^{k+1}\left|w^{k+1}Q(t_0 w)\right|$$

$$< (1 - t_0^k)\left|b_0\right| + t_0^k\left|b_0\right|, \qquad \text{بواسطة (6)}$$

$$= \left|b_0\right|$$

$$= \left|p(0)\right| \qquad \text{..................(7)}$$

ولكن (7) تناقض (4). لذلك الفرض أن $b_0 \ne 0$ فرض خاطئ، أي أن $p(0) = 0$ كما هو مطلوب. □

6.8 خلاصة

كما ذكر في المقدمة، هذا واحد من ثلاثة فصول خصصت لفضاءات الضرب. الحالة الأسهل هي حالة الضرب المنتهي. في الفصل القادم ندرس الضرب غير المنتهي المعدود وفي الفصل العاشر الحالة العامة. النتيجة الأكثر أهمية التي أثبتت في هذا الجزء هي نظرية تيجونوف. في الفصل العاشر هذه النظرية ستعم لأي ضرب عشوائي.

النتيجة الثانية التي سميناها نظرية هي نظرية هين- بورل المعممة والتي تصف المجموعات الجزئية المتراصة في $\mathbb{R}^n$ بأنها تلك المغلقة والمحدودة.

تمارين 3.8#1 قدمت تعريف الفضاءات التبولوجية المتراصة موضعياً. مثل هذه الفضاءات تلعب دوراً محورياً في نظرية الزمرة التبولوجية.

دراستنا للترابط تعززت في هذا الفصل بتعريف مركبة النقطة. هذا مكننا من تجزئة أي فضاء تبولوجي إلى مجموعات مترابطة. في الفضاء المترابط مثل $\mathbb{R}^n$ مركبة أي نقطة هي الفضاء كاملاً. على الجانب الآخر المركبات في أي فضاء غير مترابط بالكامل، على سبيل المثال $\mathbb{Q}$، هي المجموعات الأحادية.

كما ذكر أعلاه، التراص له نسخة موضعية. وكذلك أيضاً الترابط. تمارين 4.8#5 عرَّفت مترابط موضعياً. على أية حال، في حين أن كل فضاء متراص هو متراص موضعياً، فإن ليس كل فضاء مترابط هو مترابط موضعياً. في الحقيقة عدة خواص p لها نسخة موضعية تسمى p موضعياً وفي العادة p لا تعطي p موضعياً وكذلك عادة p موضعياً لا تعطي p.

بالقرب من نهاية الفصل أعطينا برهان تبولوجي للنظرية الأساسية في الجبر. حقيقة أن نظرية في أحد فروع الرياضيات يمكن أن تثبت بطريقة من فرع آخر هي واحدة من الدلائل على أن الرياضيات يجب أن لا تقسم إلى أجزاء منفصلة تماماً على بعضها. في حين أنه يكون لديك مساقات منفصلة في الجبر، التحليل المركب، ونظرية العدد فإن هذه المواضيع في الحقيقة لها علاقات متبادلة.

في ملحق 5 نقدم مفهوم زمرة تبولوجية وهي مجموعة مع تركيب من فضاء تبولوجي وزمرة ومع تركيبين مرتبطين بطريقة مناسبة. نظرية زمرة تبولوجية هو فرع غني وممتع من فروع الرياضيات. ملحق 5 يمكن دراسته باستخدام المعرفة المسبقة التي تعلمتها في هذا الفصل.

لأولئك الذين يعرفون بعض من نظرية المقولة نلاحظ أن مقولة الفضاءات التبولوجية والاقترانات المتصلة لها ضرب وضرب مقابل. الضرب في المقولة هو في الحقيقة ضرب فضاءات تبولوجية. ربما تكون مهتماً بتحديد الضرب المقابل.

الفصل التاسع

الضرب المعدود Countable Products

مقدمة

الحدس أو البديهة تخبرنا بأن المنحنى له مساحة صفر. لذلك سوف تندهش عندما تعلم بوجود منحنيات مالئة-فضاء. سوف نشرع في دراسة هذا الموضوع باستخدام مثال غريب يعرف بفضاء كانتور. من المفاجئ أن فحص هذا الفضاء يقودنا إلى فهم أفضل لخصائص فترة الوحدة $[0,1]$.

درسنا سابقاً الضرب المنتهي للفضاءات التبولوجية. في هذا الفصل سنوسع دراستنا إلى الضرب المعدود غير المنتهي للفضاءات التبولوجية، هذا يقودنا إلى مثال غني ورائع وهو مثال على منحنيات مالئة فضاء.

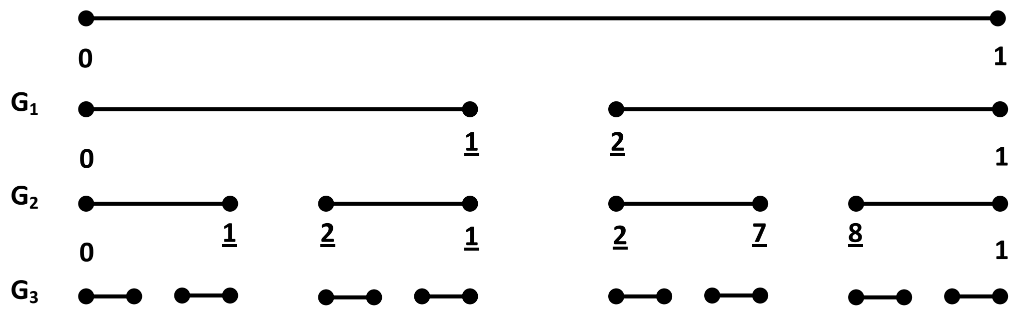
1.9 مجموعة كانتور The Cantor Set

1.1.9 ملاحظة. الآن سنركب مجموعة غريبة جداً (ولكن مفيدة) تُعرف بمجموعة كانتور (Cantor Set). تأمل فترة الوحدة المغلقة [0, 1] واحذف منها الفترة المفتوحة $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. وهي الثلث الأوسط وارمز للمجموعة المغلقة المتبقية بـ G_1 لذلك

$$G_1=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$$

بعد ذلك احذف من G الفترات المفتوحة $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ و $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$ وهي الثلث الأوسط في كل من قطعتيها الاثنتين وارمز للمجموعة المغلقة المتبقية بـ G_2. لذلك؛

$$G_2=\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$$



إذا أكملنا بهذه الطريقة في كل خطوة نحذف الثلث الأوسط المفتوح في كل فترة مغلقة متبقية من الخطوة السابقة سوف نحصل على متتالية متناقصة من المجموعات المغلقة؛

$$G_1\supset G_2\supset G_3\supset ......\supset G_n\supset ....$$

مجموعة كانتور G تعرّف على الشكل $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ ولكونها تقاطع عدد من المجموعات المغلقة فهي مجموعة مغلقة من [0,1].

بما أن [0,1] متراصة فإن فضاء كانتور (Cantor Space) (G , τ) (أي G مع تبولوجيا الفضاء الجزئي) هو متراص. [مجموعة كانتور سميت بعد الباحث في نظرية المجموعات Georg Cantor (1918-1845)].

من المفيد أن نمثل مجموعة كانتور باستخدام الأعداد الحقيقية المكتوبة على النظام الثلاثي. أنت معتاد على التعبير العشري للأعداد الحقيقية. اليوم لا نستطيع تجنب الحاسوب الذي يستخدم النظام الثنائي. ولكن لمجموعة كانتور النظام الثلاثي هو الأفضل.

في النظام الثلاثي، $76\ \frac{5}{81}$ تكتب على الشكل 2211.0012 لأن هذا يمثل؛

$$2.3^3 + 2.3^2 + 1.3^1 + 1.3^0 + 0.3^{-1} + 0.3^{-2} + 1.3^{-3} + 2.3^{-4}$$

لذلك العدد x في [0,1] يمثل بعدد ثلاثي $a_1\ a_2\ a_3\ \ldots.\ a_n \ldots$ ، حيث؛

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$، $a_n \in \{0,1,2\}$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

لذلك بما أن $\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ ، $\frac{1}{3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ و $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ نلاحظ أن تمثيلها الثلاثي يعطى على الشكل $\frac{1}{2} = 0.11111......$ ؛ $\frac{1}{3} = 0.02222......$ ؛ $1 = 0.2222......$

(بالتأكيد تعبير ثلاثي لـ $\frac{1}{3}$ يمكن أن يكون على الشكل ...0.10000 وآخر لـ1 هو ..1.0000).

بالعودة مرة أخرى لمجموعة كانتور، G، يجب أن يكون واضحاً أن أي عنصر في [0, 1] هو في G إذا وفقط إذا كان يمكن كتابته على النظام الثلاثي حيث $a_n \neq 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$. لذلك $\frac{1}{2} \notin G$ ، $\frac{5}{81} \notin G$ ، $\frac{1}{3} \in G$ و $1 \in G$.

لذلك لدينا اقتران f من مجموعة كانتور إلى مجموعة كل المتتاليات التي على الشكل $(a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n, \ldots)$ حيث كل من $a_i \in \{0, 2\}$ و f هو واحد لوحد وشامل. فيما بعد سوف نستخدم هذا الاقتران f . □

تمارين 1.9

1- (أ) اكتب التعبير الثلاثي للأرقام التالية:

$$\text{(I)}\ 21\frac{5}{243}\ ;\ \text{(II)}\ \frac{7}{9}\ ;\ \text{(III)}\ \frac{1}{13}$$

(ب) أي الأعداد الحقيقية تملك التعابير الثلاثية الآتية:

؟ $0.0\overline{12}$ (III) ؛ $0.\overline{1}10$ (II) ؛ $0.\overline{02}=0.020202...$ (I)

(جـ) أي من الأعداد الواردة في (أ) و (ب) تقع في مجموعة كانتور؟

2- لتكن x نقطة في فضاء تبولوجي (X, τ). فإن x تسمى نقطة معزولة (Isolated point) إذا كانت $x \in X \setminus X'$ ، أي أن x ليست نقطة نهاية في X . الفضاء (X, τ) يسمى تام (Perfect) إذا كان لا يملك نقاط معزولة. أثبت أن فضاء كانتور فضاء متراص غير مترابط بالكامل وتام.

[يمكن أن يثبت أن أي فضاء غير خالي متراص غير مترابط بالكامل قابل للقياس وتام هو هوميومورفك لفضاء كانتور. انظر على سبيل المثال تمارين A 2.6 (C) في Engelking (77)].

2.9 تبولوجيا الضرب (The Product Topology)

1.2.9 تعريف. لتكن (X_1 , τ_1) ، (X_2 , τ_2) ، ... ، (X_n , τ_n) ، ... عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية. فإن الضرب $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ للمجموعات X_i ، $i \in \mathbb{N}$ مكون من كل المتتاليات غير المنتهية $(x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots)$ حيث $x_i \in X_i$ لكل i . (المتتالية غير المنتهية $(x_1 , x_2 , \dots , x_n , \dots)$ بعض الأحيان تكتب على الشكل $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$). فضاء الضرب $\prod_{i=1}^{\infty} (X_i , \tau_i)$ من الضرب $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ مع التبولوجيا τ التي تملك قاعدة العائلة؛

$$\mathfrak{B} = \{\prod_{i=1}^{\infty} O_i \in \tau_i \text{ , } i \text{ من منتهي عدد عدا ما لكل } O_i = X_i \text{ و}\}$$

التبولوجيا τ تسمى تبولوجيا الضرب.

لذلك المجموعة المفتوحة القاعدية هي على الشكل $O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \ldots$.

تحذير. يجب أن يكون واضحاً أن ضرب المجموعات المفتوحة ليس بالضرورة أن يكون مفتوح في تبولوجيا الضرب τ. بشكل خاص إذا كانت O_1 ، O_2 ، O_3 ، ... ، O_n ، ... مجموعات بحيث $O_i \in \tau_i$ و $O_i \neq X_i$ لكل i فإن $\prod_{i=1}^{\infty} O_i$ لا يمكن التعبير عنه كاتحاد لعناصر من $\mathfrak{B}$ ولذلك هو ليس مفتوح في فضاء الضرب $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i , \tau)$.

2.2.9 ملاحظة. لماذا اخترنا أن نعرّف تبولوجيا الضرب كما في تعريف 1.2.9؟ الإجابة هي أن فقط مع هذا التعريف نحصل على نظرية تيخونوف (للضرب غير المنتهي) والتي تقول أن أي ضرب لفضاءات متراصة هو متراص. وهذه النتيجة مهمة جداً للتطبيقات.

3.2.9 مثال. لتكن (X_1 , τ_1) ، ... ، (X_n , τ_n) ، ... عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية. فإن التبولوجيا الصندوقية (Box topology) τ' على الضرب $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ هي تلك التبولوجيا التي تملك كقاعدة العائلة

$$B' = \{\prod_{i=1}^{\infty} O_i : O_i \in \tau_i\}.$$

مباشرة يمكن مشاهدة أنه إذا كان كل من (X_i , τ_i) هو فضاء متقطع فإن فضاء الضرب الصندوقي $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i , \tau')$ هو فضاء متقطع. لذلك إذا كان كل من (X_i , τ_i) هو مجموعة منتهية مع التبولوجي المتقطعة فإن $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i , \tau')$ هو فضاء متقطع غير منتهي وهو بالتأكيد ليس متراص. لذلك أصبح لدينا ضرب صندوقي لفضاءات متراصة (X_i , τ_i) وهو فضاء غير متراص. □

تبرير آخر لاختيارنا لتعريف تبولوجيا الضرب هو التمهيدية التالية والتي هي المماثل لتمهيدية 5.2.8 ولكن لحالة الضرب المعدود غير المنتهي.

4.2.9 تمهيدية. لتكن (X_1 , τ_1) ، (X_2 , τ_2) ، ... ، (X_n , τ_n) ، ... عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية و $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i , \tau)$ هو فضاء الضرب المرتبط بها. لكل i، ليكن $p_i : \prod_{j=1}^{\infty} X_j \to X_i$ هو اقتران الإسقاط، أي أن $p_i((x_1 , x_2 ,..., x_n ,...)) = x_i$ لكل $(x_1 , x_2 ,..., x_n ,...) \in \prod_{j=1}^{\infty} X_j$ فإن:

(I) كل p_i هو اقتران متصل شامل ومفتوح و

(II) τ هي أشد تبولوجيا على المجموعة $\prod_{j=1}^{\infty} X_j$ بحيث أن كل p_i متصل.

البرهان. البرهان مماثل لبرهان تمهيدية 5.2.8 ولذلك ترك كتمرين. □

سوف نستخدم التمهيدية التالية فيما بعد

5.2.9 تمهيدية. لتكن (X_i , τ_i) و (Y_i,τ_i') ، $i \in \mathbb{N}$ عائلتين معدودتين وغير منتهيتين من الفضاءات التبولوجية والتي تملك فضاءات الضرب التالية $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i,\tau)$ و $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i,\tau')$ على التوالي. إذا كان الاقتران $h_i : (X_i,\tau_i) \to (Y_i,\tau'_i)$ متصل لكل $i \in \mathbb{N}$ فإن الاقتران $h:\left(\prod_{i=1}^{\infty} X_i,\tau\right)\to\left(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i,\tau'\right)$ المعطى على الشكل $h\left(\prod_{i=1}^{\infty} x_i\right)=\prod_{i=1}^{\infty} h_i(x_i)$ أي أن $h((x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots))=(h_1(x_1),h_2(x_2),\ldots,h_n(x_n),\ldots)$ هو كذلك متصل.

البرهان. يكفي أن نبين أنه إذا كانت O مجموعة مفتوحة قاعدية في $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i,\tau')$ فإن $h^{-1}(O)$ مفتوحة في $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i,\tau)$. تأمل المجموعة المفتوحة القاعدية $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \ldots$ حيث $U_i \in \tau_i'$ لكل $i=1,\ldots,n$ فإن $h^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n \times Y_{n+1} \times Y_{n+2} \times \ldots) = h_n^{-1}(U_n) \times \ldots \times h_n^{-1}(U_n) \times X_{n+2} \times \ldots$ والمجموعة علىجهة اليمين هي في τ لأن اتصال كل من h_i يعطي أن $h_i^{-1}(U_i) \in \tau_i$ لكل $i=1,\ldots,n$. لذلك h متصل. □

تمارين 2.9

1- لكل $i \in \mathbb{N}$ لتكن C_i مجموعة جزئية مغلقة في الفضاء التبولوجي (X_i,τ_i). أثبت أن $\left(\prod_{i=1}^{\infty} C_i\right)$ مجموعة جزئية مغلقة في $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$.

2- إذا كان في تمهيدية 5.2.9 كل اقتران h_i هو كذلك

(أ) واحد لواحد.

(ب) شامل.

(ج) شامل ومفتوح.

(د) هوميومورفزم.

أثبت أن h على الترتيب

(أ) واحد لواحد.

(ب) شامل.

(ج) شامل ومفتوح.

(د) هوميومورفزم.

3- لتكن (X_i, τ_i)، $i \in \mathbb{N}$ عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية. أثبت أن كل (X_i, τ_i) هو هوميومورفك لفضاء جزئي من $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$.

[مساعدة: انظر تمهيدية 8].

4- (أ) لتكن (X_i, τ_i)، $i \in \mathbb{N}$ ، فضاءات تبولوجية. إذا كان كل من (X_i, τ_i) هو (I) فضاء هوسدورف، (II) فضاء $-T_1$ ، (III) فضاء $-T_0$ ، أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ هو على الترتيب (I) فضاء هوسدورف، (II) فضاء $-T_1$، (III) فضاء $-T_0$.

(ب) باستخدام تمرين 3 أعلاه، أثبت عكس العبارة في (أ).

5- لتكن (X_i, τ_i)، $i \in \mathbb{N}$ ، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية. أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ هو فضاء متقطع إذا وفقط إذا كان كل من (X_i, τ_i) هو متقطع وكل ما عدا عدد منتهي من X_i ، $i \in \mathbb{N}$ هي مجموعات أحادية.

6- لكل $i \in \mathbb{N}$ ، ليكن (X_i, τ_i) فضاء تبولوجي. أثبت أن

(I) إذا كان $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ متراص فإن كل من (X_i, τ_i) هو متراص؛

(II) إذا كان $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ مترابط فإن كل من (X_i, τ_i) هو مترابط؛

(III) إذا كان $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ متراص موضعياً فإن كل من (X_i,τ_i) هو متراص موضعياً وكل ما عدا عدد منتهي من (X_i,τ_i) متراص.

3.9 فضاء كانتور ومكعب هلبرت

The Cantor Space and the Hilbert Cube

1.3.9 ملاحظة. نعود الآن إلى فضاء كانتور ونثبت أنه هوميومورفك لضرب غير منتهي ومعدود من فضاءات مكونة من نقطتين.

لكل $i \in \mathbb{N}$ سنجعل (A_i,τ_i) هي المجموعة $\{0,2\}$ من التبولوجيا المتقطعة، وتأمل فضاء الضرب $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$. نبين في التمهيدية التالية أنه هوميومورفك لفضاء كانتور (G,τ).

2.3.9 تمهيدية. ليكن (G,τ) فضاء كانتور و $(\prod_{i=1}^{\infty}A_i,\tau')$ كما في ملاحظة 1.3.9. فإن الاقتران $f:(G,\tau)\to(\prod_{i=1}^{\infty}A_i,\tau')$ المعطى على الشكل $f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right)=(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$ هو هوميومورفزم.

البرهان. لاحظنا في ملاحظة 1.1.9 أن f هو واحد لواحد وشامل. بما أن (G,τ) متراص و $(\prod_{i=1}^{\infty}A_i,\tau')$ هوسدورف (تمارين 4#2.9) تمارين 6#2.7 تقول أن f هو هوميومورفزم إذا كان متصل.

لإثبات اتصال f يكفي أن نبين أن لكل مجموعة مفتوحة قاعدية $U=U_1\times U_2\times\ldots\times U_N\times A_{N+1}\times A_{N+2}\times\ldots$ ولأي نقطة $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)\in U$ يوجد مجموعة مفتوحة W بحيث $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\in W$ و $f(W)\subseteq U$.

تأمل الفترة المفتوحة $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}-\frac{1}{3^{N+2}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3^{N+2}}\right)$ واجعل W هي تقاطع هذه الفترة المفتوحة مع G.

فإن W مفتوحة في (G,τ) وإذا كانت $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{3^n}\in W$ فإن x_i,a_i لكل $i=1,2,...,N$. لذلك

$f(x)\in U_1\times U_2\times...\times U_N\times A_{N+1}\times A_{N+2}\times...$ ، ولهذا $f(W)\subseteq U$ كما هو مطلوب. □

كما ذكر سابقاً، أننا في الوقت المناسب سوف نبرهن أن أي ضرب لفضاءات متراصة هو متراص – أي نظرية تيخونوف. على أية حال باستخدام تمهيدية 2.3.9 نستطيع أن نبين بسهولة أن ضرب عدد معدود من النسخ الهوميوموفك لفضاء كانتور هو هوميومورفك لفضاء كانتور ولذلك هو متراص.

3.3.9 تمهيدية. لتكن (G_i,τ_i) ، $i\in\mathbb{N}$ ، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية كل منها هوميومورفك لفضاء كانتور (G,τ). فإن $\prod_{i=1}^{n}(G_i,\tau_i)\cong\prod_{i=1}^{\infty}(G_i,\tau_i)\cong(G,\tau)$ ، لكل $n\in\mathbb{N}$.

البرهان. أولاً نثبت أن $(G,\tau)\cong(G_1,\tau_1)\times(G_2,\tau_2)$. هذا، استناداً إلى تمهيدية 2.3.9، مكافئ لإثبات أن $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\times\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\cong\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ حيث كل من (A_i,τ_i) هو المجموعة $\{0,2\}$ مع التبولوجيا المتقطعة.

الآن نعرِّف اقتران θ من المجموعة $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\times\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ إلى المجموعة $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ على الشكل

$\theta((a_1,a_2,a_3,...),(b_1,b_2,b_3,...))\rightarrow(a_1,b_1,a_2,b_2,a_3,b_3,...)$.

من السهل رؤية أن θ هوميومورفزم ولذلك $(G_1,\tau_1)\times(G_2,\tau_2)\cong(G,\tau)$ بالاستقراء ينتج $\prod_{i=1}^{n}(G_i,\tau_i)\cong(G,\tau)$ لكل عدد صحيح موجب n.

بالذهاب إلى حالة الضرب غير المنتهي، عرِّف الاقتران

$\phi:\left[\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\times\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\times\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)\times...\right]\rightarrow\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ على الشكل

$$\phi((a_1,a_2,...),(b_1,b_2,...),(c_1,c_2,...),(d_1,d_2,...),(e_1,e_2,...),...)$$
$$=(a_1,a_2,b_1,a_3,b_2,c_1,a_4,b_3,c_2,d_1,a_5,b_4,c_3,d_2,e_1,...)$$

مرة أخرى من السهل إثبات أن ϕ هوميومورفزم والبرهان أكمل. □

4.3.9 ملاحظة. يجب أن يكون ملاحظاً أن العبارة $(G,\tau)\cong\prod_{i=1}^{\infty}(G_i,\tau_i)$

في تمهيدية 3.3.9 ربما تكون أكثر وضوحاً إذا كتبناها على الشكل

$$(A,\tau)\times(A,\tau)\times\ldots\cong[(A,\tau)\times(A,\tau)\times\ldots]\times[(A,\tau)\times(A,\tau)\times\ldots]\times\ldots$$

حيث (A,τ) هي المجموعة $\{0,2\}$ مع التبولوجيا المتقطعة. □

5.3.9 تمهيدية. الفضاء التبولوجي $[0,1]$ هو صورة متصلة لفضاء كانتور (G,τ).

البرهان. بالنظر إلى تمهيدية 2.3.9 يكفي أن نجد اقتران متصل وشامل من $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$ إلى $[0,1]$. مثل هذا الاقتران يعطى على الشكل

$$\phi((a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}$$

متذكراً أن كل $a_i\in\{0,2\}$ وأن كل عدد $x\in[0,1]$ له مفكوك ثنائي على الشكل $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{2^j}$، حيث $b_j\in\{0,1\}$، نشاهد أن ϕ هو اقتران شامل. لإثبات أن ϕ متصل يكفي، باستخدام تمهيدية 7.1.5، أن نبين أنه إذا كانت U الفترة المفتوحة $\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}-\varepsilon,\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}+\varepsilon\right)$ و $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}$ لأي $\varepsilon\rangle 0$ فإنه يوجد مجموعة مفتوحة W حيث $(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots)\in W$ و $\phi(W)\subseteq U$ اختار N كبيرة بما فيه الكفاية بحيث $\sum_{i=N}^{\infty}\frac{a_i}{2^{i+1}}\langle\varepsilon$ واجعل

$$W=\{a_1\}\times\{a_2\}\times\ldots\times\{a_N\}\times A_{N+1}\times A_{N+2}\times\ldots$$

فإن W مفتوحة في $\prod_{i=1}^{\infty}(A_i,\tau_i)$، $(a_1,a_2,\ldots a_i,\ldots)\in W$ و $\phi(W)\subseteq U$، كما هو مطلوب. □

6.3.9 ملاحظة. يجب أن تكون مندهش بعض الشيء من تمهيدية 5.3.9 لأنها تقول أن الفضاء "اللطيف" $[0,1]$ هو صورة متصلة لفضاء كانتور الغريب جداً. على أية حال سوف نرى في الوقت المناسب أن كل فضاء متري متراص هو صورة متصلة لفضاء كانتور. □

7.3.9 تعريف. لأي عدد صحيح موجب n، ليكن الفضاء التبولوجي (I_n,τ_n) هوميومورفك لـ $[0,1]$. فإن فضاء الضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n,\tau_n)$ يسمى مكعب هلبرت (Hilbert Cube) ويرمز له بالرمز I^{∞}. فضاء الضرب $\prod_{n=1}^{\infty}(I_n,\tau_n)$ يسمى $n-$ مكعب (n-cube) ويرمز له بالرمز I^n لكل $n\in\mathbb{N}$.

نعرِّف من نظرية تيخونوف للضرب المنتهي أن I^n متراص لكل n. الآن نثبت أن I^{∞} متراص. (بالتأكيد هذه النتيجة يمكن كذلك أن تستنتج من نظرية تيخونوف للضرب غير المنتهي، والتي تثبت في الفصل العاشر.)

8.3.9 نظرية. مكعب هلبرت هو متراص.

البرهان. بواسطة تمهيدية 5.3.9 يوجد اقتران متصل وشامل φ_n من (G_n,τ_n) إلى (I_n,τ'_n) حيث لكل $n\in\mathbb{N}$، (G_n,τ_n) و(I_n,τ'_n) هي هوميومورفك لفضاء كانتور و$[0,1]$ على التوالي. لذلك باستخدام تمهيدية 5.2.9 وتمارين 2.9 # 2 (ب)، يوجد اقتران متصل وشامل ψ من $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n,\tau_n)$ إلى $I^{\infty}=\prod_{n=1}^{\infty}(I_n,\tau'_n)$. ولكن تمهيدية 3.3.9 تقول أن $\prod_{n=1}^{\infty}(G_n,\tau_n)$ هوميومورفك لفضاء كانتور (G,τ). لذلك I^{∞} صورة متصلة للفضاء المتراص (G,τ) ولذلك هو متراص. □

9.3.9 تمهيدية. لتكن (X_i,τ_i)، $i\in\mathbb{N}$، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات القابلة للقياس. فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هو قابل للقياس.

البرهان. لكل $i\in\mathbb{N}$، لتكن d_i مسافة على X_i تُحدث التبولوجيا τ_i، تمارين 2#1.6 تقول أنه إذا جعلنا $e_i(a,b)=\min(1,d(a,b))$ لكل b,a في X_i فإن e_i هي مسافة وتُحدث التبولوجيا τ_i على X_i. لذلك نستطيع، بدون فقدان التعميم، أن نفرض أن $d_i(a,b)\le 1$ لكل b,a في X_i، $i\in\mathbb{N}$.

عرِّف $d:\prod_{i=1}^{\infty}X_i\times\prod_{i=1}^{\infty}X_i\to R$ على الشكل

$$d\Big(\prod_{i=1}^{\infty}a_i,\prod_{i=1}^{\infty}b_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{d_i(a_i,b_i)}{2^i}$$

لكل a_i,b_i في X_i.

لاحظ أن المتسلسلة على جهة اليمين متقاربة لأن كل من $d_i(a_i,b_i)\le 1$ ولذلك هي محدودة من أعلى بالقيمة $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$.

من السهل إثبات أن d مسافة على $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. لاحظ أن d_i' المعرّف على الشكل $d_i'(a,b)=\frac{d_i(a,b)}{2^i}$ هو مسافة على X_i والذي يُحدث نفس التبولوجيا τ_i كما عمل d_i. ندّعي أن d يُحدث تبولوجيا الضرب على $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

لرؤية ذلك تأمل التالي. بما أن

$$d(\prod_{i=1}^{\infty} a_i, \prod_{i=1}^{\infty} b_i) \geq \frac{d_i(a_i,b_i)}{2^i} = d_i'(a_i,b_i)$$

ينتج من ذلك أن الاسقاط $p_i : (\prod_{i=1}^{\infty} X_i, d) \to (X_i, d_i')$ متصل، لكل i.

بما أن d_i' يُحدث التبولوجيا τ_i'، تمهيدية 4.2.9 (II) تعطي أن التبولوجيا المحدثة على $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ بواسطة d أرق من تبولوجيا الضرب.

لإثبات أن التبولوجيا المحدثة بواسطة d كذلك هي أشد من تبولوجيا الضرب، لتكن $B_\varepsilon(a)$ أي كرة مفتوحة نصف قطرها $\varepsilon > 0$ حول النقطة $a = \prod_{i=1}^{\infty} a_i$.

لذلك $B_\varepsilon(a)$ هي مجموعة مفتوحة قاعدية في التبولوجيا المحدثة بواسطة d.

يجب أن نبين أنه يوجد مجموعة $W \ni a$ بحيث أن $W \subseteq B_\varepsilon(a)$ و W مفتوحة في تبولوجيا الضرب. لتكن N عدد صحيح بحيث أن $\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

لتكن Oi الكرة المفتوحة في (X_i, d_i) التي نصف قطرها $\frac{\varepsilon}{2N}$ حول النقطة a_i، $i = 1,..,N$. عرّف:

$$W = O_1 \times O_2 \times \ldots \times O_N \times X_{N+1} \times X_{N+2} \times \ldots$$

فإن W مجموعة مفتوحة في تبولوجيا الضرب، $W \ni a$ وواضح أن $W \subseteq B_\varepsilon(a)$ كما هو مطلوب. □

10.3.9 نتيجة. مكعب هلبرت هو قابل للقياس. □

برهان تمهيدية 9.3.9 يمكن تحسينه للحصول على النتيجة التالية:

11.3.9 تمهيدية. لتكن (X_i, τ_i)، $i\in\mathbb{N}$ ، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات القابلة للقياس تماماً، فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ قابل للقياس تماماً.

البرهان. تمارين 3.9 #10. □

12.3.9 ملاحظة. من تمهيدية 11.3.9 نرى أن الضرب المعدود غير المنتهي لفضاءات متقطعة هو قابل للقياس تماماً. أكثر مثال ممتع على ذلك هو $\mathbb{N}^{\aleph_0}$, أي الضرب المعدود غير المنتهي لفضاءات تبولوجية كل منها هو ميومورفك للفضاء المتقطع $\mathbb{N}$. الشيء الأكثر ادهاشاً هو حقيقة، كما ذكر في الفصل السادس، أن $\mathbb{N}^{\infty}$ هوميومورفك لـ $\mathbb{P}$، الفضاء التبولوجي المكون من مجموعة الأعداد غير النسبية مع التبولوجيا الاقليدية. انظر Engelking [77] تمارين G.3.4 وتمارين A.2.6.

13.3.9 ملاحظة. مثال آخر مهم على ضرب معدود لفضاءات قابلة للقياس تماماً هو R^{∞}. هذا ضرب معدود غير منتهي لفضاءات تبولوجية كل منها هوميومورفك لـ R. نتيجة 25.3.4 في Engelking [77] تبين أن: الفضاء القابل للقياس الانفصالي هو قابل للقياس تماماً إذا وفقط إذا، كان هوميومورفك لفضاء جزئي مغلق من R^{∞}. بشكل خاص نلاحظ أن كل فضاء بناخ انفصالياً هو هوميومورفيك لفضاء جزئي مغلق من R^{∞}.

نتيجة جميلة وعميقة تقول أن: كل فضاء بناخ انفصالياً بعدي غير منتهي هوميومورفك لـ R^{∞}، انظر Bessaga و Pelczynski [24].

تمارين 3.9

-1 لتكن (X_i, d_i)، $i\in\mathbb{N}$، عائلة معدودة غير منتهية من فضاءات مترية مع خاصية أن لكل i، $d_i(a,b)\le 1$، لكل a و b في X_i.

عرِّف $e:\prod_{i=1}^{\infty}X_i\times\prod_{i=1}^{\infty}X_i\to R$ على الشكل

$$e(\prod_{i=1}^{\infty}a_i,\prod_{i=1}^{\infty}b_i)=\sup\{d_i(a_i,b_i):\mathrm{i}\in\mathrm{N}\}.$$

أثبت أن e مسافة على $\prod_{i=1}^{\infty} x_i$ ومكافئة للمسافة d في تمهيدية 9.3.9. (تذكر أن "مكافئ" تعني "يحدث نفس التبولوجيا".

2- إذا كانت (X_i, τ_i) ، i∈ℕ، فضاءات جزئية متراصة من [0, 1] ، استنتج من نظرية 8.3.9 وتمارين 2.9#1 أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ متراص.

3- ليكن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ هو ضرب عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية. ليكن (Y, τ) فضاء تبولوجي و f اقتران من (Y, τ) إلى $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$. أثبت أن f متصل إذا وفقط إذا كان كل اقتران $p_i o f : (Y, \tau) \to (X_i, \tau_i)$ هو متصل حيث p_i يرمز لاقتران الإسقاط.

4- (أ) لتكن X مجموعة منتهية و τ تبولوجيا هوسدورف على X. أثبت أن:

(I) τ هي التبولوجيا المتقطعة؛

(II) (X, τ) هوميومورفك لفضاء جزئي من [0, 1].

(ب) باستخدام (أ) وتمرين 3 أعلاه أثبت أنه إذا كان (X_i, τ_i) فضاء هودسدورف منتهي لكل i∈ℕ فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ متراص وقابل للقياس.

(جـ) أثبت أن كل فضاء تبولوجي منتهي هو صورة متصلة لفضاء متقطع منتهي.

(د) باستخدام (ب) و(جـ)، أثبت أنه إذا كان (X_i, τ_i) فضاء تبولوجي منتهي لكل i∈ℕ ، فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ متراص.

5- (I) أثبت أن فضاء سيربنسكي (Sierpinski) (تمارين 3.1 # 5 (III)) هو صورة متصلة لـ [0, 1].

(II) باستخدام (I) وتمهيدية 5.2.9، أثبت أنه إذا كان (X_i, τ_i)، لكل i∈ℕ ، هوميومورفك لفضاء سيربنسكي فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ متراص.

6- (I) لتكن (X_i,τ_i)، $i\in\mathbb{N}$ ، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية كل منها يحقق مسلمة العدد الثانية. أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ يحقق مسلمة العد الثانية.

(II) باستخدام تمارين 2.3 #4 (VIII) وتمارين 1.4 #14 استنتج أن مكعب هلبرت وكل فضاءاته الجزئية هي انفصالية.

7- لتكن (X_i,τ_i) ، $i\in\mathbb{N}$ ، عائلة معدودة وغير منتهية من الفضاءات التبولوجية. أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هو فضاء غير مترابط بالكامل إذا وفقط إذا كان كل من (X_i,τ_i) غير مترابط بالكامل. استنتج أن فضاء كانتور غير مترابط بالكامل.

8- ليكن (X,τ)، فضاءً تبولوجياً و (X_{ij},τ_{ij}) ، $i\in\mathbb{N}$ ، $j\in\mathbb{N}$ ،عائلة من الفضاءات التبولوجية كل منها هوميومورفك لـ(X,τ). أثبت أن:

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{\infty}(X_{ij},\tau_{ij})\right)\cong\prod_{i=1}^{\infty}(X_{i1},\tau_{i1})$$

[مساعدة: هذه النتيجة تعمم تمهيدية 3.3.9 والبرهان يستخدم اقتران مشابه لـ ϕ.]

9- (I) لتكن (X_i,τ_i) ، $i\in\mathbb{N}$ ، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية كل منها هوميومورفك لمكعب هلبرت. استنتج من تمرين 8 أعلاه أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هوميومورفك لمكعب هلبرت.

(II) من ثم بين أنه إذا كانت (X_i,τ_i) ، $i\in\mathbb{N}$ ، فضاءات جزئية متراصة من مكعب هلبرت فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ متراص.

10- أثبت تمهيدية 11.3.9.

[مساعدة: برموز برهان تمهيدية 9.3.9 أثبت أنه إذا كانت $a_n=\prod_{i=1}^{\infty}a_{in}$ ، $n\in\mathbb{N}$ ، متتالية كوشي في $(\prod_{i=1}^{\infty}X_i,d)$ فإن لكل $i\in\mathbb{N}$ ، $\{a_{in}:n\in N\}$ ، هي متتالية كوشي في (X_i,d_i).]

4.9 نظرية يوريسون Urysohn's Theorem

1.4.9 تعريف. الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى انفصالياً (Separable) إذا كان يملك مجموعة جزئية كثيفة.

انظر تمارين 2.3 #4 وتمارين 1.8 #9 حيث تم تقديم الفضاءات الانفصالية.

2.4.9 مثال. $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ ولذلك $\mathbb{R}$ انفصالياً. □

3.4.9 مثال. كل فضاء تبولوجي معدود هو انفصالياً. □

4.4.9 تمهيدية. ليكن (X,τ) فضاء متراص قابل للقياس، فإن (X,τ) انفصالياً.

البرهان. لتكن d مسافة على X والي تحدث البتولوجيا τ، لكل عدد صحيح موجب n لتكن S_n عائلة كل الكرات المفتوحة التي مراكزها في X ونصف قطرها $\frac{1}{n}$، فإن S_n هي غطاء مفتوح لـ X ولذلك يوجد غطاء جزئي منتهي $\mathcal{U}_n=\{U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{nk}\}$، لبعض $k\in\mathbb{N}$. لتكن y_{n_j} هي مركز U_{n_j}، $j=1,\dots,k$ و اجعل $Y_n=\{y_{n1}, y_{n2,\dots,} y_{nk}\}$ إذاً $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ مجموعة جزئية معدودة من X الآن نبين أن Y كثيفة في (X,τ).

إذا كانت V أي مجموعة مفتوحة غير خالية في (X,τ)، فإن لكل $v\in V$، V تحوى كرة مفتوحة، B، نصف قطرها $\frac{1}{n}$ حول v لبعض $n\in\mathbb{N}$ ، بما أن $\mathcal{U}_n$ هو غطاء مفتوح لـ X، $v\in U_{n_j}$، لبعض j، لذلك $d(v,y_{n_j})<\frac{1}{n}$ ولذلك $y_{n_j}\in B\subseteq v$ ، وهذا يعني $V\cap Y\neq\phi$ ولذلك Y كثيفة في X. □

5.4.9 نتيجة. مكعب هلبرت هو فضاء انفصالي. □

باختصار سوف نثبت نظرية يوريسون المدهشة جداً والتي تبين أن كل فضاء متراص قابل للقياس هو هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت، في الطريق نثبت (النسخة المعدودة من) مساندة التضمين.

بداية نسجل التمهيدية التالية، والتي هي تمرين 3.9#3 ولذلك برهانها غير متضمن هنا.

6.4.9 تمهيدية. لتكن (X_i, τ_i)، $i\in\mathbb{N}$، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية و f اقتران من فضاء تبولوجي (Y,τ) إلى $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$، فإن f متصل إذا وفقط إذا كان كل من $P_i o f:(Y,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ متصل حيث p_i يرمز لاقتران الإسقاط الشامل من $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ إلى (X_i,τ_i).

7.4.9 مساندة. (مساندة التضمين The Embedding Lemma) لتكن (Y_i,τ_i)، $i\in\mathbb{N}$، عائلة معدودة غير منتهية من الفضاءات التبولوجية ولكل i، ليكن f_i اقتران من فضاء تبولوجي (Y,τ) إلى (Y_i,τ_i). بالإضافة لذلك، لتكن $e:(X,\tau)\to\prod_{i=1}^{\infty}(Y_i,\tau_i)$ الاقتران الحسابي (evaluation map)، أي أن $e(x)=\prod_{i=1}^{\infty}f_i(x)$، لكل $x\in X$. فإن e هوميومورفزم من (X,τ) إلى الفضاء $(e(X),\tau')$ حيث τ' هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على e (X)، إذا كان:

(I) كل من f_i متصل,

(II) العائلة $\{f_i : i\in N\}$ تفصل نقاط (Separates points) X ، أي إذا كانت x_1 ، x_2 في X حيث $x_1\neq x_2$ فإن $f_i(x_1)\neq f_i(x_2)$ لبعض i, و

(III) العائلة $\{f_i : i\in N\}$ تفصل نقاط ومجموعات مغلقة (Separates points and closed sets) أي لكل $x\in X$ و A أي مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ) لا تحوي x ، $f_i(x)\notin\overline{f_i(A)}$ لبعض i .

البرهان. من الواضح أن الاقتران $e:(X,\tau)\to(e(x),\tau')$ هو شامل في حين أن الشرط (II) يعطي أن e واحد لواحد.

بما أن $p_i o e = f_i$ اقتران متصل من (X,τ) إلى (Y_i , τ_i)، لكل i ، تمهيدية 6.4.9، تعطي أن الاقتران $e:(X,\tau)\to\prod_{i=1}^{\infty}(Y_i,\tau_i)$ متصل.

لذلك $e:(X,\tau)\to(e(x),\tau')$ متصل.

لإثبات أن $e:(X,\tau)\to(e(x),\tau')$ اقتران مفتوح يكفي أن نثبت أن لكل $U\in\tau$ و $x\in U$ يوجد مجموعة $W\in\tau'$ بحيث أن $e(x)\in W\subseteq e(U)$. بما أن العائلة f_i ، $i\in\mathbb{N}$ ، تفصل نقاط ومجموعات مغلقة فيوجد $j\in\mathbb{N}$ بحيث أن $f_j(x)\notin\overline{f_j(X\setminus U)}$ ، اجعل:

$$W=(Y_1\times Y_2\times\ldots\times Y_{j-1}\times\left[Y_j\setminus\overline{f_j(X\setminus U)}\right]\times Y_{j+1}\times Y_{j+2}\times\ldots.)\cap e(x)$$

فإن من الواضح أن $e(x)\in W$ و $W\in\tau'$. بقي أن نبين أن $W\subseteq e(U)$.

لذلك لتكن $e(t)\in W$ فإن:

$$f_j(t)\in Y_j\setminus\overline{f_j(X\setminus U)}$$

$$\Rightarrow\qquad f_j(t)\notin\overline{f_j(X\setminus U)}$$

$$\Rightarrow\qquad f_j(t)\notin f_j(X\setminus U)$$

$$\Rightarrow\qquad t\notin X\setminus U$$

$$\Rightarrow\qquad t\in U$$

لذلك $e(t)\in e(U)$ ولهذا $W\subseteq e(U)$. لذلك e هوميومورفزم. □

8.4.9 تعريف. الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى فضاء- T_1 (T_1-Space) إذا كان كل مجموعة أحادية $\{x\}$ ، $x\in X$ ، هي مجموعة مغلقة.

9.4.9 ملاحظة. من السهل إثبات أن كل فضاء هوسدورف أي (T_2-Space) هو فضاء $-T_1$. العكس ليس صحيحاً (انظر تمارين 1.4 #13 وتمارين 3.1 #3). بشكل خاص، كل فضاء قابل للقياس هو فضاء $-T_1$.

10.4.9 نتيجة. إذا كان (X,τ) في مساندة 7.4.9 هو فضاء T_1– فإن شرط (II) ينتج من شرط (III) (ولذلك يصبح شرط زائد).

البرهان. لتكن x_1 و x_2 أي نقطتين مختلفتين في X. بجعل A تساوي المجموعة المغلقة $\{x_2\}$، شرط (III) يعطي أن لبعض i، $\overline{\{f_i(x_2)\}} \notin f_i(x_1)$. لذلك $f_i(x_1) \neq f_i(x_2)$ وبذلك شرط (II) متحقق. □

11.4.9 نظرية. (نظرية يوريسون Urysohn's Theorem). كل فضاء متري انفصال (X, d) هو هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت.

البرهان. بواسطة نتيجة 10.4.9 هذه النتيجة سوف تتضح إذا استطعنا إيجاد عائلة معدودة غير منتهية من الاقترانات $f_j : (X,d) \to [0,1]$ التي تكون (I) متصلة و(II) تفصل نقاط ومجموعات مغلقة.

بدون فقدان التعميم نستطيع أن نفرض أن $d(a, b) \leq 1$ لكل b, a في X، لأن كل مسافة مكافئة لهذه المسافة.

بما أن (X, d) هو انفصالياً يوجد مجموعة جزئية كثيفة معدودة في $Y = \{y_i : i \in N\}$ لكل i∈ℕ، عرِّف $f_i : X \to [0, 1]$ على الشكل $f_i(x) = d(x, y_i)$. من الواضح أن كل اقتران f_i هو متصل.

لرؤية أن الاقترانات $\{f_i : i \in N\}$ تفصل نقاط ومجموعات مغلقة، لتكن $x \in X$ و A مجموعة مغلقة لا تحوي x. الآن X / A مجموعة مفتوحة حول x ولذلك تحوي كرة مفتوحة B نصف قطرها ε ومركزها x، لبعض $\varepsilon > 0$.

بالإضافة لذلك، بما أن Y كثيفة في X، يوجد y_n بحيث أن $d(x, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. لذلك $d(y_n, a) \geq \frac{\varepsilon}{2}$، لكل $a \in A$.

لذلك $[0, \frac{\varepsilon}{2})$ هي مجموعة مفتوحة في $[0, 1]$ والتي تحوي $f_n(x)$، ولكن $f_n(a) \notin [0, \frac{\varepsilon}{2})$ لكل $a \in A$. وهذا يعطي $f_n(A) \subseteq \left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$ بما أن المجموعة $\left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$ مغلقة هذا يعطي أن $\overline{f_n(A)} \subseteq \left[\frac{\varepsilon}{2}, 1\right]$.

لذلك $f_n(X) \notin \overline{f_n(A)}$ ولهذا العائلة $\{f_i : i \in N\}$ تفصل نقاط ومجموعات مغلقة. □

12.4.9 نتيجة. كل فضاء متراص قابل للقياس هوميومورفك لفضاء جزئي مغلق في مكعب هلبرت. □

13.4.9 نتيجة. إذا كان لكل i∈ℕ ، (X_i, τ_i) هو فضاء متراص قابل للقياس فإن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هو متراص وقابل للقياس.

البرهان. كون $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ قابل للقياس أثبت في تمهيدية 9.3.9. كون $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ متراص تتبع من نتيجة 12.4.9 وتمارين 3.9 #9 (II). □

عملنا القادم هو أن تثبت عكس نظرية يوريسون. لعمل ذلك نقدم مفهوم جديد. (انظر تمارين 2.2 #4)

14.4.9 تعريف. يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الثانية (The Second Axiom of Countability) (أو قابل للعد الثاني Second Countable) إذا وجد قاعدة $\mathfrak{B}$ لـ τ بحيث أن $\mathfrak{B}$ مكونة من فقط عدد معدود من المجموعات.

15.4.9 مثال. لتكن $\mathfrak{B}=\left\{\left(q-\frac{1}{n}, q+\frac{1}{n}\right): q\in Q, n\in N\right\}$. فإن $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا الأقليدية على ℝ (أثبت ذلك). لذلك ℝ قابلة للعد الثاني. □

16.4.9 مثال. ليكن (X,τ) هو مجموعة غير معدودة مع التبولوجيا المتقطعة. بما أن كل مجموعة أحادية يجب أن تكون في أي قاعدة للتبولوجيا τ فإن (X,τ) لا يملك أي قاعدة معدودة. لذلك (X,τ) ليس قابل للعد الثاني. □

17.4.9 تمهيدية. ليكن (X, d) فضاء متري و τ التبولوجيا المحدثة، فإن (X,τ) فضاءً انفصالياً إذا وفقط إذا كان يحقق مسلمة العد الثانية.

البرهان. ليكن (X,τ) انفصالياً. إذا هو يملك مجموعة جزئية كثيفة معدودة $Y=\{y_i : i\in N\}$. لتكن $\mathfrak{B}$ مكونة من كل الكرات المفتوحة (في المسافة d) التي مركزها y_i ، لبعض i ، ونصف قطرها $\frac{1}{n}$ لبعض n حيث n عدد صحيح موجب. واضح أن $\mathfrak{B}$ معدودة وسوف نرى أنها قاعدة للتبولوجيا τ .

لتكن $V \in \tau$. إذا لكل $v \in V$، V تحوي كرة مفتوحة، B نصف قطرها $\frac{1}{n}$ حول v لبعض n . بما أن Y كثيفة في X ، يوجد $y_m \in Y$ بحيث أن $d(y_m, v) < \frac{1}{2n}$. لتكن B' الكرة المفتوحة التي مركزها y_m ونصف قطرها $\frac{1}{2n}$.

إذاً المتباينة المثلثية تعطي $B' \subseteq B \subseteq V$. كذلك $\mathfrak{B}$ $B' \in$. لذلك $\mathfrak{B}$ هي قاعدة للتبولوجيا τ . وهذا يعني أن (X,τ) قابل للعد الثاني.

بالمقابل ليكن (X,τ) قابل للعد الثاني ويملك قاعدة معدودة $\mathfrak{B}_1 = \{B_i : i \in N\}$ لكل $B_i \neq \phi$، لتكن b_i أي عنصر في B_i واجعل Z تساوي مجموعة كل هذه النقاط b_i ، فإن Z مجموعة معدودة. بالإضافة لذلك، إذا كانت $V \in \tau$ فإن $B_i \subseteq V$، لبعض i ، ولذلك $b_i \in V$. أي أن $V \cap Z \neq \phi$ لذلك Z كثيفة في X. مما يعني أن (X,τ) انفصالياً. □

18.4.9 ملاحظة. البرهان أعلاه يبين أن كل فضاء قابل للعد الثاني هو انفصالي حتى بدون فرض قابلية القياس. على كل حال، ليس صحيحاً بشكل عام أن الفضاء الانفصالي هو قابل للعد الثاني. (انظر تمارين 4.9 # 11)

19.4.9 نظرية. (نظرية يوريسون وعكسها) ليكن (X,τ) فضاءاً تبولوجياً، فإن (X,τ) انفصالي وقابل للقياس إذا وفقط إذا كان هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت.

البرهان. إذا كان (X,τ) انفصالي وقابل للقياس فإن نظرية يوريسون 11.4.9 تقول أنه هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت.

بالمقابل، ليكن (X,τ) هوميومورفك لفضاء جزئي (Y, τ_1) من مكعب هلبرت I^∞، بواسطة تمهيدية 4.4.9، I^∞ هو انفصالي. لذلك، بواسطة تمهيدية 17.4.9، هو قابل للعد الثاني. من السهل إثبات (تمارين 1.4 # 14). إن أي فضاء جزئي من فضاء قابل للعد الثاني هو قابل للعد الثاني، ولذلك (Y, τ_1) قابل للعد الثاني. كذلك من السهل إثبات (تمارين 1.6 # 6) أن أي فضاء جزئي من فضاء قابل للقياس هو قابل للقياس. بما أن مكعب هلبرت هو قابل للقياس، بواسطة نتيجة 10.3.9، فإن فضاءه الجزئي (Y, τ_1) قابل للقياس. لذلك (Y, τ_1) قابل للقياس ويحقق مسلمة العد الثانية، ولهذا هو انفصالي. لذلك (X,τ) كذلك انفصالي وقابل للقياس. □

تمارين 4.9

1- أثبت أن كل صورة متصلة لفضاء انفصالي هي انفصالية.

2- إذا كانت (X_i, τ_i)، $i \in \mathbb{N}$ ، فضاءات انفصالية، أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ فضاءاً انفصالياً.

3- إذا كانت كل الفضاءات (Y_i , τ_i) في مساندة 7.4.9 هي هوسدورف و(X,τ) متراص، أثبت أن الشرط (III) في المساندة هو شرط زائد.

4- إذا كان (X,τ) فضاء متقطع معدود، أثبت أنه هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت.

5- أثبت أن $C\left[0,1\right]$ مع المسافة الموضوعة في مثال 5.1.6 ، هوميومورفك لقضاء جزئي من مكعب هلبرت.

6- إذا كانت (X_i , τ_i)، $i \in \mathbb{N}$ ، فضاءات قابلة للعد الثاني، أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i, \tau_i)$ قابل للعد الثاني.

7- (نظرية ليندلوف Lindelof's Theorem) أثبت أن كل غطاء مفتوح لفضاء قابل للعد الثاني يملك غطاءً جزئياً معدوداً.

8- استنتج من نظرية 19.4.9 أن كل فضاء جزئي من فضاء انفصالي قابل للقياس هو انفصالي وقابل للقياس.

9- (I) أثبت أن مجموعة كل النقاط المعزولة في فضاء قابل للعد الثاني هي معدودة.

(II) بعد ذلك بين أن كل مجموعة جزئية غير معدودة A من فضاء قابل للعد الثاني تحوي على الأقل نقطة واحدة هي نقطة نهاية للمجموعة A .

10- (I) ليكن f اقتران متصل وشامل من فضاء هوسدورف غير انفصالي (X,τ) إلى نفسه. أثبت أنه يوجد مجموعة جزئية غير خالية مغلقة A في X، $A \neq X$ ، حيث $f(A)=A$. [مساعدة: اجعل $x_o \in X$ وعرف مجموعة $S=\{x_n : n \in Z\}$ بحيث أن $x_{n+1}=f(x_n)$ لكل عدد صحيح n].

(II) هل النتيجة أعلاه صحيحة إذا كان (X,τ) انفصالي؟ (برر إجابتك).

11- لتكن τ التبولوجيا المعرفة على $\mathbb{R}$ في مثال 1.3.2 أثبت أن:

(I) $(\mathbb{R},\tau)$ هو انفصالي.

(II) $(\mathbb{R},\tau)$ ليس قابل للعدد الثاني.

(III)

12- يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق شرط السلسلة المعدودة (Countable Chain Condition) إذا كانت كل عائلة منفصلة (غير متقاطعة) من المجموعات المفتوحة هي معدودة.

(I) أثبت أن كل فضاء انفصالي يحقق شرط السلسلة المعدودة.

(II) لتكن X مجموعة غير معدودة و τ التبولوجيا معدود- مغلق على X . أثبت أن (X,τ) يحقق شرط السلسلة المعدودة ولكنه ليس انفصالياً.

13- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى مبعثر (Scattered) إذا كان كل فضاء جزئي غير خالي من X يملك نقطة معزولة. (انظر تمارين 1.9 # 2).

(I) أثبت أن ℝ ، ℚ وفضاء كانتور ليست مبعثرة، في حين أن كل فضاء متقطع هو مبعثر.

(II) لتكن $X = \mathbb{R}^2$ ، d المسافة الأقليدية على $\mathbb{R}^2$ و'd المسافة على X المعطاة على الشكل $d'(x, y) = d(x, 0) + d(0, y)$ إذا كانت $x \neq y$ و $d'(x, y) = 0$ إذا كانت x = y.
لتكن τ التبولوجيا المحدثة على X بالمسافة 'd. المسافة 'd تسمى مسافة مكتب بريد (Post Office Metric). الفضاء التبولوجي يسمى غير مترابط نهائياً (Extremally Disconnected) إذا كانت غلاقة كل مجموعة مفتوحة هي مفتوحة. الفضاء التبولوجي (Y, τ_1) يسمى هوسدورف عائلياً (Collectionwise Hausdroff) إذا كان لكل فضاء جزئي متقطع (Z , τ_2) من (Y, τ_1) ولكل زوج من النقاط z_1 , z_2 في Z يوجد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين U_1 ، U_2 في (Y , τ_1) بحيث $z_1 \in U_1$ و $z_2 \in U_2$. أثبت ما يلي:

(أ) كل نقطة في (X , τ)، ما عدا x = 0 ، هي نقطة معزولة.

(ب) 0 ليست نقطة معزولة في (X , τ).

(ج) (X , τ) فضاء مبعثر.

(د) (X , τ) غير مترابط بالكامل.

(ه) (X , τ) غير متراص.

(و) (X , τ) غير متراص موضعياً. (انظر تمارين 3.8 # 1)

(ز) كل فضاء متري انفصالي له عدد أساسي (Cardinality) أقل أو يساوي c.

(ح) (X , τ) هو مثال على فضاء قابل للقياس له عدد أساسي c وليس انفصالياً. (لاحظ أن الفضاء المتري (l_∞, d_∞) في تمارين 1.6 # 7 (III) كذلك له عدد أساس c وليس انفصالياً).

(ط) كل فضاء متقطع هو غير مترابط نهائياً.

(ي) (X , τ) ليس غير مترابط نهائياً.

(ك) ضرب أي فضائين مبعثرين هو فضاء مبعثر.

(ل) ليكن (S , τ_3) الفضاء الجزئي $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$ من $\mathbb{R}$. فإن S ليست غير مترابطة نهائياً.

(م)* كل فضاء غير مترابط نهائياً وقابل للقياس هو متقطع.

[مساعدة: أثبت أن كل متتالية متقاربة يجب أن تملك حدود مكررة.]

(ن) الفضاء التبولوجي هو هوسدورف إذا وفقط إذا كان فضاء- T_1 وهوسدورف عائلياً.

(س)* كل فضاء غير مترابط نهائياً وهوسدروف عائلياً هو متقطع.

5.9 نظرية بينون Peano's Theorem

1.5.9 ملاحظة. في برهان نظرية 8.3.9 بينا أن مكعب هلبرت I^∞ هو صورة متصلة لفضاء كانتور (G, τ). في الحقيقة, كل فضاء متري متراص هو صورة متصلة لفضاء كانتور. التمهيدية التالية هي خطوة في هذا الاتجاه.

2.5.9 تمهيدية. كل فضاء انفصالي قابل للقياس (X, τ_1) هو صورة متصلة لفضاء جزئي من فضاء كانتور (G, τ). بالإضافة لذلك، إذا كان (X, τ_1) متراص فإن الفضاء الجزئي يمكن أن يختار ليكون مغلق في (G, τ).

البرهان. لتكن ϕ الاقتران المتصل الشامل من (G, τ) إلى I^∞ الذي أثبت أنه موجود في برهان نظرية 8.3.9. باستخدام نظرية يوريسون، (X, τ_1) هوميومورفك لفضاء جزئي (Y, τ_2) من I^∞. ليكن الهوميومورفزم من (Y, τ_2) إلى (X, τ_1) هو θ. اجعل $Z = \psi^{-1}(Y)$ و τ_3 تبولوجيا الفضاء الجزئي على Z. إذاً $\theta \circ \psi$ هو اقتران متصل وشامل من (Z, τ_3) إلى (X, τ_1). لذلك (X, τ_1) هو صورة متصلة للفضاء الجزئي (Z, τ_3) من (G, τ).

بالإضافة لذلك إذا كان (X, τ_1) متراص فإن (Y, τ_2) متراص ولذلك مغلق في I^∞. وهذا يعني أن $Z = \psi^{-1}(Y)$ مجموعة جزئية مغلقة في (G, τ)، كما هو مطلوب. □

3.5.9 تمهيدية. ليكن (Y, τ_1) فضاء جزئي مغلق غير خالي من فضاء كانتور (G, τ). فإنه يوجد اقتران متصل وشامل من (G, τ) إلى (Y, τ_1).

البرهان. لتكن (G', τ') مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يمكن كتابتها على الشكل $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{6^i}$ حيث كل $a_i = 0$ أو $a_i = 5$، مع تبولوجيا الفضاء الجزئي المحدثة من $\mathbb{R}$.

الفضاء (G', τ') يسمى منتصف ثلثي فضاء كانتور (Middle two thirds Cantor Space) وواضح أن (G', τ') هوميومورفك لفضاء كانتور (G, τ).

يمكن أن تعتبر (Y, τ_1) كفضاء جزئي مغلق من (G', τ') ونبحث عن اقتران متصل وشامل من (G', τ') إلى (Y, τ_1). قبل الاستمرار، لاحظ من تركيب منتصف ثلثي فضاء كانتور أنه إذا كان $g_1 \in G'$ و $g_2 \in G'$ فإن $\frac{g_1 + g_2}{2} \notin G'$.

الاقتران $\psi : (G', \tau') \to (Y, \tau_1)$ الذي نبحث عنه يعرّف على الشكل التالي: لأي $g \in G'$، $\psi(g)$ هو العنصر الوحيد في Y الأقرب إلى g في المسافة الأقليدية على $\mathbb{R}$. على أية حال يجب أن نثبت أن مثل هذا العنصر الوحيد الأقرب موجود.

ثبت $g \in G'$. فإن الاقتران $d_g : (Y, \tau_1) \to R$ المعطى على الشكل $d_g(y) = |g - y|$ هو متصل. بما أن (Y, τ_1) متراص، تمهيدية 15.2.7 تعطي أن $d_g(Y)$ تملك عنصر أقل. لذلك يوجد عنصر في (Y, τ_1) يكون أقرب إلى g . افرض أن هناك y_1 وy_2 من هذا النوع في Y واللذان يكونان متساويان في القرب من g. إذاً $g = \frac{y_1 + y_2}{2}$. ولكن $y_1 \in G'$ و $y_2 \in G'$ ولذلك، كما لوحظ أعلاه، $g = \frac{y_1 + y_2}{2} \notin G'$ وهذا تناقض. لذلك يوجد عنصر وحيد في Y يكون أقرب إلى g. سمي هذا العنصر $\psi(g)$.

من الواضح أن الاقتران $\psi : (G', \tau') \to (Y, \tau_1)$ هو شامل، لأنه إذا كان $y \in Y$، $\psi(y) = y$. لإثبات اتصال ψ، اجعل $g \in G'$. لتكن ε أي عدد حقيقي موجب. يكفي، باستخدام نتيجة 4.2.6، أن نجد $\delta > 0$ بحيث إذا كانت $x \in G'$ و $|g - x| < \delta$ فإن $|\psi(g) - \psi(x)| < \varepsilon$.

تأمل أولاً الحالة عندما $g \in Y$، لذلك $\psi(g) = g$. اجعل $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. إذا لكل $x \in G'$ حيث $|g - x| < \delta$ لدينا:

$$|\psi(g) - \psi(x)| = |g - \psi(x)|$$

$\leq |x-\psi(x)| + |g-x|$

$\leq |x-g| + |g-x|$ بواسطة تعريف ψ ولأن $g \in Y$

$= 2\,|x-g|$

$< 2\,\delta$

$= \varepsilon$ كما هو مطلوب

الآن تأمل الحالة عندما $g \notin Y$، لذلك $g \notin \psi(g)$.

بدون أن نفقد التعميم، افرض أن $\psi(g) < g$ واجعل $a = g - \psi(g)$.

إذا كانت المجموعة $Y \cap [g, 1] = \phi$ فإن $\psi(x) = \psi(g)$ لكل $x \in (g-\frac{a}{2}, g+\frac{a}{2})$.

لذلك إذا كانت $\delta < \frac{a}{2}$ لدينا $|\psi(x) - \psi(g)| = 0 < \varepsilon$، كما هو مطلوب.

إذا كانت $Y \cap [g, 1] \neq \phi$ وبما أن $Y \cap [g, 1]$ متراصة فإنها تملك عنصر أقل $y > g$.

في الحقيقة، بواسطة تعريف ψ ، إذا كانت $b = y - g$ فإن $b > a$.

الآن اجعل $\delta = \frac{b-a}{2}$.

لذلك إذا كانت $x \in G'$ حيث $|g - x| < \delta$ فإنه أما $\psi(x) = \psi(g)$ أو $\psi(x) = y$.

لاحظ أن:

$$|x - \psi(g)| \leq |x - g| + |g - \psi(g)| < \delta + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

في حين أن:

$$|x - y| \geq |g - y| - |g - x| \geq b - \frac{b-a}{2} = \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

لذلك $\psi(x) = \psi(g)$.

وهذا يعني أن $0 < \varepsilon = \left|\psi(x) - \psi(g)\right|$ ، كما هو مطلوب. لذلك ψ . □

لذلك حصلنا من التمهيديات 2.5.9 و 3.5.9 على نظرية أليكساندروف ويوريسون التالية:

4.5.9 نظرية. كل فضاء متراص مقابل للقياس هو صورة متصلة لفضاء كانتور. □

5.5.9 ملاحظة. عكس نظرية 4.5.9 خاطئ. ليس صحيحاً أن كل صورة متصلة لفضاء كانتور هي متراصة وقابلة للقياس. (جد مثالاً)

على أية حال، عبارة مشابهة تكون صحيحة إذا نظرنا فقط إلى فضاءات هوسدورف. في الحقيقة لدينا التمهيدية التالية:

6.5.9 تمهيدية. ليكن f اقتران متصل وشامل من فضاء متري متراص (X , d) إلى فضاء هوسدورف (Y , τ_1)، فإن (Y , τ_1) متراص وقابل للقياس.

البرهان. بما أن الصورة المتصلة للفضاء المتراص هي متراصة فإن الفضاء (Y , τ_1) بالتأكيد هو متراص. بما أن الاقتران f شامل، نستطيع أن نعرف مسافة d_1 على Y كما يلي:
$d_1(y_1, y_2) = \inf\left\{d(a,b): a \in f^{-1}\{y_1\}, b \in f^{-1}\{y_2\}\right\}$ لكل y_1 وy_2 في Y.

نحتاج أن نثبت أن d_1 هي في الحقيقة مسافة. بما أن $\{y_1\}$ و $\{y_2\}$ مغلقة في فضاء هوسدورف، $f^{-1}\{y_1\}$ و $f^{-1}\{y_2\}$ مغلقة في الفضاء المتراص (X , d). لذلك المجموعات $f^{-1}\{y_1\}$ و $f^{-1}\{y_2\}$ متراصة. لذلك الضرب $f^{-1}\{y_1\} \times f^{-1}\{y_2\}$ ، والذي هو فضاء جزئي من فضاء الضرب $(X,\tau) \times (X,\tau)$ ، هو متراص حيث τ هي التبولوجيا المحدثة بواسطة المسافة d .

ملاحظاً أن $d : (X,\tau) \times (X,\tau) \to R$ هو اقتران متصل، تمهيدية 15.2.7 تعطي أن $d\left(f^{-1}\{y_1\} \times f^{-1}\{y_2\}\right)$ لها عنصر أقل.

لذلك يوجد عنصر $x_1 \in f^{-1}\{y_1\}$ وعنصر $x_2 \in f^{-1}\{y_2\}$ بحيث $d(x_1, x_2) = \inf\left\{d(a,b) : a \in f^{-1}\{y_1\}, b \in f^{-1}\{y_2\}\right\} = d_1(y_1, y_2)$ وواضح أنه إذا كانت $y_1 \neq y_2$ فإن $f_1^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} = \phi$. لذلك $x_1 \neq x_2$ ولهذا $d(x_1, x_2) > 0$ أي أن $d_1(y_1, y_2) > 0$.

من السهل إثبات أن d_1 تملك الخواص الأخرى للمسافة ولذلك هي مسافة على Y. لتكن τ_2 هي التبولوجيا المحدثة على Y بواسطة d_1 . يجب أن نثبت أن $\tau_1 = \tau_2$.

أولاً، بواسطة تعريف d_1 ، $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_2)$ هو بالتأكيد متصل.

لاحظ أنه لأي مجموعة جزئية C من Y،

C مجموعة جزئية مغلقة في (Y , τ_1)

$\Leftarrow$ $f^{-1}(C)$ مجموعة جزئية مغلقة في (X , τ)

$\Leftarrow$ $f^{-1}(C)$ مجموعة جزئية متراصة في (X , τ)

$\Leftarrow$ $f(f^{-1}(C))$ مجموعة جزئية متراصة في (Y , τ_2)

$\Leftarrow$ C مجموعة جزئية متراصة في (Y , τ_2)

$\Leftarrow$ C مغلقة في (Y , τ_2)

لذلك $\tau_1 \subseteq \tau_2$ بنفس الأسلوب يمكن أن تثبت أن $\tau_2 \subseteq \tau_1$، ولهذا $\tau_1 = \tau_2$. □

7.5.9 نتيجة. ليكن (X , τ) فضاء هوسدورف. فإن (X , τ) صورة متصلة لفضاء كانتور إذا وفقط إذا كان متراص وقابل للقياس. □

أخيراً في هذا الفصل نعود إلى منحنيات مالئة فضاء.

8.5.9 ملاحظة. كل واحد يعتقد أنه أو أنها تعرف ما هو "المنحنى". صورياً يمكن أن نعرف المنحنى في $\mathbb{R}^2$ ليكون هو المجموعة $f[0 , 1]$، حيث f اقتران متصل $f : [0,1] \to R^2$، يظهر بديهياً أن المنحنى ليس له عرض ولذلك له مساحة تساوي صفر. هذا خطأ! في الحقيقة يوجد منحنيات مالئة فضاء، أي أن $f(I)$ له مساحة لا تساوي صفر. في الواقع النظرية التالية تبين أن هناك اقتران متصل وشامل من $[0 , 1]$ إلى فضاء الضرب $[0 , 1] \times [0 , 1]$.

9.5.9 نظرية (بينو Peano) لأي عدد صحيح موجب n، يوجد اقتران متصل وشامل ψ_n من $[0 , 1]$ إلى n– مكعب I^n.

البرهان. بواسطة نظرية 4.5.9 يوجد اقتران متصل وشامل ϕ_n من فضاء كانتور (G , τ) إلى n– مكعب I^n. بما أن (G , τ) يحصل عليه من $[0 , 1]$ بتكرار حذف الثلث الأوسط، نستطيع أن نوسع ϕ_n لاقتران متصل $\psi_n : [0,1] \to I^n$ بتعريف ψ_n ليكون خطي على كل فترة محذوفة، أي، إذا كانت (a , b) واحدة من الفترات المفتوحة المشكلة لـ $[0,1] \setminus G$، فإن ψ_n يعرف على (a , b) على الشكل،

$\psi_n(\alpha a + (1-\alpha)b) = \alpha\, \phi_n(a) + (1-\alpha)\, \phi_n(b)$ حيث $0 \le \alpha \le 1$ من السهل إثبات أن ψ_n متصل. □

نختم هذا الفصل بذكر (ولكن بدون برهان) نظرية هان – مازوركيويكز (Hahn-Mazurkiewicz Theorem) التي تصف فضاءات هوسدورف التي تكون صور متصلة لـ $[0,1]$. (لبرهان النظرية انظر Wilder [223] وصفحة 221 في Kuratowski [140]) ولكن بداية تحتاج لتعريف.

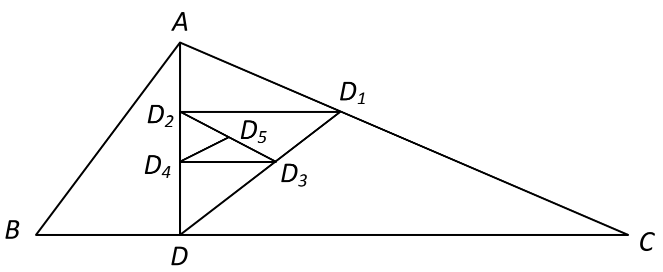
10.5.9 تعريف. الفضاء التبولوجي (X , τ) يسمى مترابط موضعياً (Locally Connected) إذا كان يملك قاعدة مكونة من مجموعات مفتوحة ومترابطة.

11.5.9 ملاحظة. كل فضاء متقطع هو مترابط موضعياً كما هو الحال بالنسبة لـ$\mathbb{R}^n$ وS^n ، لكل $n \geq 1$. على أية حال، ليس كل فضاء مترابط هو مترابط موضعياً. (انظر تمارين 4.8 # 6).

12.5.9 نظرية. (نظرية هان – مازوركيويكز Hahn-Mazurkiewicz Theorem) ليكن (X , τ) فضاء هوسدورف. فإن (X , τ) هو صورة متصلة لـ $[0 , 1]$ إذا وفقط إذا كان متراص، مترابط، قابل للقياس ومترابط موضعياً.

تمارين 5.9

1- لتكن $S \subseteq R^2$ مجموعة نقاط داخل وعلى المثلث ABC الذي يملك زاوية قائمة عند A ويحقق AC > AB. هذا التمرين يوضح تركيب اقتران شامل $f:[0,1] \to S$.



لتكن D على BC حيث AD عمودياً على BC. لتكن $a = .a_1\ a_2\ a_3 ......$ كسر عشري ثنائي بحيث أن a_n هي 0 أو 1. بعد ذلك نركب متتالية (D_n) من نقاط S على النحو التالي: D_1 نقطة تقاطع العمود الواصل من D

إلى الوتر في المثلث الأكبر أو الأصغر من المثلثين ADB ، ADC حسبما $a_1 = 1$ أو $a_1 = 0$ على التوالي. هذا التركيب يكرر الآن باستخدام D_1 بدلاً من D والمثلث المناسب من المثلثين ADB ، ADC بدلاً من ABC. على سبيل المثال، الرسم أعلاه يوضح النقاط D_1 إلى D_5 للكسر العشري الثنائي ...1010. . أعط تعريف استقرائي دقيق للمتتالية (D_n) وأثبت:

(I) المتتالية (D_n) تؤول لنهاية D(a) في S ؛

(II) إذا كانت $\lambda \in [0,1]$ تمثل بكسور عشرية مختلفة a ، a' فإن $D(a) = D(a')$ ، لذلك النقطة $D(\lambda)$ في S تعرف بشكل وحيد ؛

(III) إذا كان $f : [0,1] \to S$ معطى على الشكل $f(\lambda) = D(\lambda)$ فإن f شامل.

(IV) f متصل.

2- ليكن (G , τ) فضاء كانتور وتأمل الاقترانات؛

$$\phi_i : (G, \tau) \to [0,1] \text{ ، } i = 1,2$$

حيث

$$\phi_1 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right] = \frac{a_1}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{2^{n+1}} + \ldots$$

و

$$\phi_2 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \right] = \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \ldots + \frac{a_{2n}}{2^{n+1}} + \ldots$$

(I) أثبت أن ϕ_1 و ϕ_2 متصلان.

(II) أثبت أن الاقتران $a \mapsto (\phi_1(a), \phi_2(a))$ اقتران متصل وشامل من (G, τ) إلى $[0,1] \times [0,1]$.

(III) إذا كانت a و b في (G , τ) و $(a,b) \cap G = \phi$ ، عرف، لكل j = 1,2

$$\phi_j(x) = \frac{b-x}{b-a} \phi_j(a) + x - ab - a \phi_j(b) \text{ ، } a \le x \le b$$

أثبت أن

$$x \mapsto (\phi_1(x), \phi_2(x))$$

اقتران متصل وشامل من $[0,1]$ إلى $[0,1] \times [0,1]$ هي صورة لعلى الأكثر ثلاث نقاط من $[0,1]$.

6.9 خلاصة

في هذا الفصل وسعنا مفهوم ضرب عدد منتهي من الفضاءات التبولوجية إلى ضرب عدد معدود من الفضاءات التبولوجية. في حين أن هذه الخطوة هي خطوة طبيعية ولكنها قادتنا إلى مجموعة غنية من النتائج بعضها مدهش جداً.

أثبتنا أن الضرب المعدود لفضاءات تبولوجية تملك كل منها خاصة p هو كذلك يملك الخاصية p حيث p واحدة من الآتية: (I) فضاء T_o– (II) فضاء T_1– (III) هوسدورف (IV) قابل للقياس (V) مترابط (VI) غير مترابط بالكامل (VII) قابل للعد الثاني. كذلك هي صحيحة إذا كانت p هي متراص وهذه النتيجة هي نظرية تيخونوف للضرب المعدود. برهان نظرية تيخونوف للضرب المعدود لفضاءات قابلة للقياس المعروض هنا مختلف تماماً عن البرهان المعياري الذي يظهر في الفصل القادم. برهاننا يعتمد على فضاء كانتور.

فضاء كانتور عرف بأنه فضاء جزئي معين من [1 , 0] . بعد ذلك تم إثبات أنه هوميومورفك لضرب معدود غير منتهي لفضاءات متقطعة كل منها يحوي عنصرين. فضاء كانتور هو مثال نوعي يولع في إنتاجه رياضيو الرياضيات البحتة من أجل إثبات أن بعض العبارات العامة ليس صحيحة. ولكن ظهر أنه أكثر من ذلك بكثير.

نظرية إليكساندروف – يوريسون تقول أن كل فضاء متراص وقابل للقياس هو صورة لفضاء كانتور. بشكل خاص [0,1] ومكعب هلبرت (ضرب عدد معدود وغير منتهي من نسخ [0,1]) هو صورة متصلة لفضاء كانتور. هذا يقودنا لوجود منحنيات مالئة فضاء – بشكل خاص، نبين أنه يوجد اقتران متصل وشامل من [0,1] إلى المكعب $[0,1]^n$ لكل عدد صحيح موجب n . كتبنا ولكن لم نثبت نظرية هان – مازوركيويكز: فضاء هوسدورف (X , τ) هو صورة لـ [0,1] إذا وفقط إذا كان متراص، مترابط، مترابط موضعياً، وقابل للقياس.

أخيراً نذكر نظرية يوريسون التي تقول أن الفضاء هو انفصالي وقابل للقياس إذا وفقط إذا كان هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت. هذا يثبت أن [0,1] ليس فقط فضاء تبولوجي "جميل" ولكنه "مولد" لصفوف مهمة من الفضاءات الانفصالية القابلة للقياس عن طريق تشكيل فضاءات جزئية وضرب معدود.

الفصل العاشر

نظرية تيخونوف Tychonoff's Theorem

مقدمة:

في الفصل التاسع عرفنا الضرب المعدود غير المنتهي لعائلة من الفضاءات التبولوجية. نكمل الآن لتعريف الضرب لأي عائلة من الفضاءات التبولوجية بتبديل المجموعة $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ بأي مجموعة مفهرسة عشوائية I . النتيجة الرئيسية سوف تكون نظرية تيخونوف العامة.

1.10 تبولوجيا الضرب لكل الضروب

The Product Topology For All Products

1.1.10 تعاريف. لتكن I مجموعة، لكل $i \in I$ ، ليكن (X_i , τ_i) فضاءً تبولوجياً. نكتب العائلة المفهرسة لفضاءات تبولوجية على الشكل $\{(X_i , \tau_i) : i \in I\}$. فإن الضرب (أو الضرب الديكارتي) لعائلة المجموعات $\{X_i : i \in I\}$ يرمز له بالرمز $\prod_{i \in I} X_i$. ويكون من مجموعة كل الاقترانات $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ بحيث أن $f_i = x_i \in X_i$. يرمز للعنصر f في الضرب بالرقم $\prod_{i \in I} X_i$ ونشير لـ $f(i) = x_i$ بالإحداثي رقم i.

إذا كانت $I = \{1,2\}$ فإن $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$ هو مجموعة كل الاقترانات $f : \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$ بحيث أن $f(1) \in X_1$ و $f(2) \in X_2$. التفكير اللحظي يبين أن $\prod_{i \in \{1,2\}} X_i$ هو مجموعة "ايزومورفك" لـ $X_1 \times X_2$. بشكل مشابه إذا كانت $I = \{1, 2, ..., n, ...\}$ فإن $\prod_{i \in I} X_i$ هو "ايزومورفك" لـ تعريفنا السابق $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$.

فضاء الضرب، الذي يرمز له بالرمز $\prod_{i \in I} (X_i , \tau_i)$، يتكون من مجموعة الضرب $\prod_{i \in I} X_i$ مع التبولوجيا τ التي تملك كقاعدة العائلة التالية:

$$\mathfrak{B} = \left\{ \prod_{i \in I} O_i : O_i \in \tau_i \text{ و } O_i = X_i \text{ لكل ما عدا عدد منتهي من } i \right\}$$

التبولوجيا τ تمسى تبولوجيا الضرب (أو تبولوجيا تيخونوف Tychonoff topology).

2.1.10 ملاحظة. على الرغم من أننا عرفنا $\prod_{i \in I} (X_i , \tau_i)$ بطريقة مختلفة عن الطريقة عندما كانت I معدودة غير منتهية أو منتهية يجب أن تكون قادراً على إقناع نفسك بأنه عندما تكون I معدودة غير منتهية أو منتهية التعريف الجديد مكافئ لتعريفنا السابق.

هذا يبين أن عدة نتائج على الضرب المعدود يمكن أن تثبت على الضرب غير المعدود بنفس الأسلوب. سوف نكتب هذه النتائج أدناه. يترك كتمرين للقارئ إثبات هذه النتائج للضرب غير المعدود.

3.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولكل $i \in I$ ، لتكن C_i مجموعة جزئية مغلقة من الفضاء التبولوجي (X_i , τ_i) فإن $\prod_{i \in I} C_i$ مجموعة جزئية مغلقة من $\prod_{i \in I} (X_i , \tau_i)$. □

4.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولتكن $\{(X_i , \tau_i) : i \in I\}$ عائلة من الفضاءات التبولوجية والتي تملك فضاء الضرب $(\prod_{i \in I} X_i , \tau)$. إذا كان لكل $i \in I$ ، $\mathfrak{B}_i$ هي قاعدة لـ τ_i فإن

$$\mathfrak{B}' = \{ \prod_{i \in I} O_i : O_i \in \mathfrak{B}_i \text{ و لكل ما عدا عدد منتهي من } i \quad O_i = X_i \}$$ □

5.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولتكن $\{(X_i , \tau_i) : i \in I\}$ عائلة من الفضاءات التبولوجية والتي تملك فضاء الضرب $(\prod_{i \in I} X_i , \tau)$. لكل $j \in I$ ليكن $P_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ هو اقتران الإسقاط؛ أي أن $P_j : (\prod_{i \in I} x_i) = x_j$ لكل $\prod_{i \in I} x_i \in \prod_{i \in I} X_i$. فإن؛

(I) كل p_j هو اقتران متصل شامل ومفتوح.

(II) τ هي التبولوجيا الأشد على المجموعة $\prod_{i \in I} X_i$ بحيث أن كل p_j هو متصل. □

6.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولتكن $\{(X_i , \tau_i) : i \in I\}$ عائلة من الفضاءات التبولوجية والتي تملك فضاء الضرب $(\prod_{i \in I} X_i , \tau)$. فإن كل (X_i , τ_i) هو هوميومورفك لفضاء جزئي من $\prod_{i \in I} (X_i , \tau_i)$. □

7.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولتكن $\{(X_i , \tau_i) : i \in I\}$ و $\{ (Y_i , \tau_i') : i \in I \}$ عائلتين من الفضاءات التبولوجية. إذا كان $h_i : (X_i , \tau_i) \to (Y_i , \tau_i')$ اقتران متصل لكل $i \in I$ ، فإن $h : \prod_{i \in I} (X_i , \tau_i) \to \prod_{i \in I} (Y_i , \tau_i')$ هو متصل حيث $h(\prod_{i \in I} x_i) = \prod_{i \in I} h_i(x_i)$. □

8.1.10 تمهيدية. لتكن I مجموعة ولتكن $\{(X_i,\tau_i): i\in I\}$ عائلة من الفضاءات التبولوجية و f اقتران من فضاء تبولوجي (Y , τ) إلى $\prod_{i\in I}(X_i,\tau_i)$. فإن f متصل إذا وفقط إذا كان كل اقتران $P_i\ o\ f:(Y,\tau)\to(X_i,\tau_i)$ متصل حيث p_i ، $i\in I$ يشير إلى اقتران الإسقاط الشامل من $\prod_{i\in I}(X_i,\tau_i)$ إلى (X_i,τ_i). ☐

9.1.10 مساندة. (مساندة التضمين The Embedding Lemma) لتكن I مجموعة مفهرسة و $\{(Y_i,\tau_i): i\in I\}$ عائلة فضاءات تبولوجية ولكل $i\in I$، ليكن f_i اقتران من فضاء تبولوجي (X, τ) إلى $(Y_i,\ \tau_i)$. بالإضافة لذلك ليكن $e:(X,\tau)\to\prod_{i\in I}(Y_i,\tau_i)$ هو الاقتران الحسابي؛ أي أن $e(x)=\prod_{i\in I}f_i(x)$ لكل $x\in X$. فإن e هوميومورفزم من (X , τ) إلى الفضاء $(e(x),\tau')$ حيث τ' هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على e (X) إذا كان؛

(I) كل f_i متصل.

(II) العائلة $\{f_i: i\in I\}$ تفصل نقاطاً في X ؛ أي، إذا كانت x_1 و x_2 في X حيث $x_1\neq x_2$ فإنه يوجد $i\in I$ بحيث أن $f_i(x_1)\neq f_i(x_2)$.

(III) العائلة $\{f_i: i\in I\}$ تفصل نقاطاً ومجموعات مغلقة، أي، لكل $x\in X$ ولكل مجموعة جزئية مغلقة A من (X , τ) لا تحوي x يوجد $i\in I$ بحيث أن $f_i(x)\notin\overline{f_i(A)}$. ☐

10.1.10 نتيجة. إذا كان (X , τ) في مساندة 9.1.10 هو فضاء T_1– فإن الشرط (II) يصبح زائداً. ☐

11.1.10 تعاريف. ليكن (X , τ) و (Y,τ') فضائين تبولوجيين. فإننا نقول أن (X , τ) يمكن تضمينه في (Y,τ') إذا وجد اقتران متصل $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ بحيث أن $f:(X,\tau)\to(f(X),\tau'')$ هو هوميومورفزم حيث τ" هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على f(X) من (Y , τ'). الاقتران $f:(X,\tau)\to(Y,\tau')$ يسمى تضمين (embedding).

تمارين 1.10

1- لكل $i \in I$، حيث I مجموعة مفهرسة، ليكن (A_i , τ_i') فضاء جزئي من (X_i , τ_i)

(I) أثبت أن $\prod_{i\in I} (A_i , \tau_i')$ هو فضاء جزئي من $\prod_{i\in I} (X_i , \tau_i)$.

(II) أثبت أن $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$.

(III) أثبت أن $Int(\prod_{i\in I} A_i) \subseteq \prod_{i\in I} (Int(A_i))$

(IV) أعط مثالاً يبين أن المساواة غير متحققة في (III)

2- لتكن J أي مجموعة مفهرسة ولكل $j \in J$ ليكن (G_j , τ_j) فضاء تبولوجي هوميومورفك لفضاء كانتور و I_j فضاء تبولوجي هوميومورفك لـ $[0,1]$. أثبت أن $\prod_{j\in J} I_j$ هو صورة متصلة لـ $\prod_{j\in J} (G_j , \tau_j)$.

3- لتكن $\{(X_j , \tau_j) : j \in J\}$ أي عائلة غير منتهية من الفضاءات الانفصالية القابلة للقياس. أثبت أن $\prod_{j\in J} (X_j , \tau_j)$ هوميومورفك لفضاء جزئي من $\prod_{j\in J} I_j^\infty$ حيث كل I_j^∞ هوميومورفك لمكعب هلبرت.

4- (I) لتكن J أي مجموعة مفهرسة غير منتهية و $\{(X_{i,j} , \tau_{i,j}) : i \in N , j \in J\}$ عائلة من الفضاءات التبولوجية الهميومورفك. أثبت أن؛

$$\prod_{j\in J} \left(\prod_{i\in N} (X_{i,j} , \tau_{i,j}) \right) \cong \prod_{j\in J} (X_{1,j} , \tau_{1,j})$$

(II) لكل $j \in J$ ، حيث J أي مجموعة مفهرسة غير منتهية، ليكن (A_j, τ_j') هو ميومورفك للفضاء المتقطع $\{0,2\}$ و (G_j , τ_j) هوميومورفك لفضاء كانتور. استنتج من (I) أن؛

$$\prod_{j\in J}(A_j,\tau_j') \cong \prod_{j\in J}\left(G_j,\tau_j\right)$$

(III) لكل $j \in J$ ، حيث J أي مجموعة مفهرسة غير منتهية، لتكن I_j هو ميومورفك لـ $[0,1]$ و I_j^∞ هوميومورفك لمكعب هلبرت I^∞. استنتج من (I) أن؛

$$\prod_{j\in J} I_j \cong \prod_{j\in J} I_j^\infty$$

(IV) لتكن J ، I_j ، I_j^∞ و(A_j,τ_j') كما في (II) و(III). أثبت أن $\prod_{j\in J} I_j$ و $\prod_{j\in J} I_j^\infty$ هي صور متصلة لـ $\prod_{j\in J}(A_j,\tau_j')$.

(V) لتكن J و I_j كما في (III). إذا كان، لكل $j \in J$ ، (X_j , τ_j) هو فضاء انفصالي قابل للقياس، استنتج من #3 و(III) أعلاه أن $\prod_{j\in J}\left(X_j,\tau_j\right)$ هو هوميومورفك لفضاء جزئي من $\prod_{j\in J} I_j$.

2.10 مساندة زورن Zorn's Lemma

عملنا القادم هو إثبات نظرية تيخونوف العامة والتي تقول أن أي ضرب لفضاءات متراصة هو متراص على أية حال، لعمل ذلك نحتاج أن نستخدم مساندة زورن والتي تحتاج بعض التحضير.

1.2.10 تعاريف. الترتيب الجزئي (Partial Order) على مجموعة X هو عملية ثنائية، يرمز لها بالرمز $\leq$ ، والتي تملك الخواص:

(I) $x \le x$ ، لكل $x \in X$ (انعكاس)

(II) إذا كان $x \le y$ و $y \le x$ فإن x = y حيث $x, y \in X$ (تماثل تخالفياً)

(III) إذا كانت $x \le y$ و $y \le z$ فإن $x \le z$ حيث $x, y, z \in X$ (تعدي)

المجموعة X مع الترتيب الجزئي $\le$ تسمى مجموعة مرتبة جزئياً (Partially Ordered Set) ويرمز لها بالرمز $(X , \le)$. إذا كانت $x \le y$ و $x \ne y$ فإننا نكتب $x < y$.

2.2.10 أمثلة. النموذج الأصلي للمجموعة المرتبة جزئياً هي مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ مع الترتيب الطبيعي للأعداد الطبيعية.

بنفس الأسلوب المجموعات $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ مع الترتيب الطبيعي تشكل مجموعات مرتبة جزئياً. □

3.2.10 مثال. لتكن $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية ولتكن $\le$ معرفة كما يلي:

$n \le m$ إذا كان n يقسم m

لذلك $3 \le 6$ ولكن $5 \not\le 3$ (يترك كتمرين إثبات أن $\mathbb{N}$ مع هذه العلاقة هي مجموعة مرتبة جزئياً). □

4.2.10 مثال. لتكن X هي صف كل المجموعات الجزئية من المجموعة U . نستطيع أن نعرف ترتيب جزئي على X بوضع

$A \le B$ إذا كانت A مجموعة جزئية من B

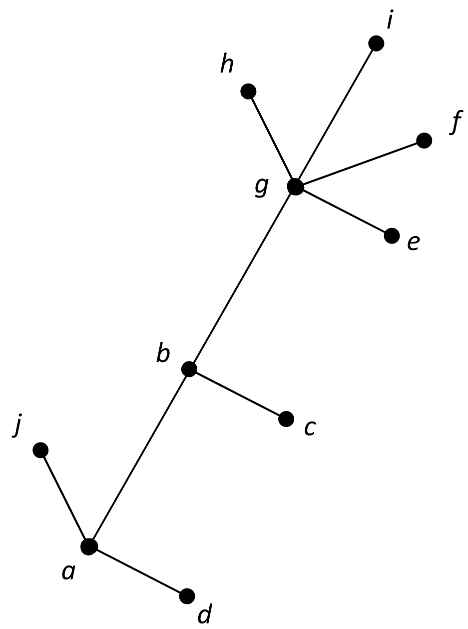
حيث A و B هي في X .

من السهل إثبات أن هذا ترتيب جزئي. □

5.2.10 مثال. لتكن $(X , \le)$ مجموعة مرتبة جزئياً. نستطيع أن نعرف ترتيب جزئي جديد $\le^*$ على X بتعريف؛

$x \le^* y$ إذا كان $y \le x$. □

6.2.10 مثال. هناك طريقة ملائمة لرسم المجموعات المرتبة جزئياً وهذا بواسطة مخطط ترتيب



النقطة x أصغر من نقطة y إذا وفقط إذا كنا نستطيع الذهاب من x إلى y بالتحركة للأعلى على خطوط واصلة. لذلك في مخطط الترتيب الذي لدينا؛

$a < b , a < g , a < h , a < i , a < j , a < f , b < g , b < h ,$

$b < i , b < f , c < b , c < f , c < g , c < h , c < i , d < a ,$

$d < b , d < g , d < f , d < i , d < j , e < f , e < g , e < b ,$

$e < i , f < g , f < h , g < h , g < i$

على أية حال $c \not\leq d$ ، $d \leq c$ ، $f \not\leq e$ ، $c \not\leq f$ إلى آخره. □

7.2.10 تعريف. يقال أن النقطتان x و y في المجموعة المرتبة جزئياً $(X , \leq)$ قابلان للمقارنة (Comparable) إذا كان $x \leq y$ أو $y \leq x$.

8.2.10 ملاحظة. شاهدنا في مخطط الترتيب أعلاه أن العناصر d و c غير قابلان للمقارنة. كذلك e و f غير قابلان للمقارنة.

في $\mathbb{N}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ مع الترتيب الطبيعي كل نقطتين هما قابلتان للمقارنة.

في مثال 4.2.10, 3 و 5 غير قابلان للمقارنة. □

9.2.10 تعاريف. المجموعة المرتبة جزئياً $(X , \leq)$ تسمى مرتبة خطياً (Linearly Ordered) إذا كان كل عنصرين قابلان للمقارنة. الترتيب $\leq$ يسمى ترتيب خطي (Linear Order).

10.2.10 أمثلة. الترتيب الطبيعي على $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ هو ترتيب خطي.

الترتيب الجزئي في مثال 4.2.10 ليس ترتيب خطي (إذا كانت U تملك على الأقل نقطتين). □

11.2.10 تعريف. لتكن $(X , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. فإن العنصر $s \in X$ يسمى العنصر الأعظم (The Greatest element) للمجموعة X إذا كان $x \leq s$ ، لكل $x \in X$.

12.2.10 تعريف. لتكن $(X , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً و Y مجموعة جزئية من X. العنصر $t \in X$ يسمى حد أعلى (Upper bound) للمجموعة Y إذا كان $y \leq t$ ، لكل $y \in Y$.

من المهم أن نلاحظ أن الحد الأعلى للمجموعة Y ليس بالضرورة أن يكون في Y.

13.2.10 تعريف. لتكن $(X , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً. العنصر $w \in X$ يسمى عنصر أكبر (Maximal) إذا كان $w \leq x$ ، حيث $x \in X$ ، يعطي أن $w = x$.

14.2.10 ملاحظة. من المهم أن نميز بين العنصر الأكبر والعنصر الأعظم. تأمل مخطط الترتيب في مثال 6.2.10 . ليس هناك عنصر أعظم ! على الرغم من ذلك j ، h ، i و f كل منها عنصر أكبر. □

15.2.10 ملاحظة. يمكننا الآن كتابة مساندة زورن. على الرغم من كلمة "مساندة" أنها بالحقيقة مسلمة ولا نستطيع إثباتها. إنها مكافئة للمسلمات الأخرى المختلفة في نظرية المجموعات مثل مسلمة الاختيار ونظرية الترتيب الحسن. [انظر على سبيل المثال Halmos [96] أو Wilder [223]]. سوف نعتبر مساندة زورن كواحدة من المسلمات في نظرية المجموعات ولذلك سنستخدمها أينما رغبنا.

16.2.10 مسلمة. (مساندة زورن Zorn's Lemma) لتكن $(X , \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً غير خالية والتي فيها كل المجموعات الجزئية المرتبة خطياً تملك حد أعلى. فإن $(X , \leq)$ تملك عنصر أكبر.

17.2.10 مثال. دعنا نطبق مساندة زورن على المخطط الشبكي في مثال 6.2.10. هناك العديد من المجموعات الجزئية المرتبة خطياً:

$\{i,g,b,a\},\{g,b,a\},\{b,a\},\{g,b\},\{i,g\},\{a\},\{b\},$
$\{g\},\{i\},\{i,b,a\},\{i,g,a\},\{i,a\},\{g,a\},\{h,g,e\},$
$\{h,e\},\{g,e\}, ...$

كل من هذه المجموعات له حد أعلى ...., i , i , i , i , i , i , i , i , i , i , i , i , i , i , h , h , h ,....

مساندة زورن تقول أن هناك عنصر أكبر. في الحقيقة هناك 4 عناصر أكبر i , f , h , j . ☐

تمارين 2.10

1- لتكن $X=\{a,b,c,d,e,f,u,v\}$. ارسم مخطط الترتيب للمجموعة المرتبة جزئياً $(X , \leq)$ حيث.

$v<a\ ,\ v>b\ ,\ v<c\ ,\ v<d\ ,\ v<e\ ,\ v<f\ ,\ v<u\ ,$
$a<c\ ,\ a<d\ ,\ a<e\ ,\ a<f\ ,\ a<u\ ,$
$b<c\ ,\ b>d\ ,\ b<e\ ,\ b<f\ ,\ b<u\ ,$
$c<d\ ,\ c<e\ ,\ c<f\ ,\ c<u\ ,$
$d<e\ ,\ d<f\ ,\ d<u\ ,$
$e<u\ ,\ f<u\ .$

2- في مثال 3.2.10 ، حدد أي من المجموعات الجزئية من $\mathbb{N}$ التالية هي مرتبة خطياً:

(أ) { 21, 3, 7 } ؛
(ب) { 3, 6, 15 } ؛
(ج) { 2, 6, 12, 72 } ؛
(د) { 1, 2, 3, 4, 5, … } ؛

(ه) $\{5\}$.

3- لتكن $(X, \le)$ مجموعة مرتبة خطياً. إذا كان كل من x و y عنصر أكبر لِـ X ، أثبت أن $x=y$.

4- لتكن $(X, \le)$ مجموعة مرتبة جزئياً. إذا كان كل من x و y عنصر أعظم لِـ X ، أثبت أن $x=y$.

5- لتكن $X=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ مرتبة جزئياً كما يلي:

$x \le y$ إذا كانت y من مضاعفات x .

ارسم مخطط ترتيب وأوجد كل العناصر الأكبر لـ $(X, \le)$. هل $(X, \le)$ تملك عنصر أعظم.

6- باستخدام مساندة زورن أثبت أن كل فضاء متجه V يملك قاعدة.

[مساعدات: (I) تأمل أولاً الحالة $V=\{0\}$.

(II) افرض أن $V \ne \{0\}$ وعرِّف

$\mathfrak{B}=\{B : V$ مجموعة من المتجهات المنفصلة خطياً في $B\}$

أثبت أن $\mathfrak{B} \ne \phi$.

(III) عرِّف ترتيب جزئي $\le$ على $\mathfrak{B}$ على الشكل

$B_1 \le B_2$ إذا كان $B_1 \subseteq B_2$

اجعل $\{B_i : i \in I\}$ أي مجموعة جزئية مرتبة خطياً في $\mathfrak{B}$. أثبت أن $A=\bigcup_{i\in I} B_i$ هي مجموعة من المتجهات المنفصلة خطياً في V .

(IV) استنتج أن $A \in \mathfrak{B}$ وكذلك هي حد أعلى للمجموعة $\{B_i : i \in I\}$.

(V) طبق مساندة زورن لإثبات وجود عنصر أكبر لـ $\mathfrak{B}$.

أثبت أن هذا العنصر الأكبر هو قاعدة لـ V .]

3.10 نظرية تيخونوف Tychonoff's Theorem

1.3.10 تعريف. لتكن X مجموعة و $\mathcal{F}$ عائلة مجموعات جزئية من X . فإن $\mathcal{F}$ يقال أنها تملك خاصية التقاطع المنتهي (Finite Interesction Property) إذا كان لكل عدد منتهي $F_1, F_2, \ldots, F_n$ من عناصر $\mathcal{F}$ ، $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n \neq \phi$.

2.3.10 تمهيدية. ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً. فإن (X , τ) متراص إذا وفقط إذا كانت كل عائلة $\mathcal{F}$ من المجموعات الجزئية المغلقة في X مع خاصية التقاطع المنتهي تحقق $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

البرهان. افرض أن كل عائلة $\mathcal{F}$ من المجموعات الجزئية المغلقة في X مع خاصية التقاطع المنتهي تحقق $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. لتكن $\mathcal{U}$ غطاء مفتوح لـ X .

اجعل $\mathcal{F}$ تساوي عائلة كل متممات عناصر $\mathcal{U}$. لذلك كل $F \in \mathcal{F}$ هي مغلقة في (X , τ). بما أن $\mathcal{U}$ هي غطاء مفتوح لـ X ، $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$. حسب الفرض نستنتج أن $\mathcal{F}$ لا تملك خاصية التقاطع المنتهي. لذلك يوجد $F_1, F_2, \ldots, F_n$ في $\mathcal{F}$ بحيث أن $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n = \phi$.

لذلك $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_n = X$ حيث $U_i = X \setminus F_i$ ، i = 1, ….. , n .

مما يعني أن $\mathcal{U}$ تملك غطاء جزئياً منتهياً. لذلك (X , τ) متراص.

الاتجاه الآخر يثبت بنفس الأسلوب. □

3.3.10 مساندة. لتكن X مجموعة و $\mathcal{F}$ عائلة من المجموعات الجزئية من X مع خاصية التقاطع المنتهي. إذا يوجد عائلة أكبر من المجموعات الجزئية من X تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي.

البرهان. لتكن Z مجموعة كل عائلات المجموعات الجزئية من X التي تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي. عرف ترتيب جزئي $\leq$ على Z كما يلي: إذا كانت $\mathcal{F}_1$ و $\mathcal{F}_2$ في Z فضع $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$ إذا كان $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$.

لتكن Y أي مجموعة جزئية مرتبة خطياً في Z . لتطبيق مساندة زورن نحتاج لإثبات أن Y تملك حد أعلى. ندعي أن $\bigcup_{\gamma\in Y} \gamma$ هو حد أعلى لـ Y. واضح أن هذه تحوي $\mathcal{F}$ لذلك يجب أن نبين فقط أنها تملك خاصية التقاطع المنتهي. لذلك اجعل $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \bigcup_{\gamma\in Y} \gamma$.

إذا كل $S_i \in \gamma_i$ لبعض $\gamma_i \in Y$. بما أن Y مرتبة خطياً واحدة من γ_i تحوي كل البقية. لذلك S_1 , S_2 , … , S_n جميعها تنتمي لتلك الـ γ_i. بما أن γ_i تملك خاصية التقاطع المنتهي، $S_1 \cap S_2 \cap .... \cap S_n \neq \phi$. لذلك $\bigcup_{\gamma \in Y} \gamma$ تملك خاصية التقاطع المنتهي وهي لذلك حد أعلى في X لـ Y.

بواسطة مساندة زورن، Z تملك عنصر أكبر. □

نستطيع الآن إثبات نظرية تيخونوف الأكثر شمولية وتعميماً.

4.3.10 نظرية. (نظرية تيخونوف Tychonoff's Theorem) لتكن $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ أي عائلة من الفضاءات التبولوجية. $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ هو متراص إذا وفقط إذا كان كل من (X_i, τ_i) هو متراص.

البرهان. سوف نستخدم تمهيدية 2.3.10 لإثبات أن $(X, \tau) = \prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ هو متراص إذا كان كل من (X_i, τ_i) متراص. لتكن $\mathcal{F}$ أي عائلة من المجموعات الجزئية المغلقة في X مع خاصية التقاطع المنتهي. يجب أن نثبت أن $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$.

بواسطة مساندة 3.3.10 يوجد عائلة أكبر $\mathcal{H}$ من (ليس بالضرورة مغلقة) المجموعات الجزئية من (X , τ) تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي. سوف نثبت أن $\bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{H} \neq \emptyset$ والتي منها ينتج النتيجة المطلوبة $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ لأن كل $F \in \mathcal{F}$ هي مغلقة.

بما أن $\mathcal{H}$ كبرى مع خاصية أنها تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي، إذا كانت $H_1, H_2, ..., H_n$ عناصر في $\mathcal{H}$ لأي $n \in \mathbb{N}$ فإن المجموعة $H' = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n \in \mathcal{H}$. افرض أن هذا ليس صحيحاً. فإن المجوعة $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup \{H'\}$ سوف تحوي $\mathcal{H}$ وتملك خاصية أنها تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي. وهذا يناقض كون $\mathcal{H}$ هي كبرى.

لذلك $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$ و $H' = H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_n \in \mathcal{H}$.

لتكن S أي مجموعة جزئية من X والتي تتقاطع مع كل عنصر في $\mathcal{H}$ بغير ϕ. ندعي أن $\mathcal{H} \cup \{S\}$ تملك خاصية التقاطع المنتهي. لرؤية ذلك لتكن H'_1 , H'_2 , … , H'_m عناصر في $\mathcal{H}$. سوف نبين أن $S \cap H'_1 \cap H'_2 \cap ... \cap H'_m \neq \phi$. بواسطة الفقرة السابقة $H'_1 \cap H'_2 \cap ... \cap H'_m \in \mathcal{H}$. لذلك بالفرض $S \cap (H'_1 \cap H'_2 \cap ... \cap H'_m) \neq \phi$. وهذا يعني أن $\mathcal{H} \cup \{S\}$ تملك خاصية التقاطع المنتهي وتحوي $\mathcal{F}$. مرة أخرى باستخدام حقيقة أن $\mathcal{H}$ كبرى مع خاصية أنها تحوي $\mathcal{F}$ وتملك خاصية التقاطع المنتهي، نرى أن $S \in \mathcal{H}$.

ثبت $i \in I$ واجعل $p_i:\prod_{i\in I}(X_i,\tau_i)\to(X_i,\tau_i)$ هو اقتران الإسقاط. فإن العائلة $\{p_i(H): H \in \mathcal{H}\}$

تملك خاصية التقاطع المنتهي. لذلك العائلة $\{\overline{p_i(H)}: H \in \mathcal{H}\}$ تملك خاصية التقاطع المنتهي. بما أن (X_i , τ_i) متراص، $\cap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)} \neq \emptyset$. لذلك اجعل $x_i \in \cap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)}$. إذاً لكل $i \in I$، نستطيع أن نجد نقطة $x_i \in \cap_{H\in\mathcal{H}} \overline{p_i(H)}$. اجعل $x=\prod_{i\in I} x_i \in X$.

سوف نثبت أن $x \in \cap_{H\in\mathcal{H}}\overline{(H)}$. لتكن O أي مجموعة مفتوحة تحوي x . فإن O تحوي مجموعة مفتوحة قاعدية حول x على الشكل $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)$ حيث $U_i\in\tau_i$ ، $x_i\in U_i$ و J مجموعة جزئية منتهية من I . بما أن $x_i \in \overline{p_i(H)}$، $U_i\cap p_i(H)\neq\phi$، لكل $H\in\mathcal{H}$. لذلك $p_i^{-1}(U_i)\cap H\neq\phi$ لكل $H\in\mathcal{H}$. بالملاحظة أعلاه، هذا يعطي أن $p_i^{-1}(U_i)\in\mathcal{H}$ ، لكل $i \in J$. بما أن $\mathcal{H}$ تملك خاصية التقاطع المنتهي، $\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_i)\cap H\neq\phi$، لكل $H\in\mathcal{H}$. لذلك $O\cap H\neq\phi$ لكل $H\in\mathcal{H}$. وهذا يعني أن $x \in \cap_{H\in\mathcal{H}}\overline{(H)}$، كما هو مطلوب.

بالمقابل، إذا كان $\prod_{i\in J}(X_i,\tau_i)$ متراص فباستخدام تمهيديات 1.2.7 و 5.1.10 (I) كل من (X_i,τ_i) هو متراص. □

5.3.10 ترميز. لتكن A أي مجموعة ولكل $a \in A$ ليكن الفضاء التبولوجي (I_a , τ_a) هوميومورفك لـ [0,1]. فإن فضاء الضرب $\prod_{a\in A}(I_a,\tau_a)$ يرمز له بالرمز I^A ويشار إليه كمكعب.

لاحظ أن $I^{\mathbb{N}}$ هو مكعب هلبرت والذي كذلك نرمز له بالرمز I^{∞}.

6.3.10 نتيجة. لأي مجموعة A ، المكعب I^A متراص. □

7.3.10 تمهيدية. ليكن (X , d) فضاء متري. فإنه هوميومورفك لفضاء جزئي من المكعب I^X.

البرهان. بدون فقدان التعميم افرض أن $d(a,b)\le 1$ لكل a و b في X . لكل $a \in X$ ليكن f_a اقتران متصل من (X,d) إلى [0,1] معطى على الشكل:

$$f_a(x)=d(x,a).$$

يمكن بسهولة إثبات أن العائلة $\{f_a : a \in X\}$ تفصل نقاط ومجموعات مغلقة (انظر برهان نظرية 11.4.9). لذلك، بواسطة نتيجة 10.1.10 لمساندة التضمين، (X , d) هوميومورفك لفضاء جزئي من المكعب I^X . □

هذا يقودنا للسؤال: أي الفضاءات التبولوجية هوميومورفك لفضاءات جزئية من مكعبات؟ الآن سوف نوجه هذا السؤال.

8.3.10 تعاريف. ليكن (X , τ) فضاءً تبولوجياً. (X , τ) يسمى منتظم تماماً (Completely Regular) إذا كان لكل $x \in X$ ولكل مجموعة مفتوحة U حيث $x \in U$ يوجد اقتران متصل $f:(X,\tau)\to[0,1]$ بحيث أن $f(x)=0$ و $f(y)=1$ لكل $y\in X/U$.

إذا كان (X , τ) كذلك هوسدورف فإنه يسمى فضاء تيخونوف (Tychonoff space) أو فضاء $-T_{3\frac{1}{2}}$.

9.3.10 تمهيدية. ليكن (X , τ) فضاء متري و τ التبولوجيا المحدثة على X بواسطة d. فإن (X , τ) هو فضاء تيخونوف.

البرهان. لتكن $a \in X$ و U أي مجموعة مفتوحة تحوي a . فإن U تحوي كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطرها ε، لبعض $\varepsilon > 0$. عرف $f:(X,d) \to [0,1]$ على الشكل:

$$f(x) = \min\left\{1, \frac{d(x,a)}{\varepsilon}\right\}\text{، حيث } x \in X .$$

إذا f متصل ويحقق f(a) = 0 و f(y) = 1 لكل $y \in X \setminus U$. بما أن (X , d) هو كذلك هوسدورف فإنه فضاء تيخونوف. □

10.3.10 نتيجة. الفضاء [0, 1] هو فضاء تيخونوف. □

11.3.10 تمهيدية. إذا كانت $\{(X_i,\tau_i): i \in I\}$ أي عائلة من الفضاءات المنتظمة تماماً، فإن $\prod_{i\in I}(X_i,\tau_i)$ منتظم تماماً.

البرهان. لتكن $a = \prod_{i\in I} a_i \in \prod_{i\in I} X_i$ و U أي مجموعة مفتوحة تحوي a . إذاً يوجد مجموعة جزئية منتهية J من I ومجموعات $U_i \in \tau_i$ بحيث أن

$$a \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq U .$$

حيث $U_i = X_i$ لكل $i \in I \setminus J$. بما أن (X_i, τ_i) منتظم تماماً لكل $j \in J$، يوجد اقتران متصل $f_j : (X_j, \tau_j) \to [0,1]$ بحيث أن $f_j(a_j) = 0$ و $f_j(y) = 1$، لكل $y \in X_j \setminus U_j$. إذاً $f_j o p_j : \prod_{i \in I} (X_i, \tau_i) \to [0,1]$، حيث $\mathrm{p_i}$ يرمز إلى الإسقاط الشامل من $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ إلى (X_i, τ_i).

إذا جعلنا $f(x) = \max\{ f_j o p_j(x) : j \in J \}$، لكل $x \in \prod_{i \in I} X_i$، فإن $f : \prod_{i \in I} (X_i, \tau_i) \to [0,1]$ متصل (بما أن J منتهية). بالإضافة لذلك، $f(a) = 0$ في حين أن $f(y) = 1$ لكل $y \in X \setminus U$. لذلك $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ هو منتظم تماماً. □

التمهيدية التالية يمكن إثباتها بسهولة ولذلك برهانها ترك كتمرين.

12.3.10 تمهيدية. إذا كانت $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ هي أي عائلة من فضاءات هوسدورف فإن $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ هو فضاء هوسدورف.

البرهان. تمرين. □

13.3.10 نتيجة. إذا كانت $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ هي أي عائلة من فضاءات تيخونوف فإن $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$ هو فضاء تيخونوف. □

14.3.10 نتيجة. لأي مجموعة X ، المكعب I^X هو فضاء تيخونوف. □

15.3.10 تمهيدية. كل فضاء جزئي من فضاء منتظم تماماً هو منتظم تماماً.

البرهان. تمرين. □

16.3.10 نتيجة. كل فضاء جزئي من فضاء تيخونوف هو فضاء تيخونوف.

البرهان. تمرين. □

17.3.10 تمهيدية. إذا كان (X , τ) أي فضاء تيخونوف فإنه هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب.

البرهان. لتكن $\mathcal{F}$ عائلة كل الاقترانات المتصلة $f:(X,\tau)\to[0,1]$. إذاً يتبع بسهولة من نتيجة 10.1.10 لمساندة التضمين ومن تعريف منتظم تماماً، إن الاقتران الحسابي $e:(X,\tau)\to I^J$ هو تضمين. □

لذلك لدينا الآن وصف للفضاءات الجزئية من المكعبات. بوضع تمهيدية 17.3.10 والنتائج 14.3.10 و16.3.10 معاً نحصل على:

18.3.10 تميهدية. الفضاء التبولوجي (X , τ) يمكن أن يضمن في مكعب إذا وفقط إذا كان فضاء تيخونوف. □

19.3.10 ملاحظة. الآن نكمل لنبين أن صف فضاءات تيخونوف هو فعلاً كبير وبشكل خاص يشمل كل فضاءات هوسدورف المتراصة.

20.3.10 تعاريف. الفضاء التبولوجي (X , τ) يسمى فضاء طبيعي (Normal Space) إذا كان لكل زوج من المجموعات المغلقة المنفصلة A و B ، يوجد مجموعات مفتوحة U وV بحيث أن $A\subseteq U$, $B\subseteq V$ و $U\cap V=\phi$. الفضاء الطبيعي الذي يكون كذلك هوسدورف يسمى فضاء T_4–.

21.3.10 ملاحظة. في تمارين 1.6 #9 يلاحظ أن كل فضاء قابل للقياس هو فضاء طبيعي. فيما بعد سوف نبين أن كل فضاء هوسدورف ومتراص هو طبيعي. أولاً سوف نثبت أن كل فضاء هوسدورف وطبيعي هو فضاء تيخونوف (أي أن كل فضاء T_4– هو فضاء – $T_{3\frac{1}{2}}$).

22.3.10 نظرية. (مساندة يوريسون Urysohn's Lemma) ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً. فإن (X,τ) فضاء طبيعي إذا وفقط إذا كان لكل زوج من المجموعات المغلقة المنفصلة A و B في (X,τ) يوجد اقتران متصل $f:(X,\tau)\rightarrow[0,1]$ بحيث أن $f(a)=0$ لكل $a\in A$، و $f(b)=1$ لكل $b\in B$.

البرهان. افرض أن لكل A و B يوجد اقتران f مع الخاصية المذكورة أعلاه. فإن $U=f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ و $V=f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ مفتوحة في (X,τ) وتحقق $A\subseteq U$، $B\subseteq V$ و $A\cap B=\varnothing$. لذلك (X,τ) طبيعي.

بالمقابل، افرض أن (X,τ) طبيعي. سوف نكون عائلة $\{U_i=i\in D\}$ من المجموعات الجزئية المفتوحة في X، حيث المجموعة D تعطى على الشكل $D=\left\{\frac{k}{2^n}:k=1,2,\ldots,2^n,n\in N\right\}$.

لذلك D هي مجموعة أعداد نسبية ثنائية، بحث أن $A\subseteq U_i$، $U_i\cap B=\phi$ وإذا كان $d_1\subseteq d_2$ فإن $U_{d1}\subseteq U_{d2}$. بما أن (X,τ) طبيعي، لأي زوج A ، B من المجموعات المغلقة المنفصلة، يوجد مجموعات مفتوحة منفصلة $U_{\frac{1}{2}}$ و $V_{\frac{1}{2}}$ بحيث $A\subseteq U_{\frac{1}{2}}$ و $B\subseteq U_{\frac{1}{2}}$. لذلك لدينا $A\subseteq U_{\frac{1}{2}}\subseteq V_{\frac{1}{2}}^C\subseteq B^C$ حيث الرمز C يستخدم للدلالة على المتممة في X (أي أن $V_{\frac{1}{2}}^C=X\setminus V_{\frac{1}{2}}$ و $B^C=X\setminus B$).

الآن تأمل المجموعات المغلقة المنفصلة A و $U_{\frac{1}{2}}^C$. مرة أخرى لأن (X,τ) طبيعي يوجد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين $U_{\frac{1}{4}}$ و $V_{\frac{1}{4}}$ بحيث أن $A\subseteq U_{\frac{1}{4}}$ و $U_{\frac{1}{2}}^C\subseteq V_{\frac{1}{4}}$. كذلك بما أن $V_{\frac{1}{2}}^C$ و B مجموعتين مغلقتين ومنفصلتين يوجد مجموعتين مفتوحتين منفصلتين $U_{\frac{3}{4}}$ و $V_{\frac{3}{4}}$ بحيث $V_{\frac{1}{2}}^C\subseteq U_{\frac{3}{4}}$ و $B\subseteq V_{\frac{3}{4}}$. لذلك لدينا $A\subseteq U_{\frac{1}{4}}\subseteq V_{\frac{1}{4}}^C\subseteq U_{\frac{1}{2}}\subseteq V_{\frac{1}{2}}^C\subseteq U_{\frac{3}{4}}\subseteq V_{\frac{3}{4}}^C\subseteq B^C$. بالاستمرار عن طريق الاستقراء نحصل على مجموعات مفتوحة U_d و V_d لكل $d\in D$ بحيث أن

$A\subseteq U_{2^{-n}}\subseteq V_{2^{-n}}^C\subseteq U_{2.2^{-n}}\subseteq V_{2.2^{-n}}^C\subseteq\ldots\subseteq U_{(2^n-1)2^{-n}}\subseteq V_{(2^{n-1})2^{-n}}^C\subseteq B^C$.

لذلك لدينا، بشكل خاص، لأي $d_1 \le d_2$ في D، $U_{d1} \subseteq U_{d2}$.

الآن نعرّف $f:(X,\tau)\to[0,1]$ على الشكل $f(x)=\begin{cases}\inf\{d:x\in U_d\}, if x\in \bigcup_{d\in D} U_d\\ 1, if x\notin \bigcup_{d\in D} U_d\end{cases}$

لاحظ أخيراً أنه بما أن $A\subseteq U_d$ لكل d∈D فإن $f(a)=0$ لكل a∈A. وكذلك إذا كانت b∈B فإن $b\notin \bigcup_{d\in D} U_d$ ولذلك f(b)=1. لذلك يجب أن نبين فقط أن f متصل.

ليكن f(x)=y، حيث y≠0,1 واجعل W=(y-ε,y+ε)، لبعض ε > 0 (حيث 0<y-ε <y+ε<1). بما أن D كثيفة في [0,1] تستطيع أن تختار d_0 و d_1 بحيث أن $y-\varepsilon \le d_0 \le y \le d_1 \le y_0+\varepsilon$.

بواسطة تعريف f لدينا $x\in U=U_{d_1}\setminus \overline{U_{d_0}}$ والمجموعة المفتوحة U تحقق $f(U)\subseteq W$. إذا كان y=1 نجعل W=(y-ε,1]، اختار d_0 بحيث أن $y-\varepsilon<d_0<1$ واجعل $U=x\setminus \overline{U}_{d_0}$. مرة أخرى $f(U)\subseteq W$. أخيراً، إذا كانت y=0 اجعل W=[0,y+ε) اختار d_1 بحيث أن $0<d_1<y+\varepsilon$ واجعل $U=U_{d1}$ لتحصل مرة أخرى على $f(U)\subseteq W$. لذلك f متصل. □

23.3.10 نتيجة. إذا كان (X,τ) فضاء هوسدورف وطبيعي فإنه فضاء تيخونوف؛ أي أن كل فضاء $T_{4'}$- هو فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$. لذلك هو هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب. □

24.3.10 تمهيدية. كل فضاء هوسدورف ومتراص (X,τ) هو طبيعي. □

البرهان. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين منفصلتين في (X,τ). ثبت b∈B. بما أن (X,τ) هوسدورف، لكل a∈A يوجد مجموعتين مفتوحتين U_a و V_a بحيث أن $a\in U_a$ ، $b\in V_a$ و $U_a\cap U_a=\phi$. لذلك $\{U_a : a\in A\}$ هو غطاء مفتوح للمجموعة A. بما أن A متراصة، يوجد غطاء جزئي منتهي $U_{a1},U_{a2},\ldots,U_{an}$ اجعل $U_b=U_{a1}\cup U_{a2}\cup\ldots\cup U_{an}$ و $V_b=V_{a1}\cap V_{a2}\cap\ldots\cap V_{an}$. بذلك يصبح لدينا $A\subseteq U_b$ ، $b\in V_b$ و $U_b\cap V_b=\phi$. الآن اجعل b تتغير على B لذلك نحصل على غطاء مفتوح $\{V_b : b\in B\}$ للمجموعة B. بما أن B متراصة, يوجد غطاء جزئي $V_{b1},V_{b2},\ldots,V_{bm}$. اجعل

$V = V_{b1} \cup V_{b2} \cup \ldots \cup V_{bm}$ و $U = U_{b1} \cap U_{b2} \cap \ldots \cap U_{bm}$. وبذلك يصبح لدينا A⊆U, B⊆V و $U \cap V = \phi$. لذلك (X,τ) هو طبيعي.

25.3.10 نتيجة. كل فضاء هوسدورف ومتراص يمكن تضمينه في مكعب. □

26.3.10 ملاحظة. نستطيع الآن إثبات نظرية يوريسون للقياس والتي تزودنا بالشرط الكافي ليكون الفضاء التبولوجي قابلاً للقياس. وهي كذلك تزودنا بالشرط الضروري والكافي ليكون الفضاء المتراص قابلاً للقياس – أي أن يكون هوسدورف وقابل للعد الثاني.

27.3.10 تعاريف. الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى منتظم (regular) إذا كان لكل x∈X ولكل U∈τ حيث x∈U يوجد V∈τ حيث $x \in \overline{V} \subseteq U$. إذا كان (X,τ) هو كذلك هوسدورف فإنه يسمى فضاء T_{3}-.

28.3.10 ملاحظة. من السهولة إثبات أن كل فضاء $T_{3\frac{1}{2}}$- هو فضاء T_{3}-. لذلك من نتيجة 23.3.10، كل فضاء T_{4}- هو فضاء T_{3}-. في الحقيقة لدينا السلسلة:

$$\text{هوسدورف متراص} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

$$\text{قابل للقياس} \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$ □

29.3.10 تمهيدية. كل فضاء هوسدورف طبيعي وقابل للعد الثاني (X,τ) هو قابل للقياس.

البرهان. يكفي أن نبين أن (X,τ) يمكن تضمينه في مكعب هلبرت I^{∞}. بواسطة نتيجة 10.4.9، لإثبات ذلك يكفي أن نجد عائلة معدودة من الاقترانات المتصلة من (X,τ) إلى [0,1] والتي تفصل نقاطاً ومجموعات مغلقة.

لتكن $\mathfrak{B}$ قاعدة معدودة لـ τ، وتأمل المجموعة $\mathcal{S}$ المكونة من كل الأزواج (V,U) بحيث أن $U\in\mathcal{S}$ ، $V\in\mathfrak{B}$ و $\overline{V}\subseteq U$. إذا $\mathcal{S}$ هي معدودة. لكل زوج (V,U) في $\mathcal{S}$ نستطيع، باستخدام مساندة يوريسون، أن نجد اقتران متصل $f_{VU}:(X,\tau)\to[0,1]$ بحيث أن $f_{VU}:(\overline{V})=0$ و $f_{VU}:(X\setminus U)=1$. اجعل $\mathcal{F}$ تساوي عائلة كل الاقترانات، f، التي حصلنا عليها. إذا $\mathcal{F}$ معدودة.

لمشاهدة أن $\mathcal{F}$ تفصل نقاطاً ومجموعات مغلقة، اجعل $x\in X$ و W مجموعة مفتوحة تحوي x. اذا يوجد $U\in\mathfrak{B}$ بحيث ان $x\in U\subseteq W$. بواسطة ملاحظة 28.3.10، (X,τ) هو منتظم ولذلك يوجد مجموعة $P\in\tau$ بحيث أن $x\in P\subseteq\overline{P}\subseteq U$. لذلك يوجد $V\in\mathfrak{B}$ حيث $x\in V\le P$. وهذا يعني أن $x\in\overline{V}\subseteq\overline{P}\subseteq U$. إذا $(V,U)\in\mathcal{S}$ وإذا كان f_{VU} هو الاقتران المرتبط مع هذا الزوج في $\mathcal{F}$ ، فإن $f_{VU}(x)=0\notin\{1\}=\overline{f_{VU}(X\setminus W)}$. □

30.3.10 مساندة. كل فضاء منتظم وقابل للعد الثاني (X,τ) هو طبيعي.

البرهان. لتكن A و B مجموعتين جزئيتين مغلقتين في (X,τ) و $\mathfrak{B}$ قاعدة معدودة لـ τ. بما أن (X,τ) منتظم و X\B مجموعة مفتوحة، لكل $a\in A$ يوجد $V_a\in\mathfrak{B}$ بحيث $\overline{V_a}\subseteq X\setminus B$.

بما أن $\mathfrak{B}$ معدودة نستطيع أن نرقم العناصر $\{V_a : a\in A\}$ التي حصلنا عليها على الشكل V_i، $i\in\mathbb{N}$ ؛ أي أن $A\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}V_i$ و $\overline{V}_i\cap B=\phi$ لكل $i\in\mathbb{N}$.

بنفس الأسلوب نستطيع أن نجد مجموعات U_i في $\mathfrak{B}$ ، $i\in\mathbb{N}$ ، بحيث أن $B\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ و $\overline{U}_i\cap A=\phi$ ، لكل $i\in\mathbb{N}$.

الآن عرِّف $U_1'=U_1\setminus\overline{V_1}$ و $V'_1=V_1\setminus\overline{U_1}$

لذلك $U_1'\cap V'_1=\phi$ ، $U_1'\in\tau$ ، $V'_1\in\tau$ ، $U_1'\cap B=U_1\cap B$ و $V_1'\cap A=V_1\cap A$

لذلك نستطيع استقرائيا أن نعرف

$$U'_n=U_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{V_i} \quad \text{و} \quad V_n'=V_n\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\overline{U_i}$$

بحيث أن $U'_n \in \tau$ ، $V'_n \in \tau$ ، $U'_n \cap B = U_n \cap B$ و $V'_n \cap A = V_n \cap A$

الآن اجعل $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n$ و $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V'_n$.

إذا $U \cap V = \phi$ ، $U \in \tau$ ، $V \in \tau$ ، $A \subseteq V$ و $B \subseteq U$.

لذلك (X,τ) فضاء طبيعي. □

نستطيع الآن أن نستنتج من تمهيدية 29.3.10 ومساندة 30.3.10، نظرية يوريسون للقياس، والتي تعمم تمهيدية 29.3.10.

31.3.10 نظرية. (**نظرية يوريسون للقياس Urysohn's Metrization Theorem**) كل فضاء هوسدورف منتظم وقابل للعد الثاني هو قابل للقياس. □

من نظرية يوريسون للقياس، تمهيدية 4.4.9 وتمهيدية 17.4.9 نستنتج الوصف التالي لقابلية القياس للفضاءات المتراصة.

32.3.10 نتيجة. أي فضاء متراص هو قابل للقياس إذا وفقط إذا كان هوسدورف وقابل للعد الثاني. □

33.3.10 ملاحظة. كما ذكر في ملاحظة 21.3.10، كل فضاء قابل للقياس هو طبيعي. إذا ينتج من تمهيدية 17.4.9 أن كل فضاء متري انفصالي هو طبيعي هوسدورف وقابل للعد الثاني. لذلك نظرية يوريسون 11.4.9، والتي تقول أن كل فضاء متري انفصالي هو هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب هلبرت، هي نتيجة من (برهان) تمهيدية29.3.10.

تمارين 3.10

1- الفضاء التبولوجي (X,τ) يسمى فضاء ليندلوف (Lindelof space) إذا كان كل غطاء مفتوح لـX يملك غطاءً جزئياً معدوداً. أثبت العبارات التالية.

(I) كل فضاء ليندلوف ومنتظم هو طبيعي.

[مساعدة: استخدم طريقة مشابهة لتلك في مساندة 30.3.10. لاحظ أننا شاهدنا في تمارين 4.9 # 8 أن كل فضاء قابل للعد الثاني هو ليندلوف.]

(II) خط سوجينفري $(\mathbb{R},\tau_1)$ هو فضاء ليندلوف.

(III) إذا كان (X,τ) فضاء تبولوجي يملك فضاء جزئي متقطع مغلق غير معدود فإن (X,τ) ليس فضاء ليندلوف.

(IV) ينتج من (III) أعلاه وتمارين 1.8 # 12 أن فضاء الضرب $(\mathbb{R},\tau_1)\times(\mathbb{R},\tau_1)$ هو ليس فضاء ليندلوف.

[الآن نعرف من (II) و (IV) أن ضرب فضائي ليندلوف ليس بالضرورة أن يكون فضاء ليندلوف.]

2- أثبت أن أي ضرب لفضاءات منتظمة هو فضاء منتظم.

3- أثبت أن أي فضاء جزئي مغلق من فضاء طبيعي هو فضاء طبيعي.

4- إذا كان (X,τ) هو فضاء تيخونوف مترابط وغير منتهي أثبت أن X غير معدودة.

5- فضاء هوسدورف (X,τ) يسمى فضاء- $K_{\overline{w}}$ إذا وجدت عائلة معدودة X_n، $n\in\mathbb{N}$ من المجموعات الجزئية المتراصة في X بحيث

(أ) $X_n \subseteq X_{n+1}$ لكل n؛

(ب) $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ ؛

(ج) أي مجموعة جزئية A من X هي مغلقة إذا وفقط إذا كان $A\cap X_n$ متراص لكل $n\in\mathbb{N}$.

أثبت أن

(i) كل فضاء متراص وهوسدورف هو فضاء - $K_{\overline{w}}$ ؛

(ii) كل فضاء متقطع ومعدود هو فضاء - $K_{\overline{w}}$ ؛

(iii) $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2$ هي فضاءات - $K_{\overline{w}}$ ؛

(iv) كل فضاء - $K_{\overline{w}}$ هو فضاء طبيعي؛

(v) كل فضاء - $K_{\overline{w}}$ وقابل للقياس هو انفصالي؛

(vi) كل فضاء - $K_{\overline{w}}$ وقابل للقياس يمكن تضمينه في مكعب هلبرت؛

(vii) كل فضاء جزئي مغلق من فضاء- $K_{\overline{w}}$ هو فضاء- $K_{\overline{w}}$ ؛

(viii) إذا كان (X,τ) و (Y,τ') فضاءات- $K_{\overline{w}}$ فإن $(X,\tau)\times(Y,\tau')$ هو فضاء - $K_{\overline{w}}$.

6- أثبت أن كل فضاء- $T_{3\frac{1}{2}}$ هو فضاء- T_3.

7- أثبت أن لأي فضاء قابل للقياس الحالات التالية متكافئة.

(i) فضاء ليندلوف، (ii) فضاء انفصالي، و (iii) قابل للعد الثاني.

8- يقال أن الفضاء التبولوجي (X,τ) يحقق مسلمة العد الأولى (أو قابل للعد الأول) إذا كان لكل $x\in X$ يوجد عائلة معدودة U_i، $i\in\mathbb{N}$ من المجموعات المفتوحة تحوي x بحيث إذا كانت $V\in\tau$ و $x\in V$ فإن $V\subseteq U_n$ لبعض n.

(i) أثبت أن كل فضاء قابل للقياس هو قابل للعد الأول.

(ii) بين أن كل فضاء قابل للعد الثاني هو قابل للعد الأول ولكن العكس ليس صحيحاً. (مساعدة: تأمل الفضاءات المتقطعة).

(iii) إذا كانت $\{(X_i,\tau_i):\mathrm{i}\in N\}$ هي عائلة معدودة من الفضاءات القابلة للعد الأول، أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هو قابل للعد الأول.

(iv) بين أن كل فضاء جزئي من الفضاء القابل للعد الأول هو قابل للعد الأول.

(v) لتكن X أي مجموعة غير معدودة. أثبت أن المكعب I^X ليس قابلاً للعد الأول ولذلك ليس قابلاً للقياس.

(vi) عمم (v) أعلاه لإثبات أنه إذا كانت J أي مجموعة غير معدودة وكل من (X_j,τ_j) هو فضاء تبولوجي يحوي أكثر من نقطة فإن الفضاء $\prod_{j\in J}(X_j,\tau_j)$ ليس قابلاً للقياس.

9- أثبت أن صف فضاءات تيخونوف هو أصغر صف فضاءات تبولوجية يحوي [0,1] ومغلق تحت تكوين الفضاءات الجزئية والضرب الديكارتي.

10- أثبت أن كل فضاء جزئي من فضاء منتظم تماماً هو فضاء منتظم تماماً.

11- باستخدام تمهيدية 8.6.8 أثبت أنه إذا كانت (G,τ) زمرة تبولوجية فإن (G,τ) فضاء منتظم.

[إنه من الصحيح أن كل زمرة تبولوجية هي فضاء منتظم تماماً ولكن هذا صعباً جداً لإثباته.]

12- إذا كانت $\{(X_i,\tau_i):\mathrm{i}\in I\}$ هي عائلة من الفضاءات المترابطة، أثبت أن $\prod_{i=1}^{\infty}(X_i,\tau_i)$ هو مترابط.

[مساعدة: اجعل $x = \prod_{i\in I} x_i \in \prod_{i\in I} X_i$. لتكن $\mathcal{S}$ مكونة من مجموعة كل النقاط في $\prod_{i\in I} X_i$ التي تختلف عن $x = \prod_{i\in I} x_i$ في على الأكثر عدد منتهي من الإحداثيات. أثبت أن $\mathcal{S} \subseteq C_X(x)$ وبعد ذلك بين أن $\mathcal{S}$ كثيفة في $\prod_{i\in I}(X_i,\tau_i)$. أخيراً استخدم حقيقة أن $C_X(x)$ هي مجموعة مغلقة].

13. لتكن $\{(X_j,\tau_j): \mathrm{j} \in J\}$ أي عائلة من الفضاءات التبولوجية. أثبت أن $\prod_{j\in J}(X_j,\tau_j)$ مترابط موضعياً إذا وفقط إذا كان كل (X_j,τ_j) هو كذلك مترابط.

14- ليكن $(\mathbb{R},\tau_1)$ هو خط سورجنفري. أثبت العبارات التالية.

(i) $(\mathbb{R},\tau_1)$ هو فضاء طبيعي.

(ii) إذا كان (X,τ) فضاء منفصل وهوسدورف فإنه يوجد على الأكثر عدد c اقترانات متصلة مختلفة $f:(X,\tau)\to[0,1]$.

(iii) إذا كان (X,τ) فضاءً طبيعياً يملك عدد غير معدود من الفضاءات الجزئية المتقطعة المغلقة فإنه يوجد على الأقل 2^c من الاقترانات المتصلة المختلفة $f:(X,\tau)\to[0,1]$. [مساعدة: استخدم مساندة يوريسون.]

(iv) استنتج من (ii) و(iii) أعلاه وتمارين 12#1.8، أن $(R,\tau_1)x(R,\tau_1)$ ليس فضاء طبيعي.

[الآن نعرف أن ضرب أي فضائين طبيعيين ليس بالضرورة أن يكون فضاء طبيعي.]

4.10 ترصيص ستون-جيخ Stone-Čech Compactification

1.4.10 تعريف. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً، $(\beta X,\tau')$ فضاء متراص وهوسدورف و $\beta:(X,\tau)\to(\beta X,\tau')$ اقتراناً متصلاً فإن $(\beta X,\tau')$ مع الاقتران β تسمى ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ) إذا كان لكل فضاء متراص وهوسدورف (Y,τ'') ولكل اقتران متصل $\phi:(X,\tau)\to(Y,\tau'')$ يوجد اقتران متصل وحدي $\Phi:(\beta X,\tau')\to(Y,\tau'')$ بحيث أن $\Phi o\beta=\phi$ أي أن الرسم التالي تبديلي

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau') \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\phi"'] & (\beta X,\tau') \arrow[d, dashed, "\Phi"] \\
& (Y,\tau'')
\end{tikzcd}$$

تحذير. الاقتران β بالعادة ليس شاملاً، لذلك β(X) بالعادة لا تساوي β X.

2.4.10 ملاحظة. في حين أن ترصيص ستون-جيخ موجود لكل الفضاءات التبولوجية فإنه أكثر أهمية في حالة فضاءات تيخونوف. لأن الاقتران β هو تضمين إذا وفقط إذا كان الفضاء (X,τ) هو تيخونوف. الجزء "وفقط إذا" واضح لأن الفضاء $(\beta X,\tau')$ المتراص وهوسدورف هو فضاء تيخونوف ولذلك كل فضاء جزئي منه هو تيخونوف.

الآن نوجه العمل إلى إثبات وجود ترصيص ستون-جيخ لفضاءات تيخونوف وتبيان أن الاقتران β هو تضمين في هذه الحالة.

3.4.10 مساندة. لتكن (X,τ) و (Y,τ') فضاءات تيخونوف و $\mathcal{F}(X)$ و $\mathcal{F}(Y)$ عائلتي كل الاقترانات المتصلة من X و Y إلى [0.1]، على التوالي. بالإضافة لذلك اجعل e_X و e_Y هي الاقترانات الحسابية من X إلى $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{I_f}$ ومن Y إلى $\prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} \mathrm{I_g}$، على التوالي، حيث $I_f \cong I_g \cong [0,1]$ لكل f و g. إذا كان ϕ هو أي اقتران متصل من X إلى Y فإنه يوجد اقتران متصل Φ من $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{I_f}$ إلى $\prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} \mathrm{I_g}$ بحيث أن $\Phi o e_X = e_Y o\Phi$ ؛ أي أن الرسم أدناه تبديلي

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "e_x"'] & (Y,\tau') \arrow[d, "e_y"] \\
\prod_{f\in F(x)} I_f \arrow[r, dashed, "\Phi"'] & \prod_{g\in F(y)} I_g
\end{tikzcd}$$

بالإضافة لذلك، $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$

البرهان. لتكن $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{I_f} \in \prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{x_f}$. عرِّف $\Phi (\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{x_f}) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} \mathrm{y_g}$

حيث y_g معرَّفة على الشكل: بما أن $g \in \mathcal{F}(Y)$ فإن g هو اقتران متصل من (X,τ) إلى [0,1]. لذلك $go\Phi = f$ ، لبعض $f \in \mathcal{F}(X)$. اجعل $y_g = x_f$ ، لهذا الاقتران f ، والآن الاقتران Φ أصبح معرَّف.

لإثبات اتصال Φ، لتكن $U = \prod_{g\in\mathcal{F}(Z)} \mathrm{U_g}$ مجموعة مفتوحة قاعدية تحوي $\Phi (\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{x_f}) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} \mathrm{y_g}$. فإن $U_g = I_g$ لكل $g \in \mathcal{F}(Y)\backslash\{g_{i1}, \ldots, g_{in}\}$. اجعل $f_{i1} = g_{i1}o\phi$ ، $f_{i2} = g_{i2}o\phi$ ،...، $f_{in} = g_{in}o\phi$. الآن عرِّف $V = \prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{V_f}$، حيث $V_f = I_f$ لبعض $f \in \mathcal{F}(X)\backslash\{f_{i1}, \ldots, f_{in}\}$ ، و $V_{f_{i1}} = U_{g_{i1}}$، $V_{f_{i2}} = U_{g_{i2}}$، ...، $V_{f_{in}} = U_{g_{in}}$. واضح أن $\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} \mathrm{x_f} \in V$ و $\Phi(V) \subseteq U$. لذلك Φ متصل.

لرؤية أن الرسم تبديلي، لاحظ أن

$\Phi (e_X(x)) = \Phi (\prod_{f\in\mathcal{F}(X)} f(x)) = \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} g(\phi(x))$ لكل $x \in X$.

لذلك $\Phi o e_X = e_Y o\phi$.

أخيراً بما أن أن Φ متصل، $\Phi(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$ ، كما هو مطلوب. $\square$

4.4.10 مساندة. لتكن Φ_1 و Φ_2 اقترانات متصلة من فضاء تبولوجي (X,τ) إلى فضاء هوسدورف (Y,τ').
إذا كانت Z مجموعة جزئية كثيفة في (X,τ) و $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$ لكل $z \in Z$ فإن $\Phi_1 = \Phi_2$ على X.

البرهان. افرض أن $\Phi_1(x) \neq \Phi_2(x)$ ، لبعض $x \in X$. إذاً بما أن (Y,τ') هو هوسدورف يوجد مجموعات مفتوحة U و V حيث $\Phi_1(x) \in U$ ، $\Phi_2(x) \in V$ و $U \cap V = \phi$. لذلك $\Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$ هي مجموعة مفتوحة تحوي x.

بما أن Z كثيفة في (X,τ)، يوجد $z \in Z$ بحيث $z \in \Phi_1^{-1}(U) \cap \Phi_2^{-1}(V)$ لذلك $\Phi_1(z) \in U$ و $\Phi_2(z) \in V$. ولكن $\Phi_1(z) = \Phi_2(z)$ لذلك $U \cap V \neq \Phi$ وهذا تناقض.

لذلك $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ لكل $x \in X$. $\square$

5.4.10 تمهيدية. ليكن (X,τ) أي فضاء تيخونوف، $\mathcal{F}$(X) عائلة كل الاقترانات المتصلة من (X,τ) الى [0,1] و e_X اقتران حسابي من (X,τ) إلى $\prod_{f \in \mathcal{F}(X)} I_f$ حيث كل $I_f \cong [0,1]$. اجعل $(\beta X, \tau')$ مساوية لـ $\overline{e_X(X)}$ مع تبولوجيا الفضاء الجزئي و $\beta : (X,\tau) \to (\beta X, \tau')$ يساوي الاقتران e_X. فإن $(\beta X, \tau')$ مع الاقتران β هو ترصيص ستون- جيخ للفضاء (X,τ).

البرهان. أولاً لاحظ أن $(\beta X, \tau')$ في الحقيقة هو فضاء متراص وهوسدورف لأنه فضاء جزئي مغلق من فضاء متراص وهوسدورف.

ليكن ϕ أي اقتران متصل من (X,τ) إلى أي فضاء متراص وهوسدورف (Y,τ''). يجب أن نجد اقتران Φ كما في تعريف 1.4.10 بحيث أن الرسم هناك تبديلي ونبين أن ϕ هو وحيد.

لتكن $\mathcal{F}$(Y) عائلة من الاقترانات المتصلة من (Y,τ") إلى [0,1] و e_Y هو الاقتران الحسابي من (Y,τ") إلى $\prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} I_g$ حيث كل $I_g \cong [0,1]$.

بواسطة مساندة 3.4.10، يوجد اقتران متصل $\Gamma : \prod_{f\in\mathcal{F}(X)} I_f \rightarrow \prod_{g\in\mathcal{F}(Y)} I_g$ بحيث أن $e_Y o\phi = \Gamma o e_X$ و $\Gamma(\overline{e_X(X)}) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$ أي أن $\Gamma(\beta X) \subseteq \overline{e_Y(Y)}$.

بما أن (Y,τ") هو فضاء متراص وهوسدورف و e_Y واحداً لواحد نرى أن $(\overline{e_Y(Y)} = e_Y(Y)$ و $e_Y : (Y,\tau'') \rightarrow (e_Y(Y),\tau''')$ هو هوميومورفزم حيث τ''' هي تبولوجيا الفضاء الجزئي على $e_Y(Y)$. لذلك $e_Y^{-1} : (e_Y(Y),\tau''') \rightarrow (Y,\tau'')$ هو هوميومورفزم.

اجعل $\Phi = e_Y^{-1} o\Gamma$ لذلك Φ هو اقتران متصل من $(\beta X,\tau')$ إلى (Y,τ"). بالإضافة لذلك

$$\Phi(\beta(x)) = \Phi(e_X(x)) \quad \text{لكل} \quad x \in X$$

$$= e_Y^{-1}\left(\Gamma(e_X(x))\right)$$

$$= e_Y^{-1}\left(e_Y(\phi(x))\right)$$

$$= \phi(x)$$

لذلك $\Phi o\beta = \phi$ كما هو مطلوب.

الآن افرض أنه يوجد اقترانين متصلين Φ_1 و Φ_2 من $(\beta X,\tau')$ إلى (Y,τ") حيث $\Phi_1 o\beta = \phi$ و $\Phi_2 o\beta = \phi$. فإن $\Phi_1 = \Phi_2$ على مجموعة جزئية كيثفة $\beta(X)$ من $(\beta X,\tau')$. لذلك بواسطة مساندة 4.4.10، $\Phi_1 = \Phi_2$. لذلك الاقتران Φ هو وحيد. □

6.4.10 ملاحظة. في تعريف 1.4.10 أشرنا إلى ترصيص ستون-جيخ معطياً أن لكل (X,τ) يوجد $(\beta X,\tau')$ وحيد. التمهيدية اللاحقة تحدد بدقة إلى أي درجة هذا صحيح. على كل حال في البداية نحتاج هذه المساندة.

7.4.10 مساندة. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و (Z,τ_1) مع الاقتران $\beta : (X,\tau) \rightarrow (Z,\tau_1)$ هو ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ). فإن $\beta(X)$ كثيفة في (Z,τ_1).

البرهان. افرض أن $\beta(X)$ ليس كثيفة في (Z,τ_1). إذاً يوجد عنصر $z\in Z\setminus\overline{\beta(X)}$. بما أن $\beta(X)$ ليست كثيفة في (Z,τ_1) هو فضاء متراص وهوسدورف، بواسطة ملاحظة 28.3.10، هو فضاء تيخونوف.

ملاحظاً أن $Z\setminus\overline{\beta(X)}$ هي مجموعة مفتوحة تحوي Z نستنتج وجود اقتران متصل $\Phi_1:(Z,\tau_1)\to[0,1]$ حيث $\Phi_1(Z)=1$ و $\Phi_1(\overline{\beta(X)})=0$. كذلك يوجد اقتران متصل $\Phi_2:(Z,\tau_1)\to[0,\frac{1}{2}]$ حيث $\Phi_1(Z)=1$ و $\Phi_1(\overline{\beta(X)})=0$. لذلك لدينا الرسوم التالية التي تكون تبديلية:

$$\begin{tikzcd}(X,\tau') \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\phi"'] & (Z,\tau_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_1"] \\ & {[0,1]}\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}(X,\tau') \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\phi"'] & (Z,\tau_1) \arrow[d, dashed, "\Phi_2"] \\ & {[0,1]}\end{tikzcd}$$

حيث $\phi(x)=0$ لكل $x\in X$. هذا يتناقض كون الاقتران Φ في تعريف 1.4.10 هو وحيد. لذلك $\beta(X)$ كثيفة في (Z,τ_1). □

8.4.10 تمهيدية. ليكن (X,τ) فضاءً تبولوجياً و (Z_1,τ_1) مع الاقتران $\beta_1:(X,\tau)\to(Z_1,\tau_1)$ هو ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ). إذا كان (Z_2,τ_2) مع الاقتران $\beta_2:(X,\tau)\to(Z_2,\tau_2)$ هو كذلك ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ) فإن $(Z_1,\tau_1)\cong(Z_2,\tau_2)$. في الوقاع يوجد هوميومورفزم

$\theta:(Z_1,\tau_1)\to(Z_2,\tau_2)$ بحيث $\theta:(Z_1,Z_1)\to(Z_2,Z_2)$ بحيث $\theta o\beta_1=\beta_2$

$$\begin{tikzcd}(X,\tau) \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[dr, "\beta_2"'] & (Z_1,\tau_1) \arrow[d, dashed, "\theta"] \\ & (Z_2,\tau_2)\end{tikzcd}$$

البرهان. بما أن (Z_1,τ_1) مع β_1 هو ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ) و β_2 هو اقتران متصل من (X,τ) إلى فضاء متراص وهوسدورف (Z_2,τ_2) فإنه يوجد اقتران متصل $\theta:(Z_1,\tau_1)\to(Z_2,\tau_2)$ بحيث أن $\theta o \beta_1=\beta_2$.

بشكل مشابه يوجد اقتران متصل $\theta_1:(Z_2,\tau_2)\to(Z_1,\tau_1)$ بحيث $\theta_1 o\beta_2=\beta_1$. لذلك لكل $x\in X$ ، $\theta_1(\theta(\beta_1(x)))=\theta_1(\beta_2(X))=\beta_1(x)$، أي إذا كان id_{Z_1} هو الاقتران المحايد على (Z_1,τ_1) فإن $\theta_1 o\theta=id_{Z_1}$ على $\beta_1(X)$ والتي هي بواسطة مساندة 7.4.10 كثيفة في (Z_1,τ_1). لذلك بواسطة مساندة 4.4.10، $\theta_1 o\theta=id_{Z_1}$ على Z_1.

بنفس الأسلوب $\theta o\theta_1=id_{Z_2}$ على Z_2. لذلك $\theta=\theta_1^{-1}$ وبما أن الاثنان متصلان هذا يعني أن θ هو هوميوموزفزم. □

9.4.10 ملاحظة. لاحظ أنه إذا كان (X,τ) أي فضاء تيخونوف و $(\beta X,\tau')$ مع $\beta:(X,\tau)\to(\beta X,\tau)$ هو ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ) فإن برهان تمهيدية 5.4.10 يبين أن β هو تضمين. في الواقع من الطبيعي في هذه الحالة أن نطابق X مع βX ولذلك نعتبر (X,τ) كفضاء جزئي من $(\beta X,\tau')$. وبعد ذلك لا نذكر التضمين β ونتحدث عن $(\beta X,\tau')$ كترصيص ستون-جيخ.

10.4.10 ملاحظة. إذا كان (X,τ) فضاء متراص وهوسدورف فإن ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ) هو الفضاء (X,τ) نفسه. واضح أن (X,τ) مع الاقتران المحايد من (X,τ) إلى نفسه يملك الخاصية المطلوبة لترصيص ستون-جيخ. ولكونه وحيداً فهذا هو ترصيص ستون-جيخ. هذا كذلك يمكن رؤيته من برهان تمهيدية 5.4.10 حيث شاهدنا أن لأي فضاء متراص وهوسدورف (Y,τ'') الاقتران $e_Y:(Y,\tau'')\to(e_Y(Y),\tau''')$ هو هوميوفورفزم.

11.4.10 ملاحظة. ترصيص ستون-جيخ لأي فضاء غالباً يكون معقداً. على سبيل المثال $[0,1]$ ليس ترصيص ستون-جيخ لـ$(0,1]$ لأن الاقتران المتصل $\phi:(0,1]\to[-1,1]$ المعطى على الشكل $\phi(x)=\sin(\frac{1}{x})$ لا يعمم لاقتران متصل $\phi:[0,1]\to[-1,1]$. في الحقيقة يمكن أن يثبت أن ترصيص ستون-جيخ لـ$(0,1]$ ليس قابلاً للقياس.

4.10 تمارين

1- ليكن (X,τ) فضاء تيخونوف و $(\beta X,\tau')$ ترصيص ستون-جيخ. أثبت أن (X,τ) مترابط إذا وفقط إذا كان $(\beta X,\tau')$ مترابط.

[مساعدة: أولاً أثبت أنه بإضافة أن (X,τ) يملك على الأقل عنصرين فإنه مترابط إذا وفقط إذا لم يوجد اقتران متصل وشامل من (X,τ) إلى الفضاء المتقطع $\{0,1\}$.]

2- ليكن (X,τ) فضاء تيخونوف و $(\beta X,\tau')$ ترصيص ستون-جيخ. إذا كان (A,τ_1) هو فضاء جزئي من $(\beta X,\tau')$ و $X \subseteq A$ أثبت أن $(\beta X,\tau')$ هو كذلك ترصيص ستون-جيخ لـ (A,τ_1).

[مساعدة: أثبت أن كل اقتران متصل من (X,τ) إلى $[0,1]$ يمكن تعميمه لاقتران متصل من (A,τ_1) إلى $[0,1]$. بعد ذلك استخدم تركيب $(\beta X,\tau')$.]

3- ليكن (X,τ) فضاء جزئي كثيف في فضاء متراص وهوسدورف (Z,τ_1). إذا كان كل اقتران متصل من (X,τ) إلى $[0,1]$ يمكن تعميمه لاقتران متصل من (Z,τ_1) إلى $[0,1]$ أثبت أن (Z,τ_1) هو ترصيص ستون-جيخ للفضاء (X,τ).

5.10 خلاصة

في وقت سابق عرَّفنا ضرب عدد عشوائي من الفضاءات التبولوجية وأثبتنا نظرية تيخونوف. كذلك عممنا مساندة التضمين للحالة العامة. هذا استخدمناه لوصف فضاءات تيخونوف بأنها تلك التي تكون هوميومورفك لفضاء جزئي من مكعب (أي ضرب نُسخ من $[0,1]$).

مساندة يوريسون مكنتنا من الحصول على العلاقات التالية بين خواص الفصل
$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

بالإضافة لذلك إذا كان الفضاء متراص وهوسدورف فإنه T_4 وكذلك إذا كان قابلاً للقياس فإنه T_4.

كذلك شاهدنا نظرية خطيرة في قابلية القياس هي نظرية يوريسون للقياس، والتي تقول أن كل فضاء منتظم، قابل للعد الثاني وهوسدورف هو قابل للقياس.

ختمنا الفصل بتقديم ترصيص ستون-جيخ والذي هو موضوع دراسي مهم بحد ذاته. (انظر Hindman و Strauss [104] و Walker [217].)

ملحق 1: مجموعات غير منتهية Infinite Sets

مقدمة

قديماً وفي أرض بعيدة كان هناك فندقين فندق منتهي (فندق عشوائي يملك عدداً منتهياً من الغرف) وفندق هلبرت غير منتهي (فندق عادي مميز مع عدد غير منتهي من الغرف مرقمة 1، 2، ...، n،...). في أحد الأيام وصلت زائرة إلى بلدة باحثة عن غرفة. ذهبت أولاً للفندق المنتهي وقيل لها بأن كل الغرف مشغولة ولكن أخبرت بأن الفندق الآخر، فندق هلبرت غير المنتهي، يمكن دائماً أن يجد لها غرفة إضافية. لذلك ذهبت إلى فندق هلبرت غير المنتهي وأُخبرت بأن هناك أيضاً كل الغرف مشغولة. على الرغم من ذلك، كاتب الاستقبال قال إن في هذا الفندق يمكن دائماً إضافة نزيل جديد بدون طرد أي نزيل آخر. قام بتحريك النزيل من غرفة 1 إلى غرفة 2 والنزيل من غرفة 2 إلى غرفة 3 وهكذا. بهذا الشكل أصبحت غرفة 1 خالية.

من خلال هذا المثال الجذاب شاهدنا أن هناك فرقاً جوهرياً بين المجموعات غير المنتهية والمجموعات المنتهية. الهدف من هذا الملحق هو أن نقدم مقدمة لطيفة ومختصرة لنظرية المجموعات غير المنتهية. هذا موضوع مدهش وإذا لم تكن درسته مسبقاً سوف تجد فيه أشياء عديدة ممتعة. سوف نتعلم أن "المجموعات غير المنتهية ليست متساوية" – بعضها أكبر من بعض. في البداية ليس واضحاً تماماً ماذا تعني هذه العبارة. سوف نحتاج أن نعرف كلمة "أكبر". في الواقع سوف نحتاج أن نحدد ماذا نعني بـ"مجموعتين لهما نفس الحجم".

1.1أ مجموعات معدودة Countable Sets

1.1.1أ تعاريف. لتكن A و B مجموعات. يقال أن A مكافئة (equipotent) لـ B، ويرمز له بالرمز $A\sim B$، إذا وجد اقتران $f: A\to B$ بحيث يكون واحد لواحد وشامل (أي أنه اقتران تقابل).

2.1.1أ تمهيدية. لتكن A، B و C مجموعات.

(i) فإن $A\sim A$.

(ii) إذا كانت $A\sim B$ فإن $B\sim A$.

(iii) إذا كانت $A\sim B$ و $B\sim C$ فإن $A\sim C$.

برهان مختصر.

(i) الاقتران المحايد f على A، المعطى على الشكل $f(x)=x$ لكل $x\in A$ هو اقتران تقابل من A إلى نفسها.

(ii) إذا كان f اقتران تقابل من A إلى B فإن له اقتران نظير g من B إلى A و g هو كذلك اقتران تقابل.

(iii) إذا كان $f: A\to B$ هو اقتران تقابل و $g: B\to C$ هو اقتران تقابل فإن التركيب $gof: A\to C$ هو اقتران تقابل. □

تمهيدية 2.1.1أ تقول أن العلاقة "~" هي انعكاس (i)، تماثل (ii) وتعدي (iii) أي أن "~" هي علاقة تكافؤ.

3.1.1أ تمهيدية. لتكن $n,m\in N$. فإن المجموعات $\{1,2,\ldots,n\}$ و $\{1,2,\ldots,m\}$ هي متكافئة إذا وفقط إذا كان $n=m$.

البرهان. تمرين. □

الآن نُعرِّف ضمنياً المفاهيم "مجموعة منتهية" و "مجموعة غير منتهية".

4.1.1أ تعاريف. لتكن S مجموعة

(i) فإن S تسمى منتهية (finite) إذا كانت تساوي المجموعة الخالية ϕ أو مكافئة للمجموعة $\{1,2,\ldots,n\}$ لبعض $n \in \mathbb{N}$.

(ii) إذا كانت S ليست منتهية فإنها تسمى غير منتهية (infinite).

(iii) إذا كانت $S\sim\{1,2,\ldots,n\}$ فإن S تملك معدودية (cardinality) n والذي يرمز له بالرمز cardS = n.

(iv) إذا كانت $S=\phi$ فإن المعدودية تساوي 0 والتي يرمز لها بالرمز $\text{card}\phi = 0$.

الخطوة التالية هي تعريف النوع "الأصغر" من المجموعة المنتهية. مثل هذه المجموعات تسمى غير منتهية معدودة. في هذه المرحلة لا نعرف أن هناك أي نوع "أكبر" من هذا النوع من المجموعات غير المنتهية – في الواقع لا نعرف ماذا "أكبر" تعني في هذا المحتوى.

5.1.1أ تعاريف. لتكن S مجموعة.

(i) المجوعة S تسمى غير منتهية معدودة إذا كانت مكافئة لـ $\mathbb{N}$.

(ii) المجموعة S تسمى معدودة (countable) إذا كانت منتهية أو غير منتهية معدودة.

(iii) إذا كانت S غير منتهية معدودة فإنها تملك معدودية $\aleph_o$ ويرمز لها بالرمز $cardS=\aleph_o$.

(iv) المجموعة S تسمى غير معدودة (uncountable) إذا كانت ليست معدودة.

6.1.1أ ملاحظة. نرى أنه إذا كانت S غير منتهية معدودة فإن $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n,\ldots\}$ حيث $f:\mathbb{N}\longrightarrow S$ هو اقتران تقابل و $s_n = f(n)$ لكل $n\in\mathbb{N}$. لذلك نستطيع أن نضع قائمة بعناصر S. بالتأكيد إذا كانت S منتهية وغير خالية نستطيع كذلك أن نذكر عناصر S على الشكل $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n,\ldots\}$. لذلك نستطيع أن نضع قائمة بعناصر أي مجموعة معدودة. على العكس، إذا كانت عناصر المجموعة S يمكن وضعها بقائمة فإن S معدودة لأن ترتيب هذه العناصر يعرِّف اقتران تقابل مع $\mathbb{N}$ أو $\{1,2,..,n\}$. □

7.1.1أ مثال. المجموعة S المكونة من كل الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة هي غير منتهية معدودة.

البرهان. الاقتران $f:\mathbb{N}\longrightarrow S$ المعطى على الشكل $f(n)=2n$ لكل $n\in\mathbb{N}$ هو اقتران تقابل. □

مثال أ7.1.1 قيِّم. نعتقد أن أي مجموعتين يربطهما اقتران تقابل إذا كان لهما "نفس الحجم". ولكن هنا لدينا المجموعة $\mathbb{N}$ ترتبط باقتران تقابل مع واحدة من مجموعاتها الجزئية التي لا تساوي $\mathbb{N}$. هذا لا يحدث مع المجموعات المنتهية. في الواقع المجموعات المنتهية يمكن أن توصف بأنها تلك المجموعات التي لا تكافئ أي مجموعة جزئية منها لا تساويها.

أ8.1.1 مثال. المجموعة $\mathbb{Z}$ المكونة من كل الأعداد الصحيحة هي غير منتهية معدودة.

البرهان. الاقتران $f:\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ المعطى على الشكل

$$f(n)=\begin{cases} m, if \ \ n=2m, m\geq 1 \\ -m, if \ \ n=2m+1, m\geq 1 \\ 0, if \ \ n=1 \end{cases}$$

هو اقتران تقابل. □

أ9.1.1 مثال. المجموعة S المكونة من كل الأعداد الصحيحة الموجبة التي تكون مربعات تامة هي مجموعة غير منتهية معدودة.

البرهان. الاقتران $f:\mathbb{N} \longrightarrow S$ المعطى على الشكل $f(n)=n^2$ هو اقتران تقابل. □

مثال أ9.1.1 أثبت بواسطة G.Galileo في حوالي1600. هذا المثال أزعجه وأوحى له بأن غير المنتهي ليس ملك الرجل.

أ10.1.1 تمهيدية. إذا كانت المجموعة S مكافئة لمجموعة معدودة فإنها معدودة.

البرهان. تمرين. □

أ11.1.1 تمهيدية. إذا كانت S مجموعة معدودة و $T\subset S$ فإن T معدودة.

البرهان. بما أن S معدودة فإننا نستطيع كتابتها على الشكل $S=\{s_1,s_2,\ldots\}$. لتكن t_1 أول s_i في T (إذا كانت $T\neq\phi$). لتكن t_2 هي ثاني s_i في T (إذا كانت $T\neq\{t_1\}$). لتكن t_3 هي ثالث s_i في T (إذا كانت $T\neq\{t_1,t_2\}$)،...

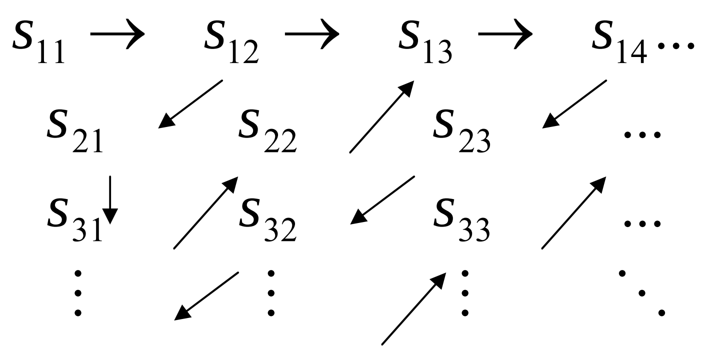
هذه العملية تصل لنهايتها فقط إذا كانت $T=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$ لبعض n وفي هذه الحالة T منتهية. إذا العملية لم تصل إلى نهاية نحصل على القائمة $\{t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots\}$ من عناصر T. هذه القائمة تحوي كل عنصر في T بسبب أنه إذا كان $s_i\in T$ فإننا نصل s_i في خطوة ليست بعد الخطوة رقم i في هذه العملية؛ لذلك s_i تكون في القائمة. لذلك T غير منتهية معدودة. ولهذا T إما منتهية أو غير منتهية معدودة. □

كنتيجة مباشرة لتمهيدية 11.1.1 ومثال 8.1.1 لدينا النتيجة التالية.

12.1.1أ نتيجة. كل مجموعة جزئية من ℤ هي معدودة. □

13.1.1أ مساندة. إذا كانت S_1، S_2،...، S_n، ... عائلة غير منتهية معدودة من المجموعات غير المنتهية المعدودة بحيث أن $S_i\cap S_j=\phi$ لكل $i\neq j$ فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ هو مجموعة غير منتهية معدودة.

البرهان. بما أن S_i مجموعة غير منتهية معدودة، $S_i=\{s_{i_1},s_{i_2},s_{i_n},\ldots\}$. الآن ضع s_{i_j} في صفوف مربعة ورتبهم بالتعرج أعلى وأسفل كما هو في الشكل



هذا يبين أن كل عناصر $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ يمكن وضعها بقائمة (يمكن ترقيمها) وهذه القائمة غير منتهية لأن كل S_i غير منتهية. لذلك $\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$ هي غير منتهية معدودة. □

في مساندة 13.1.1أ فرضنا أن المجموعات S_i كانت منفصلة ثنائياً. إذا لم تكن منفصلة ثنائياً البرهان يُعدل بسهولة بحذف العناصر المتكررة لتحصل على:

14.1.1أ مساندة. إذا كانت S_1، S_2،...، S_n، ... هي عائلة غير منتهية ومعدودة من المجموعات غير المنتهية المعدودة فإن $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ هي مجموعة غير منتهية معدودة. □

15.1.1أ تمهيدية. اتحاد أي عائلة معدودة من المجموعات المعدودة هو معدود.

البرهان. تمرين. □

16.1.1أ تمهيدية. إذا كانت S و T مجموعات غير منتهية معدودة فإن مجموعة الضرب $S\times T = \{(s, t): s\in S, t\in T\}$ هي مجموعة غير منتهية معدودة.

البرهان. اجعل $S=\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ و $T=\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. فإن $S\times T=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(s_i, t_1), (s_i, t_2), \dots, (s_i, t_n), \dots\}$ لذلك $S\times T$ هي اتحاد غير منتهي معدود لمجموعات غير منتهية معدودة ولذلك هي غير منتهية معدودة. □

17.1.1أ نتيجة. كل ضرب منتهي لمجموعات معدودة هو معدود. □

نحن الآن جاهزون لتطبيق مهم على ملاحظاتنا على المجموعات المعدودة.

18.1.1أ مساندة. المجموعة $\mathbb{Q}^{>0}$ المكونة من كل الأعداد النسبية الموجبة هي غير منتهية معدودة.

البرهان. لتكن S_i هي مجموعة كل الأعداد النسبية الموجبة التي مقامها i حيث $i \in \mathbb{N}$. فإن $S_i=\left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \dots, \frac{n}{i}, \dots\right\}$ و $\mathbb{Q}^{>0}=\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$. بما أن كل S_i غير منتهية معدودة، تمهيدية 15.1.1أ تعطي أن $\mathbb{Q}^{>0}$ هي غير منتهية معدودة. □

نحن الآن جاهزون لإثبات أن المجموعة $\mathbb{Q}$ المكونة من كل الأعداد النسبية هي غير منتهية معدودة أي أن هناك اقتران تقابل بين المجموعة $\mathbb{Q}$ والمجموعة الأصغر منها $\mathbb{N}$ المكونة من كل الأعداد الصحيحة الموجبة.

19.1.1أ نظرية. مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ هي غير منتهية معدودة.

البرهان. واضح أن المجموعة $\mathbb{Q}^{<0}$ المكونة من كل الأعداد النسبية السالبة مكافئة للمجموعة $\mathbb{Q}^{>0}$ المكونة من كل الأعداد النسبية الموجبة ولذلك باستخدام تمهيدية 10.1.1أ ومساندة 18.1.1أ نحصل على أن $\mathbb{Q}^{<0}$ هي غير منتهية معدودة.

أخيراً لاحظ أن $\mathbb{Q}$ هي اتحاد المجموعات الثلاث $\mathbb{Q}^{>0}$، $\mathbb{Q}^{<0}$ و $\{0\}$ ولذلك هي أيضاً غير منتهية معدودة باستخدام تمهيدية 15.1.1أ. □

20.1.1أ نتيجة. كل مجموعة من الأعداد النسبية هي معدودة. □

البرهان. هذه نتيجة مباشرة من نظرية 19.1.1أ وتمهيدية 11.1.1أ.

21.1.1أ تعاريف. العدد الحقيقي x يسمى عدد جبري (algebraic number) إذا وجد عدد طبيعي n وأعداد صحيحة a_o، a_1، …، a_n حيث $a_o \neq 0$ بحيث $a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$

العدد الحقيقي الذي لا يكون عدد جبري يسمى عدد مبهم (transcendental number).

22.1.1أ مثال. كل عدد نسبي هو عدد جبري.

البرهان. إذا كان $x = \dfrac{\rho}{q}$ حيث $\rho, q \in Z$ و $q \neq 0$ فإن $qx - \rho = 0$ أي أن x هو عدد جبري حيث $n = 1$، $a_o = q$ و $a_n = -\rho$. □

23.1.1أ مثال. العدد $\sqrt{2}$ هو عدد جبري وليس عدد نسبي.

البرهان. على الرغم من أن $x=\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي فإنه يحقق $x^2-2=0$ ولذلك هو جبري.
□

أ24.1.1 ملاحظة. كذلك من السهل إثبات أن $\sqrt[4]{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ هو عدد جبري لأنه يحقق $x^8-12x^6+44x^4-288x^2+16=0$. في الحقيقة أي عدد حقيقي والذي يمكن تركيبه من مجموعة الأعداد الصحيحة باستخدام عدد منتهي من عمليات الجمع، الطرح، الضرب، القسمة واستخراج الجذور التربيعية، الجذور التكعيبية، ...، هو جبري. □

أ25.1.1 ملاحظة. ملاحظة أ24.1.1 ترينا أن "معظم" الأرقام التي نفكر بها هي أعداد جبرية. لإثبات أن أي عدد معطى هو عدد مبهم يمكن أن يكون صعباً. أول مثل هذا الإثبات كان في 1844 عندما Liouville أثبت إبهام العدد

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}=0.110001000000000000000000100...$$

انه Charles Hermite في 1873 الذي بين أن e هو مبهم. في 1882 Lindemann أثبت أن العدد π هو مبهم بواسطة إجابة سؤال عمره 2,000 سنة بالنفي وهذا السؤال يتعلق بتربيع الدائرة. (السؤال هو: إذا أعطيت دائرة نصف قطرها 1 هل من الممكن باستخدام فقط زاوية مستقيمة وفرجار أن نكون مربع له نفس المساحة؟ شرح كامل لهذه المسألة وبراهين أن e و π هي مبهمة يمكن إيجادها في كتاب Morris, Jones & Pearson[128].) □

نكمل الآن لإثبات أن المجموعة $\mathcal{A}$ المكونة من كل الأعداد الجبرية هي غير منتهية معدودة. هذه نتيجة أكثر قوة من نظرية أ19.1.1 والتي هي بالحقيقة نتيجة لهذه النتيجة.

أ26.1.1 نظرية. المجموعة $\mathcal{A}$ المكونة من كل الأعداد الجبرية هي غير منتهية معدودة.

البرهان. تأمل كثير الحدود $f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ حيث $a_o \neq 0$ وكل $a_i \in Z$ وعرِّف قمتها (its height) لتكون $k = n + |a_o| + |a_1| + \ldots + |a_n|$.

لكل عدد صحيح موجب k، لتكن A_k مجموعة كل جذور مثل هذه الكثيرات الحدود التي قمتها k.

وواضح أن $\mathcal{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.

لذلك، لإثبات أن $\mathcal{A}$ غير منتهية معدودة يكفي بواسطة أ15.1.1 إثبات أن كل A_k هي منتهية.

إذا كانت f كثير حدود من الدرجة n فإنه واضح أن $n \leq k$ و $|a_i| \leq k$ لكل $i = 1,2,\ldots,n$. لذلك مجموعة كل كثيرات الحدود التي قمتها k هي منتهية.

بالإضافة لذلك كثير الحدود من الدرجة n له على الأكثر n من الجذور. بناءً على ذلك كل كثير حدود قمته k لا يملك أكثر من k من الجذور. لذلك المجموعة A_k منتهية كما هو مطلوب.

□

أ27.1.1 نتيجة. كل مجموعة من الأعداد الجبرية هي معدودة. □

لاحظ أن نتيجة أ27.1.1 تملك كحالة خاصة نتيجة أ20.1.1.

لغاية الآن لم نقدم أي مثال على مجموعة غير معدودة. قبل عمل ذلك نلاحظ أن بعض الاقترانات سوف لا تأخذنا خارج عائلة المجموعات المعدودة.

أ28.1.1 تمهيدية. لتكن X و Y مجموعات و f اقتران من X إلى Y.

(i) إذا كانت X معدودة و f اقتران شامل فإن Y معدودة.

(ii) إذا كانت Y معدودة و f واحد لواحد فإن X معدودة.

البرهان. تمرين. □

29.1.1أ تمهيدية. لتكن S مجموعة معدودة. فإن مجموعة كل المجموعات الجزئية المنتهية في S هي كذلك معدودة.

البرهان. تمرين. □

30.1.1أ تعريف. لتكن S أي مجموعة. مجموعة كل المجموعات الجزئية من S تسمى مجموعة القوة (power set) لـ S ويرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(S)$.

31.1.1أ نظرية. (Georg Cantor) لأي مجموعة S ، مجموعة القوة $\mathcal{P}(S)$، ليست مكافئة للمجموعة S لذلك $S \nsim \mathcal{P}(S)$.

البرهان. يجب أن نثبت أنه لا يوجد اقتران تقابل بين S و $\mathcal{P}(S)$. يجب أن نثبت بالإضافة لذلك: أنه لا يوجد اقتران شامل من S إلى $\mathcal{P}(S)$.

افرض أنه يوجد اقتران $f: S \rightarrow \mathcal{P}(S)$ بحيث f هو شامل. لكل $x \in S$، $f(x) \in \mathcal{P}(S)$ والذي هو نفس القول أن $f(x) \subseteq S$.

اجعل $T = \{x : x \in S, x \notin f(x)\}$. إذاً $T \subseteq S$ أي أن $T \in \mathcal{P}(S)$. لذلك $T = f(y)$ لبعض $y \in S$ ، لأن f شامل من S إلى $\mathcal{P}(S)$. الآن $y \in T$ أو $y \notin T$.

الحالة1.

$y \in T \Rightarrow y \notin f(y)$ (باستخدام تعريف T)

$\Rightarrow y \notin T$ (لأن $f(y) = T$)

لذلك الحالة 1 مستحيلة.

الحالة 2.

$$y \notin T \Leftarrow y \in f(y)$$ (باستخدام تعريف T)

$$\Leftarrow y \in T$$ (لأن $f(y) = T$)

لذلك الحالة 2 مستحيلة.

بما أن الحالتين مستحيلتين لدينا تناقض. لذلك فرضنا خاطئ ولذلك لا يوجد أي اقتران شامل من S إلى $\mathcal{P}(S)$. ولهذا $\mathcal{P}(S)$ ليست مكافئة لـ S . □

أ32.1.1 مساندة. إذا كانت S أي مجموعة فإن S مكافئة لمجموعة جزئية من $\mathcal{P}(S)$.

البرهان. عرِّف الاقتران $f: S \to \mathcal{P}(S)$ على الشكل $f(x) = \{x\}$ لكل $x \in S$. واضح أن f اقتران تقابل بين المجموعتين S و $\mathcal{P}(S)$. لذلك S مكافئة للمجموعة الجزئية f(S) من $\mathcal{P}(S)$. □

أ33.1.1 تمهيدية. إذا كانت S أي مجموعة غير منتهية فإن $\mathcal{P}(S)$ هي مجموعة غير معدودة.

البرهان. بما أن S غير منتهية فإن $\mathcal{P}(S)$ غير منتهية. بواسطة نظرية أ31.1.1، $\mathcal{P}(S)$ ليست مكافئة للمجموعة S.

افرض أن $\mathcal{P}(S)$ هي غير منتهية معدودة. إذا بواسطة تمهيدية أ11.1.1، مساندة أ32.1.1 وتمهيدية أ10.1.1، S غير منتهية معدودة. لذلك S و $\mathcal{P}(S)$ متكافئة وهذا تناقض. لذلك $\mathcal{P}(S)$ هي غير معدودة. □

تمهيدية أ33.1.1 توضح وجود مجموعات غير معدودة. على كل حال الشكاك يمكن أن يشعر أن المثال مخترع أو موضوع بطريقة احتيالية. لذلك نختم هذا الجزء بملاحظة أن المجموعات المهمة والمألوفة هي غير معدودة.

أ34.1.1 مساندة. مجموعة كل الأعداد الحقيقية في الفترة نصف المفتوحة $[1,2)$ ليستت معدودة.

البرهان. سوف نبين أن مجموعة الأعداد الحقيقية في $[1,2)$ لا يمكن وضعها بقائمة.

اجعل $L = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ أي مجموعة من الأعداد الحقيقية كل منهم يقع في المجموعة $[1,2)$. أكتب صيغهم العشرية على الشكل

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1.r_{11}r_{12}\ldots r_{1n}\ldots \\
r_2 &= 1.r_{21}r_{22}\ldots r_{2n}\ldots \\
&\vdots \\
r_m &= 1.r_{m1}r_{m2}\ldots r_{mn}\ldots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

تأمل العدد الحقيقي a المعرَّف على الشكل $1.a_1a_2\ldots a_n\ldots$ حيث لكل $n\in\mathbb{N}$،

$$a_n = \begin{cases} 1, & r_{nn} \neq 1 \\ 2, & r_{nn} = 1 \end{cases}$$

واضح أن $a_n \neq r_n$ ولذلك $a \neq r_n$ لكل $n\in\mathbb{N}$. لذلك a لا تظهر في أي مكان في القائمة L. ولهذا لا نستطيع ترقيم كل الأعداد الحقيقية في $[1,2)$ أي أن هذه المجموعة غير معدودة. □

أ35.1.1 نظرية. المجموعة $\mathbb{R}$ المكونة من كل الأعداد الحقيقية هي غير معدودة.

البرهان. افرض أن $\mathbb{R}$ معدودة. إذاً بواسطة تمهيدية أ11.1.1 مجموعة كل الأعداد الحقيقية في $[1,2)$ معدودة مما يناقض مساندة أ34.1.1 لذلك $\mathbb{R}$ غير معدودة. □

أ36.1.1 نتيجة. المجموعة $\mathbb{I}$ المكونة من كل الأعداد غير النسبية هي غير معدودة.

البرهان. افرض أن $\mathbb{I}$ معدودة. فإن $\mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعتين معدودتين $\mathbb{I}$ و $\mathbb{Q}$. بواسطة تمهيدية أ15.1.1، $\mathbb{R}$ معدودة و هذا تناقض. لذلك $\mathbb{I}$ غير معدودة. □

باستخدام برهان مشابه لذلك الذي في نتيجة أ36.1.1 نحصل على النتيجة التالية.

أ37.1.1 نتيجة. مجموعة كل الأعداد المبهمة هي غير معدودة. □

أ2.1 الأعداد الأصلية Cardinal Numbers

في الجزء الماضي عرّفنا غير المنتهي المعدود وغير المعدود واقترحنا بدون توضيح ماذا يمكن أن يقصد بأن المجموعات غير المعدودة "أكبر" من المجموعات غير المنتهية المعدودة. لتوضيح ماذا نعني بـ "أكبر" سوف نحتاج إلى النظرية التالية.

شرحنا يعتمد على ذلك الموجود في كتاب Halmos [96].

أ1.2.1 نظرية (Cantor-Schröder-Bernstein) لتكن S و T مجموعات. إذا كانت S مكافئة لمجموعة جزئية من T و T مكافئة لمجموعة جزئية من S فإن S مكافئة لـ T .

البرهان. بدون فقدان التعميم نستطيع أن نفرض أن S و T منفصلتين. ليكن $f:S\to T$ و $g:T\to S$ اقترانين واحداً لواحد. مطلوب منا أن نجد اقتران تماثل من S إلى T.

نقول أن العنصر s هو أصل (parent) العنصر $f(s)$ و $f(s)$ هو منحدر من الأصل (descendant) s . كذلك t هو أصل $g(t)$ و $g(t)$ منحدر من الأصل t . كل $s\in S$ يملك متتالية غير

منتهية من المنحدرات من أصول: $f(s)$ ، $g(f(s))$ ، $f\{g(f(s))\}$ ، وهكذا. نقول أن كل حد في هذه المتتالية هو سلف (ancestor) لكل الحدود التي تتبعه في المتتالية.

الآن اجعل $s \in S$. إذا تتبعنا أسلافه إلى الخلف بقدر الإمكان أحد الأشياء الثلاثة التالية يجب أن يحدث:

(i) قائمة كل السلف هي منتهية وتتوقف عند نقطة في S لا تملك سلف.

(ii) قائمة كل السلف هي منتهية وتتوقف عند نقطة في T لا تملك سلف.

(iii) قائمة كل السلف هي غير منتهية.

لتكن S_S هي مجموعة العناصر التي تنشأ في S أي أن S_S هي المجموعة $S \setminus g(T)$ بالإضافة إلى كل المنحدرات من أصولها في S. لتكن S_T هي مجموعة كل العناصر التي تنشأ في T أي أن S_T هي مجموعة كل العناصر في S المنحدرة من أصول في $T \setminus f(S)$. لتكن S_∞ هي مجموعة كل العناصر في S التي ليس لها أصول أو سلف. فإن S هي اتحاد ثلاث مجموعات منفصلة S_S،S_T و S_∞ بنفس الأسلوب T هي اتحاد ثلاث مجموعات منفصلة T_T،T_S و T_∞.

واضح أن تقييد الاقتران f على S_S هو اقتران تقابل من S_S إلى T_S.

الآن ليكن g^{-1} هو الاقتران النظير للاقترن g من T إلى $g(T)$. واضح أن تقييد g^{-1} على S_T هو اقتران تقابل من S_T إلى T_T.

أخيراً تقييد f على S_∞ هو اقتران تقابل من S_∞ إلى T_∞.

عرِّف $h: S \to T$ على الشكل

$$h(s)\begin{cases} f(s), s \in S_S \\ g^{-1}(s), s \in S_T \\ f(s), s \in S_\infty \end{cases}$$

إذاً h هو اقتران تقابل من S إلى T. لذلك S مكافئة لـ T . □

عملنا القادم هو أن نعرِّف ماذا نعني بـ"عدد أصلي".

تعاريف 2.2.1أ. العائلة $\aleph$ من المجموعات تسمى عدد أصلي "Cardinal number" إذا كانت تحقق الشروط:

(i) لتكن S و T مجموعات. إذا كانت S و T في $\aleph$ فإن S~T.

(ii) لتكن A و B مجموعات. إذا كانت A في $\aleph$ و B~A فإن B في $\aleph$.

إذا كانت $\aleph$ عدد أصلي و A مجموعة في $\aleph$ فإننا نكتب $card\ A = \aleph$.

تعاريف 2.2.1أ يمكن بالنظرة الأولى أن تظهر بأنها غريبة. العدد الأصلي يعرَّف كعائلة من المجموعات. لذلك دعنا ننظر إلى الزوج التالي من الحالات الخاصة:

إذا كانت A مجموعة تحوي عنصرين نكتب $card\ A = 2$ ؛ العدد الأصلي 2 هو عائلة كل المجموعات المكافئة للمجموعة $\{1,2\}$ أي عائلة كل المجموعات التي تحوي عنصرين.

إذا كانت S غير منتهية معدودة فإننا نكتب $card\ S = \aleph_o$ في هذه الحالة العدد الأصلي $\aleph_0$ هو عائلة كل المجموعات المكافئة لـ ℕ.

لتكن S و T مجموعات. فإن S مكافئة لـ T إذا وفقط إذا كان $card\ S = card\ T$.

تعاريف 3.2.1أ. العدد الأصلي للمجموعة ℝ يرمز له بالرمز c أي أن $card\ \mathbb{R} = c$. العدد الأصلي للمجموعة ℕ يرمز له بالرمز $\aleph_0$.

الآن نعرِّف ترتيب الأعداد الأصلية.

تعاريف 4.2.1أ. لتكن m و n أعداد أصلية. فإن العدد الأصلي m يسمى أقل أو يساوي n ، أي أن $m \le n$ ، إذا وجد مجموعات S و T بحيث $card\ S = m$ ، $card\ T = n$ و S تكافئ مجموعة جزئية من T. بالإضافة لذلك، العدد الأصلي m تسمى أقل ولا يساوي n ، أي أن m<n، إذا كان $m \le n$ و $m \ne n$.

بما أن $\mathbb{R}$ تملك $\mathbb{N}$ كمجموعة جزئية، $\text{card}\ \mathbb{R} = c$ و $\text{card}\ \mathbb{N} = \aleph_0$ و $\mathbb{R}$ ليست مكافئة لـ $\mathbb{N}$ فإننا مباشرة نستنتج النتيجة التالية.

أ5.2.1 تمهيدية. $\aleph_0 < c$. □

نعرف كذلك أن لأي مجموعة S ، S مكافئة لمجموعة جزئية من $\mathcal{P}(S)$ و S ليست مكافئة للعائلة $\mathcal{P}(S)$ الذي منه نحصل على النتيجة التالية.

أ6.2.1 نظرية. لأي مجموعة S ، $\text{card}\ S < \text{card}\ \mathcal{P}(S)$. □

التالي هو إعادة كتابة لنظرية Cantor-Schröder-Bernstein.

أ7.2.1 نظرية. لكن m و n أعداد أصلية. إذا كانت $m \le n$ و $n \le m$ فإن $m = n$. □

أ8.2.1 ملاحظة. نلاحظ أنه يوجد عدد غير منتهي من الأعداد الأصلية غير المنتهية. هذا واضح من حقيقة أن:

$$\aleph_0 = \text{card}\ \mathbb{N} < \text{card}\ \mathcal{P}(\mathbb{N}) < card\ \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big) < \cdots \qquad (*)$$ □

النتيجة التالية هي نتيجة مباشرة لنظرية أ6.2.1.

أ9.2.1 نتيجة. لا يوجد أكبر عدد أصلي. □

ملاحظاً أنه إذا كانت S مجموعة منتهية تملك n من العناصر فإن $\mathcal{P}(S)$ تملك 2^n من العناصر، من الطبيعي أن نقدم الرمز التالي.

10.2.1أ تعريف. إذا كانت S تملك عدد أصلي $\aleph$ فإن العدد الأصلي للعائلة $\mathcal{P}(S)$ يرمز له بالرمز $2^{\aleph}$.

لذلك نستطيع إعادة كتابة (*) أعلاه على الشكل

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \cdots \quad (**)$$

عندما ننظر إلى هذه المتتالية من الأعداد الأصلية هناك عدد من الأسئلة تظهر وتشمل

(1) هل $\aleph_0$ هو أصغر عدد أصلي غير منتهي؟

(2) هل c تساوي واحد من الأعداد الأصلية في هذه القائمة؟

(3) هل هناك أي عدد أصلي يقع بين $\aleph_0$ و $2^{\aleph_0}$ ولا يساويهما؟

هذه الأسئلة وخاصة (1) و (3) ليس من السهل إجابتهم. في الحقيقة تحتاج إلى نظرة حذرة ومتعمقة في خواص نظرية المجموعات. ليس من الممكن في هذا الملحق ان نناقش خواص نظرية المجموعات. على الرغم من ذلك سوف نشير إلى الأسئلة أعلاه لاحقاً في هذا الملحق.

نختم هذا الجزء بمطابقة الأعداد الأصلية لبعض المجموعات المألوفة.

11.2.1أ مساندة. لتكن a و b أعداد حقيقية حيث a<b. فإن

(i) $[0,1]\sim[a,b]$

(ii) $(0,1)\sim(a,b)$

(iii) $(0,1)\sim(1,\infty)$

(iv) $(-\infty,-1)\sim(-2,-1)$

(v) $(1,\infty)\sim(1,2)$

(vi) $\mathbb{R}\sim(-2,2)$

(vii) $\mathbb{R}\sim(a,b)$

برهان مختصر. (i) تبرهن بملاحظة أن $f(x)=a+bx$ يعرِّف اقتران تماثل من $[0,1]$ إلى $[a,b]$.
(ii) و(iii) تثبت بنفس الأسلوب بإيجاد الاقترانات المناسبة. (iv) تثبت باستخدام (iii) و (ii). (v) تنتج من (iv). (vi) تنتج من (iv) و (v) بملاحظة أن $\mathbb{R}$ هي اتحاد المجموعات المنفصلة $(-\infty,-1)$، $[-1,1]$ و $(1,\infty)$. (vii) تنتج من (vi) و(ii). □

أ12.2.1 تمهيدية. لتكن a و b أعداد حقيقية حيث a<b. إذا كانت S أي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ بحيث $(a,b)\subseteq S$ فإن $\text{card } S = c$. بشكل خاص $card\ (a,b) = card\ [a,b] = c$.

البرهان. باستخدام مساندة أ11.2.1 لاحظ أن

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } (a,b) \le \text{card } [a,b] \le \text{card } \mathbb{R}$$

لذلك $\text{card } (a,b) = \text{card } [a,b] = \text{card } \mathbb{R} = c$ □

أ13.2.1 تمهيدية. إذا كانت $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة كل النقاط في الفضاء الإقليدي فإن $\text{card } \mathbb{R}^2 = c$.

برهان مختصر. باستخدام تمهيدية أ12.2.1، $\mathbb{R}$ مكافئة للفترة نصف المفتوحة $[0,1)$ ومن السهولة إثبات أنه يكفي إثبات أن $[0,1)\times[0,1)\sim[0,1)$.

عرِّف $f:[0,1)\to[0,1)\times[0,1)$ بواسطة $f(x)$ هي النقطة $(x,0)$. فإن f هو اقتران واحد لواحد من $[0,1)$ إلى $[0,1)\times[0,1)$ ولذلك $c = card\ [0,1) \le card\ [0,1)\times[0,1)$.

باستخدام نظرية Cantor-Schröder-Bernstein يكفي أن نجد اقتران واحد لواحد g من $[0,1)\times[0,1)$ إلى $[0,1)$. عرِّف

$$g\big((0.a_1a_2\ldots a_n\ldots,\ 0.b_1b_2\ldots b_n\ldots\big) = 0.a_1,b_1a_2b_2\ldots a_nb_n\ldots$$

واضح أن g معرَّف حسناً (لأن كل عدد حقيقي في $[0,1)$ يملك تعبير عشري وحيد لا ينتهي بـ $9\ldots99\ldots$) وهو واحد لواحد وهذا يكمل البرهان.

□

3.1أ الحساب الأصلي Cardinal Arithmetic

نبدأ مع تعريف جمع الأعداد الأصلية. بالتأكيد عندما تكون الأعداد الأصلية منتهية هذا التعريف يتفق مع جمع الأعداد المنتهية.

1.3.1أ تعريف. لتكن α و β أي أعداد أصلية واختار مجموعات منفصلة A و B بحيث $card\ A=\alpha$ و $card\ B=\beta$. فإن مجموع الأعداد الأصلية α و β يرمز له بالرمز $\alpha+\beta$ ويساوي $card\ (A\cup B)$.

2.3.1أ ملاحظة. قبل معرفة أن التعريف أعلاه له معنى وبشكل خاص لا يعتمد على اختيار المجموعات A و B ، من الضروري أن نثبت أنه إذا كانت A_1 و B_1 مجموعات منفصلة و A و B مجموعات منفصلة بحيث $card\ A=card\ A_1$ و $card\ \mathrm{B}=card\ B_1$ فإن $A\cup B\sim A_1\cup B_1$ أي أن $card\ (A\cup B)=card\ (A_1\cup B_1)$. هذا عمل مباشر ولذلك يترك كتمرين. □

3.3.1أ تمهيدية. لأي أعداد أصلية α ، β و γ :

(i) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ؛

(ii) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$ ؛

(iii) $\alpha+0=\alpha$ ؛

(iv) إذا كانت $\alpha\le\beta$ فإن $\alpha+\gamma\le\beta+\gamma$.

البرهان. تمرين. □

4.3.1أ تمهيدية.

(i) $\aleph_o+\aleph_o=\aleph_o$ ؛

(ii) $c+\aleph_o=c$ ؛

(iii) $c+c=c$ ؛

(iv) لأي عدد أصلي منتهي n ، $n+\aleph_o=\aleph_o$ و $n+c=c$.

البرهان.

(i) الترتيب 1، -1، 2، -2، ...، n، -n، ... يبين أن اتحاد المجموعتين غير المنتهيتين المعدودتين $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة السالبة هي مجموعة غير منتهية معدودة.

(ii) ملاحظاً أن $[-2,-1] \cup \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$، نرى أن

$$\text{card}\,[-2,-1] + \text{card}\,\mathbb{N} \leq \text{card}\,\mathbb{R} = c.$$

لذلك

$$c = \text{card}\,[-2,-1] \leq \text{card}\,([-2,-1] \cup \mathbb{N}) = \text{card}\,[-2,-1] + \text{card}\,\mathbb{N} = c + \aleph_0 \leq c$$

(iii) لاحظ أن $c \leq c + c = card\big((0,1) \cup (1,2)\big) \leq card\mathbb{R} = c$، والذي منه تنتج النتيجة المطلوبة.

(iv) لاحظ أن $\aleph_o \leq n + \aleph_o \leq \aleph_o + \aleph_o = \aleph_o$ و $c \leq n + c \leq c + c = c$ ، والذي منه النتيجة تتبع. □

الآن نعرِّف ضرب الأعداد الأصلية.

تعريف 5.3.1أ. لتكن α و β أي أعداد أصلية. اختار مجموعات منفصلة A و B بحيث $card\ A = \alpha$ و $card\ B = \beta$. فإن ضرب العددين α و β يرمز له بالرمز $\alpha\beta$ ويساوي $card\ (A \times B)$.

كما في حالة جمع الأعداد الأصلية من الضروري ولكنه روتيني أن نختبر في تعريف 5.3.1أ أن $\alpha\beta$ لا يعتمد على اختيار محدد للمجموعات A و B .

تمهيدية 6.3.1أ. لأي أعداد أصلية α ، β و γ

(i) $\alpha\beta = \beta\alpha$ ؛

(ii) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ ؛

(iii) $1.\alpha = \alpha$ ؛

(iv) $0.\alpha = 0$ ؛

(v) $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ ؛

(vi) لأي عدد أصلي منتهي n، $\alpha + \dots + \alpha + \alpha = n\alpha$ (n من المرات)؛

(vii) اذا كانت $\alpha \le \beta$ فإن $\alpha\gamma \le \beta\gamma$.

البرهان. تمرين. □

7.3.1أ تمهيدية.

(i) $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$

(ii) $cc = c$

(iii) $c\aleph_0 = c$

(iv) لأي عدد أصلي منتهي n, $n\aleph_0 = \aleph_0$ و $nc = c$.

برهان مختصر. (i) تتبع من تمهيدية 16.1.1أ في حين أن (ii) تتبع من تمهيدية 13.2.1أ لرؤية (iii) لاحظ أن $c = c.1 \le c\aleph_0 \le cc = c$. برهان (iv) هو كذلك مباشر. □

الخطوة التالية في حساب الأعداد الأصلية هو تعريف أسس الأعداد الأصلية أي إذا كانت α و β أعداد أصلية فإننا نرغب في تعريف α^β .

8.3.1أ تعاريف. لتكن α و β أعداد أصلية و A و B مجموعات بحيث $card\ A=\alpha$ و $card\ B=\beta$. مجموعة كل الاقترانات f من B إلى A يرمز لها بالرمز A^B . بالإضافة لذلك، α^β تُعرَّف لتكون $card\ A^B$.

مرة أخرى نحتاج أن نختبر أن التعريف معقول أي أن α^β لا تعتمد على اختيار المجموعات A و B . كذلك نختبر إذا كانت n و m أعداد أصلية منتهية، A مجموعة تحوي n من العناصر و B مجموعة تحوي m من العناصر فإنه يوجد بالضبط n^m من الاقترانات المختلفة من B إلى A.

كذلك نحتاج أن نذكر أمراً آخر له علاقة: إذا كانت α عدد أصلي و A مجموعة بحيث $card\ A=\alpha$ فإن لدينا تعريفين مختلفين لـ 2^α . التعريف أعلاه يقول أن 2^α هي العدد الأصلي لمجموعة كل الاقترانات من

A إلى المجموعة التي تحتوي عنصرين $\{0,1\}$. على الجانب الآخر تعريف أ10.2.1 يعرِّف 2^{α} لتكون $card\,(\mathcal{P}(A))$. يكفي أن نجد اقتران تماثل θ من $\{0,1\}^{A}$ إلى $\mathcal{P}(A)$. ليكن $f \in \{0,1\}^{A}$. فإن $f : A \to \{0,1\}$. عرِّف $\theta(f) = f^{-1}(1)$. إثبات أن θ اقتران تماثل تُرك كتمرين.

أ9.3.1 تمهيدية. لأي أعداد أصلية α ، β و γ :

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\lambda}$ ؛

(ii) $(\alpha\beta)^{\gamma} = \alpha^{\gamma}\beta^{\gamma}$ ؛

(iii) $(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{(\beta\gamma)}$ ؛

(iv) $\alpha \le \beta$ تعطي $\alpha^{\gamma} \le \beta^{\gamma}$ ؛

(v) $\alpha \le \beta$ تعطي $\gamma^{\alpha} \le \gamma^{\beta}$.

البرهان. تمرين. □

بعد تعريف أ10.2.1 طرحنا ثلاثة أسئلة. نحن الآن في موضع نستطيع فيه الإجابة عن السؤال الثاني من هذه الأسئلة.

أ10.3.1 مساندة. $c = \aleph_{o}^{\aleph_{o}}$.

البرهان. لاحظ أن $card\ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0{}^{\aleph_0}$ و $card\ (0,1) = c$. بما أن الاقتران $f\colon (0,1) \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ المعطى على الشكل $f(0.a_1a_2...a_n...) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ هو واحد لواحد ينتج أن $c \le \aleph_{o}^{\aleph_{o}}$.

بواسطة نظرية Cantor-Schröder-Bernstein لإعمال البرهان يكفي أن تجد اقتران واحد لواحد g من $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ إلى $(0,1)$. إذا كان $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ هو أي عنصر في $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ فإن كل $a_i \in \mathbb{N}$ ولذلك نستطيع أن نكتب $a_i = ..., a_{in}a_{i_{(n-1)}}...a_{i2}a_{i1}$ حيث لبعض $M_i \in \mathbb{N}$ ، $a_{im} = 0$ ، لكل $n > M_i$ [على سبيل المثال $187 = ...00...0187$ ولذلك إذا كانت $a_i = 187$ فإن $a_{i1} = 7$ ، $a_{i2} = 8$ ، $a_{i3} = 1$ و $a_{in} = 0$ حيث $n > M_i = 3$. عرِّف الاقتران g على الشكل

$$g((a_1,a_2,...,a_n,...)) = 0.a_{11}a_{12}a_{21}a_{13}a_{22}a_{31}a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{16}...$$

(قارن هذا مع برهان مساندة 13.1.1أ.)

واضح أن g هو واحد لواحد مما يكمل البرهان. □

الآن نذكر نتيجة جميلة أثبتت أولاً بواسطة Georg Cantor.

11.3.1أ نظرية. $2^{\aleph_0} = c$.

البرهان. أولاً لاحظ أن $c = \aleph_o^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}$ ، بواسطة مساندة 10.3.1أ. لذلك يجب أن نثبت أن $c \leq 2^{\aleph_0}$. لعمل ذلك يكفي أن نجد اقتران واحد لواحد f من المجموعة $[0,1)$ إلى $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. كل عنصر x في $[0,1)$ يملك تمثيل ثنائي $x = 0.x_1x_2...x_n...$ ، حيث كل x_i تساوي 0 أو 1.

التمثيل الثنائي وحيد ما عدا التمثيلات التي تنتهي بسلسلة من الرقم 1؛

$1/4 = 0.0100...0... = 0.0011...1...$.

مشترطين أن في كل مثل هذه الحالات نختار التمثيل مع سلسلة من الأصفار مفضلين ذلك على سلسلة من الرقم 1، تمثيل الأرقام في $[0,1)$ هو وحيد. نعرِّف الاقتران $f:[0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ الذي يصور $x \in [0,1)$ إلى الاقتران $f(x):\mathbb{N} \to \{0,1\}$ المعطى على الشكل $f(x)(n) = x_n$ ، $n \in \mathbb{N}$. لرؤية أن f واحد لواحد تأمل أي x و y في $[0,1)$ حيث $x \neq y$. إذاً $x_m \neq y_m$ لبعض $m \in \mathbb{N}$. لذلك $f(x)(m) = x_m \neq y_m = f(y)(m)$. لذلك الاقترانين $f(x):\mathbb{N} \to \{0,1\}$ و $f(y):\mathbb{N} \to \{0,1\}$ غير متساويين وبما أن x و y عشوائيين (غير متساويين) في $[0,1)$، ينتج أن f في الواقع واحد لواحد كما هو مطلوب. □

12.3.1أ نتيجة. إذا كانت α عدد أصلي بحيث $2 \leq \alpha \leq c$ فإن $\alpha^{\aleph_0} = c$.

البرهان. لاحظ أن $c = 2^{\aleph_0} \leq \alpha^{\aleph_0} \leq c^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$. □

ملحق 2: شخصيات تبولوجية Topology Personalities

المصدر للمادة الموجودة في هذا الملحق هو

The Mac Tutor History of Mathematics Archive [206] و Bourbaki [30]. كل المعلومات في هذا الجزء يجب أن تعالج بأسلوب يدل على الاقتباس من هذه المصادر، على الرغم من ذلك في بعض الحالات قمت بتعديل بعض الكلمات قليلاً ووضعت هنا فقط المادة التي أعتقد أن لها الصلة بهذا الكتاب.

René Louis Baire

ولد René Louis Baire في باريس، فرنسا في 1874. في 1905 عُيِّن في كلية العلوم في Dijon وفي 1907 رُفِّع إلى أستاذ في التحليل. تعب في 1925 بعد عدة سنوات من المرض ومات في 1932. التقارير على تدريسه كانت مختلفة، يمكن بسبب حالته الصحية: "البعض وصف محاضراته بأنها واضحة جداً ولكن آخرين ادعوا بأن ما تعلموه كان صعباً جداً ويعتمد على قدرة الإنسان على الاستيعاب".

Stefan Banach

ولد Stefan Banach في أوستروسكو Ostrowsko في بولندا في 1892. أعطى محاضرات في جامعة Lvov Technical من عام 1920 في المكان الذي أكمل فيه الدكتوراة حيث كان له دور في مولد التحليل الاقتراني. في أطروحته المكتوبة في 1920 عرِّف ما يعرف اليوم بفضاء بناخ. الاسم "فضاء بناخ" ابتدع بواسطة Fréchet. في 1924 رفِّع إلى رتبة أستاذ. بالإضافة لاستمراره بإنتاج الأبحاث المهمة كتب كتباً دراسية في الحساب، الهندسة والجبر للمدارس الثانوية. نظرية اقترانات بناخ المفتوحة في 1929 تستخدم مفاهيم نظرية المجموعات التي وضعت بواسطة Baire في أطروحته عام 1899. تناقض Banach-Tarski ظهر في بحث مشترك

للرياضيين (Banach و Alfred Tarski) في 1926 في المجلة Fundamenta Mathematicae حيث كان عنوان البحث

Sur la decomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent.

التناقض المحيِّر بين أن الكرة يمكن أن تقسم إلى مجموعات جزئية يمكن تثبيتها معاً لعمل كرتين كل منهما مطابق للكرة الأولى. مسلمة الاختيار ضرورية لتعريف التحليل (التوزيع إلى أجزاء) وحقيقة أنه يمكن أن نعطي مثل هذه النتيجة غير المتوقعة يجعل بعض الأسئلة الرياضية تظهر. تناقض Banach-Tarski كان مساهمة رئيسية للعمل الذي يعمل على مسلمات نظرية المجموعات في ذلك الوقت. في 1929 بدأ مع Hugo Dyonizy Steinhaus بمجلة Studia Mathematica وكان Banach و Steinhaus هم المحرر الأول لهذه المجلة. سياسة التحرير كانت تسليط الضوء على البحث في التحليل الاقتراني والمواضيع ذاتالعلاقة. الطريقة التي عمل بها Banach كانت غير عادية. أحب أن يجري البحث الرياضي مع رفقائه في Lvov. Stanislaw Ulam يذكر عدة جلسات في Lovov (انظر Mauldin [151]): "من الصعب مجارات أو التغلب على Banach خلال هذه الجلسات. ناقشنا مسائل صعبة وعادة بدون حلول حتى بعد عدة ساعات من التفكير. في اليوم التالي كان Banach يظهر مع عدة أوراق صغيرة تحوي خطوط عريضة لبراهين أتمها". في 1939، قبل بداية الحرب العالمية الثانية اختير Banach كرئيس للجمعية الرياضية البولندية. الاحتلال النازي لـ Lvov في شهر حزيران 1941 جعل Banach يعيش تحت ظروف صعبة جداً. نحو نهاية عام 1941 عمل بناخ في تغذية القمل بقانون ألمانيا متعاملاً مع الأمراض المعدية. تغذية القمل كان عمله خلال الوقت المتبقي للاحتلال النازي لـ Lvov حتى تموز 1944. توفي بناخ في 1945.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer

ولد Luitzen Egbertus Jan Brouwer في 1881 في روتردام في هولندا. عندما كان في مرحلة البكالوريوس في جامعة أمستردام أثبت نتائج رئيسية على الحركات المتصلة في الفضاءات ذات الأربعة أبعاد. حصل على درجة الماجستير في 1904. أطروحة الدكتوراة لـ Brouwer نشرت في 1907 وعملت مساهمة رئيسية في المحاورة المستمرة بين Bertrand Russell و Jules Henri Poincaré المتعلقة بالأساسات المنطقية للرياضيات. وجد Brouwer بسرعة أن أفكاره الفلسفية أثارت الخلاف. وضع Brouwer جهداً كبيراً جداً في دراسة مسائل مختلفة التي هاجم فيها بسبب أنها ظهرت في قائمة مسائل David Hilbert التي اقترحت في كونجرس باريس الدولي لعلماء الرياضيات في 1900. بشكل خاص Brouwer هاجم مسألة Hilbert الخامسة المتعلقة بنظرية زمر لي. خاطب الكونجرس الدولي لعلماء الرياضيات في روما في 1908 عن الأساس التبولوجي لزمر لي.

اختير Brouwer للأكاديمية الملكية للعلوم في 1912 وفي نفس السنة أشير إليه بالأستاذ الاستثنائي لنظرية المجموعات، نظرية الاقترانات والبديهيات في جامعة أمستردام واحتفظ بهذا المركز حتى تقاعد في 1951. Bartel Leendert van der Waerdn الذي درس في أمستردام من 1919 إلى 1923 كتب عن Brouwer كمحاضر: Brouwer جاء [إلى الجامعة] لإعطاء فصوله لكنه عاش في لارن (Laren). جاء فقط مرة في الأسبوع. عموماً ذلك ما كان يمكن أن يَسمح له – هو كان يجب أن يعيش في أمستردام- ولكن جعل له استثناء... في أحد المرات قاطعته خلال المحاضرة لأسأله سؤالاً. قبل درس الأسبوع اللاحق مساعده جاء إلي ليقول أن Brouwer لا يريد أسئلة تطرح عليه في المحاضرة. هو فقط لا يريد الأسئلة لأنه دائماً ينظر إلى السبورة ولا ينظر إلى الطلاب. على الرغم من أن مساهماته البحثية الأكثر أهمية كانت في التبولوجيا إلا أنه لم يعط أي مواد في التبولوجيا، ولكن دائماً يعطي مواد تتعلق فقط بالحدسية أو البديهية. بدا أنه لم يكن مقتنعاً إلى حد بعيد بنتائجه في التبولوجيا بسبب أنها كانت غير صحيحة من الناحية الحدسية، وحاكم كل شيء عمله قبل ذلك، وكانت نتيجته العظمى، خاطئ طبقاً لفلسفته. كما هو مذكور في هذا التقرير، Brouwer كان مساهماً كبيراً في التبولوجيا ويعتبر من قبل الكثير أنه مؤسسها. عمل تقريباً كل عمله في التبولوجيا مبكراً في مهنته بين 1909 و 1913. اكتشف وصف الاقترانات التبولوجية لفضاء الضرب وعدد من نظريات النقطة الثابتة. نظريته الأولى في النقطة الثابتة، التي بينت أن الاقترانات الحافظة للتوجيه المتصلة والواحدة لواحد التي تصور الكرة لنفسها هي دائماً تثبت على الأقل نقطة واحدة، نتجت من بحثه على مسألة Hilbert الخامسة. المثبت أصلاً للكرة في البعد 2، Brouwer فيما بعد عمم النتيجة للكرات في الأبعاد n. نتيجة أخرى من النتائج ذات الأهمية الاستثنائية كانت إثبات ثبات البعد التبولوجي. بالإضافة إلى إثبات نظريات مهمة جداً في التبولوجيا، Brouwer كذلك طور طرقاً أصبحت طرقاً قياسية ورئيسية في الموضوع. بشكل خاص استعمل التقريب البسيط الذي قرب الاقترانات المتصلة باقترانات خطية متقطعة. قدم كذلك فكرة درجة الاقتران، عمم نظرية منحنى جوردان إلى فضاء بعدة n وعرَّف فضاءات تبولوجية في 1913. Van der Waerdn في الاقتباس أعلاه قال بأن Brouwer لا يحاضر عن نتائجه التبولوجية الخاصة لأنها لا تتلاءم مع الحدس الرياضي. في الحقيقة Brouwer معروف جيداً للعديد من علماء الرياضيات كمؤسس لمذهب الحدس الرياضي. في الحقيقة Brouwer معروف جيداً للعديد منعلماء الرياضيات كمؤسس لمذهب الحدس الرياضي الذي يظهر الرياضيات كصياغة تراكيب عقلية محكومة بقوانين واضحة. اختلف مذهبه جوهرياً عن شكلية Hilbert ومنطقية Russell. أطروحته للدكتوراة في 1907 هاجمت الأساس المنطقي للرياضيات وعملت البداية للمدرسة الحدسية في بحثه عام 1908 المعنون عدم الثقة بالمبادئ المنطقية، Brouwer رفض في البراهين الرياضية مبدأ المنتصف المستثنى الذي يقول أن أي عبارة رياضية إما أن تكون صحيحة أو خاطئة. في 1918 نشر نظرية مجموعات طُوِّرت بدون استعمال مبدأ المتصف المستثنى. لقد جعل فارس في طلب الأسد الهولندي في 1932. لقد كان نشيطاً وأسس مجلة جديدة وأصبح المحرر المؤسس لمجلة Compositio Mathematica التي بدأت النشر في 1934. أثناء الحرب العالمية الثانية Brouwer كان نشيطاً في مساعدة المقاومة الهولندية وبشكل خاص دعم الطلاب اليهود أثناء هذه الفترة الصعبة. بعد التقاعد في 1951، Brouwer حاضر في جنوب أفريقيا في 1952 والولايات المتحدة وكندا في 1953. في 1962 وعلى الرغم من أنه كان في الثمانين من عمره فقد عرض عليه منصب في مونتانا (Montana). مات في 1966 في بلاريكم في هولندا نتيجة لحادث مرور.

Maurice Fréchet

ولد Maurice Fréchet في فرنسا في 1878 ووضع مفاهيم الفضاء المتري والتراص (انظر الفصل السابع) في أطروحته في 1906. حصل على مراكز في عدد من الجامعات من ضمنها جامعة باريس من 1928-1948. بحثه تضمن مساهمات مهمة في التبولوجيا، الاحتمالات والإحصاء. مات في 1973.

Felix Hausdorff

أحد العلماء البارزين في الرياضيات للنصف الأول من القرن العشرين كان Felix Hausdorff. لقد عمل عملاً رائداً في وضع أرضية في التبولوجيا، الفضاءات المترية، التحليل الاقتراني ونظرية المجموعات. ولد في Breslau في ألمانيا – الآن Wrocław، بولندا – في 1868. تخرج من، وعمل في، جامعة Leipzig حتى 1910 عندما قبل دكتور كرسي في جامعة بون. في 1935 كيهودي أجبر لترك موقعه الأكاديمي هناك من قبل قوانين نوريمبيرج النازية. واصل إجراء البحث في الرياضيات لعدة سنوات ولكنه فقط يتمكن من نشر أبحاثه خارج ألمانيا. في 1942 أبلغ بأنه يجب عليه الذهاب إلى حجز المعسكر ولكن بدلاً من ذلك انتحر هو وزوجته وأخته.

Wactaw Sierpiński

ولد Wactaw Sierpiński في 1882 في وارسو، الإمبراطورية الروسية – الآن بولندا. بعد خمسون عاماً من تخرجه من جامعة وارسو، نظر Sierpiński للوراء إلى المسائل التي كانت عنده مثل القطب الذي يأخذ درجته وذلك كان في وقت الاحتلال الروسي: ...كان يجب علينا أن نحضر محاضرة سنوية عن اللغة الروسية... كل واحد من الطلبة كانت لديه مسألة شرف أن تكون عنده اسوأ النتائج في هذا الموضوع. ... أنا لم أجب أي سؤال... وأنا حصلت على علامة غير مرضية... نجحت بكل امتحاناتي ولكن قارئ النتائج قال بأن يجب أن آخذ امتحان إعادة وما عدا ذلك فإنني لن أكون قادراً على الحصول على درجة مرشح في علم الرياضيات... أنا قاطعته قائلاً بأن هذه ستكون الحالة الأولى في جامعتنا بأن يحصل شخص على علامات ممتازة في كل المواضيع ولديه قبول لأطروحته وميدالية ذهبية ولا يحصل على درجة مرشح في علم الرياضيات ولكن درجة أدنى، درجة "طالب حقيقي" (بغرابة تلك كانت ما يدعى الدرجة الأدنى) وذلك بسبب علامة واحدة منخفضة في اللغة الروسية. Sierpiński كان محظوظاً لأن معلن النتائج غير علامته في اللغة الروسية إلى "جيد" حتى يتمكن من الحصول على درجته. Sierpiński تخرج في 1904 وعمل كمعلم مدرسة للرياضيات والفيزياء في مدرسة بنات. على أية حال عندما أغلقت المدرسة بسبب ضربه بهجوم عسكري ذهب إلى Krakòv لدراسة الدكتوراه في جامعة Jagiellonian في Krakòv. حصل على الدكتوراه وعين في جامعة Lvov في 1908. في 1907 أصبح Sierpiński للمرة الأولى مولعاً في نظرية المجموعات. دخل خلال نظرية تقول أن النقاط في المستوى يمكن أن تحدد من خلال إحداثي وحيد. كتب لـTadeusz Banachieviecz سائلاً إياه كيف مثل هذه النتيجة أن تكون ممكنة. استلم كلمة واحدة (جورج) "كانتور". بدأ Sierpiński دراسة نظرية المجموعات وفي 1909 أعطى أول مادة دراسية مخصصة بالكامل لنظرية المجموعات. خلال السنوات من 1908 إلى 1914 عندما كان يدرس في جامعة Lvov نشر ثلاثة كتب بالإضافة للعديد من الأبحاث. هذه الكتب كانت نظرية الأعداد غير النسبية (1910)، خلاصة نظرية المجموعات (1912) ونظرية الأعداد (1912). عندما بدأت الحرب العالمية الأولى في 1914، صادف أن يكون Sierpiński وعائلته في روسيا. حُجز Sierpiński في Viatka. على أية حال

Dimitri Feddvovich Egorov و Nikolai Nikolaevich Luzin سمعا بأنه كان قد حُجر فرتبا له لكي يسمح له الذهاب إلى موسكو. أمضى Sierpiński بقية سنوات الحرب في موسكو يعمل مع Luzin. معاً بدآ دراسة المجموعات التحليلية. عندما انتهت الحرب العالمية الأولى في 1918 عاد Sierpiński إلى Lvov. على أية حال قليلاً بعد ذلك قبل بموقع في جامعة وارسو. في 1919 رفع إلى رتبة أستاذ ماكثاً بقية حياته هناك. في 1920 Sierpiński مع طالبه Stefan Mazurkiewicz أوجدا المجلة المهمة في الرياضيات Fundamenta Mathematica. كان Sierpiński محرراً للمجلة التي تخصصت في الأبحاث على نظرية المجموعات. من ذلك الوقت عمل Sierpiński في الغالب بنظرية المجموعات وكذلك التبولوجيا والاقترانات على المتغيرات الحقيقية. في نظرية المجموعات عمل مساهمات مهمة في مسلمة الاختيار وفرضيات الاستمرار. درس منحنى Sierpiński الذي يصف ممر مغلق يحوي كل النقاط الداخلية لمربع – "منحنى مالئ-الفراغ". طول المنحنى مالانهاية في حين المساحة المحصورة بواسطته هي 5/12 من تلك التي للمربع – نمطين هندسيين- زاوية Sierpiński وسجادة Sierpiński- سُميا بعده. واصل Sierpiński التعاون مع Luzin في دراسة المجموعات التحليلية والإسقاطية. كان Sierpiński مرتبطاً إلى حد كبير بتطور الرياضيات في بولندا. في 1921 كان له الشرف بانتخابه عميداً للكلية في جامعة وارسو. في 1928 أصبح نائب رئيس جميعة وارسو العلمية وانتخب رئيساً للجمعية الرياضية البولندية. في 1939 الحياة في وارسو تغيرت بشكل مثير بوصول الحرب العالمية الثانية. استمر Sierpiński بالعمل في جامعة وارسو تحت الأرض بينما شغله الرسمي كان كاتب في مكاتب المجلس في وارسو. منشوراته استمرت لأنه استطاع إرسال الأبحاث إلى إيطاليا. كل من هذه الأبحاث كانت تنتهي بالكلمات: براهين هذه النظريات ستظهر في نشر Fundamenta Mathematica والذي فهم منه كل واحد أن "بولندا ستبقى". بعد انتفاضة 1944 أحرق النازيون بيته محطمين مكتبته ورسائله الشخصية. تكلم Sierpiński عن الأحداث المأساوية للحرب من خلال محاضرة أعطاها في 1945. تكلم عن طلابه الذين ماتوا بالحرب: في شهر تموز 1941 واحد من طلابي القدامى يدعى Stanislaw Ruziewics قتل. كان أستاذ متقاعد في جامعة Jan Kazimierz في Lvov... عالم رياضيات بارز ومعلم ممتاز. في 1943 أحد أكثر طلابي البارزين Stanislaw Saks قُتل. كان أستاذ مساعد في جامعة وارسو وأحد الخبراء البارزين في العالم في نظرية التكامل... في 1942 طالب آخر من طلابي كان Adolf Lindenbaum قُتل. كان أستاذ مساعد في جامعة وارسو ومؤلف مميز في الأعمال على نظرية المجموعات. بعد تسجيل الزملاء الذين قتلوا في الحرب مثل Juliusz Pawel وآخرون الذين ماتوا كنتيجة للحرب مثل Samuel Dickstein و Stanislaw Zaremba استمر Sierpiński بالقول: هكذا أكثر من نصف الرياضيين الذين حاضروا في مدارسنا الأكاديمية قتلوا. إنها خسارة كبيرة للرياضيات البولندية التي كانت تطوراً إيجابياً في بعض الحقول مثل نظرية المجموعات والتبولوجيا... بالإضافة إلى الخسائر الشخصية الرياضيات البولندية عانت بسبب الهمجية الألمانية أثناء الحرب وكذلك عانت بسبب فقدان المواد. لقد حرقوا مكتبة جامعة وارسو التي تحوي عدة آلاف من المجلدات، المجلات، كتب الرياضيات والآلاف من مطبوعات الأعمال الرياضية المعمولة من قبل مؤلفين مختلفين. تقريباً كل طبعات مجلة Fundamenta Mathematica (32 عدد) وعشر أعداد من Mathematical Monograph أحرقت بالكامل. المكتبات الخاصة للأساتذة الأربعة في الرياضيات في جامعة وارسو وأيضاً عدد من مخطوطات أعمالهم والكتيبات التي كتبت خلال الحرب أحرقت أيضاً. كان Sierpiński من المؤلفين المدهشين حيث كتب 724 بحثاً و 50 كتاباً. تقاعد في 1960 كأستاذ في جامعة وارسو لكنه واصل إعطاء حلقة دراسية على نظرية الأعداد في

الأكاديمية البولندية للعلوم حتى 1967. واصل عمله التحريري أيضاً كرئيس تحرير لمجلة Acta Arithmetica الذي بدأه في 1958 وكعضو لجنة تحرير للمجلات Rendiconti dei Circolo Matimatico di Palermo، Compositio Mathematica و Zentralblatt für Mathematik. Andrzej Rotkiewicz الذي كان طالباً لـ Sierpiński كتب: كان Sierpiński عنده صحة جيدة جداً وطبيعة مبتهجة... هو يمكن أن يعمل تحت أي شروط.

مات Sierpiński في 1969.

ملحق 3: نظرية الفوضى وأنظمة القوى المحركة

Chaos Theory and Dynamical Systems

مقدمة

في هذا الملحق نعطي مقدار قليل عن أنظمة القوى المحركة ونظرية الفوضى. معظم المادة تغطى بطريقة التمارين. بعض أجزاء هذا الملحق يحتاج بعض المعرفة في التفاضل والتكامل. إذا لم تدرس تفاضل وتكامل تستطيع أن تقفز عن هذا الملحق أو أن تتصفحه فقط كحب استطلاع.

1.3أ تكرارات ومدارات Iterates and Orbits

1.1.3أ تعريف. لتكن S مجموعة و f اقتران من المجموعة S إلى نفسها، أي أن $f: S \to S$. الاقترانات f^1 ، f^2 ، f^3 ،...، f^n ،... تعرَّف استقرائياً على الشكل:

$f^1: S \to S$ يعطى على الشكل $f^1(x) = f(x)$ أي أن $f^1 = f$ ؛

$f^2: S \to S$ يعطى على الشكل $f^2(x) = f\big(f(x)\big)$ أي أن $f^2 = fof$ ؛

$f^3: S \to S$ يعطى على الشكل $f^3(x) = f\big(f(f(x))\big)$ أي أن $f^3 = fofof = fof^2$ ؛

وإذا كان f^{n-1} معلوماً فإن

$f^n: S \to S$ يعرَّف على الشكل $f^n(x) = f\big(f^{n-1}(x)\big)$ أي أن $f^n = fof^{n-1}$.

كل من الاقترانات f^1 ، f^2 ، f^3 ،...، f^n ،... يسمى تكرار (iterate) للاقتران f .

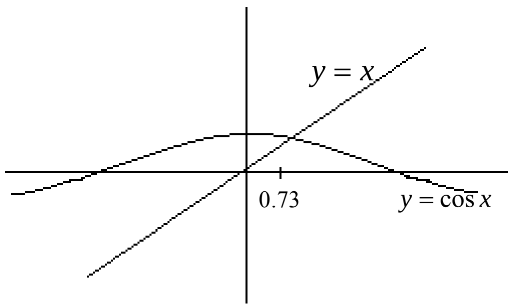
لاحظ أن $f^{n+m} = f^n o f^m$ ، حيث $n, m \in \mathbb{N}$.

2.1.3أ تعاريف. ليكن f اقتران من S إلى S. إذا كانت $x_o \in S$ فإن المتتالية x_o ، $f(x_o)$ ، $f^2(x_o)$ ،...، $f^n(x_o)$ ،... تسمى مدار (orbit) للنقطة x_o . النقطة x_o تسمى نواة (Seed) المدار.

هناك عدة احتمالات للمدارات، ولكن أكثر الأنواع أهمية هو النقطة الثابتة.

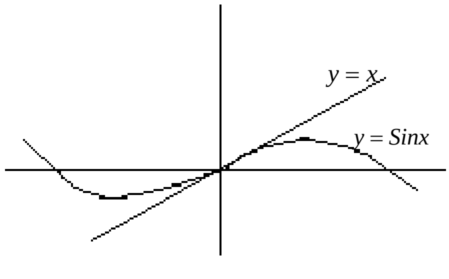
3.1.3أ تعريف. ليكن f اقتران من المجموعة S إلى نفسها. النقطة $a \in S$ تسمى نقطة ثابتة (fixed point) للاقتران f إذا كان $f(a) = a$.

4.1.3أ مثال. بيانياً نستطيع أن نجد كل النقاط الثابتة لاقتران $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ببساطة برسم منحنى $y = f(x)$ ورؤية أين يقطع الخط $y = x$. عند نقاط التقاطع وفقط عند هذه النقاط يكون لدينا $f(x) = x$.



النقطة الثابتة للاقتران $f(x) = \cos x$ هي $x = 0.739085133$ تقريباً. □

5.1.3أ مثال.



النقطة الثابتة للاقتران $f(x) = Sinx$ هي $x = o$ □

تمارين أ1.3

1- لتكن الاقترانات $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطاة على الشكل $f(x) = x(1-x)$ ، $g(x) = x\,Sin\,x$ و $h(x) = x^2 - 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

أ) احسب $f^1(x)$ و $f^2(x)$.

ب) احسب $g^2(x)$ و $g^2(1)$.

جـ) احسب $h^2(x)$ و $h^3(x)$.

2- أ) إذا كان $C(x) = \cos x$ استخدم آلتك الحاسبة [على نظام الراديان مع أربع منازل عشرية] لحساب

$C^{10}(123)$ ، $C^{20}(123)$ ، $C^{30}(123)$ ، $C^{40}(123)$ ، $C^{50}(123)$ ، $C^{60}(123)$ ، $C^{70}(123)$ ، $C^{80}(123)$ ، $C^{90}(123)$ ، $C^{100}(123)$ ، $C^{100}(500)$ ، $C^{100}(1)$. ماذا تلاحظ؟

ب) إذا كان $S(x) = Sin\,(x)$ استخدم آلتك الحاسبة لحساب $S^{10}(123)$ ، $S^{20}(123)$ ، $S^{30}(123)$ ، $S^{40}(123)$ ، $S^{50}(123)$ ، $S^{60}(123)$ ، $S^{70}(123)$ ، $S^{80}(123)$ ، $S^{90}(123)$ ، $S^{100}(123)$. ماذا تلاحظ؟

3- ليكن الاقتران $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى على الشكل $h(x) = x^2$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

احسب المدارات للاقتران h لكل من الأنوية التالية: 0, 1, -1, 0.5, 0.25.

4- أوجد كل النقاط الثابتة للاقتران f في تمرين 1 أعلاه.

5- ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى على الشكل $f(x) = x^3 - 3x$. أوجد كل النقاط الثابتة للاقتران f .

أ2.3 النقاط الثابتة والنقاط الدورية

Fixed Points and Periodic Points

أ1.2.3 تعريف. ليكن f اقتران من المجموعة S إلى نفسها. النقطة $a \in S$ تسمى ثابتة أخيراً (eventually fixed) إذا كانت a ليست نقطة ثابتة ولكن نقطة في مدار a هي نقطة ثابتة.

أ2.2.3 تعاريف. ليكن f اقتران من المجموعة S إلى نفسها. لتكن $x \in S$ فإن النقطة $x \in S$ تسمى دورية (periodic) إذا وجد عدد صحيح موجب p بحيث $f^p(x) = x$. إذا كانت m هي أصغر $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^n(x) = x$ فإن m تسمى دورة أولية (prime period) للنقطة x.

أ3.2.3 تعريف. ليكن f اقتران من المجموعة S إلى نفسها. فإن النقطة $x_o \in S$ تسمى دورية أخيراً (eventually periodic) إذا كانت x_o ليست نفسها دورية ولكن نقطة في مدار x_o هي دورية.

أ3.2.3 ملاحظة. رأينا أن النقاط يمكن أن تكون ثابتة، ثابتة أخيراً، دورية أو دورية أخيراً. على كل حال من المهم أن تلاحظ أن معظم النقاط ليست في هذه الصفوف. □

تمارين أ2.3

1- أثبت أن النقطة 1- هي نقطة ثابتة أخيراً للاقتران $f(x) = x^2$.

2- أوجد النقاط الثابتة أخيراً للاقتران $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل $f(x) = x$.

3- إذا كان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى على الشكل $f(x) = \frac{-3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$ أثبت أن $f(0) = 1$ ، $f(1) = 2$ و $f(2) = 0$ بحيث أن مدار النقطة 0 هو 0، 1, 2, 0, 1, 2, ... لذلك 0 هو نقطة دورية مع دورة أولية 3.

4- أثبت أنه إذا كانت x نقطعة دورية مع دورة أولية m للاقتران $f: S \to S$ فإن مدار x يملك فقط m نقطة.

[مساعدة: أولاً أكتب مدار النقطة x واستنتج أنه يملك على الأكثر m من النقاط. بعد ذلك افرض أنه يوجد m من النقاط المختلفة في مدار x واثبت أن هذا يقود إلى تناقض مع كون x تملك دورة m .]

5- ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى على الشكل $f(x) = x^2 - 1$. أثبت أن النقاط $\sqrt{2}$ و 1 دورية أخيراً.

6- تأمل الاقتران $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل $f(x) = |1 - x|$.

(i) أوجد كل النقاط الثابتة للاقتران f .

(ii) إذا كان m عدد صحيح فردي ماذا تستطيع أن تتكلم عن مدار m .

(iii) إذا كان m عدد صحيح زوجي ماذا تستطيع أن تتكلم عن مدار m .

3.3أ صور الحالة، نقاط ثابتة جاذبة ونقاط ثابتة صادة

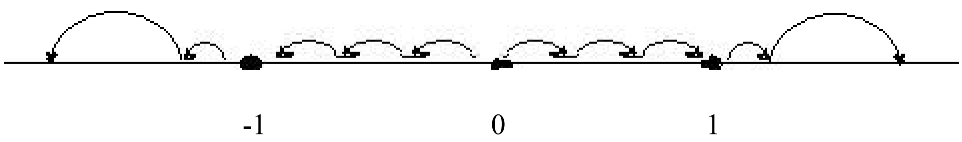
Phase Portraits, Attracting and Repelling Fixed Points

نرغب في دراسة أنظمة القوى المحركة التي هي عمليات في الحركة. مثل هذه العمليات تشمل على سبيل المثال حركة الكواكب ولكن أنظمة أخرى تطبق عليها هذه النظرية تشمل الطقس ونمو السكان. البعض حتى يشعر بأن دراسة أنظمة القوى المحركة سوف تساعدنا لفهم حركات السوق المالي.

الطريقة الجيدة لوصف كل المدارات لنظام القوى المحركة هو تصوير حالة النظام. هذه هي صورة على خط الأعداد للمدارات.

في تصوير الحالة نمثل النقاط الثابتة بنقاط مصمتة (solid dots) والقوى عبر المدارات بواسطة الأسهم.

1.3.3أ مثال. إذا كان $f(x)=x^3$ فإن النقاط الثابتة هي 0, 1 و -1. إذا كان $|x_0|<1$ فإن مدار x_o هو متتالية تقترب من 0، نكتب ذلك على الشكل $f^n(x_o)\to 0$. إذا كان $|x_0|>1$ فإن المدار هو متتالية تتباعد إلى ∞ أي أن $f^n(x_o)\to \pm\infty$. وصورة الحالة تعطى على الشكل



صورة الحالة للاقتران $f(x)=x^3$

2.3.3أ تعريف. لتكن a نقطة ثابتة للاقتران $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. النقطة a تسمى نقطة ثابتة جاذبة (attracting fixed point) لـ f إذا وجد فترة مفتوحة I تحوي a بحيث إذا كان $x\in I$ **فإن $f^n(x)\to a$ عندما $n\to\infty$.**

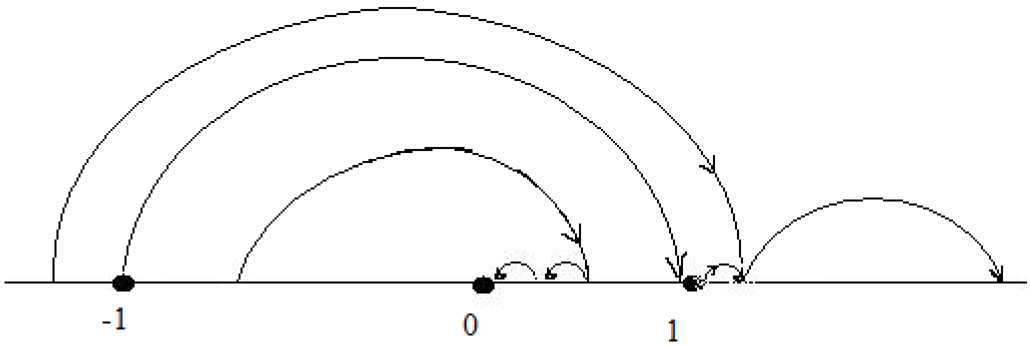
3.3.3أ تعريف. لتكن a نقطة ثابتة للاقتران $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. النقطة a تسمى نقطة ثابتة صادة (repelling fixed point) لـ f إذا وجد فترة مفتوحة I تحوي a بحيث إذا كان $x\in I$ حيث $x\neq a$ فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث $f^{n}(x)\notin I$.

4.3.3أ مثال. لاحظ أن 0 هو نقطة ثابتة جاذبة للاقتران $f(x)=x^3$ في حين أن 1- و 1 هي نقاط ثابتة صادة لهذا الاقتران.

5.3.3أ تعريف. النقطة الثابتة التي لا تكون جاذبة ولا تكون صادة تسمى نقطة ثابتة محايدة (neutral fixed point).

تمارين أ3.3

1- أثبت أن الصورة أدناه هي صورة الحالة الحقيقية للاقتران $f(x)=x^2$ وحدد فيما إذا كانت النقاط الثابتة صادة، جاذبة أو محايدة



صورة الحالة للاقتران $f(x)=x^2$

2- كون صور الحالة لكل من الاقترانات $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ التالية. حدد فيما إذا كانت النقاط الثابتة جاذبة، صادة أو محايدة

(i) $f(x)=x^3$.

(ii) $f(x)=4x$.

(iii) $f(x)=x-x^2$.

(iv) $f(x)=Sin\ x$.

3- ليكن $D:[0,1)\to R$ الاقتران المعرَّف على الشكل

$$D(x)=\begin{cases}2x & 0\le x<\frac{1}{2}\\ 2x-1 & \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$

(i) أثبت أن النقطة $\frac{1}{99}$ هي نقطة دورية وأوجد دورتها الأولية.

(ii) وضح لماذا $\frac{1}{n}$ هي إما أن تكون نقطة دورية أو نقطة دورية أخيراً لكل عدد صحيح موجب n.

(iii) وضح لماذا $\frac{1}{2^n}$ هي ثابتة أخيراً لكل عدد صحيح موجب n.

(iv) اكتب صيغة صريحة لكل من $D^2(x)$ و $D^3(x)$ حيث $o \le x < 1$.

(v) أوجد كل النقاط الثابتة لكل من D^2 و D^3.

4- كون الحالة للاقتران $f(x) = 2x(1-x)$. [هذا مثال على ما يسمى بالاقتران المنطقي (logistic function) والذي يظهر في دراسة النمو السكاني وعلم البيئة].

4.3أ التحليل البياني Graphical Analysis

1.4.3أ ملاحظة. استخدمنا صور الحالة لتحديد فيما إذا كانت النقطة x_o هي ثابتة دورية، دورية أخيراً إلى آخره. هذه الطريقة مفيدة خاصة عندما نتعامل مع أكثر من بعد. لكن لاقترانات $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، نستطيع استخدام التحليل البياني. وهذا يعمل كما يلي.

إذا أعطينا اقتران $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وطلب من أن نحدد طبيعة النقطة $x_0 \in \mathbb{R}$. الذي نستطيع أن نفعله هو إيجاد المدارات للنقاط a بجوار x_o. نبدأ برسم الاقتران f وثم رسم الخط $y = x$.

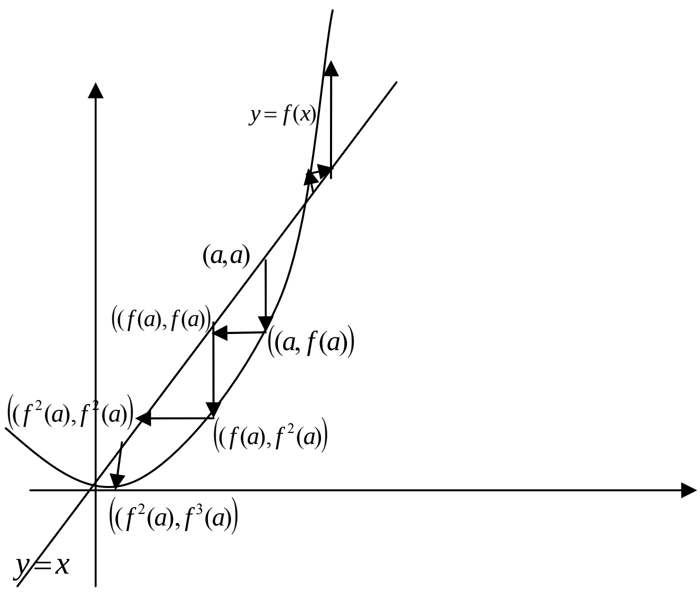
لإيجاد مدار النقطة a حدد النقطة (a,a). بعد ذلك ارسم خط عمودي ليلاقي خط الاقتران f عند النقطة $(a, f(a))$. بعد ذلك ارسم خط أفقي ليلاقي الخط $y = x$ في النقطة $(f(a), f(a))$. الآن ارسم خط عمودي ليلاقي منحنى f في النقطة $(f(a), f^2(a))$. مرة أخرى ارسم خط أفقي ليلاقي الخط $y = x$ في النقطة $(f^2(a), f^2(a))$. نستمر بهذه العملية لتكون النقاط a، $f(a)$، $f^2(a)$، $f^3(a)$، ... تشكل مدار a.

□

2.4.3أ مثال. الآن سنشاهد الاقتران $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعطى على الشكل $f(x) = x^4$. نرسم المنحنى $y = x^4$ وكذلك $y = x$. لإيجاد النقاط الثابتة نستطيع حل $f(x) = x$ أي أن نحل $x^4 = x$.

من السهولة مشاهدة أن النقاط الثابتة هي 0 و 1. سوف ندرس النقاط بجوار كل من هذه النقاط ونعمل التحليل البياني كما وصف أعلاه لإيجاد المدارات للنقاط بجوار 0 وبجوار 1.

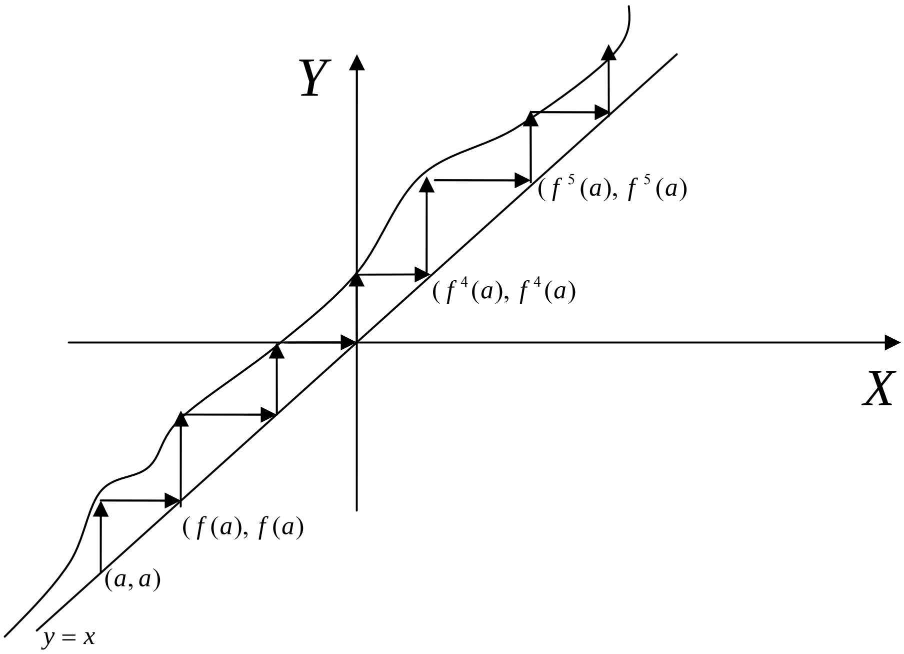
التحليل في الرسم البياني أدناه يبين ماذا يحدث للنقاط بجوار 1



□

الأمثلة اللاحقة تبين تحليل بياني لاقترانين آخرين لنرى كيف يختلف هذا التحليل لاقترانات مختلفة. بعد ذلك سوف تكون لديك الخبرة لعمل التحليل البياني بنفسك.

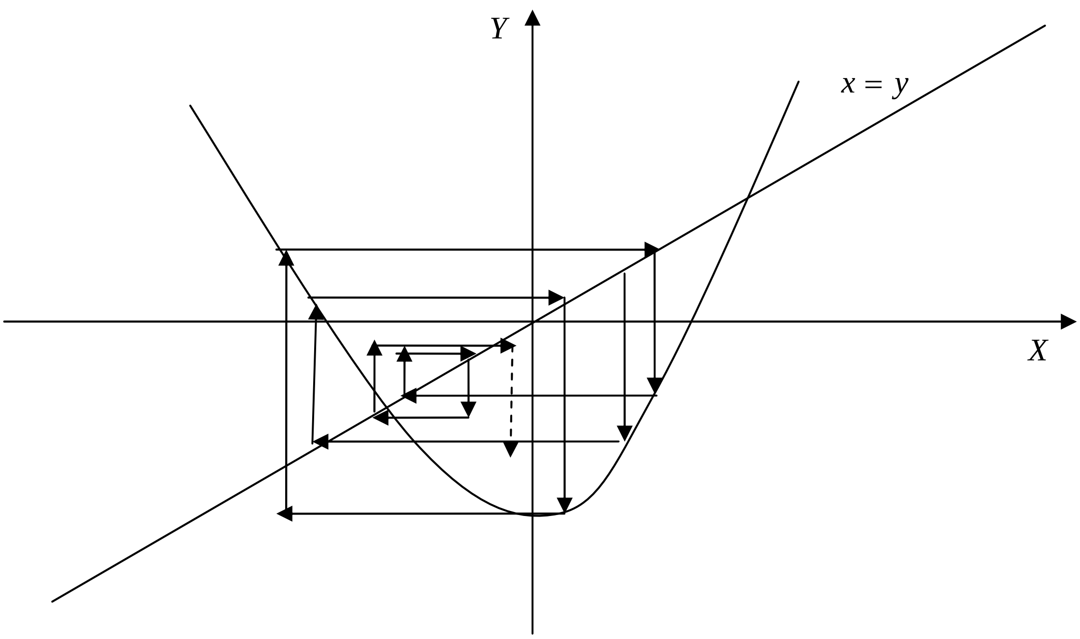
مثال 3.4.3أ.



في الرسم أعلاه $f(x) = Sinx + x + 2$

□

مثال 4.4.3أ.



تمارين أ4.3

1- حدد باستخدام التحليل البياني فيما إذا كانت كل نقطة ثابتة للاقتران $f(x) = x^4$ هي نقطة ثابتة جاذبة، نقطة ثابتة صادة أو نقطة ثابتة محايدة.

2- استخدم التحليل البياني لوصف المدارات للاقتران $f(x) = 2x$ ولتحديد نوع النقطة الثابتة التي يملكها.

3- أوجد النقاط الثابتة للاقتران $f(x) = \sqrt{x}$ واستخدم التحليل البياني لتحديد طبيعتها (أي فيما إذا كانت جاذبة، صادة ومحايدة).

4- استخدم التحليل البياني لوصف نهاية كل المدارات للاقتران $f(x) = x - x^2$.

5- استخدم التحليل البياني لوصف نهاية كل المدارات للاقتران $f(x) = e^x$.

6- ليكن $f(x) = |x-2|$. استخدم التحليل البياني لإظهار تنوع المدارات للاقتران f . يمكن أن يساعدك استخدام ألوان مختلفة؛ على سبيل المثال لون للمدارات الدورية وآخر للمدارات الدورية أخيراً وكذلك آخر للمدارات الثابتة أخيراً.

7- ليكن $D:[0,1) \to [0,1)$ هو الاقتران المعطى على الشكل $D(x) = 2x \bmod(1)$

(i) أثبت أن $x \in [0,1)$ هو عدد نسبي إذا وفقط إذا كان x إما نقطة دورية أو نقطة دورية أخيراً للاقتران D.

(ii) أثبت أن مجموعة كل النقاط الدورية للاقتران D هي

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ 0, \frac{1}{2^n - 1}, \frac{2}{2^n - 1}, \frac{3}{2^n - 1}, \ldots, \frac{2^n - 2}{2^n - 1} \right\}$$

[مساعدة: من الممكن أن يكون مساعداً لك كتابة صيغة لـ D^n وحساب نقاط التقاطع لمنحنى D^n مع الخط $y = x$.]

(iii) أثبت أن مجموعة النقاط الدورية للاقتران D هي كثيفة في $[0,1)$.

[سوف نرى أن هذا أحد الشرطين الضروريين لإثبات أن نظام القوى المحركة $\{[0,1), D\}$ مشوش (فوضوي).]

5.3أ التشعب Bifurcation

1.5.3أ ملاحظة. من الطبيعي أن تسأل فيما إذا كان كل اقتران متصل $f: S \to \mathbb{R}$ يملك نقطة ثابتة، حيث $S \subseteq \mathbb{R}$ ؟ من السهولة رؤية أن الإجابة هي لا. على سبيل المثال، إذا كان $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ معطى على الشكل $f(x) = x+1$ فإن من الواضح أن ليس هناك نقاط ثابتة. لذلك من الملاحظ أننا نستطيع ضمان وجود نقاط ثابتة لكل الاقترانات المتصلة من $[0,1]$ إلى نفسها. بأكثر دقة كنا قد شاهدنا واثبتنا النتيجة التالية:

11.2.5 نتيجة. (نظرية النقطة الثابتة) ليكن f اقتران متصل من $[0,1]$ إلى $[0,1]$. فإنه يوجد $z \in [0,1]$ بحيث $f(z) = z$.

بالتأكيد النتيجة أعلاه لا تساعدنا في إيجاد النقاط الثابتة ولكنها تخبرنا فقط بأن على الأقل يوجد نقطة ثابتة.

كذلك من الجميل أن يكون لديك طريقة سهلة لتحديد فيما إذا كانت نقطة ثابتة محددة هي جاذبة، صادة أو محايدة. للاقترانات ذات السلوك الحسن النظريات 2.5.3أ و 3.5.3أ ستكون فعالة في هذا الاتجاه. □

2.5.3أ نظرية. لتكن S فترة في $\mathbb{R}$ و a نقطة في داخلية S. بالإضافة لذلك لتكن a نقطة ثابتة للاقتران $f: S \to \mathbb{R}$. إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند النقطة a و $|f'(a)| < 1$ فإن a نقطة ثابتة جاذبة للاقتران f .

البرهان. بما أن $|f'(a)| < 1$ فإن لدينا $|f'(a)| < k < 1$ حيث k هو العدد الحقيقي الموجب المعطى على الشكل $k = \dfrac{|f'(a)|+1}{2}$.

بالتعريف $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. لذلك لأي x "قريبة بما فيه الكفاية" لـ a فإن لدينا $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \le k$ ؛ بأكثر دقة، يوجد فترة $I = [a-\delta, a+\delta]$ لبعض $\delta \rangle 0$ بحيث $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \le k$ لكل $x \in I$ حيث $x \neq a$.

بما أن a نقطة ثابتة فإن $f(a) = a$. لذلك $|f(x)-a| \le k|x-a|$ لكل $x \in I$. (1)

هذا يعطي أن $f(x)$ أقرب لـ a أكثر من قرب x لـ a ولذلك $f(x)$ هو كذلك في I. وبهذا الشكل نقوم بتكرار نفس العمليات بوضع $f(x)$ بدلاً من x ونحصل على

(2) $\left|f^2(x)-a\right| \le k\left|f(x)-a\right|$ لكل $x \in I$.

من (1) و (2) نحصل على

(3) $\left|f^2(x)-a\right| \le k^2\left|x-a\right|$ لكل $x \in I$

ملاحظاً أن $|k| \le 1$ يعطي أن $k^2 \langle 1$، نستطيع تكرار العمليات مرة أخرى. بالاستقراء الرياضي نحصل على

(4) $\left|f^n(x)-a\right| \le k^n\left|x-a\right|$ لكل $x \in I$ و $n \in \mathbb{N}$

بما أن $|k| \langle 1$، $\lim_{n\to\infty} k^n = 0$. بواسطة (4) هذا يعطي أن $f^n(x) \Longrightarrow a$ عندما $n \to \infty$. وبذلك نكون قد أثبتنا أن a نقطة ثابتة جاذبة. □

برهان نظرية أ3.5.3 مشابه لبرهان نظرية أ2.5.3 ولذلك يترك كتمرين.

أ3.5.3 نظرية. لتكن S فترة في $\mathbb{R}$ و a نقطة داخلية في S. بالإضافة لذلك، لتكن a نقطة ثابتة للاقتران $f: S \to \mathbb{R}$. إذا كان f قابل للاشتقاق عند النقطة a و $|f'(a)| \rangle 1$ فإن a هي نقطة ثابتة صادة للاقتران f .

أ4.5.3 ملاحظة. من المهم أن نلاحظ أن نظرية أ2.5.3 ونظرية أ3.5.3 لا تعطي الشروط الضرورية والكافية. بالأحرى هي تقول إذا كانت f' موجودة و $|f'(x)| \langle 1$ في فترة تحوي النقطة الثابتة a فإن a نقطة ثابتة جاذبة, واذا كانت $|f'(x)| \rangle 1$ في فترة تحوي النقطة الثابتة a فإن a نقطة ثابتة صادة. إذا لم يحدث أي من هذين الشرطين لا نستطيع أن نقول شيء! على سبيل المثال، من الممكن أن يكون f غير قابل للاشتقاق عند a ولكن f يملك نقطة ثابتة جاذبة عند a. (هذه الحالة مثلاً عندما يكون الاقتران على الصورة

$$f(x) = \begin{cases} x^2, x \in Q \\ -x^2, x \in R \setminus Q \end{cases}$$ والذي يملك 0 كنقطة ثابتة جاذبة.)

حتى إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند a، النظريات أ17.1.3 و أ18.1.3 لا تخبرنا مطلقاً ماذا يحدث إذا كان $f'(a) = 1$. تأمل الاقتران $f(x) = Sin\, x$. هذا الاقتران قابل للاشتقاق عند 0 و $f'(0) = \cos(0) = 1$. لذلك النظريات أ17.1.3 و أ18.1.3 لا تخبرنا بشيء. على الرغم من أن 0 هو نقطة ثابتة جاذبة للاقتران f . □

أ5.5.3 ملاحظة. واحدة من عائلات الاقترانات المهمة في هذه النظرية هي عائلة الاقترانات التربيعية (quadratic maps) $Q_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ حيث $c\in\mathbb{R}$ و $Q_c(x)=x^2+c$. لأي قيمة مختلفة لـ c نحصل على اقتران تربيعي مختلف.

ولكن الملمح المدهش هو أن الديناميكا (القوى المحركة) لـ Q_c تتغير بتغير c. النظرية التالية تحدد ذلك. نترك برهان النظرية كتمرين.

أ6.5.3 نظرية. (النظرية الأولى في التشعب) ليكن Q_c هو الاقتران التربيعي لـ$c\in\mathbb{R}$.

(i) إذا كانت $c\rangle\frac{1}{4}$ فإن كل المدارات تؤول إلى ما لا نهاية أي أن لكل $x\in\mathbb{R}$، $(Q_c)^n(x)\to\infty$ عندما $n\to\infty$.

(ii) إذا كانت $c=\frac{1}{4}$ فإن Q_c يملك فقط نقطة ثابتة واحدة عند $x=\frac{1}{2}$ وهذه نقطة ثابتة محايدة.

(iii) إذا كانت $c\langle\frac{1}{4}$ فإن Q_c يملك نقطتين ثابتتين $a_+=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4c}\right)$ و $a_-=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4c}\right)$.

(أ) النقطة a_+ هي دائماً صادة.

(ب) إذا كانت $-\frac{3}{4}\langle c\langle\frac{1}{4}$ فإن a_- هي جاذبة.

(ج) اذا كانت $c<\frac{-3}{4}$ فإن a_- هي صادة.

أ7.5.3 ملاحظة. المصطلح تشعب (bifurcation) يعني الانقسام إلى اثنين. نلاحظ في النظرية أعلاه أن لأي $c\rangle\frac{1}{4}$ لا يوجد نقاط ثابتة، عندما $c=\frac{1}{4}$ يوجد فقط نقطة ثابتة واحدة ولكن عندما $c\langle\frac{1}{4}$ هذه النقطة الثابتة تنقسم إلى اثنين – واحدة عند a_+ وواحدة عند a_-. سوف نتكلم أكثر الآن عن التشعب.

أ8.5.3 تعريف. ليكن f اقتران من المجموعة S إلى S. إذا كانت $x\in S$ تملك دورة أولية m فإن مدار x هو $\{x, f(x),\ldots, f^{m-1}(x)\}$ والمدار يسمى $m-$ حلقة (m-cycle).

أ9.5.3 تعاريف. لتكن a نقطة دورية للاقتران $f:S\to S$ لها دورة اولية m لبعض $m\in\mathbb{N}$. [لذلك a هي نقطة ثابتة للاقتران $f^m:S\to S$.] فإن a تسمى نقطة دورية جاذبة للاقتران f إذا كانت نقطة ثابتة جاذبة للاقتران f^m . وبنفس الشكل a تسمى نقطة دورية صادة للاقتران f إذا كانت نقطة ثابتة صادة للاقتران f^m .

النظرية التالية تركت كتمرين.

أ10.5.3 نظرية. (النظرية الثانية في التشعب) ليكن Q_c هو الاقتران التربيعي لـ$c\in\mathbb{R}$.

(أ) إذا كانت $-\frac{3}{4}\le c\langle\frac{1}{4}$ فإن Q_c لا يملك $2-$حلقات.

(ب) إذا كانت $\frac{-5}{4}\langle c\langle\frac{-3}{4}$ فإن Q_c يملك $2-$حلقة جاذبة $\{q_-,q_+\}$ حيث $q_+=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-4c-3}\right)$ و $q_-=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-4c-3}\right)$.

(ج) إذا كانت $c\langle\frac{-5}{4}$ فإن Q_c يملك $2-$ حلقة صادة $\{q_-,q_+\}$.

أ11.5.3 ملاحظة. في النظرية الثانية في التشعب رأينا نوع جديد من التشعب يسمى تشعب ثنائي الدورة (period doubling bifurcation). عندما c تتناقص تحت $\frac{-3}{4}$ يحدث أمران: النقطة الثابتة a_- تتحول من جاذبة إلى صادة وتظهر $2-$حلقة جديدتين $\{q_-,q_+\}$. لاحظ أنه عندما $c=\frac{-3}{4}$ فإن لدينا $a_-=\frac{-1}{2}=q_+=q_-$. لذلك هاتان النقطتان الدوريتان الجديدتان تظهران عند a_- عندما $c=\frac{-3}{4}$.

لدينا الكثير لنقوله عن التشعب ثنائي الدورة عندما ندرس عائلة الاقترانات التي تعتمد على متغير واحد (مثل $Q_c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الذي يعتمد على المتغير c والاقترانات المنطقية $f_\lambda(x)=\lambda x(1-x)$ التي تعتمد على المتغير λ). □

تمارين أ5.3

1- أثبت نظرية أ3.5.3

2- باستخدام النظريات أ2.5.3 و أ3.5.3 حدد طبيعة النقاط الثابتة لكل من الاقترانات التالية:

(i) $f_1(x) = 3x$.

(ii) $f_2(x) = \dfrac{1}{4x}$.

(iii) $f_3(x) = x^3$.

3- أثبت النظرية الأولى في التشعب أ6.5.3.

4- لتكن x نقطة دورية ذات دورة 2 للاقتران التربيعي Q_c . أثبت أن

(i) أثبت أن $x^4 + 2cx^2 - x + c^2 = 0$.

(ii) لماذا النقاط $a_+ = \dfrac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-4c}\right)$ و $a_- = \dfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4c}\right)$ تحقق المعادلة في (i)؟

[مساعدة. استخدم النظرية الأولى في التشعب.]

(iii) باستخدام (ii)، أثبت أنه إذا كانت x نقطة دورية ذات دورة أولية 2 للاقتران Q_c فإن $x^2 + x + c + 1$.

(iv) استنتج أنه إذا كانت x نقطة دورية ذات دورة أولية 2 فإن x واحدة من النقاط $q_+ = \dfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-4c-3}\right)$ و $q_- = \dfrac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-4c-3}\right)$.

(v) استنتج أن Q_c يملك 2-حلقة إذا وفقط إذا كانت $c\langle\dfrac{-3}{4}$. [كن حذراً لحذف الحالة عندما $c = \dfrac{-3}{4}$.]

(vi) باستخدام نظرية 17.1.3أ أثبت أن الاقتران التربيعي Q_c يملك q_- و q_+ كنقاط دورية جاذبة إذا كان $\left|\frac{dQ_c^2(x)}{dx}\right| = |4x^3 + 4cx| < 1$ عند $x = q_-$ و $x = q_+$.

(vii) ملاحظاً أن q_- و q_+ يحققان المعادلة $x^2 + x + c + 1 = 0$ (من (iii) و (iv) أعلاه) أثبت أن

$$4x^3 + 4cx = 4x(x^2 + c) = 4x(-1 - x) = 4(c + 1)$$

(viii) باستخدام (vi)، (vii) و (v) أثبتت أن لـ $\frac{-3}{4} > c > \frac{-5}{4}$ فإن q_+ و q_- هي نقاط دورية جاذبة للاقتران Q_c .

(ix) بنفس الأسلوب أثبت أن لأي $\frac{-5}{4} > c$ فإن q_+ و q_- هي نقاط دورية صادة.

(x) استنتج النظرية الثانية في التشعب 10.5.3أ من ما أثبت أعلاه في هذا التمرين.

6.3أ سحر الدورة 3: الدورة 3 تعطي الفوض

The Magic of Period 3: Period 3 Implies Chaos

1.6.3أ ملاحظة. في 1964 الرياضي السوفياتي A.N.Sarkovskii نشر البحث (Sarkovskii [193]) بالروسي في مجلة أكرانية. هناك أثبت نظرية رائعة كانت غير ملاحظة. في 1975 James Yorke و T-Y. Li نشرا البحث (Yorke and Li [225]) في مجلة American Mathematical Monthly. على الرغم من أن كلمة "فوضى" استخدمت في المواد العلمية سابقاً ولكن هذا البحث هو الذي بدأ بتبسيط هذا المصطلح. النتيجة الرئيسية لهذا البحث مدهشة ولكنها حالة خاصة جداً من نظرية Sarkovskii التي أثبتت أبكر بعقد من الزمن. مناقشة نظرية الدورة 3 تعتمد على عرض Robert L. Devaney في كتابه (Davaney [56]).

2.6.3أ نظرية. (نظرية الدورة 3) ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ اقتراناً متصلاً. إذا كان f يملك نقطة دورية مع دورة أولية 3 فإن لكل $m \in \mathbb{N}$ ، f يملك نقطة دورية مع دورة أولية n .

البرهان. تمارين أ6.3 # 1-4. $\square$

أ3.6.3 ملاحظة. نظرية الدورة 3 رائعة. ولكن كما ذكر سابقاً هناك نتيجة أكثر تعميماً هي صحيحة. وهو ما يعرف بنظرية Sarkovskii. سوف لا نقدم البرهان ولكن نشير إلى أن البرهان له طبيعة مشابه لما هو أعلاه.

لكتابة نظرية Sarkovskii نحتاج أن نرتب الأعداد الطبيعية بالطريقة الغريبة التالية والتي تسمى ترتيب Sarkovskii للأعداد الطبيعية

$$
\begin{array}{l}
3,5,7,9,.... \\
2.3,2.5,2.7,... \\
2^2.3,2^2.5,2^2.7,... \\
2^3.3,2^3.5,2^3.7,... \\
\vdots \\
...2^n,2^{n-1},...,2^3,2^2,2^1,1.
\end{array}
$$

أ4.6.3 نظرية. (نظرية Sarkovskii) ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ اقتران متصل. إذا كان f يملك نقطة دورية مع دورة أولية n و n تسبق k في ترتيب Sarkovskii للأعداد الطبيعية فإن f له نقطة دورية مع دورة أولية k.

أ5.6.3 ملاحظات. (i) أولاً لاحظ أنه بما أن 3 تظهر أولاً في ترتيب Sarkovskii للأعداد الطبيعية فإن نظرية Sarkovskii تعطي نظرية الدورة 3.

(ii) ثانياً لاحظ أنه بما أن الأعداد التي على الشكل 2^n تشكل ذيل ترتيب Sarkovskii للأعداد الطبيعية فينتج إذا كان f يملك فقط عدد منتهي من النقاط الدورية فإنها جميعها يجب أن تكون على الشكل 2^n.

(iii) ثالثاً لاحظ أن نظرية Sarkovskii تطبق على الاقترانات المتصلة من $\mathbb{R}$ إلى نفسها. إذا $\mathbb{R}$ استبدلت بفضاءات أخرى النظرية يمكن أن تصبح خاطئة. على الرغم من ذلك $\mathbb{R}$ يمكن استبدالها بأي فترة مغلقة $[a,b]$. لرؤية ذلك ليكن $f:[a,b]\to[a,b]$ اقتراناً متصلاً. وسع f إلى اقتران متصل $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بتعريف $f'(x)=f(x)$ إذا كانت $x\in[a,b]$؛ $f'(x)=f(a)$ إذا كانت $x\langle a$ و $f'(x)=f(b)$ إذا كانت $x\rangle b$. فإن النظرية للاقتران f يمكن أن تستنتج من النظرية على الاقتران f'.

من الملاحظ أن عكس نظرية Sarkovskii هو كذلك صحيح ولكن سوف لا نثبته هنا. (انظر Dunn [67])

أ6.6.3 نظرية. (عكس نظرية Sarkovskii) لتكن $n \in \mathbb{N}$ و l تسبق n في ترتيب Sarkovskii للأعداد الطبيعية. فإنه يوجد اقتران متصل $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ يملك نقطة دورية مع دورة أولية n ولكن لا يملك نقطة دورية مع دورة أولية l.

أ7.6.3 ملاحظة. من عكس نظرية Sarkovskii ينتج على سبيل المثال أنه يوجد اقتران متصل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ يملك نقطة دورية مع دورة أولية 6 ولذلك نقطة دورية مع دورة أولية لكل عدد زوجي ولكن لا يملك نقطة دورية مع دورة أولية فردية ما عدا 1.

تمارين أ6.3

1- ليكن f اقتران متصل من فترة I إلى $\mathbb{R}$. باستخدام التمهيديات 5.3.4 و 1.2.5 أثبت أن $f(I)$ هو فترة.

2- استخدم نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية 9.2.5 لإثبات النتيجة التالية:

تمهيدية أ. لتكن $a, b \in \mathbb{R}$ حيث $a \langle b$ و $f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ اقتران متصل. إذا كان $f(I) \subseteq I$ أثبت أن f يملك نقطة في I.

[مساعدات. (i) أثبت أنه يوجد نقاط $s, t \in [a, b]$ بحيث $f(s) = c \le a \le s$ و $f(t) = d \ge b \ge t$.

(ii) اجعل $g(x) = f(x) - x$ ولاحظ أن g متصل و $g(s) \le 0$ و $g(t) \ge 0$.

(iii) طبقت نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية على g.]

3- استخدم نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية 9.2.5 لإثبات النتيجة التالية:

تمهيدية ب. لتكن $a,b \in \mathbb{R}$ حيث $a\langle b$. بالإضافة لذلك ليكن $f: I=[a,b] \to \mathbb{R}$ اقتراناً متصلاً و $f([a,b]) \supseteq J=[c,d]$ حيث $c\langle d$. أثبت أنه يوجد فترة جزئية $I'=[s,t]$ من $I=[a,b]$ بحيث $f(I')=J$.

[مساعدات. (i) أثبت أن $f^{-1}(\{c\})$ و $f^{-1}(\{d\})$ هي مجموعات مغلقة غير خالية.

(ii) باستخدام (i) ومساندة 2.3.3 أثبت أنه يوجد عدد أكبر s بحيث $f(s)=c$.

(iii) أدرس حالة وجود بعض $s\langle x$ بحيث $f(x)=d$. أثبت أنه يوجد عدد أصغر بحيث $s\rangle t$ و $f(t)=d$.

(iv) افرض أنه يوجد $y\in[s,t]$ بحيث $f(y)\langle c$. استخدم نظرية ويرستراص للقيمة الوسيطية للحصول على تناقض.

(v) أثبت كذلك بنفس الأسلوب أنه لا يوجد $z\in[s,t]$ بحيث $f(z)\rangle d$.

(vi) استنتج أنه، تحت الشرط في (ii)، $f([s,t])=[c,d]=J$ كما هو مطلوب.

(vii) الآن أدرس حالة عدم وجود $s\langle x$ بحيث $f(x)=d$. لتكن s' أكبر عدد بحيث $f(s')=d$. واضح أن $s\rangle s'$. لتكن t' أصغر عدد بحيث $s'\rangle t'$ و $f(t')=c$. أثبت أن $f([s',t'])=[c,d]=J$ كما هو مطلوب.]

4- ليكن f كما هو في نظرية أ2.6.3. لذلك يوجد نقطة a في $\mathbb{R}$ لها دورة أولية 3. لذلك $f(a)=b$ ، $f(b)=c$ و $f(c)=a$ حيث $a\neq b$ ، $a\neq c$ و $b\neq c$. سوف ندرس الحالة $a\langle b\langle c$. الحالات الأخرى تعامل بنفس الأسلوب. اجعل $I_o=[a,b]$ و $I_1=[b,c]$.

(i) باستخدام تمرين 1 أعلاه، أثبت أن $I_1 \subseteq f(I_o)$.

(ii) باستخدام تمرين 1 أعلاه مرة أخرى، أثبت أن $I_o \cup I_1 \subseteq f(I_1)$.

(iii) استنتج من (ii) وتمهيدية ب أعلاه بأنه يوجد فترة مغلقة $A_1 \subseteq I_n$ بحيث $f(A_1)=I_1$.

(iv) ملاحظاً أن $A_1 \subseteq I_1 = f(A_1)$ استخدم تمهيدية ب أعلاه مرة أخرى لإثبات وجود فترة مغلقة $A_1 \supseteq A_2$ بحيث $f(A_2)=A_1$.

(v) لاحظ أن $A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$ و $f^2(A_2)=I_1$.

(vi) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات أن لأي $n \geq 3$ يوجد فترات مغلقة A_1 ، A_2 ،...، A_{n-2} بحيث

$$A_{n-2} \subseteq A_{n-3} \subseteq \ldots \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq I_1$$

بحيث $f(A_i) = A_{i-1}$ ، $i = 2$ ، ...، $n-2$ و $f(A_1) = I_n$

(vii) استنتج من (vi) أن $f^{n-2}(A_{n-2}) = I_1$ و $A_{n-2} \subseteq I_1$.

(viii) ملاحظاً أن $A_{n-2} \subseteq I_1 \subseteq f(I_o)$ أثبت أنه يوجد فترة مغلقة $I_o \supseteq A_{n-1}$ بحيث $f(A_{n-1}) = A_{n-2}$.

(ix) أخيراً باستخدام حقيقة أن $A_{n-1} \subseteq I_o \subseteq f(I_1)$ أثبت أنه يوجد فترة مغلقة $I_1 \supset A_n$ بحيث $f(A_{n-1}) = A_{n-1}$.

(x) بوضع الأجزاء أعلاه معاً نلاحظ

$$A_n \xrightarrow{f} A_{n-1} \xrightarrow{f} \ldots \xrightarrow{f} A_1 \to I_1$$

حيث $f(A_i) = A_{i-1}$ و $f^n(A_n) = I_1$. استخدم حقيقة أن $I_1 \supset A_n$ وتمهيدية أ لإثبات أنه يوجد نقطة $x_o \in A_n$ بحيث $f^n(x_o) = x_o$.

(xi) لاحظ من (x) أن النقطة x_o هي نقطة دورية للاقتران f مع دورة n . [بقي علينا أن نبين أن x_o تملك دورية أولية n .]

(xii) باستخدام حقيقة أن $f(x_o) \in A_{n-1} \subseteq I_o$ و $f^i(x_o) \in I_1$ حيث $i = 2$ ،...، n و $I_o \cap I_1 = \{b\}$ أثبت أن x_o تملك دورة أولية n . [لاحظ أن إمكانية أن يكون $f(x_o) = b$ يجب أن تحذف. هذا يمكن عمله بملاحظة أن $f^3(x_o) \in I_1$ ولكن $f^2(b) = a \notin I_1$.]

(xiii) من (xi) و (xii) و(vi) استنتج أن f يملك نقطة دورية تملك دورة أولية n لكل $n \geq 3$. [نتعامل تحت مع الحالات $n = 1$ و $n = 2$.]

(xiv) استخدم تمهيدية أ وحقيقة أن $f(I_n) \supseteq I_1$ لإثبات أنه يوجد نقطة ثابتة للاقتران f في I_1 ، أي أنه يوجد نقطة دورية تملك دورة أولية 1.

(xv) لاحظ أن $f(I_n)\supseteq I_1$ و $f(I_1)\supseteq I_o$. باستخدام تمهيدية ب أثبت أنه يوجد فترة مغلقة $I_o\supseteq B$ بحيث $f(B)=I_1$. بعد ذلك لاحظ أن $I_o\subseteq f^2(B)$ ومن تمهيدية أ استنتج أنه يوجد نقطة $x_1\in B$ بحيث $f^2(x_1)=x_1$. أثبت أن $x_1\in B\subseteq I_o=[a,b]$ في حين أن $f(x_1)\in f(B)=I_1=[b,c]$ و $x_1\neq b$. استنتج أن x_1 نقطة دورية تملك دورة أولية 2 للاقتران f . هذا يكمل برهان نظرية الدورة 3.

5- (i) أثبت أن نظرية الدورة 3 يمكن أن تكون خاطئة إذا $\mathbb{R}$ استبدلت بـ $\mathbb{R}^2$.

[مساعدة. ادرس الدوران حول نقطة الأصل.]

(ii) أثبت أن نظرية الدورة 3 يمكن أن تكون خاطئة إذا $\mathbb{R}$ استبدلت بـ $\mathbb{R}^n$ ، بـ $n\geq 2$.

(iii) أثبت أن نظرية الدورة 3 يمكن أن تكون خاطئة إذا $\mathbb{R}$ استبدلت ب S^1 حيث S^1 هي الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1 في $\mathbb{R}^2$.

6- لماذا نظرية Sarkovskii صحيحة عندما $\mathbb{R}$ تستبدل بأن فترة مفتوحة (a,b)، حيث $a,b\in\mathbb{R}$, $a\langle b$؟
[مساعدة. من السهل استنتاجه من نظرية Sarkovskii على $\mathbb{R}$.]

7.3أ الأنظمة الديناميكية الفوضوية Chaotic Dynamical Systems

1.7.3أ ملاحظات. اليوم هناك الآلاف من الأبحاث المنشورة ومئات من الكتب تتعامل مع الأنظمة الديناميكية الفوضوية. هذه متعلقة بعلوم مختلفة مثل الفن وعلم الأحياء، الاقتصاد، علم البيئة والمالية. سيكون من الحماقة محاولة إعطاء أو تحديد تاريخ محدد للفوضى وهو تعبير استخدم في كتاب Genesis in the Bible and Hun-Tun (ترجم كفوضى) في Taoism ([92][Giradot])، تقليد فلسفي يرجع 2,200 سنة في الصين، إلى سلالة الهان. هنا نركز في العشرين قرن.

كذلك من الحماقة أن نحاول هنا إعطاء تعريف "صحيح" للمفهوم الرياضي للفوضى. بالأحرى نحن سنعطي تعريف معقول واحد ملاحظاً أن هناك تعاريف أخرى غير مكافئة. في الحقيقة بعض علماء الرياضيات يصرحون بأن ليس هناك تعريف حالي يوضح بالضبط ماذا نريد الفوضى أن تكون.

كما هو منصوص في وقت سابق فإن البحث في 1975 لـ Yorke و Li سبب اهتماماً واسع الانتشار في الأنظمة الديناميكية الفوضوية. على أية حال السنة السابقة العالم الاسترالي Robert M. May، لاحقاً اللورد Robert May ورئيس الجمعية الملكية رفيعة المستوى للندن نشر البحث ([152] May) الذي فيه قال "بعض من معادلات الاختلاف اللاخطية التي تصف نمو السكان الحيوي مع عدم تداخل الأجيال يمكن أن تعرض طيفاً رائعاً

للسلوك الديناميكي، من نقاط التوازن المستقر إلى تذبذب دوري ثابت بين نقطتي سكان إلى دورات ثابتة مع 4، 8، 16،... من النقاط، دخولاً إلى منطقة الفوضى التي فيها (اعتماداً على قيمة السكان الأولية) الدورات لأي دورة أو حتى المستوية كلياً ولكن بنمو سكاني محدود يمكن أن تحصل".

Jules Henri Poincaré (1854-1912) أحد علماء الرياضيات العظام في فرنسا، مُعترف له بأنه أحد مؤسسي عدد من حقول الرياضيات من ضمن ذلك الديناميكا اللاخطية الحديثة، نظرية ارغو، والتبولوجيا. عمله قاد لوجود نظرية الفوضى. كتب في كتابه سنة 1903 والذي أعيد نشر نسخة مترجمة منه سنة 2003 (Poincaré [183]): "إذا عرفنا بالضبط قوانين الطبيعة وحالة الكون في لحظته الأولية يمكن أن نتوقع بالضبط حالة ذلك الكون في لحظة قادمة. ولكن حتى لو كانت الحالة أن القوانين الطبيعية لم تعطينا أي معلومة نحن لا نزال نستطيع أن نعرف فقط الحالة الأولية تقريباً. إذا كان ذلك يمكننا لتوقع الحالة القادمة مع التقريب نفسه هذا كل ما نحتاجه ويجب علينا أن نقول بأن الظاهرة كانت متوقعة وأنه محكوم بالقوانين. ولكنه ليس دائماً هكذا، ممكن أن يحدث اختلافات صغيرة في الشروط الأولية تحدث اختلافات كبيرة في الظواهر النهائية. خطأ صغير في المدخل ينتج خطأ كبير في النهاية. التنبؤ يصبح مستحيل". الشيء الذي وصفه Poincaré أصبح معروفاً بعد ذلك بشكل عامي بتأثير الفراشة، ميزة ضرورية للفوضى.

في 1952 مجلة Collier نشرت قصة قصيرة تسمى "صوت الرعد" للمؤلف المشهور Ray Bradbury (1920-). في القصة مشاركة لرجل أعمال غني في رحلة إلى عصر ما قبل التأريخ والذهاب في رحلة صيد لتعقب الديناصورات. على أية حال واحد من الصيادين عرضياً قتل فراشة قبل التأريخ وهذا الحدث غير المؤذي يغير العالم المستقبلي بشكل مثير. هذا ربما كان الحافز لتقديم ارصادي في 1973 إلى الجمعية الأمريكية لتقدم العلم في واشنطن .D.C، أعطى الاسم "توقيعه: هل تلويح أجنحة الفراشات في البرازيل تحدث اعصار في تكساس؟". الأرصادي كان Edward Norton Lorenz (1917-) والجناح الخفاق يمثل تغيير صغير جداً في الشروط الأولية التي تسبب تغييرات هائلة لاحقاً. اكتشف Lorenz حساسية الشروط الأولية بالصدفة. كان يجري على حاسوب نموذج رياضي لتوقع الطقس. بعد أن أجرى سلسلة معينة قرر مضاعفتها. أعاد إدخال العدد من مطبوعته آخذاً طريق ذو أجزاء خلال السلسلة وجعله ينفذ. الذي وجده هو أن النتائج الجديدة كانت مختلفة بشكل جذري عن نتائجه الأولى لأن المخرجات في مطبوعات دوِّرت إلى ثلاثة منازل عشرية، أدخل العدد 506. بدلاً من العدد 506127. رغم ذلك توقع بأن السلسلة الناتجة سوف تختلف قليلاً عن المرة الأصلية. لأن تكرار التجريب أثبت عكس ذلك، Lorenz استنتج أن الاختلاف القليل في الشروط الأولية يجعل اختلافاً مثيراً في النتيجة. لذلك التنبؤ كان في الحقيقة مستحيلاً. الحساسية من الشروط الأولى أو تأثير الفراشة عُرض ليكون ليس فقط للأهمية النظرية ولكن في الحقيقة للأهمية العملية في علم الأرصاد الجوية. لقد كان تقييد جدي لتوقع الطقس – على الأقل بذلك النموذج. ربما هذا التأثير كان واضحاً كذلك في مختلف التطبيقات العلمية الأخرى.

الرياضيين الأمريكيين George David Birkoff (1884-1944) و Harold Calvin Marston (1892-1977) أكملا عمل Poincaré على الأنظمة الديناميكية. في حين أن Poincaré استخدم التبولوجيا في نظرية الأنظمة الديناميكية فإن Birkoff بشكل خاص زود ذلك باستخدام نظرية قياس ليبيج (Lebesgue measure). في 1931 Birkhoff و P.A. Smith في بحثهم Birkhoff و Smith [25] قدما مفهوم التعدي المتري الذي يتركز

في نظرية ارغو (ergodic theory) واستعمل من قبل Robert L. Devaney في 1986 في تعريفة واسع الانتشار ووصل إلى الفوضى.

الشروط الثلاث: التعدي، الحساسية للشروط الأولية وكثافة النقاط الدورية كما ظهرت في نظرية الدورة 3 كانت بالضبط الذي استخدمه Devaney في تعريفه للفوضى. □

أ2.7.3 تعريف. ليكن (X,d) فضاء متري و $f:X\to X$ اقتران من X إلى نفسها. فإن (X,f) يسمى نظام ديناميكي (dynamical system).

أ3.7.3 ملاحظة. سيكون ملائماً أكثر للدلالة على النظام الديناميكي أن نستخدم (X,d,f). على الرغم من ذلك غالباً هذا لا يفعل.

أ4.7.3 تعريف. ليكن (X,d) فضاءً مترياً و $f:X\to X$ اقتران من X إلى نفسها. فإن النظام الديناميكي (X,f) يسمى متعدي (transitive) إذا كان لكل $x,y\in X$ ولكل $\varepsilon\rangle 0$ يوجد $z\in X$ و $n\in\mathbb{N}$ بحيث $d(z,y)\langle\varepsilon$ و $d\left(f^{n}(z),x\right)\langle\varepsilon$.

أ5.7.3 ملاحظة. بالكلام التقريبي، التعدي يقول أنه يوجد نقطة z "قريبة" من y بحيث أن هناك نقطة في مدار z "قريبة" من x.

أ6.7.3 ملاحظة. أخيراً نحن سنعرف فوضى. على أية حال يجب أن نكون حذرين من أن هناك عدد من التعاريف غير المتكافئة للفوضى بالإضافة إلى العديد من الكتاب الذين يكونون مبهمين بما يعنوه بالفوضى. تعريفنا هو ذلك المستخدم من قبل Robert L.Devaney مع نتائج التعديل الناتجة من عمل مجموعة من الرياضيين الاستراليين في 1992.

أ7.7.3 تعريف. النظام الديناميكي (X,f) يسمى فوضوي (chaotic) إذا كان

(i) مجموعة كل النقاط الدورية للاقتران f كثيفة في المجموعة X و

(ii) (X,f) متعدي.

أ8.7.3 ملاحظة. حتى 1992 كان طبيعياً أن تضيف شرط ثالث في تعريف الأنظمة الديناميكية الفوضوية. هذا الشرط هو أن في النظام الديناميكي (X,f)، f يعتمد بحساسية على الشروط الأولية. على أية حال في 1992 مجموعة من الرياضيين من جامعة La Trobe في ملبورن في أستراليا أثبتوا أن هذا الشرط متحقق وصحيح إذا تحقق الشرطان في تعريف أ7.7.3. عملهم هذا ظهر في البحث " On Devaney's definition of "chaos للعلماء John Banks، Gary Davis، Peter Stacey، Jeff Brooks، Grant Cairns في مجلة American Mathematical Monthly ‏(Banks et al.[17]). انظر أيضاً (Banks et al.[18]).

9.7.3أ تعريف. يقال أن النظام الديناميكي (X, f) يعتمد بحساسية على الشروط الأولية إذا وجد $\beta\rangle 0$ بحيث أن لكل $x \in X$ ولكل $\varepsilon\rangle 0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ و $y \in X$ مع $d(x,y)\langle\varepsilon$ حيث $d\big((f^n(x), f^n(y)\big)\rangle\beta$.

10.7.3أ ملاحظة. هذا التعريف يقول ليس مهماً أي x نبدأ بها وكم صغيراً جوار x الذي تختاره فدائماً يوجد y في هذا الجوار حيث مدار y يختلف عن مدار x بعلى الأقل β. [و β غير معتمدة على x.]

11.7.3أ ملاحظة. الذي قلناه في ملاحظة 8.7.3أ هو أن كل نظام ديناميكي فوضوي يعتمد بحساسية على الشروط الأولية. سوف لا نثبت ذلك هنا. ولكن سوف نبين في تمارين 7.3أ#2 أن الاقتران D المعرَّف في تمارين 3.3أ#3 في الحقيقة يعتمد بحساسية على الشروط الأولية.

12.7.3أ ملاحظة. في 1994 أثبت Michel Vellekoop و Raoul Berglund Vellekoop و Berglund [214] أن في الحالة الخاصة وهي أن (X, d) هو فترة منتهية أو غير منتهية مع المسافة الإقليدية فإن التعدي يعطي الشرط (ii) في تعريف 7.7.3أ، أي أن مجموعة كل النقاط الدورية هي كثيفة. على كل حال، David Asaf و Steve Gadbois IV و Gadbois [123] بينوا أن ذلك ليس صحيحاً في الفضاءات المترية بشكل عام.

تمارين 7.3أ

1- ليكن $D:[0,1) \to [0,1)$ معطى على الشكل $D(x) = 2x(\text{mod}\,1)$. أثبت أن النظام الديناميكي $([0,1], D)$ هو فوضوي.

[مساعدة. تذكر أن في تمرين 4.3أ#7 أثبت أن مجموعة كل النقاط الدورية لـ D هي

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{0, \frac{1}{2^n-1}, \frac{2}{2^n-1}, \frac{3}{2^n-1}, \dots, \frac{2^n-2}{2^n-1}\right\}$$

وأن المجموعة P كثيفة في [0,1). لذلك الشرط (i) في تعريف 7.7.3أ متحقق. لإثبات الشرط (ii) استخدم الخطوات التالية

(أ) لتكن $x_1 y \in [0,1)$ و $\varepsilon\rangle 0$ معطاة. لتكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $2^{-n}\varepsilon$. لأي $k \in \{1,2,\dots,n\}$ اجعل

$$J_{k,n} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$$

أثبت أنه يوجد $k \in \{1,2,...,n\}$ بحيث $x \in J_{k,n}$

(ب) أثبت أن $f^n(J_{k,n}) = [0,1)$.

(ج) استنتج من (b) أنه يوجد $z \in J_{k,n}$ بحيث $f^n(z) = y$.

(د) استنتج أنه z تملك الخواص المطلوبة في تعريف أ4.7.3 ولذلك $([0,1), D)$ هو نظام ديناميكي متعدي.

(ه) استنتج أن $([0,1), D)$ هو نظام ديناميكي.]

2- أثبت أن الاقتران D في تمرين 1 أعلاه يعتمد بحساسية على الشروط الأولية. [مساعدات. لتكن $\beta = \dfrac{1}{4}$. معطى أي $\varepsilon \rangle 0$، لتكن $n \in \mathbb{N}$ بحيث $2^{-n} \langle \varepsilon$. اجعل $s = f^n(x) + 0.251(\mathrm{mod}1)$. أولاً أثبت أن $d(f^n(x), s) \rangle \beta$. كما لوحظ في تمرين 1(أ)، $x \in J_{k,n}$ لبعض $k \in \{1,2,...,n\}$. ولكن بواسطة تمرين 1(ب)، $f^n(J_{k,n}) = [0,1)$. لتكن $y \in J_{k,n}$ بحيث $f^n(y) = s$. الآن أثبت أن y تملك الخواص المطلوبة (i) $d(x,y) \langle \varepsilon$ و (ii) $d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \rangle \beta$.]

3- لتكن m عدد صحيح موجب (محدد) وتأمل النظام الديناميكي $([0,1), f_m)$ حيث $f_m(x) = mx(\mathrm{mod}1)$. أثبت أن $([0,1), f_m)$ هو فوضوي.

[مساعدة. انظر تمرين 1 أعلاه]

4- ليكن (X, τ) فضاءاً تبولوجياً و f اقتراناً متصلاً من X إلى نفسها. فإن f يسمى متعدي تبولوجياً (topologically transitive) إذا كان لأي زوج من المجموعات المفتوحة غير الخالية U و V في (X, τ) يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $f^k(U) \cap V \neq \phi$. لأي فضاء متري (X, d) و τ التبولوجيا المحدثة بواسطة المسافة d أثبت أن f متعدي إذا وفقط إذا كان متعدي تبولوجياً.

8.3أ الأنظمة الديناميكية المترافقة

Conjugate Dynamical Systems

أ1.8.3 تعريف. لتكن (X_1,d_1) و (X_2,d_2) فضاءات مترية و (X_1,f_1) و (X_1,f_2) أنظمة ديناميكية. فإن (X_1,f_1) و (X_2,f_2) تسمى أنظمة ديناميكية مترافقة (Conjugate Dynamical Systems) أو وجد هوميومورفزم $h:(X_1,d_1)\to(X_2,d_2)$ بحيث $f_2 oh = hof_1$ أي أن $f_2(h(x))=h(f_1(x))$ لكل $x\in X_1$. الاقتران h يسمى اقتران مرافق (Conjugate map).

أ2.8.3 ملاحظة. في تمارين أ8.3#2 أثبت أن (X_1,f_1) و (X_2,f_2) هي أنظمة ديناميكية مترافقة، وبعد ذلك (X_2,f_2) و (X_1,f_1) أنظمة ديناميكية مترافقة. لذلك نرى أن الترتيب في الأنظمة الديناميكية المدروسة ليس مهماً. □

أ3.8.3 ملاحظة. الأنظمة الديناميكية المترافقة متكافئة بنفس معنى الفضاءات التبولوجية الهوميوموفك متكافئة. النظرية القادمة تعرض هذه الحقيقة. في معظم الأحيان سوف يكون ممكناً تحليل نظام ديناميكي معقد بإثبات أنه مترافق مع واحد مفهوم. □

أ4.8.3 نظرية. لتكن (X_1,f_1) و (X_2,f_2) فضاءات ديناميكية مترافقة حيث h هو الاقتران المرافق.

(i) النقطة $x\in X_1$ نقطة ثابتة للاقتران f_1 في X_1 إذا وفقط إذا كان $h(x)$ هي نقطة ثابتة للاقتران f_2 في X_2.

(ii) النقطة $x\in X_1$ هي نقطة دورية ذات دورة $n\in\mathbb{N}$ للاقتران f_1 في X_1 إذا وفقط إذا كان $h(x)$ هي نقطة دورية ذات دورة n للاقتران f_2 في X_2.

(iii) النظام الديناميكي (X_1,f_1) هو فوضوي إذا وفقط إذا كان النظام الديناميكي (X_2,f_2) هو فوضوي.

البرهان. (i) و (ii) مباشرة وتركت لك كتمرين.

لرؤية (iii)، افرض أن (X_1,f_1) هو فوضوي. لتكن P مجموعة النقاط الدورية للاقتران f_1. بما أن (X_1,f_1) فوضوي فإن P كثيفة في X_1. بما أن h متصل من السهل رؤية أن $h(P)$ كثيفة في المجموعة $h(X_1)=X_2$. بما أن $h(P)$ هي مجموعة نقاط دورية لـ(X_2,f_2) ينتج أن (X_2,f_2) يحقق الشرط (i) في تعريف أ7.7.3.

لإتمام البرهان نحتاج أن نبين أن (X_2, f_2) متعدي. لهذا الهدف اجعل $\varepsilon\rangle 0$ و $u,v \in X_2$. فإنه يوجد $x,y \in X_1$ بحيث $h(x)=u$ و $h(y)=v$. بما أن h متصل فإنه متصل عند النقاط $x,y \in X_1$. لذلك يوجد $\delta\rangle 0$ بحيث $z \in X_1$ و $d_1(x,z)\langle\delta \Leftarrow d_2(h(x),h(z))\langle\varepsilon$، (1.10)

و

$z' \in X_1$ و $d_1(y,z')\langle\delta \Leftarrow d_2(h(y),h(z'))\langle\varepsilon$، (2.10)

بما أن (X_1, f_1) متعدي يوجد $z \in X_1$ و $n \in \mathbb{N}$ بحيث

$$d_1(x,z)\langle\delta \Rightarrow d_1\left(f_1^n(z),y\right)\langle\varepsilon \qquad (3.10)$$

افرض z أنها اختيرت بحيث (3.10) تتحقق واجعل $w=h(z)$. باستخدام هذه القيمة لـ z في (1.10) وبأخذ $f_1^n(z)$ مثل z' في (2.10) نحصل على

$$d_2(u,w)=d_2\left(h(x),h(z)\right)\langle\varepsilon \quad \text{من (1.10) و (3.10)} \qquad (4.10)$$

و

$$\begin{aligned} d_2\left(f_2^n(w),v\right) &= d_2(f_2^n(h(z)),h(y)) \\ &= d_2\left(h(f_1^n(z),h(y)\right) \\ &\langle\varepsilon \end{aligned} \qquad (5.10)$$

من (2) و (3). الآن من (4.10) و (5.10) ينتج أن (X_2, f_2) متعدي. □

تمارين أ8.3

1- ليكن $T:[0,1]\to[0,1]$ هو اقتران الخيمة (tent function) المعطى على الشكل

$$T(x)=\begin{cases} 2x, 0\le x\le \frac{1}{2} \\ 2-2x, \frac{1}{2}\le x\le 1 \end{cases}$$

(i) ارسم منحنى T.

(ii) احسب صيغة T^2 وارسم منحنى T^2.

(iii) احسب صيغة T^3 وارسم منحنى T^3.

(iv) ليكن $I_{k,n}=\left[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$، حيث $k\in\{1,2,...,2^n-1\}$، $n\in\mathbb{N}$. أثبت أن $T^n(I_{k,n})=[0,1]$.

(v) باستخدام تمهيدية أ في تمارين 6.3#2 أثبت أن T^n يملك نقطة ثابتة في كل $I_{k,n}$.

(vi) استنتج من (v) أنه يوجد نقطة دورية لـ T في كل $I_{k,n}$.

(vii) باستخدام النتائج أعلاه أثبت أن $([0,1],T)$ هو نظام ديناميكي فوضوي.

2- أثبت أنه إذا كان (X_1,f_1) و (X_2,f_2) أنظمة ديناميكية مترافقة فإن (X_2,f_2) و (X_1,f_1) كذلك أنظمة ديناميكية مترافقة. (لذلك الترتيب في الأنظمة الديناميكية المدروسة ليس مهماً.)

3- ليكن $L:[0,1]\to[0,1]$ هو الاقتران المعطى على الصورة $L(x)=4x(1-x)$.

(i) أثبتت أن الاقتران $h:[0,1]\to[0,1]$ المعطى على الصورة $h(x)=Sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ هو هوميومورفزم من $[0,1]$ إلى نفسها بحيث $hoT=Loh$ حيث T هو اقتران الخيمة.

(ii) استنتج أن $([0,1],T)$ و $([0,1],L)$ أنظمة ديناميكية مترافقة.

(iii) استنتج من (ii)، نظرية أ4.8.3 وتمرين 1 أعلاه أن $([0,1],L)$ هو نظام ديناميكي فوضوي.

4- تأمل الاقتران التربيعي $Q_{-2}:[-2,2]\to[-2,2]$ حيث $Q_{-2}(x)=x^2-2$.

(i) أثبت أن الأنظمة الديناميكية $([-2,2],Q_{-2})$ و $([0,1],L)$ في تمرين 3 أعلاه هي مترافقة.

(ii) استنتج أن $([-2,2],Q_{-2})$ هو نظام ديناميكي فوضوي.

ملحق 4: بعد هوسدورف Hausdorff Dimension

مقدمة

في هذا الجزء نقدم مفهوم بعد هوسدورف الذي يلعب دوراً مهماً في دراسة صور النمط الهندسي المتكرر (fractals).

أ1.4 بعد هوسدورف Hausdorff Dimension

نبدأ بتحذير القارئ بأن هذا الجزء أكثر تعقيداً من معظم المادة الموجودة في الفصول السابقة من هذا الكتاب. بالإضافة لذلك فهم هذا الجزء ليس ضرورياً لفهم بقية الكتاب.

نحن نعتبر النقاط ذات بعد 0، الخطوط ذات بعد 1، المربعات ذات بعد 2، المكعبات ذات بعد 3 وهكذا. لذا بشكل حدسي نعتقد بأننا نعرف ما هو مفهوم البعد. في الفضاءات التبولوجية العشوائية هناك مفاهيم متنافسة للأبعاد التبولوجية. في الفضاءات "اللطيفة" المفاهيم المختلفة للبعد التبولوجي تميل إلى التوافق. على أية حال حتى الفضاءات الإقليدية ذات السلوك الحسن $\mathbb{R}^n$، $n\rangle 1$ تملك مفاجئات مخزنة لنا.

في 1919 Felix Hausdorff قدم مفهوم بعد هوسدورف للفضاء المتري. الملمح المدهش لبعد هوسدورف هو أنه يمكن أن يملك قيم ليست أعداد صحيحة. هذا الموضوع طور بواسطة Abram Samoilovitch Besicovitch لعقد أو يزيد بعد ذلك ولكن ظهرت أهميته في السبعينيات مع عمل Benoit Mandelbrot الذي دعاه هندسة صورة النمط الهندسي المتكرر والذي ساعد على تطور نظرية الفوضى. نظرية الفوضى وصور النمط الهندسي المتكرر استعملت في مجال واسع من المجالات التي تشمل الاقتصاد، المالية، علم الأرصاد الجوية، الفيزياء وعلم وظائف الأعضاء.

نبدأ بمناقشة قياس هوسدورف (أو ما يسميه البعض قياس هوسدورف بيسيكوفيتش. بعض القراء سيكونون على ألفة مع مفهوم قياس ليبيج (Lebesgue measure)، على أية حال مثل هذا الفهم ليس ضرورياً هنا.

أ1.1.4 تعريف. لتكن Y مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d). فإن العدد $\sup\{d(x,y): x,y\in Y\}$ يسمى قطر (diameter) المجموعة Y ويرمز له بالرمز diam Y.

أ2.1.4 تعريف. لتكن Y مجموعة جزئية من الفضاء المتري (X,d)، I مجموعة مفهرسة، ε عدد حقيقي موجب و $\{U_i : i\in I\}$ عائلة مجموعات جزئية من X بحيث $Y\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$ ولكل $i\in I$، $diam U_i\langle\varepsilon$. فإن $\{U_i : i\in I\}$ تسمى $\varepsilon-$ غطاء ($\varepsilon-\text{covering}$) للمجموعة Y.

نحن نهتم بشكل خاص بـ$\varepsilon-$ غطاءات معدودة. لذلك سوف نسأل: أي المجموعات الجزئية من الفضاءات المترية التي تملك $\varepsilon-$ غطاءات معدودة لكل $o\langle\varepsilon$؟. التمهيدية التالية تزودنا بالإجابة.

أ3.1.4 تمهيدية. لتكن Y مجموعة جزئية من فضاء متري (X,d) و d_1 المسافة المحدثة على Y. فإن Y تملك $\varepsilon-$ غطاء معدود لكل $o\langle\varepsilon$ اذا وفقط اذا كان (Y,d_1) انفصالي.

البرهان. افرض أن Y تملك $\varepsilon-$ غطاء معدود لكل $o\langle\varepsilon$. بشكل خاص Y تملك $\frac{1}{n}-$ غطاء معدود، $\{U_{n,i}: i\in\mathbb{N}\}$. لتكن $y_{n,i}$ أي نقطة في $Y\bigcap U_{n,i}$. يجب أن نرى أن المجموعة المعدودة $\{y_{n,i}: i\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\}$ كثيفة في Y. واضح أن لكل $y\in Y$ يوجد $n\in\mathbb{N}$ بحيث $d(y,y_{n,i})\langle\frac{1}{n}$. لذلك لتكن O أي مجموعة مفتوحة تتقاطع مع Y بغير ϕ. لتكن $y\in O\bigcap Y$ فإن O تحوي كرة مفتوحة B مركزها y ونصف قطرها $\frac{1}{n}$ لبعض $n\in\mathbb{N}$. لذلك $y_{n,i}\in O$ لبعض $i\in\mathbb{N}$. ولهذا $\{y_{n,i}: i\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}\}$ هي كثيفة في Y ولذلك Y انفصالي.

بالمقابل افرض أن Y انفصالي. فإنه يملك مجموعة جزئية كثيفة معدودة $\{y_i: i\in\mathbb{N}\}$. في الواقع إذا كان $y\in Y$ و $o\langle\varepsilon$ فإنه يوجد y_i، $i\in\mathbb{N}$ بحيث $d(y,y_i)\langle\frac{\varepsilon}{2}$. لذلك عائلة كل $\{U_i: i\in\mathbb{N}\}$، حيث U_i هي كرة مفتوحة مركزها y_i ونصف قطرها $\frac{\varepsilon}{2}$ هي $\varepsilon-$ غطاء لـY كما هو مطلوب. □

أصبحنا الآن قادرين على تعريف قياس هوسدورف ذو البعد s للمجموعة الجزئية من الفضاء المتري. بدقة أكبر، سوف نعرف هذا القياس للمجموعات الجزئية الانفصالية من الفضاء المتري. بالتاكيد إذا كان (X,d) فضاء متري انفصالي مثل $\mathbb{R}^n$ لأي $n\in\mathbb{N}$ فإن كل المجموعات الجزئية منه هي انفصالية. (انظر تمارين 3.6#15.)

أ4.1.4 تعريف. لتكن Y مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X,d) و s عدد حقيقي موجب. لأي عدد حقيقي موجب $\varepsilon < 1$، اجعل

$\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathrm{Y}) = \inf\{\sum (diamU_i)^s$ هي $\{U_i : i \in N\}$ $\varepsilon -$ غطاء لـ $Y\}$ و

فإن $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ تسمى قياس هوسدورف الخارجي ذو البعد s (s.dimensional Hausdorff outer measure) للمجموعة Y.

أ5.1.4 ملاحظة. لاحظ أنه في تعريف أ4.1.4، إذا كانت $\varepsilon_1 \langle \varepsilon_2$ فإن $\mathcal{H}_{\varepsilon_2}^{s}(\mathrm{Y}) \le \mathcal{H}_{\varepsilon_1}^{s}(\mathrm{Y})$. لذلك عندما ε تقترب من 0 إما نهاية $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathrm{Y})$ موجودة أو تؤول إلى ∞. هذا يساعدنا لفهم تعريف $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$.

أ6.1.4 ملاحظة. من المهم أن تلاحظ أنه إذا كانت d_1 هي المسافة المحدثة على Y بواسطة المسافة d على X فإن $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ تعتمد فقط على المسافة d_1 على Y. بمعنى آخر إذا كانت Y هي كذلك مجموعة جزئية من الفضاء المتري (Z,d_2) و d_2 يحدث نفس المسافة d_1 على Y فإن $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ هي نفسها عندما نعتبرها كمجموعة جزئية من (X,d) أو (Y,d_2). لذلك على سبيل المثال، قياس هوسدورف الخارجي ذو البعد s هو نفسه للفترة المغلقة $[0,1]$ إذا اعتبرت مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ أو من $\mathbb{R}^2$ أو في الحقيقة من $\mathbb{R}^n$ لأي عدد صحيح موجب n.

أ7.1.4 مساندة. لتكن Y مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X,d)، s و t أعداد حقيقية موجبة حيث $s \langle t$ و ε عدد حقيقي موجب حيث $\varepsilon \langle 1$.

فإن

(i) $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{t}(\mathrm{Y}) \le \mathcal{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathrm{Y})$ و

(ii) $\mathcal{H}_{\varepsilon}^{t}(\mathrm{Y}) \le \varepsilon^{t-s}\mathcal{H}_{\varepsilon}^{s}(\mathrm{Y})$

البرهان. البند (i) ينتج مباشرة من حقيقة أن $\varepsilon\langle 1$ ولذلك كل $diamU_i\langle 1$ والذي يعطي $(diamU_i)^t\langle(diamU_i)^s$. البند (ii) يتبع من حقيقة أن $diamU_i\langle\varepsilon\langle 1$ ولذلك $(diamU_i)^t\langle\varepsilon^{t-s}(diamU_i)^s$. □

أ8.1.4 تمهيدية. لتكن Y مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X,d) و s و t أعداد حقيقية موجبة حيث $s\langle t$.

(i) إذا كان $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y}) <\infty$ فإن $\mathcal{H}^t(\mathrm{Y}) = 0$.

(ii) إذا كان $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y}) <\infty$ $\neq 0$ فإن $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y}) = \infty$.

البرهان. هذه تنتج مباشرة من تعريف أ3.1.4 ومساندة أ7.1.4((ii)). □

أ9.1.4 ملاحظة. من تمهيدية أ8.1.4 نلاحظ أنه إذا كان $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ منتهي ولا يساوي صفراً لبعض s فإن لكل القيم الأكبر لـ s، $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ تساوي صفراً ولكل القيم الأصغر لـ s، $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})$ تساوي ∞. □

تمهيدية أ8.1.4 تمكننا من تعريف بعد هوسدورف.

أ10.1.4 تعريف. لتكن Y مجموعة انفصالية من فضاء متري (X,d). فإن

$dim_H(Y)$

يسمى بعد هوسدورف (Hausdorff dimension) للمجموعة Y

مباشرة نحصل على التمهيدية التالية

أ11.1.4 تمهيدية. لتكن Y مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X,d). فإن

(I)
$$dim_H(Y) = \begin{cases} 0, & \text{اذا كان } \mathcal{H}^s(Y)=0 \text{ لكل } s \\ \sup\{s\in[0,\infty):\mathcal{H}^s(Y)=\infty\}, & \text{اذا كان } \sup \text{ موجود} \\ \infty, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

(II)
$$\mathcal{H}^s(Y)\begin{cases} 0, s > \dim_H(Y) \\ \infty, s < \dim_H(Y) \end{cases}$$ □

حساب بعد هوسدورف لفضاء متري ليس تمريناً سهلاً. ولكن هنا لدينا مثال تعليمي.

أ12.1.4 مثال. لتكن Y أي مجموعة جزئية منتهية من فضاء متري (X,d). فإن $\dim_H(Y)=0$.

البرهان. اجعل $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_N\}$، $N\in\mathbb{N}$. لتكن $O_\varepsilon(i)$ هي الكرة المفتوحة التي مركزها y_i ونصف قطرها $\frac{\varepsilon}{2}$. فإن $\{O_i : i=,1,\ldots,N\}$ هي $\varepsilon-$ غطاء للمجموعة Y.

لذلك

$$\mathcal{H}^{t}_{\varepsilon}(\mathrm{Y}) = \inf\left\{\sum_{i\in N}(diamU_i)^s : \text{هو غطاء مفتوح لـ } Y\ \{U_i\}\right\} \le \sum_{i\in 1}^{N}(diamO_i)^s = \varepsilon^s.N^{s+1}\big/2^s.$$

لذلك $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y}) \le \lim_{\substack{\varepsilon\to o\\ \varepsilon\rangle o}} \varepsilon^s.N^{s+1}\big/2^s = 0$. ولهذا $\mathcal{H}^s(\mathrm{Y})=0$ لكل $s\rangle o$. لذلك $\dim_H(Y)=0$. □

التمهيدية التالية مباشرة.

أ13.1.4 تمهيدية. إذا كان (Y_1,d_1) و (Y_2,d_2) فضائين متريين متقايسين فإن $\dim_H(Y_1)=\dim_H(Y_2)$. □

أ14.1.4 تمهيدية. لتكن Y و Z مجموعتين جزئيتين انفصاليتين من فضاء متري (X,d). إذا كانت $Z\subset Y$ فإن $\dim_H(Z)\le\dim_H(Y)$.

البرهان. تمرين. □

أ15.1.4 مساندة. لتكن $Y=\bigcup_{i\in\aleph} Y_i$ مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X,d). فإن
$\mathcal{H}^s(Y)\le\sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{H}^s(Y_i)$

البرهان. تمرين. □

أ 16.1.4 تمهيدية. لتكن $Y=\bigcup_{i\in N} Y_i$ مجموعة جزئية انفصالية في فضاء متري (X, d). فإن؛

$$\dim_H(Y)=\sup\{\dim_H(Y_i): i\in N\}$$

البرهان. ينتج مباشرة من مساندة أ 15.1.4 أن؛

$$\dim_H(Y)\le\sup\{\dim_H(Y_i): i\in N\}$$

على أي حال، بواسطة تمهيدية أ 14.1.4 ، $\dim_H(Y)\ge\dim_H(Y_i)$ لكل $i\in N$ ، بوضع هاتين الملاحظتين معاً يكتمل برهان التمهيدية. □

أ 17.1.4 تمهيدية. إذا كانت Y مجموعة جزئية معدودة من فضاء متري (X, d) فإن $\dim_H(Y)=0$.

البرهان. هذا يتبع مباشرة من تمهيدية أ 16.1.4 ومثال أ 12.1.4. □

بشكل خاص، تمهيدية أ 17.1.4 تخبرنا بأن $\dim_H(Q)=0$.

أ18.1.4 مثال. لتكن [a, a + 1] ، $a\epsilon\mathbb{R}$ فترة مغلقة في $\mathbb{R}$ حيث $\mathbb{R}$ تملك المسافة الأقليدية. فإن $\dim_H[a,a+1]=\dim_H[0,1]=\dim_H(R)$.

البرهان. لتكن d_a المسافة المحدثة على [a , a + 1] بواسطة المسافة الأقليدية على $\mathbb{R}$. فإن $([a, a + 1],d_a)$ متقايسة مع $([0, 1], d_0)$ ولذلك بواسطة تمهيدية أ 13.1.4 ، $\dim_H[a,a+1]=\dim_H[0,1]$.

الآن لاحظ أن $R=\bigcup_{a=-\infty}^{\infty}[a,a+1]$. لذلك؛

$$\begin{aligned}\dim_H(R)&=\sup\{\dim_H[a,a+1]: a=\dots,-n,\dots,-2,-1,0,1,2,\dots,n,\dots\}\\&=\dim_H[0,1]\end{aligned}$$

لأن كل $\dim_H[a,a+1]=\dim_H[0,1]$. □

أ **19.1.4 تمهيدية.** لتكن (X , d_1) و (Y , d_2) فضاءات مترية انفصالية و $f : X \to Y$ اقتران شامل. إذا وجد عدد حقيقي موجب a و b بحيث ان لكل $x_1 , x_2 \in X$

$$a.d_1\left(x_1 , x_2\right) \leq d_2\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \leq b.d_1\left(x_1 , x_2\right)$$

فإن $\dim_H\left(X , d_1\right) = \dim_H\left(Y , d_2\right)$.

البرهان. تمرين. □

أ **20.1.4 ملاحظة.** في بعض الحالات تمهيدية أ 19.1.4 مفيدة في حساب بعد هوسدورف للفضاء. انظر تمارين 7 6.6 # و # 8.

وسيلة مفيدة أخرى في حساب بعد هوسدورف هو أن نحسن تعريف قياس هوسدورف الخارجي ذو البعد s كما في التمهيدية التالية كل عناصر ε- غطاء هي مجموعات مفتوحة.

أ 21.1.4 **تمهيدية.** لتكن Y مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X , d) و s عدد حقيقي موجب. إذا كان لكل عدد حقيقي موجب $\varepsilon < 1$.

$$O_\varepsilon^s\ (Y) = \inf \left\{\sum \left(d_{iam}\ O_i\right)^s : O_i \text{ مفتوحة مجموعات بواسطة } Y \text{ لـ غطاء } \varepsilon\text{- هي } \{O_i : i \in N\}\right\}$$

فإن $\mathcal{O}_\varepsilon^s(Y) = \mathcal{H}_\varepsilon^s(Y)$.

بالإضافة لذلك؛

$$\mathcal{H}^s(Y) = \begin{cases} \lim O_\varepsilon^s\ (Y), & \text{اذا كانت النهاية موجودة} \\ \varepsilon \to 0 & \\ \varepsilon > 0 & \\ \infty, & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

البرهان. تمرين. □

أ 22.1.4 **مساندة.** لتكن Y مجموعة جزئي انفصالية مترابطة في فضاء متري (X , d). إذا كانت $\{O_i : i \in N\}$ هي غطاء لـY بواسطة مجموعات مفتوحة O_i فإن؛

$$\sum_{i \in N} diam\ O_i \geq diam\ Y$$

البرهان. تمرين. □

أ 23.1.4 **مثال.** أثبت أن $\mathcal{H}^1[0,1] \geq 1$.

البرهان. إذا وضعنا $Y = [0,1]$ في مساندة 22.1.4أ و $s = 1$ في تمهيدية 21.1.4أ ملاحظاً أن $diam[0,1] = 1$ ينتج $\mathcal{H}_\varepsilon^1[0,1] \geq 1$ لكل $\varepsilon > 0$. هذا يعطي النتيجة المطلوبة. □

أ 24.1.4 **تمهيدية.** لتكن [0, 1] ترمز إلى فترة الوحدة المغلقة مع المسافة الأقليدية. فإن $\dim_H [0,1]=1$.

البرهان. من تمهيدية أ11.1.4 يكفي أن نبين أن $0 \neq \mathcal{H}^1[0,1] \leq \infty$. وهذه هي الحالة إذا بينا أن $\mathcal{H}^1[0,1]=1$.

لأي $0<\varepsilon<1$ من الواضح أن الفترة [0, 1] يمكن أن تغطى بـ n_ε من الفترات كل منها لها قطر أقل من ε حيث $n_\varepsilon \leq 2+\frac{1}{\varepsilon}$. لذلك $\mathcal{H}^1_\varepsilon[0,1] \leq \varepsilon(2+\frac{1}{\varepsilon})$ أي أن $\mathcal{H}^1_\varepsilon[0,1] \leq 1+2\varepsilon$. لذلك $\mathcal{H}^1[0,1] \leq 1$. من مثال أ 23.1.4، لدينا الآن $\mathcal{H}^1[0,1]=1$ الذي منه تنتج التمهيدية. □

بحجة مماثلة لما ذكر في الأعلى نستطيع إثبات أنه إذا كانت $a,b \in R$ حيث $a<b$ و R تملك المسافة الأقليدية فإن $\dim_H [a,b]=1$. النتيجة التالية تتضمن هذه النتيجة و هي تنتج بسهولة من ضم تمهيدية أ 24.1.4، مثال أ 18.1.4، تمهيدية أ 14.1.4، تمهيدية 5.3.4 وتعريف غير مترابط بالكامل في تمارين 2.5 # 10.

أ 25.1.4 **نتيجة.** لتكن R ترمز إلى مجموعة كل الأعداد الحقيقية مع المسافة الأقليدية.

(i) $\dim_H R=1$.

(ii) إذا كانت $S \subseteq R$ فإن $\dim_H S \leq 1$.

(iii) إذا كانت S تحوي فترة ليست ϕ (أي أنها ليست غير مترابطة بالكامل)، فإن $\dim_H S=1$.

(iv) إذا كانت S فترة ليست ϕ في R فإن $\dim_H S=1$.

البرهان. تمرين. □

أ 26.1.4 **ملاحظة.** في الحقيقة إذا كانت R^n تملك المسافة الأقليدية حيث $n \in N$ فإن $\dim_H R^n=n$. هذا يثبت في تمارين أ 1.4. على أية حال، البرهان هناك يعتمدعلى نظرية هين-بورل المعممة 3.3.8 التي لم تثبت حتى الفصل الثامن.

هذا الملحق عن بعد هوسدورف لم يكمل لغاية الآن. من وقت لآخر رجاءً دقق للتجديدات على الإنترنت على .http://uob-community.ballarat.edu.au/smorris/topology.html □

تمارين أ1.4

1- لتكن Y مجموعة جزئية من فضاء متري (X , d) و $\overline{Y}$ هي علاقتها. أثبت أن $diam\ Y = diam\ \overline{Y}$.

2- أثبت تمهيدية أ 14.1.4.

[مساعدة. استخدم تعاريف أ 4.1.4 و أ 10.1.4]

3- أثبت مساندة أ 15.1.4 .

4- إذا كانت $Y = \bigcup_{i=1}^{n} Y_i$ لبعض $n \in N$ مجموعة جزئية انفصالية من فضاء متري (X , d) أثبت أن $\dim_H (Y) = \sup\{\dim_H (Y_i) : i = 1, 2, ..., n\}$.

5- (i) لتكن $n \in N$ و $a, b \in R^n$. أثبت أنه إذا كانت r و s أي أعداد حقيقية موجبة فإن الكرات المفتوحة B_r (a) و B_r (b) في R^n مع المسافة الأقليدية تحقق؛

$$\dim_H B_r(a) = \dim_H B_s(b)$$

(ii) باستخدام طريقة مثال أ 18.1.4؛ أثبت أن $\dim_H B_r(a) = \dim R^n$.

(iii) إذا كانت S_1 هي المكعب المفتوح $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n : 0 < x_i < 1, i = 1, .., n\}$. أثبت أن $\dim_H S_1 = \dim R^n$.

(iv) * باستخدام طرقة تمهيدية أ 24.1.4 أثبت أنه إذا كانت n = 2 فإن $\mathcal{H}^2(S_1) \leq 2$ ولذلك $\dim_H (S_1) \leq 2$.

(v) أثبت أن $\dim_H R^2 \leq 2$.

(vi) باستخدام طريقة مشابهة أثبت أن $\dim_H R^n \leq n$ لكل n > 2 .

6- أثبت أن تمهيدية أ 19.1.4.

[مساعدة. أثبت أن $a^s.\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(Y) \leq b^s.\mathcal{H}^s(X)$].

7- ليكن $f : R \to R^2$ اقتراناً معطى على الشكل $f\ (x) = (x, x^2)$. باستخدام تمهيدية أ 19.1.4 أثبت أن $\dim_H\ f\ [0,1] = \dim_H\ [0,1]$. استنتج من ذلك ومن تمهيدية أ 16.1.4 أنه إذا كانت Y هي المنحنى في R^2 للاقتران $\theta : R \to R$ المعطى بواسطة $\theta(x) = x^2$ فإن $\dim_H (Y) = \dim_H [0,1]$.

8- باستخدام طريقة مشابهة لتلك التي في تمرين 7 أعلاه، أثبت أنه إذا كانت Z هي المنحنى في R^2 لأي كثير حدود؛

$$\phi(x) = a_n\ x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + ... + a_2\ x^2 + a_1\ x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ فإن $\dim_H\ Z\ = \dim_H\ [0,1]$.

*9- ليكن $g : R \to R$ اقتراناً بحيث أن المشتقة رقم n، $g^{(n)}$ موجودة لكل $n \in N$.

بالإضافة لذلك افرض أنه يوجد $k \in N$ ، $\left| g^{(n)}(x) \right| < k$ لكل $n \in N$ ولكل $x \in [0,1]$. (أمثلة على مثل هذا الاقتران تشمل $g = \exp$ ، $g = \sin$ ، $g = \cos$ و g كثير حدود). باستخدام توسعة متسلسلة تايلور للاقتران g ، وسع الطريقة في تمارين 7 و 8 أعلاه لإثبات أنه إذا كان $f : R \to R^2$ معطى على الشكل $f\ (x) = (\ x, g\ (x))$ فإن $\dim_H\ f\ [0,1] = \dim_H\ [0,1]$.

10- أثبت تمهيدية أ 21.1.4.

[مساعدة. أولاً أثبت أنه إذا كانت z أي عدد حقيقي موجب أكبر من 1، و U_i أي مجموعة في (X , d) مع قطر أقل من ε، فإنه يوجد مجموعة مفتوحة O_i بحيث (i) $U_i \subseteq O_i$ ، (ii) $diam\ O_i < \varepsilon$ و(iii) $diam\ O_i \le z.\ diam\ U_i$. استخدم هذا لإثبات أن $\mathcal{O}_\varepsilon^s(Y) \le z^s . \mathcal{H}_\varepsilon^s(Y)$ لكل z > 1 .]

11- أثبت مساندة أ 22.1.4.

[مساعدة. أولاً افرض أن Y تغطى بواسطة مجموعتين مفتوحتين وأثبت النتيجة المشابهة. بعد ذلك ادرس الحالة عندما Y تغطى بعدد منتهي من المجموعات المفتوحة. أخيراً ادرس حالة الغطاء غير المنتهي متذكراً أن مجموع عدد غير منتهي من الحدود موجود (ومنتهي) إذا وفقط إذا كانت نهاية المجاميع المنتهية موجودة .]

12- أثبت أنه إذا كانت P ترمز إلى مجموعة الأعداد غير النسبية مع المسافة الأقليدية فإن $\dim_H\ P = 1$.

13- املأ التفاصيل في برهان نتيجة أ 25.1.4.

14- نظرية هين-بورل المعممة 3.3.8 المبرهنة في الفصل الثامن تعطي أنه إذا كانت $\{O_i : i \in N\}$ هي ε- غطاء للمكعب المفتوح S_1 في مثال 5 أعلاه فإنه يوجد $N\epsilon\mathbb{N}$ بحيث $\{O_1, O_2, \ldots, O_N\}$ هي كذلك ε- غطاء لـ S_1 . باستخدام هذا وسع تمهيدية أ 21.1.4 للقول أن: لكل عدد حقيقي موجب ε،

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(S_1) = \inf\{\sum_{i=1}^{N} (diam\ O_i)^s : \text{حيث } N\epsilon\mathbb{N} \text{ و } O_1, \ldots, O_N \text{ هو ε- غطاء مفتوح لـ } S_1\}$$

تحذير: لاحظ أن هذا التمرين يعتمد على نتيجة لم تثبت لغاية الفصل الثامن.

15- (i) أثبت أنه إذا كانت O مجموعة جزئية من R^2 مع المسافة الأقليدية و A هي مساحتها فإن $A \leq \frac{\pi}{4}.(diam\ O)^2$.

(ii) استنتج من (i) أنه إذا كانت O_1، O_2، ...، O_N هي ε- غطاء لـ S_1 في R^2 في مثال 5 أعلاه فإن؛

$$\sum_{i=1}^{N} (diam\ O_i)^2 \geq \frac{4}{\pi}$$

(iii) استنتج من (ii) وتمرين 14 أعلاه أن $\mathcal{H}^2(S_1) \geq \frac{4}{\pi}$.

(iv) باستخدام (iii) وتمرين S أثبت أن $2 = \dim_H R^2 = \dim_H (S_1)$.

(v) باستخدام طريقة مشابهة لما هو أعلاه أثبت أن $\dim_H R^n = n$ حيث R^n تملك المسافة الأقليدية.

(vi) أثبت أنه إذا كانت S أي مجموعة جزئية من R^n مع المسافة المترية بحيث أن S تحوي كرة مفتوحة غير خالية في R^n فإن $\dim_H S = n$.

تحذير: لاحظ أن (iii) ، (iv) ، (v) و (vi) في هذا التمرين تعتمد على نتيجة أثبتت في الفصل الثامن.

ملحق 5 : الزمر التبولوجية Topological Groups

مقدمة:

في هذا الملحق نعطي مقدمة لنظرية الزمر التبولوجية. يفترض أن القارئ على علم بمفهوم الزمرة لأنه متضمن في أي مساق أولي في نظرية الزمر أو في مساق أولي للجبر المجرد.

أ 1.5 الزمر التبولوجية Topological Groups

أ **1.1.5 تعريف.** لتكن (G , τ) هي المجموعة G، والتي هي زمرة، مع التبولوجيا τ على G. فإن (G , τ) تسمى زمرة تبولوجية (Topological Group) إذا كان؛

(i) الاقتران ($(x,y) \to xy$ الشامل من $(G,\tau)\times(G,\tau)$ إلى (G,τ) متصل و.

(ii) الاقتران $x \to x^{-1}$ الشامل من (G,τ) إلى (G,τ) متصل.

أ 2.1.5 أمثلة.

(1) الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية مع التبولوجيا الأقليدية هي زمرة تبولوجية يرمز لها عادة بـ R .

(2) الزمرة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة مع التبولوجيا المحدثة من R هي كذلك زمرة تبولوجية.

(3) الزمرة الجمعية للأعداد النسبية مع التبولوجيا الأقليدية هي زمرة تبولوجية يرمز لها بـ Q.

(4) الزمرة الجمعية للأعداد الصحيحة مع التبولوجيا المتقطعة هي زمرة تبولوجية يرمز لها بـ Z.

(5) أي زمرة مع التبولوجيا المتقطعة هي زمرة تبولوجية.

(6) أي زمرة مع التبولوجيا غير المتقطعة هي زمرة تبولوجية.

(7) زمرة "الدائرة" المكونة من الأعداد المركبة التي مركبتها واحد (أي مجموعة الأعداد $e^{2\pi i x}$ ، $0 \le x < 1$) مع العملية على الزمرة هي ضرب الأعداد المركبة والتبولوجيا المحدثة من التبولوجيا الأقليدية على المستوى المركب هي زمرة تبولوجية. هذه الزمرة التبولوجية يرمز لها بالرمز T (أو S^1).

(8) الزمر الخطية. لتكن $A = (a_{jk})$ هي مصفوفة بعدها $n \times n$ حيث المدخلات a_{jk} هي أعداد مركبة. الناقل A^t للمصفوفة A هو المصفوفة (a_{kj}) والمرافق $\overline{A}$ للمصفوفة A هو المصفوفة $(\overline{a}_{jk})$ حيث $\overline{a}_{jk}$ هو المرافق المركب للعدد a_{jk}. المصفوفة A تسمى متعامدة (orthogonal) إذا كانت $A = \overline{A}$ و $A^t = A^{-1}$ وتسمى مركزية (Unitary) إذا كان $A^{-1} = (\overline{A})^t$.

مجموعة كل المصفوفات التي محددتها لا تساوي صفراً وبعدها $n \times n$ (مع مدخلات أعداد مركبة) تسمى زمرة خطية عامة (general linear group) (على حقل الأعداد المركبة) ويرمز لها بالرمز $GL(n, \mathbb{C})$. الزمرة الجزئية من $GL(n, \mathbb{C})$ المكونة من المصفوفات التي محددتها واحد هي زمرة خطية خاصة (Special linear group) (على الحقل المركب) ويرمز لها بالرمز $SL(n, \mathbb{C})$. الزمرة المركزية (Unitary group) $U(n)$ والزمرة المتعامدة (orthogonal group) $O(n)$ المكونة كل المصفوفات المركزية وكل المصفوفات المتعامدة على التوالي؛ هي زمر جزئية من $GL(n, \mathbb{C})$. أخيراً نعرّف الزمرة المركزية الخاصة (Special unitary group) والزمرة المتعامدة الخاصة (Special orthogonal group) على الشكل $SU(n)=SL(n,C) \cap U(n)$ و $SO(n)=SL(n,C) \cap O(n)$ على التوالي. الزمرة $GL(n, \mathbb{C})$ وكل الزمر الجزئية منها يمكن اعتبارها كمجموعات جزئية من $\mathbb{C}^{n^2}$، حيث $\mathbb{C}$ ترمز إلى مستوى الأعداد المركبة، ولذلك $\mathbb{C}^{n^2}$ هو الفضاء الأقليدي الذي بعده $2n^2$. بما أن $GL(n, \mathbb{C})$ وكل الزمر الجزئية منها تملك التبولوجيا المحدثة فمن السهل أن نثبت أنها مع هذه التبولوجيا هي زمر تبولوجية.

أ 3.1.5 **ملاحظة.** بالتأكيد ليس كل تبولوجيا على زمرة تجعلها زمرة تبولوجية أي أن تركيب الزمرة والتركيب التبولوجي ليس بالضرورة أن يكونا متناغمين. إذا كانت التبولوجيا τ على الزمرة G تجعل (G , τ) زمرة تبولوجية فإن τ تسمى تبولوجيا زمرة (group topology) أو تبولوجيا زمرة تبولوجية (topological group topology).

أ 4.1.5 **مثال.** لتكن G الزمرة الجمعية للأعداد الصحيحة. عرف تبولوجيا τ على G على النحو التالي: المجموعة الجزئية U من G مفتوحة إذا كان إما؛

(أ) $0 \notin U$ أو

(ب) G \ U منتهية.

واضح أن هذه تبولوجيا (هوسدورف متراصة)، ولكن تمهيدية أ 5.1.5 أدناه تبين أن (G , τ) ليست زمرة تبولوجية.

أ 5.1.5 **تمهيدية.** لتكن (G , τ) زمرة تبولوجية. لكل $a \in G$ ، الإزاحة يميناً ويساراً بمقدار a هي هوميومورفيزمات على (G , τ). أخذ النظير هو كذلك هو ميومورفزم.

البرهان. الاقتران $L_a:(G,\tau) \to (G,\tau)$ المعطى على الشكل $g \mapsto a\, g$ هو ضرب الاقترانين المتصلين؛

$(G,\tau) \to (G,\tau) \times (G,\tau)$ المعطى على الشكل $g \mapsto (a,g)$ حيث $g \in G$ ، a ثابتة و $(G,\tau) \times (G,\tau) \to (G,\tau)$ المعطى على الشكل $(x,y) \mapsto x\, y$ ، $x,y \in G$ ، ولذلك هو متصل. لذلك الإزاحة من اليسار بأي $a \in G$ هو متصل. بالإضافة لذلك، L_a له نظير متصل، أي $L_{a^{-1}}$ ، لأن

$$L_{a^{-1}}[L_a(g)] = L_{a^{-1}}[a\, g] = a^{-1}[a\, g] = g \text{ و } L_a[L_{a^{-1}}(g)] = L_a[a^{-1}g] = a[a^{-1}\, g] = g$$

لذلك الإزاحة من اليسار هي هوميومورفزم. بنفس الأسلوب الإزاحة من اليمين هي هوميومورفزم.

الاقتران $I:(G,\tau) \to (G,\tau)$ المعطى على الشكل $g \mapsto g^{-1}$ متصل باستخدام التعريف. كذلك I له نظير متصل، أي I نفسه، لأن $I[I(g)] = I[g^{-1}] = [g^{-1}]^{-1} = g$. لذلك I كذلك هوميومورفزم. □

إنه الآن واضح أن (G , τ) في مثال أ 4.1.5 أعلاه ليس زمرة تبولوجية لأن الإزاحة من اليسار بـ1 تأخذ المجموعة المفتوحة {-1} إلى {0}، ولكن {0} مجموعة ليست مفتوحة. الذي قلناه في الحقيقة هو أن أي زمرة تبولوجية هي فضاء متجانس (homogeneous) في حين أن المثال ليس كذلك. الفضاءات المتجانسة تعرّف لاحقاً.

أ **6.1.5 تعريف.** الفضاء التبولوجية (X , τ) يسمى متجانس (homogeneous) إذا كان يملك الخاصية أن لكل زوج x ، y من نقاط X يوجد هوميومورفزم $f:(X,\tau)\to(X,\tau)$ بحيث $f(x)=y$.

في حين أن كل زمرة تبولوجية هي فضاء تبولوجي متجانس سوف نرى بشكل مختصر أنه ليس كل فضاء متجانس يمكن تحويله إلى زمرة تبولوجية.

أ **7.1.5 تعريف.** الفضاء التبولوجي يسمى فضاء T_1- (T_1- space) إذا كان كل نقطة في الفضاء هي مجموعة مغلقة.

من السهل رؤية أن كل فضاء هوسدورف هو فضاء T_1- ولكن العكس ليس صحيحاً. انظر تمارين 1.4 # 13.

سوف نرى على كل حال أن أي زمرة تبولوجية وفضاء T_1- هي هوسدورف.

بالمصادفة هذا ليس صحيحاً بشكل عام للفضاءات المتجانسة – لأن أي مجموعة غير منتهية مع تبولوجيا المتممات المنتهية هي فضاء T_1- متجانس ولكنه ليس هوسدورف.

كنتيجة سوف يكون لدينا أن ليس كل فضاء متجانس يمكن تحويله إلى زمرة تبولوجية.

أ **8.1.5 تمهيدية.** لتكن (G , τ) أي زمرة تبولوجية وe هو عنصرها المحايد. إذا كانت U هي أي جوار لـ e ، فإنه يوجد جوار مفتوح V لـ e بحيث؛

(i) $V = V^{-1}$ (أي أن V هي جوار متماثل للعنصر المحايد e).

(ii) $V^2 \subseteq U$.

(هنا $V^{-1}=\{v^{-1}:v\in V\}$ و $V^2=\{v_1 v_2 : v_1\in V, v_2\in V\}$ وليست المجموعة $\{v^2 : v\in V\}$).

البرهان. تمرين. □

أ 9.1.5 **تمهيدية.** أي زمرة تبولوجية (G , τ) حيث (G , τ) فضاء -T_1 فإنها كذلك هوسدورف.

البرهان. لتكن x و y نقطتين مختلفتين في G. فإن $x^{-1} y \neq e$. المجموعة $G \backslash \{x^{-1} y\}$ هي جوار مفتوح لـ e ولذلك بواسطة تمهيدية أ 8.1.5 يوجد جوار متماثل مفتوح لـ e بحيث $V^2 \subseteq G \backslash \{x^{-1} y\}$. لذلك $x^{-1} y \notin V^2$.

الآن xV و yV جوارات مفتوحة لـ x و y على التوالي. افرض أن $xV \cap yV \neq \phi$. فإن $x v_1 = y v_2$ حيث v_1 و v_2 هي في V؛ أي أن $x^{-1} y = v_1 v_2^{-1} \in V.V^{-1} = V^2$ وهو تناقض. لذلك $xV \cap yV = \phi$ ولذلك (G , τ) هو هوسدورف. □

أ 10.1.5 **ملاحظة.** لاختبار فيما إذا كانت زمرة تبولوجية هي هوسدورف أنه فقط من الضروري أن تثبت أن كل نقطة هي مجموعة مغلقة. في الواقع بواسطة تمهيدية أ 5.1.5 يكفي أن نبين أن $\{e\}$ هي مجموعة مغلقة.

تحذير. عدة مؤلفين يضمنون "هوسدورف" في تعريفهم للزمرة التبولوجية.

أ 11.1.5 **ملاحظة.** الأغلبية الواسعة للعمل في الزمر التبولوجية تتم مع الزمر التبولوجية التي تكون هوسدورف (في الواقع عدة مؤلفين يضعون "هوسدورف" في تعريفهم للزمرة التبولوجية) سوف نرى باختسار سبباً واحداً لذلك. على أية حال، من الطبيعي أن نسأل: هل كل زمرة تقابل تبولوجيا هوسدورف تجعلها زمرة تبولوجية؟ الجواب بالتأكيد هو "نعم" – التبولوجية المتقطعة.

ولكن نذكر المسألة التالية:

سؤال. هل كل زمرة تقابل تبولوجيا زمرة هوسدورف غير متقطعة التي تجعلها زمرة تبولوجية؟

Shelah [194] زود بجواب سلبي تحت فرض فرضيات الاستمرار.

على أية حال في الحالة الخاصة أن الزمرة هي ابيلية (أي أنها تبديلية) الجواب هو "نعم" وسوف نثبت ذلك حالاً.

تمارين أ 1.5

1- لتكن (G , τ) زمرة تبولوجية، e عنصرها المحايد و k أي عنصر في G.

إذا كانت U أي جوار لـ e أثبت أنه يوجد جوار مفتوح V لـ e بحيث؛

(i) $V = V^{-1}$

(ii) $V^2 \subseteq U$ و

(iii) $kVk^{-1} \subseteq U$. (في الحقيقة مع جهد أكبر تستطيع أن تبين أنه إذا كانت K أي مجموعة جزئية متراصة من (G , τ) فإن V يمكن اختيارها كذلك لتملك الخاصية: (iv) لأي $k \in K$، $kVk^{-1} \subseteq U$).

2- (i) لتكن G أي زمرة و $\mathcal{N} = \{N\}$ عائلة من الزمر الجزئية الناظمية في G. أثبت أن عائلة كل المجموعات التي على الشكل gN حيث g تتغير على G و N تتغير على $\mathcal{N}$ ، هي شبه قاعدة مفتوحة لتبولوجيا الزمرة التبولوجية على G. مثل هذه التبولوجيا تسمى تبولوجيا شبه زمرة.

(ii) أثبت أن كل تبولوجيا زمرة تبولوجية على زمرة منتهية هي تبولوجيا شبه زمرة حيث $\mathcal{N}$ مكونة من فقط شبه زمرة ناظمية واحدة.

3- أثبت أن؛

(i) إذا كانت (G , τ) زمرة تبولوجية فإن (G , τ) فضاء منتظم.

(ii) أي فضاء -T_0 منتظم هو هوسدورف ولذلك أي زمرة تبولوجية والتي هي فضاء -T_0 تكون هوسدورف.

4- لتكن (G , τ) زمرة تبولوجية، A و B مجموعات جزئية من G و g أي عنصر في G. أثبت أن؛

(i) إذا كانت A مفتوحة فإن gA مفتوحة.

(ii) إذا كانت A مفتوحة وB أي مجموعة عشوائية فإن AB مفتوحة.

(iii) إذا كانت A و B متراصة فإن AB متراصة.

(iv) إذا كانت A متراصة و B مغلقة فإن AB مغلقة.

(v)* إذا كانت A و B مغلقة فإن AB ليس بالضرورة أن تكون مغلقة.

5- لتكن S مجموعة جزئية متراصة من زمرة تبولوجية قابلة للقياس G بحيث $xy \in S$ إذا كانت x و y في S. أثبت أن لكل $x \in S$، $xS = S$.

(اجعل y نقطة تجمع للمتتالية x ، x^2 ، x^3 ، ... في S وبين أن $yS = \bigcap_{n=1}^{\infty} x^n S$ ، استنتج أن $yxS = yS$). لذلك بين أن S زمرة جزئية من G (Hewitt و Ross [100] نظرية 16.9).

أ 2.5 الفضاءات الجزئية والنسبة من الزمر التبولوجية

Subgroups and Quotient of Topological Groups

أ **1.2.5 تعريف.** لتكن G_1 و G_2 زمر تبولوجية. الاقتران $f: G_1 \to G_2$ يسمى هومومورفزم متصل (Continuous homomorphism) إذا كان هومومورفزم لزمر وكذلك متصل. إذا كان f كذلك هوميومورفزم فإنه يسمى ايسومورفزم زمرة تبولوجية (Topological Group Isomorphism) أو ايسومورفزم تبولوجي (Topological Isomorphism) و G_1 و G_2 تسمى ايسومورفك تبولوجياً (Topologically Isomorphic).

أ **2.2.5 مثال.** لتكن R الزمرة الجمعية للأعداد الحقيقية مع التبولوجيا العادية و R^x الزمرة الضربية للأعداد الحقيقية الموجبة مع التبولوجيا العادية. فإن R و R^x ايسومورفك تبولوجياً حيث الايسومورفزم التبولوجي من R إلى R^x هو $x \mapsto e^x$. (لذلك لا نحتاج أن نذكر الزمرة R^x مرة أخرى لأنه كزمر تبولوجية R و R^x هما نفس الشيء). □

أ **3.2.5 تمهيدية.** لتكن G زمرة تبولوجية وH زمرة جزئية من G. فإن H مع تبولوجيا الفضاء الجزئي المرافقة لها هي زمرة تبولوجية.

البرهان. الاقتران $(x, y) \mapsto xy$ الشامل من H × H إلى H والاقتران $x \mapsto x^{-1}$ الشامل من H إلى H هما متصلان لأنهما اقترانات تقييد للاقترانات المناظرة على G × G و G. □

أ **4.2.5 أمثلة.** (i) $Z \le R$ (ii) $Q \le R$. □

5.2.5 أ تمهيدية. لتكن H زمرة جزئية من زمرة تبولوجية G. فإن؛

(i) الغلاقة $\overline{H}$ للمجموعة H هي زمرة جزئية من G.

(ii) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G فإن $\overline{H}$ هي زمرة جزئية ناظمية من G.

(iii) إذا كانت G هوسدورف و H ابيلية فإن $\overline{H}$ ابيلية.

البرهان. تمرين. □

6.2.5 أ نتيجة. لتكن G زمرة تبولوجية، فإن؛

(i) $\overline{\{e\}}$ هي زمرة جزئية ناظمية مغلقة في G؛ في الحقيقة، هي أصغر زمرة جزئية مغلقة في G.

(ii) إذا كانت $g\in G$ فإن $\overline{\{g\}}$ هي المجموعة المساعدة (coset) $\overline{\{e\}}\,g = g\,\overline{\{e\}}$.

(iii) إذا كانت G هوسدورف فإن $\{e\} = \overline{\{e\}}$.

البرهان. هذا يتبع مباشرة من تمهيدية أ 5.2.5 (ii) بملاحظة أن $\{e\}$ هي زمرة جزئية ناظمية في G. □

7.2.5 أ تمهيدية. أي زمرة جزئية مفتوحة H من زمرة تبولوجية G هي كذلك مغلقة.

البرهان. لتكن x_i ، $i\in I$ هي مجموعة المجموعة المساعدة اليمني لـ H في G. لذلك $G=\bigcup_{i\in I} Hx_i$، حيث $Hx_i \cap Hx_j = \phi$ لأي عددين مختلفين i و j في المجموعة المفهرسة I.

بما أن H مفتوحة فإن Hx_i مفتوحة لكل $i\in I$.

بالتأكيد لبعض $i_o\in I$، $Hx_o = H$ أي أن لدينا $G = H\cup(\bigcup_{i\in J} Hx_i)$ حيث $J = I\setminus\{i_o\}$. هذين الحدين منفصلين والحد الثاني مجموعة مفتوحة لأنه اتحاد لمجموعات مفتوحة. لذلك H هي متممة (في G) مجموعة مفتوحة ولذلك هي مغلقة في G. □

لاحظ أن عكس تمهيدية أ 7.2.5 ليس صحيحاً. على سبيل المثال، Z هي زمرة جزئية مغلقة في R ولكن ليست زمرة جزئية مفتوحة في R.

8.2.5 أ تمهيدية. لتكن H زمرة جزئية من زمرة هوسدورف G. إذا كانت H متراصة موضعياً فإن H مغلقة في G. بشكل خاص هذه هي الحالة إذا كانت H متقطعة.

البرهان. لتكن K جوار متراص لـ e في H. فإنه يوجد جوار U في G لـ e بحيث $U \cap H = K$. بشكل خاص، $U \cap H$ مغلقة في G. لتكن V هي جوار في G لـ e بحيث $V^2 \subseteq U$.

إذا كانت $x \in \overline{H}$ وبما أن $\overline{H}$ هي زمرة (تمهيدية 5.2.5أ) فإن $x^{-1} \in \overline{H}$. لذلك يوجد عنصر $y \in Ux^{-1} \bigcap H$. سوف نبين أن $yx \in H$. بما أن $y \in H$ هذا سوف يعطي أن $x \in H$ ولذلك H هي مغلقة كما هو مطلوب.

لإثبات أن $yx \in H$ سوف نبين أن yx هي نقطة نهاية للمجموعة $U \bigcap H$. بمان أن $U \bigcap H$ مغلقة هذا سوف يعطي أن $yx \in U \bigcap H$ ولذلك بشكل خاص $yx \in H$.

لتكن O جواراً عشوائياً لـyx. فإن $y^{-1}O$ هي جوار لـx ولذلك $y^{-1}O \bigcap xV$ هي جوار لـx. بما أن $x \in \overline{H}$ فإنه يوجد عنصر $h \in (y^{-1}O \bigcap xV) \bigcap H$. لذلك $yh \in O$. كذلك $yh \in (Vx^{-1})(xV) = V^2 \subseteq U$ و $yh \in H$ أي أن $yh \in O \bigcap (U \bigcap H)$. بما أن O عشوائية هذا يدل على أن yx هي نقطة نهاية للمجموعة $U \bigcap H$ كما هو مطلوب. □

9.2.5أ تمهيدية. لتكن U جوار متماثل لـe في زمرة تبولوجية G. فإن $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ هي زمرة جزئية مفتوحة (ومغلقة) في G.

البرهان. واضح أن H هي زمرة جزئية من G.

لتكن $h \in H$. فإن $x \in U^n$ لبعض n.

لذلك $h \in hU \subseteq U^{n+1} \subseteq H$؛ أي أن، H تحوي الجوار hU لـh.

بما أن h هو عنصر عشوائي من H فإن H مفتوحة في G. وهي كذلك مغلقة في G، بواسطة تمهيدية 7.2.5أ. □

10.2.5أ نتيجة. لتكن U أي جوار لـe في زمرة تبولوجية مترابطة G. فإن $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$؛ أي أن، كل زمرة مترابطة تولّد بواسطة أي جوار لـe.

البرهان. لتكن V هي جوار مترابط لـ e بحيث $V \subseteq U$. بواسطة تمهيدية 9.2.5أ $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ هي زمرة جزئية مفتوحة ومغلقة في G.

بما أن G مترابطة فإن $H = G$ ؛ أي أن $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$.

بما أن $V \subseteq U$ فإن $V^n \subseteq U^n$ لكل n ولذلك $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ كما هو مطلوب. □

11.2.5أ تعريف. الزمرة التبولوجية G تسمى مولّدة بشكل متراص (compactly generated) إذا وجدت مجموعة جزئية متراصة X من G بحيث أن G هي أصغر زمرة جزئية (من G) تحوي X.

12.2.5أ أمثلة.

(i) $\mathbb{R}$ مولّدة بشكل متراص بواسطة $[0,1]$ (أو أي فترة متراصة غير خالية)

(ii) بالتأكيد، أي زمرة متراصة هي مولّدة بشكل متراص.

13.2.5أ نتيجة. أي زمرة مترابطة ومتراصة موضعياً هي مولّدة بشكل متراص.

البرهان. لتكن K أي جوار متراص لـ e. إذاً بواسطة نتيجة 10.2.5أ $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K^n$ ؛ أي أن، G مولّدة بشكل متراص. □

14.2.5أ ملاحظة. في الوقت المناسب سنصف تركيب الزمر الأبيلية الهوسدورف المتراصة موضعياً المولّدة بشكل متراص. الآن نرى أن هذا الصف يشمل كل الزمر الأبيلية الهوسدورف المتراصة موضعياً المترابطة.

ترميز: سنستخدم الرمز LCA – زمرة ليدل على زمرة تبولوجية أبيلة هوسدورف متراصة موضعياً.

15.2.5أ تمهيدية. مركبة العنصر المحايد (أي أكبر مجموعة جزئية مترابطة تحوي e) لزمرة تبولوجية تكون زمرة جزئية ناظمية مغلقة.

البرهان. لتكن C هي مركبة العنصر المحايد في زمرة تبولوجية G. لأن في أي فضاء تبولوجي المركبات تكون مجموعات مغلقة فإن C مغلقة.

لتكن $a \in C$. فإن $a^{-1}C \subseteq C$ لأن $a^{-1}C$ مترابطة (كونها صورة هوميومورفك لـ C) وتحوي e.

لذلك $\bigcup_{a\in C} a^{-1}C = C^{-1}C \subseteq C$ والذي يتضمن أن C زمرة جزئية.

لرؤية أن C زمرة جزئية ناظمية، ببساطة لاحظ أن لكل x في G، $x^{-1}Cx$ هي مجموعة مترابطة تحوي e ولذلك $x^{-1}Cx \subseteq C$. □

16.2.5أ تمهيدية. لتكن N زمرة جزئية ناظمية من زمرة تبولوجية G. إذا كانت زمرة النسبة G/N تملك التبولوجيا النسبية تحت الهومومورفزم القانوني $P: G \to G/N$ (أي أن، U مفتوحة في G/N إذا وفقط إذا كانت $P^{-1}(U)$ مفتوحة في G) فإن G/N تصبح زمرة تبولوجية. بالإضافة لذلك، الاقتران P ليس فقط متصل ولكنه كذلك مفتوح. (الاقتران يسمى مفتوح إذا كانت صورة كل مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.)

البرهان. إثبات أن G/N مع تبولوجيا النسبة هي زمرة تبولوجية أمر روتيني. وأن الاقتران P متصل أمر واضح (وصحيح لكل اقترانات النسبة للفضاءات التبولوجية).

لرؤية أن P اقتران مفتوح، لتكن O مجموعة مفتوحة في G. فإن $P^{-1}\left(P(O)\right) = NO \subseteq G$. بما أن O مفتوحة فإن NO مفتوحة. (انظر تمارين 2.5أ#4) لذلك بواسطة تعريف تبولوجيا النسبة على G/N فإن $P(O)$ مفتوحة في G/N؛ أي أن P هو اقتران مفتوح. □

17.2.5أ ملاحظات.

(i) لاحظ أن اقترانات النسبة للفضاءات التبولوجية ليس بالضرورة أن تكون اقترانات مفتوحة.

(ii) اقترانات النسبة للزمر التبولوجية ليس بالضرورة أن تكون اقترانات مغلقة. على سبيل المثال، إذا كانت $\mathbb{R}^2$ ترمز إلى زمرة الضرب $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ مع التبولوجيا العادية و P اقتران الإسقاط الشامل من $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}$ فإن المجموعة $S = \left\{(x, \frac{1}{x}) : x \in R, x \neq o\right\}$ هي مغلقة في $\mathbb{R}^2$ و P هو اقتران نسبة ولكن $P(S)$ ليست مغلقة في $\mathbb{R}$. □

18.2.5أ تمهيدية. إذا كانت G زمرة تبولوجية و N زمرة جزئية ناظمية متراصة من G فإن الهومومورفزم القانوني $P: G \to G/N$ هو اقتران مغلق. الهومومورفزم P هو كذلك اقتران مفتوح.

البرهان. إذا كانت S مجموعة جزئية مغلقة في G فإن $NS = P^{1}\left(P(S)\right)$ والذي هو ضرب في G لمجموعة متراصة ومجموعة مغلقة. بواسطة تمارين 1.5#4 فإن هذا الضرب هو مجموعة مغلقة. لذلك $P(S)$

مغلقة في G/N و P هو اقتران مغلق. بما أن P هو اقتران نسبة، تمهيدية 16.2.5 تعطي أنه اقتران مفتوح. □

19.2.5أ تعريف. الفضاء التبولوجي يسمى غير مترابط بالكامل (totally disconnected) إذا كانت مركبة كل نقطة هي النقطة نفسها.

20.2.5أ تمهيدية. إذا كانت G أي زمرة تبولوجية و C هي مركبة العنصر المحايد فإن G/C هي زمرة تبولوجية غير مترابط بالكامل.

البرهان. لاحظ أن C هي زمرة جزئية ناظمية في G ولذلك G/C هي زمرة تبولوجية.

إثبات أن G/C غير مترابط بالكامل ترك كتمرين. □

21.2.5أ تمهيدية. إذا كانت G/N هي أي زمرة نسبية من زمرة متراصة موضعياً G فإن G/N متراصة موضعياً.

البرهان. ببساطة لاحظ أن أي صورة متصلة مفتوحة لفضاء متراص موضعياً هي متراصة موضعياً. □

22.2.5أ تمهيدية. لتكن G زمرة تبولوجية و N زمرة جزئية ناظمية. فإن G/N متقطعة إذا وفقط إذا كانت N مفتوحة. كذلك G/N هي هوسدورف إذا وفقط إذا كانت N مغلقة.

البرهان. هذا واضح (لاحظ أن أي زمرة إذا كانت T_1 فإنها هوسدورف). □

تمارين 2.5أ

-1 لتكن G و H زمر تبولوجية و $f:G\to H$ هومومورفزم. أثبت أن f متصل إذا وفقط إذا كان متصل عند العنصر المحايد، أي إذا وفقط إذا كان لكل جوار U في H لـ e يوجد جوار V في G لـ e بحيث $f(V)\subseteq U$.

-2 أثبت أن الزمرة الدائرية T ايسومورفك تبولوجياً للزمرة النسبية $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3- لتكن B_1 و B_2 فضاءات بناخ (حقيقية). أثبت أن

(i) B_1 و B_2 مع التبولوجيا المحددة بالطول لكل منهما هي زمر تبولوجية.

(ii) إذا كان $T: B_1 \to B_2$ هو هومومورفزم متصل (لزمر تبولوجية) فإن T هو تحويل خطي متصل. (لذلك إذا كانت B_1 و B_2 "إيسومورفك كزمر تبولوجية" فإنها "إيسومورفك كفضاءات متجهة تبولوجية" ولكن ليس بالضرورة "إيسومورفك كفضاءات بناخ".)

4- لتكن H زمرة جزئية من زمرة تبولوجية G. أثبت أن H مفتوحة في G إذا وفقط إذا كانت H تملك داخلية غير خالية (أي إذا وفقط إذا كانت H تحوي مجموعة جزئية مفتوحة غير خالية من G).

5- لتكن H زمرة جزئية من زمرة تبولوجية G. أثبت أن

(i) $\overline{H}$ زمرة جزئية من G.

(ii) إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية في G فإن $\overline{H}$ زمرة جزئية ناظمية في G.

(iii) إذا كانت G هوسدوف و H أبيلية فإن $\overline{H}$ أبيلية.

(iv)

6- لتكن Y فضاء جزئي كثيف من فضاء هوسدورف X. إذا كانت Y متراصة موضعياً، أثبت أن Y مفتوحة في X. لذلك أثبت أن الزمرة الجزئية المتراصة موضعياً من زمرة هوسدورف هي مغلقة.

7- لتكن C هي مركبة العنصر المحايد في زمرة تبولوجية G. أثبت أن G/C زمرة تبولوجية هوسدورف غير مترابطة بالكامل. بالإضافة لذلك أثبت أنه إذا كان f أي هومومورفزم متصل من G إلى أي زمرة تبولوجية غير مترابطة بالكامل H، فإنه يوجد هومومورفزم متصل $g: G/C \to H$ بحيث $gp = f$ حيث p هو اقتران الاسقاط $p: G \to G/C$.

8- أثبت أن الزمرة الجزئية المحولة $[G,G]$ للزمرة التبولوجية المترابطة G هي مترابطة. ($[G,G]$ مولدة بواسطة $\{g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 : g_1, g_2 \in G\}$.)

9- إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية غير مترابطة بالكامل من زمرة هوسدورف مترابطة G، أثبت أن H تقع في المركز، $Z(G)$ ، لـ G (أي أن $gh = hg$ لكل $g \in G$ و $h \in H$).

(مساعدة. ثبت $h \in H$ ولاحظ أن الاقتران $g \mapsto ghg^{-1}$ يأخذ G إلى H.)

10- (i) لتكن G أي زمرة تبولوجية. أثبت أن $G/\overline{\{e\}}$ زمرة تبولوجية هوسدورف. أثبت أنه إذا كانت H هي أي زمرة هوسدورف و f: G → H هومومورفزم متصل فإنه يوجد هومومورفزم متصل $g : G/\overline{\{e\}} \to H$ بحيث gp=f حيث p هو الاقتران القانوني $p : G \to G/\overline{\{e\}}$ (هذه النتيجة هي السبب الرئيسي المعطى لدراسة الزمر التبولوجية الهوسدورف أكثر من الزمر التبولوجية العشوائية).

(ii) لتكن G_i تشير إلى الزمرة G مع التبولوجيا غير المتقطعة و i: G → G_i هو الاقتران المحايد. أثبت أن الاقتران $p \times i : G \to G/\overline{\{e\}} \times G_i$ المعطاة على الشكل $p \times i(g) = (p(g), i(g))$ هو ايسومورفزم زمرة تبولوجية شامل من G إلى صورتها p × i (g).

11- أثبت أن كل زمرة هوسدورف، H، ايسومورفك تبولوجياً لزمرة جزئية مغلقة في زمرة هوسدورف مترابطة قوسياً (arcwise) مترابطة قوسياً موضعياً G. (تأمل المجموعة G المكونة من كل الاقترانات f: [0, 1) → H بحيث أنه يوجد متتالية $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = 1$ حيث f ثابت عند كل $[a_k, a_{k-1})$. عرِّف تركيب زمرة على G بواسطة $f_g(t) = f(t)_g(t)$ و $f^{-1}(t) = (f(t))^{-1}$ حيث f و g في G و $t \in [0, 1)$. العنصر المحايد في G هو الاقتران الذي يساوي بشكل مماثل لـ e في H. لأي $\varepsilon > 0$ ولأي جوار V لـ e في H اجعل $U(V, \varepsilon)$ هي مجموعة كل f بحيث $\lambda(\{t \in [0,1) : f(t) \notin V\}) < \varepsilon$ حيث λ هي قياس ليبيج على [0, 1). مجموعة كل $U(V, \varepsilon)$ هي قاعدة مفتوحة لتبولوجيا زمرة على G. الاقترانات الثابتة من زمرة جزئية مغلقة من G ايسومورفك تبولوجيا لـ H.

أ 3.5 تضمين في الزمر القابلة للقسمة

Embedding in Divisible Groups

أ 1.3.5 ملاحظة. ضرب الفضاءات التبولوجية قدِّم بالتفصيل في الفصل الثامن والفصل التاسع والفصل العاشر. النتيجة الأكثر أهمية على الضرب هي بالتأكيد نظرية تيخونوف 4.3.10 التي تقول أن أي ضرب (منتهي أو غير منتهي) (مع تبولوجيا الضرب) لفضاءات تبولوجية متراصة هو متراص. بالإضافة لذلك، نظرية 4.3.10 تقول أن ضرب فضاءات تبولوجية $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ هو متراص فقط إذا كان كل من الفضاءات (X_i, τ_i) متراص.

إذا كان كل G_i هو زمرة فإن $\prod_{i \in I} G_i$ يملك تركيب الزمرة المعروف ($\prod_{i \in I} g_i . \prod_{i \in I} h_i = \prod_{i \in I} (g_i h_i)$ حيث g_i و h_i في G_i).

إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ هي عائلة من الزمر فإن الضرب المباشر المقيد (الضرب المباشر الضعيف) والذي يرمز له بالرمز $\prod_{i \in I}^{r} G_i$ هو زمرة جزئية من $\prod_{i \in I} G_i$ مكون من عناصر $\prod_{i \in I} g_i$ حيث $g_i = e$ لكل ما عدا عدد منتهي من العناصر $i \in I$.

من الآن فصاعداً، إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ هي عائلة زمر تبولوجية فإن $\prod_{i \in I} G_i$ سوف ترمز للضرب المباشر مع تبولوجيا الضرب. بالإضافة لذلك $\prod_{i \in I}^{r} G_i$ سوف ترمز للضرب المباشر المقيد مع التبولوجيا المحدثة كفضاء جزئي من $\prod_{i \in I} G_i$. □

أ. 2.3.5 **تمهيدية.** إذا كانت كل G_i، $i \in I$ زمرة تبولوجية فإن $\prod_{i\in I} G_i$ هي زمرة تبولوجية. بالإضافة لذلك $\prod_{i\in I}^{r} G_i$ هي زمرة جزئية كثيفة في $\prod_{i\in I} G_i$.

البرهان. تمرين. □

أ 3.3.5 **تمهيدية.** لتكن $\{G_i : i \in I\}$ عائلة من الزمر التبولوجية. فإن:

(i) $\prod_{i\in I} G_i$ متراص موضعياً إذا وفقط إذا كانت كل G_i متراصة موضعياً وكل ما عدا عدد منتهي من G_i هو متراص.

(ii) $\prod_{i\in I}^{r} G_i$ هوسدورف متراص موضعياً إذا وفقط إذا كانت كل G_i هوسدورف متراصة موضعياً و $G_i = \{e\}$ لكل ما عداد عدد منتهي من G_i.

البرهان. تمرين. □

لإثبات النتيجة: كل زمرة ابيلية غير منتهية تقبل بتبولوجيا زمرة غير متقطعة وهوسدورف، نحتاج بعض المعلومات في نظرية الزمر.

أ 4.3.5 **تعريف.** الزمرة D تسمى قابلة للقسمة (divisible) إذا كان لكل $n \in \mathbb{N}$، $\{x^n : x \in D\} = D$ أي أن كل عنصر في D له الجذر رقم n.

أ 5.3.5 **أمثلة.** من السهولة رؤية أن الزمر $\mathbb{R}$ و $\mathbb{T}$ قابلة للقسمة ولكن الزمرة $\mathbb{Z}$ غير قابلة للقسمة. □

6.3.5 أ تمهيدية. لتكن H زمرة جزئية من زمرة ابيلية G. إذا كانت ϕ أي هومومورفزم من H إلى زمرة ابيلية قابلة للقسمة D فإن ϕ يمكن توسيعه إلى هومومورفزم Φ من G إلى D.

البرهان. باستخدام مساندة زورن 16.2.10، يكفي أن نبين أنه إذا كانت $x \in H$ فإن ϕ يمكن توسيعه إلى الزمرة $H_0 = \{x^n h : h \in H, n \in Z\}$.

الحالة (i). افرض أن $x^n \notin H$, $n \in \mathbb{N}$. عرِّف $\Phi(x^n h) = \phi(h)$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. واضح أن Φ معرَّف حسناً وهومومورفزم ويوسع ϕ على H.

الحالة (ii). لتكن $k \geq 2$ هي أصغر عدد صحيح موجب n بحيث $x^n \in H$. لذلك $\phi(x^k) = d \in D$ بما أن D قابلة للقسمة فإنه يوجد $z \in D$ بحيث $z^k = d$.

عرِّف $\Phi(x^n h) = \phi(h) z^n$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. واضح أن Φ معرّف حسناً وهومومورفزم ويوسع ϕ على H. □

7.3.5 أ نتيجة. إذا كانت G زمرة ابيلية فإن لكل g و h في G حيث $g \neq h$ يوجد هومومورفزم $\emptyset: G \to \mathbb{T}$ بحيث $\phi(g) \neq \phi(h)$ أي أن ϕ تفصل نقاط G.

البرهان. واضح أنه يكفي أن نبين أن لكل $g \neq e$ في G يوجد هومومورفزم $\emptyset: G \to \mathbb{T}$ بحيث $\phi(g) \neq e$.

الحالة (i). افرض أن $g^n = e$، و $g^k \neq e$ لكل $o < k < n$. لتكن $H = \{g^m : n \in Z\}$. عرِّف $\emptyset: H \to \mathbb{T}$ على الشكل

r = جذر رقم n للوحدة = $\phi(g)$ ، $(r \neq e)$ و $\phi(g^m) = r^m$ لكل m.

الآن وسع ϕ على G بواسطة تمهيدية أ 6.3.5.

الحالة (ii). افرض أن $g^2 \neq e$ لكل $n > 0$. عرِّف $\phi(g) = z$ لكل $z \neq e$ في $\mathbb{T}$.

وسع ϕ لـ H وبعد ذلك، بواسطة تمهيدية أ 6.3.5، لـ G. □

للاستعمال لاحقاً نسجل النتيجة التالية لتمهيدية أ 6.3.5

أ 8.3.5 **تمهيدية.** لتكن H زمرة جزئية مفتوحة قابلة للقسمة من زمرة تبولوجية ابيلية G. فإن G ايسومورفك تبولوجياً لـ $H \times G / H$.

(واضح أن G/H زمرة تبولوجية متقطعة.)

البرهان. تمرين. □

أ 9.3.5 **نظرية.** إذا كانت G أي زمرة ابيلية غير منتهية فإن G تقبل بتبولوجيا زمرة هوسدورف غير متقطعة.

البرهان. لتكن $\{\phi_i : i \in I\}$ عائلة من الهومومورفزمات المختلفة من G إلى $\mathbb{T}$. اجعل $H = \prod_{i\in I} T_i$ حيث كل $T_i = \mathbb{T}$. عرِّف اقتران $f : G \to H = \prod_{i\in I} T_i$ بجعل $f(g) : \prod_{i\in I} \phi_i(g)$. بما أن كل ϕ_i هو هومومورفزم فإن f كذلك هومومورفزم. بواسطة نتيجة أ 7.3.5 ، f كذلك واحد لواحد أي أن G ايسومورفك للزمرة الجزئية f(G) من H.

بما أن H زمرة تبولوجية هوسدورف فإن f (G) مع التبولوجيا المحدثة من H هو كذلك زمرة تبولوجية هوسدورف. يبقى أن نبين أن f (G) غير متقطع.

افرض أن f (G) متقطع. فباستخدام تمهيدية أ 8.2.5، f(G) سيكون زمرة جزئية مغلقة من H. ولكن باستخدام نظرية تيخونوف 4.3.10، H متراصة ولذلك f(G) ستصبح متراصة أي أن f(G) ستكون فضاء متراص متقطع غير منتهي – وهذا مستحيل. لذلك لدينا تناقض ولهذا f(G) غير متقطع. □

أ 10.3.5 **ملاحظة.** نتيجة أ 7.3.5 كانت ضرورية لإثبات نظرية أ 9.3.5. هذه النتيجة هي حالة خاصة من النظرية الأكثر تعميماً والتي ستوصف لاحقاً، نذكر النتيجة التالية.

أ. 11.3.5 **نظرية.** إذا كانت G أي LCA – زمرة فإن لأي g و h في G حيث $g \neq h$ يوجد هومومورفزم متصل $\emptyset: G \to \mathbb{T}$ بحيث $\phi(g) \neq \phi(h)$.

تمارين أ 3.5

1- إذا كانت $\{G_i : i \in I\}$ هي عائلة زمر تبولوجية، أثبت أن:

(i) $\prod_{i\in I} G_i$ هو زمرة تبولوجية؛

(ii) $\prod_{i\in I}^{r} G_i$ هو زمرة جزئية كثيفة في $\prod_{i\in I} G_i$ ؛

(iii) $\prod_{i\in I} G_i$ متراص موضعياً إذا وفقط إذا كانت كل G_i متراصة موضعياً وكل ما عدا عدد منتهي من G_i هي متراصة؛

(iv) $\prod_{i\in I}^{r} G_i$ متراص موضعياً وهوسدورف إذا وفقط إذا كانت كل G_i هي متراصة موضعياً وهوسدورف و G_i $= \{e\}$ لكل ما عدا عدد منتهي من G_i.

2- أثبت أنه إذا كانت G زمرة تبولوجية ابيلية مع زمرة جزئية مفتوحة وقابلة للقسمة H فإن G ايسومورفك تبولوجياً لـ $H \times G/H$

3- لتكن G زمرة ابيلية خالية من الالتواء (torsion-free) (أي أن $g^n \neq e$ لكل $g\neq e$ في G ولكل $n \in \mathbb{N}$). أثبت أنه إذا كانت g و h في G حيث $g \neq h$ فإنه يوجد هومومورفزم ϕ من G إلى $\mathbb{R}$ بحيث $\phi(g) \neq \phi(h)$.

4- لتكن G زمرة تبولوجية متراصة موضعياً غير مترابطة بالكامل.

(i) أثبت أنه يوجد قاعدة جوار للعنصر المحايد مكونه من زمر جزئية متراصة مفتوحة.

(مساعدة: يمكن أن تفرض أن أي فضاء تبولوجي هوسدورف متراص موضعياً غير مترابط بالكامل يملك قاعدة، للتبولوجيا الواقعة عليه، مكونة من مجموعات متراصة مفتوحة).

(ii) إذا كانت G متراصة أثبت أن "الزمر الجزئية" في (i) يمكن اختيارها لتكون نظامية.

(iii) لذلك أثبت أن أي زمرة تبولوجية متراصة غير مترابطة بالكامل تكون ايسومورفك تبولوجياً لزمرة جزئية مغلقة من ضرب زمر متقطعة منتهية.

(مساعدة: لتكن $\{A_i : i\in I\}$ قاعدة من الجوارات للعنصر المحايد مكونة من زمر جزئية ناظمية مفتوحة. لتكن $\phi_i : G \to G/A_i$، $i \in I$ هي هومومورفزمات قانونية وعرِّف $\Phi : G \to \prod_{i\in I}(G/A_i)$ بجعل $\Phi(g) = \prod_{i\in I}\phi_i(g_i)$).

5- ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ اقتران قانوني و θ أي عدد غير نسبي. على الفضاء التبولوجي $G=\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ عرِّف العملية.

$$(x_1, x_2, t_1, t_2). (x_1', x_2', t_1', t_2') = (x_1+x_1', x_2+x_2', t_1 + t_1'+f(x_2x_1'), t_2+t_2'+f(\theta x_2x_1')).$$

أثبت أن، مع هذه العملية، G هي زمرة تبولوجية وأن الزمرة الجزئية المحوِّلة لـ G ليست مغلقة في G. (الزمرة الجزئية المحوِّلة للزمرة G هي الزمرة الجزئية من G المولّدة بواسطة المجموعة $\{g^{-1}h^{-1}gh : g,h\in G\}$.

6- لتكن I مجموعة مدارة بواسطة الترتيب الجزئي $\geq$. لكل $i\in I$ افرض أنه معطى لدينا زمرة تبولوجية هوسدورف G_i. افرض أنه لكل i و j في I بحيث $i < j$ يوجد هومومورفزم متصل مفتوح f_{ji} من G_j إلى G_i. افرض إضافة لذلك أنه إذا كانت $i < j < k$ فإن $f_{ki} = f_{ji} f_{kj}$. الجسم المكون من I. الزمر G_i والاقترانات f_{ji} يسمى نظام الاقتران المعكوس (inverse mapping system) أو نظام الاقتران الإسقاطي (projective mapping system). المجموعة الجزئية H من زمرة الضرب $G=\prod_{i\in I} G_i$ المكونة من كل $\prod_{i\in I}(x_i)$ بحيث إذا كانت $i < j$ فإن $x_i=f_{ji}(x_j)$ تسمى نهاية إسقاطية (projective limit) لنظام الاقتران المعكوس. أثبت أن H زمرة جزئية مغلقة في G.

أ 4.5 نظرية مقولة بير ونظرية الاقتران المفتوح

Baire Category and Open Mapping Theorem

أ 1.4.5 نظرية. **(نظرية مقولة بير للفضاءات المتراصة موضعياً).** إذا كانت X هي فضاء منتظم متراص موضعياً فإن X ليست اتحاد عائلة معدودة من المجموعات المغلقة التي كل منها تملك داخلية خالية.

البرهان. افرض أن $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ حيث كل A_n هي مغلقة و $Int(A_n) = \phi$ لكل n.

اجعل $D_n = X \setminus A_n$. فإن كل D_n مفتوحة وكثيفة في X. سوف نبين أن $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \phi$ مناقضاً المساواة $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

لتكن U_0 مجموعة جزئية غير خالية مفتوحة في X بحيث $\overline{U}_0$ متراصة. بما أن D_1 كثيفة في X فإن $U_0 \bigcap D_1$ هي مجموعة جزئية غير خالية مفتوحة في X. لكون X منتظم نستطيع أن نختار مجموعة غير خالية مفتوحة U_1 بحيث $\overline{U}_1 \subseteq U_0 \bigcap D_1$.

استقرائياً عرِّف U_n بحيث أن كل U_n هي مجموعة غير خالية مفتوحة و $\overline{U}_n \subseteq U_{n-1} \bigcap D_n$. بما أن كل $\overline{U}_0$ متراصة وكل $\overline{U}_n$ غير خالية فإن $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \phi$ وهذا يعطي $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \neq \phi$. وهذا التناقض للفرض يعني أن النظرية قد أثبتت. □

أ 2.4.5 ملاحظة. شاهدنا أن نظرية مقولة بير قد أثبتت للفضاءات المترية التامة في نظرية 1.5.6. النظرية أعلاه كذلك تبقى صحيحة إذا "منتظم متراص موضعياً" استبدلت بـ "هوسدورف متراص موضعياً".

أ 3.4.5 نتيجة. لتكن G أي زمرة تبولوجية هوسدورف متراصة موضعياً معدودة فإن G تملك التبولوجيا المتقطعة.

البرهان. تمرين. □

أ 4.4.5 **نظرية.** (نظرية الاقتران المفتوح للزمر المتراصة موضعياً) لتكن G زمرة متراصة موضعياً وكذلك σ-متراصة. أي أن $G=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ حيث كل A_n هي متراصة. ليكن f أي هومومورفزم متصل وشامل من G إلى زمرة هوسدورف متراصة موضعياً H. فإن f اقتران مفتوح.

البرهان. لتكن $\mathcal{U}$ عائلة كل الجوارات المتماثلة لـ e في G و $\mathcal{U}'$ عائلة كل جوارات e في H. يكفي أن نبين أن لكل $U \in \mathcal{U}$ يوجد $U' \in \mathcal{U}'$ بحيث $U' \subseteq f(U)$.

لتكن $U \in \mathcal{U}$. فإنه يوجد $V \in \mathcal{U}$ تملك الخاصية أن $\overline{V}$ متراصة و $(\overline{V})^{-1}\overline{V} \subseteq U$. عائلة المجموعات $\{xV : x \in G\}$ هي لذلك غطاء مفتوح لـ G ولذلك لكل مجموعة متراصة A_n. لذلك عائلة منتهية من هذه المجموعات سوف تغطي أي A_n معطاة. لذلك هناك عائلة معدودة $\{x_nV : n \in N\}$ تغطي G.

لذلك $H=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_nV)=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n\overline{V})=\bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n)f(\overline{V})$. هذا يعبر عن H باتحاد معدود لمجموعات مغلقة، وبواسطة نظرية مقولة بير 1.4.5، واحدة منها يجب أن تملك داخلية غير منتهية، أي أن $f(x_m)f(\overline{V})$ تحوي مجموعة مفتوحة. إذاً $f(\overline{V})$ تحوي مجموعة جزئية مفتوحة V' في H.

لإتمام البرهان اختار أي نقطة x' في V' واجعل $U' = (x')^{-1} V'$.

إذاً لدينا

$$U'=(x')^{-1}V'\subseteq (V')^{-1}V'\subseteq \left(f(\overline{V})\right)^{-1} f(\overline{V}) = f\left((\overline{V})^{-1}\overline{V}\right)\subseteq f(U)$$

كما هو مطلوب. □

أ5.4.5 **ملاحظة.** قابلنا نظرية الاقتران المفتوح لفضاءات بناخ في نظرية 5.5.6.

تمارين أ 4.5

1- أثبت أن أي زمرة هوسدورف متراصة موضعياً معدودة تملك التبولوجيا المتقطعة.

2- أثبت أن نظرية الاقتران المفتوح أ 4.4.5 لا تبقى صحيحة إذا حذف أي من الشرطين "σ- متراص" أو "شامل".

3- أثبت أن أي هومومورفزم متصل وشامل من زمرة متراصة إلى زمرة هوسدورف هي اقتران مفتوح.

4- أثبت أن لكل $n\epsilon\mathbb{N}$ الزمرة التبولوجية المتراصة $\mathbb{T}^n$ ايسومورفك تبولوجياً لزمرة النسبة $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

5- (i) لتكن ϕ هومومورفزم من زمرة تبولوجية G إلى زمرة تبولوجية H. إذا كانت X أي مجموعة جزئية غير خالية في G بحيث التقييد $\phi : X \to H$ هو اقتران مفتوح، أثبت أن $\phi : G \to H$ هو كذلك اقتران مفتوح.

(مساعدة: لأي مجموعة جزئية U من G، $\phi(U) = \bigcup_{g\in G} \phi(U \cap gX)$).

(ii) لذلك بين أنه إذا كانت G و H زمر هوسدورف متراصة موضعياً حيث $\phi : G \to H$ هومومورفزم متصل بحيث أنه يوجد مجموعة جزئية متراصة K من G تولّد H جبرياً فإن ϕ اقتران مفتوح.

(مساعدة: أثبت أنه يوجد جوار متراص U لـ e بحيث $K \subseteq U$.

اجعل X = الزمرة الجزئية المولّدة جبرياً بواسطة U).

6- لتكن G و H زمر تبولوجية ولتكن η هومومورفزم من H إلى زمرة الاوتومورفزميات على G. عرِّف تركيب زمرة على المجموعة $G \times H$ على الشكل $(g_1,h_1).(g_2,h_2)=(g_1\eta(h_1)(g_2),h_1h_2)$.

بالإضافة لذلك، ليكن $(g,h)\mapsto \eta(h)(g)$ اقتران متصل شامل من $G\times H$ إلى G. أثبت أن

(i) كل $\eta(h)$ هو هوميومورفزم من G إلى نفسها و

(ii) مع تبولوجيا الضرب وتركيب الزمرة هذا فإن $G\times H$ زمرة تبولوجية. (تسمى ضرب نصف مباشر (semidirect product لـ G بـ H المحدد بـ η ويرمز له بالرمز $G \rtimes_\eta H$).

7- (i) لتكن G زمرة تبولوجية هوسدورف متراصة موضعياً σ- متراصة و N زمرة جزئية ناظمية مغلقة في G و H زمرة جزئية مغلقة في G بحيث G = NH و $N \bigcap H = \{e\}$. أثبت أن G ايسومورفك تبولوجياً لضرب نصف مباشر معرَّف بشكل ملائم $N \rtimes_{\eta} H$.

(مساعدة: اجعل $h^{-1}nh \; n \in N, h \in H, \eta(h)(n) =$.)

(ii) إذا كانت H كذلك ناظمية أثبت أن G ايسومورفك تبولوجياً لـ $N \times H$.

(iii) إذا كانت A و B زمر جزئية مولّدة بشكل متراص من زمرة تبولوجية ابيلية هوسدورف متراصة موضعياً G بحيث $G = AB, A \bigcap B = \{e\}$ ، أثبت أن G ايسومورفك تبولوجياً لـ $A \times B$.

8- لتكن G و H زمر تبولوجية هوسدورف و f هومومورفزم متصل من G إلى H. إذا كانت G تملك جواراً U لـ e بحيث $\overline{U}$ متراص و f(U) جوار لـ e في H، أثبت أن f هو اقتران مفتوح.

البيبلوغرافيا

[1] Colin C. Adams. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theoryof knots. Freeman and Co., New York, 1994.

[2] J. Frank Adams. Algebraic topology: a student's guide. Cambridge University Press,Cambridge, England, 1972.

[3] G.N. Afanasiev. Topological effects in quantum mechanics. Kluwer Academic Publishers,Dordrecht, Boston, 1999.

[4] M.A. Aguilar, S. Gitler, and C. Prieto. Algebraic topology from a homotopical viewpoint.Springer, New York, 2002.

[5] Paul S. Alexandroff and Heinz Hopf. Topologie. Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[6] Algebraic and Geometric Topology. http://www.maths.warwick.ac.uk/agt, 2001–. a refereed electronic journal.

[7] Charilaos N. Aneziris. The mystery of knots: computer programming for knot tabulation.World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, N.J., 1999.

[8] A.V. Arkhangel'skiˇi. Fundamentals of general topology: problems and exercises. Kluwer,Boston, 1984.

[9] A.V. Arkhangel'skiˇi. Topological function spaces. Kluwer, Boston, 1992.

[10] A.V. Arkhangel'skiˇi and L.S. Pontryagin, editors. General Topology I. Springer-Verlag,Berlin etc., 1990.

[11] D.L. Armacost. The structure of locally compact abelian groups. M. Dekker, New York,1981.

[12] M.A. Armstrong. Basic topology. Springer-Verlag, New York, 1983.

[13] V.I. Arnold and B.A. Khesin. Topological methods in hydrodynamics. Springer, New York,1999.

[14] Emil Artin. Introduction to algebraic topology. C.E. Merrill Publishing Co., Columbus,Ohio, 1969.

[15] C.E. Aull and R. Lowen, editors. Handbook of the history of general topology. KluwerAcademic Publishers, Dordrecht; Boston, 1997.

[16] Wojciech Banaszczyk. Additive subgroups of topological vector spaces. Springer-Verlag,Berlin; New York, 1991.

[17] J. Banks, G. Davis, P. Stacey, J. Brooks, and G. Cairns. On devaney's definition of chaos.Amer. Math. Monthly, 99:332–334, 1992.
[18] John Banks, Valentina Dragan, and Arthur Jones. Chaos: A Mathematical Introduction.Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
[19] Dennis Barden and Charles Benedict Thomas. Additive subgroups of topological vector spaces. Imperial College Press, London, 2003.
[20] Stephen Barr. Experiments in topology. Dover Publications, New York, 1989.
[21] Gerald Alan Beer. Topologies on closed and convex sets. Kluwer Academic Publishers,Dordrecht, Boston, 1993.
[22] Martin P. Bendsoe. Optimization of structural topology. Springer, Berlin, New York, 1995.
[23] Martin P. Bendsoe. Topology, optimization: theory, methods and applications. Springer,Berlin, New York, 2003.
[24] Czeslaw Bessaga and Aleksander Pelczynski. Selected topics in infinite-dimensional topology. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975.
[25] G.D. Birkhoff and P.A. Smith. Structure analysis of surface transformations. Jour. Math(Liouville), (9) 7:345–379, 1928.
[26] Donald W. Blackett. Elementary topology; a combinatorial and algebraic approach. Academic Press, New York, 1967.
[27] Danail Bonchev and Dennis H. Rouvray, editors. Chemical topology : introduction and fundamental. Gordon and Breach, Amsterdam, 1999.
[28] Armand Borel. Seminars on transformation groups. Princeton University Press, Princeton,N.J., 1960.
[29] Karol Borsuk. Collected Papers/ Karol Borsuk. PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw,1983.
[30] Nicolas Bourbaki. General topology v.1 & v.2. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
[31] Nicolas Bourbaki. Topologie g´en´erale, Chap. 1-4 and Chap. 5-10. Hermann, Paris, 1971 and 1974.
[32] Nicolas Bourbaki. Topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1987.
[33] Glen E. Bredon. Topology and geometry. Springer, New York, 1997.
[34] Robert F. Brown. The Lefschetz fixed point theorem. Scott, Foresman, Glenview, Ill., 1971.

[35] Ronald Brown. Elements of modern topology. McGraw Hill, New York, 1968.
[36] Ronald Brown. Topology : a geometric account of general topology, homotopy types, and the fundamental groupoid. Halstead Press, New York, 1988.
[37] Georg Cantor. Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, by Georg Cantor; tr., and provided with an introduction and notes, by Philip E.B. Jourdain. The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1915.
[38] Stephen C. Carlson. Topology of surfaces, knots, and manifolds: a first undergraduate course. Wiley, New York, 2001.
[39] J. Scott Carter. How surfaces intersect in space : an introduction to topology. World Scientific Publishers, Singapore ; River Edge, N.J., 1995.
[40] Eduard ˇCech. Topological spaces. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1966.
[41] Eduard ˇCech. Point sets. Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1969.
[42] Graciela Chichilnisky. Topology and markets. American Mathematical society, Providence,R.I., 1999.
[43] Gustave Choquet. Topology. Academic Press, New York, 1966.
[44] Gustave Choquet. Lectures on analysis. W.A. Benjamin, New York, 1969.
[45] Daniel E. Cohen. Combinatorial group theory: a topological approach. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1989.
[46] W.W. Comfort and S. Negrepontis. The theory of ultrafilters. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1974.
[47] W.W. Comfort and S. Negrepontis. Continuous pseudometrics. M. Dekker, New York, 1975.
[48] W.W. Comfort and S. Negrepontis. Chain conditions in topology. Cambridge University Press, Cambridge, England; New York, 1982.
[49] James P. Corbett. Topological principles in cartography. US Department of Commerce, Washington, D.C., 1980.
[50] J.-M. Cordier. Shape theory: categorical methods of approximation. Halstead Press, Chichester, England; New York, 1989.
[51] Jane Cronin. Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.
[52] R.J. Daverman and R.B. Sher, editors. Handbook of geometric topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 2002.

[53] H. de Vries. Compact spaces and compactifications: an algebraic approach. Van Gorcum, Assen, 1962.
[54] J.V. Deshpande. Introduction to topology. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, New York, etc., 1988.
[55] Robert L. Devaney. Chaos, fractals and dynamics: computer experiments in mathematics. Addison-Wesley, Menlo Park, California, 1990.
[56] Robert L. Devaney. A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment. Westview Press, Boulder, Colorado, 1992.
[57] Robert L. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, 2nd Edition. Westview Press, Boulder, Colorado, 2003.
[58] Tammo tom Dieck. Topologie. de Gruyter, Berlin, 2000.
[59] Egbert Dierker. Topological methods in Walrasian economics. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.
[60] Jean Alexandre Dieudonn´e. A history of algebraic and differential topology, 1900-1960. Birkhauser, Boston, 1989.
[61] Dikran N. Dikranjan. Categorical structure of closure operators with applications to topology, algebra and discrete mathematics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1995.
[62] Mircea V. Diudea and L. Jantschi. Molecular topology. Nova Science Publishers, Huntington, N.Y., 2001.
[63] C.T.J. Dodson. Category bundles and spacetime topology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1988.
[64] C.T.J. Dodson. A user's guide to algebraic topology. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, 1997.
[65] Albrecht Dold. Lectures on algebraic topology. Springer, Berlin, 1995.
[66] James Dugundji. Topology. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
[67] Alan Dunn. Sarkovskii's Theorem–Part 1, http://ocw.mit.edu/nr/rdonlyres/mathematics/18-091spring–2005/a335fb2e-7381–49d4–b60c–7cbd2f349595/0/sarkcomplete.pdf, 2005.
[68] Herbert Edelsbrunner. Geometry and topology for mesh generation. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 2001.
[69] Gerald A. Edgar. Measure, topology and fractal geometry. Springer-Verlag, New York, 1990.

[70] R.E. Edwards. Curves and topological questions. Australian National University, Canberra, Australia, 1969.
[71] Robert E. Edwards. Functional analysis: theory and applications. Holt, Rinehart and Winston, N.Y., 1965.
[72] James Eels. Singularities of smooth maps. Gordon and Breach, New York, 1967.
[73] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. Foundations of algebraic topology. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.
[74] Murray Eisenberg. Topology. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1974.
[75] Patrik Eklund. Categorical fuzzy topology. Abo Akademi, Abo, 1986.
[76] Glenn Elert. The Chaos Hypertextbook, http://hypertextbook.com/chaos/, 2003.
[77] Ryszard Engelking. General topology. PWN – Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.
[78] Ryszard Engelking. Dimension theory. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; New York, 1978.
[79] William W. Fairchild and Cassius Ionescu Tulceac. Topology. W.B. Saunders Company, Philadelphia, London, Toronto, 1971.
[80] K.J. Falconer. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Wiley, Chichester, New York, 1990.
[81] Erica Flapan. When topology meets chemistry: a topological look at molecular chirality. Cambridge University Press, cambridge; New York, 2000.
[82] Graham Flegg. From geometry to topology. Dover Publications, Mineola, N.Y., 2001.
[83] D.H. Fremlin. Consequences of Martin's Axioms. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1984.
[84] Robert Froman. Rubber bands, baseballs and doughnuts; a book about topology. Illustrated by Harvey Weiss. Crowell, New York, 1972.
[85] P.M. Gadea and J. Munoz Masque. Analysis and algebra on differentiable manifolds: a workbook for students and teachers. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
[86] David B. Gauld. Differential topology: an introduction. M. Dekker, New York, 1982.
[87] General Topology Front for the Mathematics ArXiv.
http://front.math.ucdavis.edu/math.gn, 1992–. Los Alamos National Laboratory e-Print archive.

[88] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. A compendium of continuous lattices. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
[89] Gerhard Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M.W Mislove, and D.S. Scott. Continuous lattices and domains. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
[90] Leonard Gillman and Meyer Jerison. Rings of continuous functions. Springer-Verlag, New York, 1976.
[91] Robert Gilmore and Marc Lefranc. The topology of chaos: Alice in stretch and squeezeland. Wiley-Interscience, New York, 2002.
[92] Norman J. Girardot. Myth and Meaning in Early Taoism: The Theme of Chaos (hun-tun). University of California Press, Berkeley, California, 1983.
[93] H. Brian Griffiths. Surfaces. Cambridge University Press, London; New York, 1976.
[94] Jonathan L. Gross. Topological graph theory. Wiley, New York, 1987.
[95] A. Grothendieck. Topological vector spaces. Gordon and Breach, New York, 1973.
[96] Paul Halmos. Naive set theory. Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, 1960.
[97] Felix Hausdorff. Set Theory (translated from the original German). Chelsea, New York, 1962.
[98] Felix Hausdorff. Grundz¨uge der Mengenlehre (reprint; originally published in Leipzig in 1914). Chelsea, New York, 1965.
[99] Horst Herrlich and Hans-E. Porst, editors. Category theory at work. Heldermann-Verlag, Berlin, 1991.
[100] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis I: structure of topological groups, integration theory, group representations. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
[101] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. Abstract harmonic analysis II: structure and analysis for compact groups, analysis on locally compact abelian groups. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[102] Joachim Hilgert, Karl Heinrich Hofmann, and Jimmie D. Lawson. Lie groups, convex cones and semigroups. Clarendon Press, Oxford, 1997.

[103] Peter John Hilton. Homology theory: an introduction to algebraic topology. Cambridge University Press, London, 1967.
[104] Neil Hindman and Dona Strauss. Algebra in the Stone-Cech compactification : theory and applications. W. de Gruyter, New York, 1998.
[105] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos, 2nd Edition. Elsevier, Oxford, UK, 2004.
[106] John Gilbert Hocking and Gail S. Young. Topology. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, 1961.
[107] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. The Structure of Compact Groups: A Primer for the Student – A Handbook for the Expert. de Gruyter, Studies in Mathematics 25, Berlin, second revised and augmented edition, 2006.
[108] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. The Lie Theory of Connected Pro-Lie Groups: A Structure Theory for Pro-Lie Algebras, Pro-Lie Groups, and Connected Locally Compact Groups. European Mathematical Society Publishing House, Tracts in Mathematics 2, Zurich, Switzerland, 2007.
[109] Karl Heinrich Hofmann and Paul S. Mostert. Elements of compact semigroups. C.E. Merrill Books, Columbus, Ohio, 1966.
[110] Hopf Topology Archive. http://hopf.math.purdue.edu, 1996–. Purdue University Hopf Archive of Topology preprints.
[111] Juan Horv´ath. Topological vector spaces and distributions. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.
[112] Norman R. Howes. Modern analysis and topology. Springer-Verlag, New York, 1995.
[113] S.T. Hu. Introduction to general topology. Holden-Day, San Francisco, 1966.
[114] S.T. Hu. Differentiable manifolds. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1969.
[115] Sze-Tsen Hu. Elements of general topology. Holden-Day, San Francisco, 1964.
[116] Sze-Tsen Hu. Homology theory; a first course in algebraic topology. Holden-Day, San Francisco, 1966.
[117] Witold Hurewicz and Witold Wallman. Dimension theory. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1941.
[118] Taqdir Husain. The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces. Clarendon Press, Oxford, 1965.

[119] Taqdir Husain. Introduction to topological groups. W.B. Saunders, Philadelphia, 1966.
[120] Taqdir Husain. Topology and maps. Plenum Press, New York, 1977.
[121] Miroslav Husek and Jan Van Mill. Recent progress in general topology. North-Holland, Amsterdam; New York, 1992.
[122] J.R. Isbell. Uniform spaces. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1964.
[123] David Asaf IV and Steve Gadbois. Definition of chaos. Amer. Math. Monthly, 99:865, 1992.
[124] I.M. James. General topology and homotopy theory. Springer-Verlag, New York, 1984.
[125] I.M. James. Handbook of algebraic topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 1995.
[126] I.M. James. History of topology. Elsevier, Amsterdam; New York, 1999.
[127] I.M. James. Topologies and uniformities. Springer, London; New York, 1999.
[128] Arthur Jones, Sidney A. Morris, and Kenneth R. Pearson. Abstract algebra and famous impossibilities. Springer-Verlag Publishers, New York, Berlin etc, 1991 & 1993.
[129] V. Kannan. Ordinal invariants in topology. American mathematical society, Providence, R.I., 1981.
[130] Christian Kassel. Quantum groups. Springer-Verlag, New York, 1995.
[131] Louis H. Kauffman and Randy A. Baadhio. Quantum topology. World Scientific Publishers, Singapore; River Edge, 1993.
[132] John L. Kelley. General topology. Springer-Verlag, New York, 1991.
[133] S.M. Khaleelulla. Counterexamples in topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1982.
[134] Wan-hui Kim and Robert Tien-wen Chien. Topological analysis and synthesis of communication networks. Columbia University Press, New York, 1962.
[135] Bruce R. King. Applications of graph theory and topology in inorganic cluster and coordination chemistry. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.
[136] T. Yung Kong and Azriel Rosenfeld. Topological algorithms for digital image processing. Elsevier, Amsterdam; New York, 1996.
[137] Gottfried K¨othe. Topological vector spaces. Springer-Verlag, Berlin ; New York, 1983.

[138] Kenneth Kunen. Set theory. North-Holland, Amsterdam, 1980.
[139] Kenneth Kunen and Jerry E. Vaughan, editors. Handbook of set-theoretic topology. North- Holland, Amsterdam, 1984.
[140] Kazimierz Kuratowski. Introduction to set theory and topology. Pergamonn Press, New York, 1961.
[141] H.A. Lauwerier. Fractals: endlessly repeated geometrical figures. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1991.
[142] John M. Lee. Introduction to topological manifolds. Springer, New York, 2000.
[143] John M. Lee. Introduction to smooth manifolds. Springer, New York, 2002.
[144] Seymour Lipschutz. Schaum's outline of general topology. McGraw Hill, 1968.
[145] Ying-ming Liu and Mao-kang Luo. Fuzzy topology. World Scientific Publishers, River Edge, N.J., 1997.
[146] Charles Livingston. Knot theory. The Mathematical association of America, 1993.
[147] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. Journal of the Atmospheric Sciences, 20: 130–141, 1963.
[148] Saunders Maclane. Categories for the working mathematician, second edition. Springer- Verlag, New York, 1998.
[149] Benoit B. Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. Science, 155:636–638, 1967.
[150] Benoit B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. W.H. Freeman, New York, 1983.
[151] R.D. Mauldin, editor. The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Caf˝e. Birkh¨auser, Boston, 1981.
[152] Robert M. May. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. Science, 186:645–647, 1974.
[153] George McCarty. Topology; an introduction with application to topological groups. McGraw Hill, New York, 1967.
[154] Robert A. McCoy and Ibulu Ntantu. Topological properties of spaces of continuous functions. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1988.
[155] Dusa McDuff and Dietmar Salamon. Introduction to symplectic topology. Oxford University Press, New York, 1998.
[156] Richard E. Merrifield and Howard E. Simmons. Topological methods in chemistry. Wiley, New York, 1989.

[157] Emil G. Milewski. The topology problem solver: a complete solution guide to any textbook. Research and Education Association, Piscataway, N.J., 1994.
[158] M. Mimura and Hirosi Toda. Topology of Lie groups. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1991.
[159] Edward E. Moise. Introductory problem courses in analysis and topology. Springer-Verlag, New York, 1982.
[160] Mikhail I. Monastyrskaei. Topology of gauge fields and condensed matter. Plenum Press, New York, 1993.
[161] Deane Montgomery and Leo Zippin. Topological transformation groups. Interscience Publishers, New York, 1955.
[162] Robert L. Moore. Foundations of point set topology. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1962.
[163] Giuseppe Morandi. The role of topology in classical and quantum physics. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1992.
[164] K. Morita and J. Nagata, editors. Topics in general topology. North Holland, Amsterdam, 1989.
[165] Sidney A. Morris. Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups. Cambridge University Press, Cambridge; New York, 1977.
[166] Sidney A. Morris. Are finite topological spaces worthy of study. Austral. Math. Soc. Gazette, 11:31–32, 1984.
[167] Sidney A. Morris. An elementary proof that the Hilbert cube is compact. Amer. Math. Monthly, 91:563–564, 1984.
[168] Gregory L. Naber. Topological methods in Euclidean spaces. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1980.
[169] Gregory L. Naber. Topology, geometry and gauge fields: foundations. Springer, New York, 1997.
[170] Keio Nagami. Dimension theory. Academic Press, New York, 1970.
[171] Jun-iti Nagata. Modern dimension theory. Interscience Publishers, New York, 1965.
[172] Jun-iti Nagata. Modern general topology. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1985.
[173] Mikio Nakahara. Geometry, topology and physics. A. Hilger, Bristol, England; New York, 1990.
[174] H. Nakano. Topology and linear topological spaces. Maruzen Co., Tokyo, 1951.

[175] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. Topological vector spaces. M. Dekker, New York, 1985.
[176] Charles Nash. Topology and geometry for physicists. Academic Press, London, New York, 1983.
[177] M.H.A. Newman. Elements of the topology of plane sets of points. Greenwood Press, Westport, Conn., 1985.
[178] A.L. Onishchik. Topology of transitive transformation groups. Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.
[179] John C. Oxtoby. Measure and category; a survey of the analogies between topological and measure spaces. Springer-Verlag, New York, 1971.
[180] A.R. Pears. Dimension Theory of general spaces. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1975.
[181] Anthony L. Peressini. Ordered topological vector spaces. Harper and Row, New York, 1967.
[182] C.G.C. Pitts. Introduction to metric spaces. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972.
[183] Henri Poincar`e. Science and method; translated and republished. Dover Press, New York, 2003.
[184] Ian R. Porteous. Topological geometry. Cambridge University Press, Cambridge, England, New York, 1981.
[185] Bodo von Querenburg. Mengentheoretische Topologie. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
[186] George M. Reed. Surveys in general topology. Academic Press, New york, 1980.
[187] G.M. Reed, A.W. Roscoe, and R.F. wachter. Topology and category theory in computer science. Oxford University Press, Oxford, England, 1991.
[188] Renzo L. Ricca. An introduction to the geometry and topology of fluid flows. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; Boston, 2001.
[189] A.P. Robertson and Wendy Robertson. Topological vector spaces. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973.
[190] Joseph J. Rotman. An introduction to algebraic topology. Springer-Verlag, New York, 1988.
[191] Mary Ellen Rudin. Lectures on set theoretic topology. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.
[192] Hans Sagan. Space-filling curves. Springer-Verlag, New York, 1994.

[193] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. Ukranian Mat. Z., 16:61–71, 1964.
[194] Saharon Shelah. On a problem of Kurosh, Jonsson groups, and applications. Word problems II, Stud. Logic Found. Math., 995:373–394, 1980.
[195] M. Signore and F. Melchiorri. Topological defects in cosmology. World Scientific Publishers, Singapore, 1998.
[196] George E. Simmons. Introduction to topology and modern analysis. McGraw Hill, New York, 1963.
[197] I.M. Singer. Lecture notes on elementary topology and geometry. Springer-Verlag, New York, 1967.
[198] Christopher G. Small. The statistical theory of shape. Springer, New York, 1996.
[199] Alexei Sossinsky. Knots: mathematics with a twist. Harvard University Press, 2002.
[200] Edwin H. Spanier. Algebraic topology. Springer-Verlag, New York, 1966.
[201] John R. Stallings. Lectures on polyhedral topology. Tata Institute of Fundamental research, Bombay, India, 1967.
[202] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach Jr. Counterexamples in topology. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.
[203] N.E. Steenrod. Reviews of papers in algebraic and differential topology, topological groups and homological algebra. American Mathematical Society, Providence, R.I., 191968.
[204] N.E. Steenrod. The topology of fibre bundles. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.
[205] John Stillwell. Classical topology and combinatorial group topology. Springer-Verlag, New York, 1995.
[206] The MacTutor History of Mathematics Archive.
http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/ history/, 2001–.
[207] Wolfgang Thron. Topological structures. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
[208] Topology. http://www.elsevier.com/locate/top, 1962–. A hard-copy refereed research journal in topology and geometry.
[209] Topology and its Applications. http://www.elsevier.nl/locate/topol, 1971–. A hard-copy refereed research journal in topology.

[210] Topology Atlas. http://at.yorku.ca/topology, 1995–. Topology related resources.
[211] Topology Proceedings.
http://topology.auburn.edu/tp/top2.htm, 1977–. A hard-copy refereed research journal.
[212] J. van Mill. The infinite-dimensional topology of function spaces. Elsevier, Amsterdam, New York, 2001.
[213] Jan van Mill and George M. Reed. Open problems in topology. North-Holland, Amsterdam, 1990.
[214] Michel Vellekoop and Raoul Berglund. On intervals, transitivity = chaos. Amer. Math. Monthly, 101:353–355, 1994.
[215] Steven Vickers. Topology via logic. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[216] A.V. Vologodskii. Topology and physics of circular DNA. CRC Press, Boca Raton, 1992.
[217] Russell C. Walker. The Stone-Cech compactification. Springer-Verlag, Berlin; New York, 1974.
[218] C.T.C. Wall. A geometric introduction to topology. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1972.
[219] A.D. Wallace. Differential topology; first steps. W.A. Benjamin, New York, 1968.
[220] Evert Wattel. The compactness operator in set theory and topology. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1968.
[221] Jeffrey R. Weeks. The shape of space. Marcel Dekker, New York, 2002.
[222] Stuart G. Whittington, De Witt Sumners, and Timothy Lodge, editors. Topology and geometry in polymer science. Springer, New York, 1998.
[223] R.L. Wilder. Topology of manifolds. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., RI, USA, vol. 32, 1979.
[224] Robin Wilson. Four colors suffice: how the map problem was solved. Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.
[225] James Yorke and T-Y. Li. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly, 82:985–992, 1975.

الدليل