


الدكتورة نازدار اسماعيل  
أستاذة مساعدة في معهد  
الرياضيات - جامعة قسنطينة

الدكتور شيرزاد الطالباني  
أستاذ محاضر في معهد  
الرياضيات - جامعة قسنطينة

# محاضرات في الجبر الخطي

الطبعة الثالثة 1989

  
ديوان المطبوعات الجامعية  
الجزائر

## مقدمة

تتناول فصول هذا الكتاب بعض مواضيع الجبر الخطي التي أرتأينا ضرورتها لطلبة الجامعات ، ونأمل أن يساعدها الكتاب على تلافي بعض الفراغ في المكتبة العربية من هذا الميدان النظري الأساسي . سيكون الاهتمام الأكثر مركزاً على الجانب النظري ، حيث نتعرض بالتفصيل لمجموعة كبيرة من النظريات في كل موضوع من مواضيع الكتاب مرفوقه بالبراهين التفصيلية مع أمثلة توضيحية مناسبة لكثير من التعاريف والنظريات من أجل تهيئ فهمها . في نهاية كل فصل قدمنا مجموعة من التمارين ، ينبغي حلها من أجل تهيئ الطريق لفهم الفصول اللاحقة .

الكتاب موجه للدارسين يتمتعون بحد مناسب من المعرفة ببعض المبادئ الأولية في الجبر بالأضص : المجموعات ، العلاقات التطبيقية ، العمليات ، الزمر ، الحلقات والكقول ، ومع ذلك نعرض بعض تلك المفاهيم الضرورية من التهيئ .

سيكون من دواعي سرورنا وأفتقنا ان نتلقى ملاحظات الزملاء والطلبة بغية تحسين هذا الكتاب من طبعاته اللاحقة . نقدم شكرنا الخاص للدكتور مرعي غانم للمساعدة القيمة التي قدمها لنا من صياغة وتنقيح بعض الجوانب اللغوية من هذا الكتاب .

د. نازدار اسماعيل

د. سيزاد الطالباوي

قسنطينة في 14 - 02 - 1987

# المحتويات

(1)	الفصل الاول : الفضاء الشعاعي .....
(4)	1.1 خواص أولية .....
(5)	2.1 الفضاء الشعاعي الجزئي .....
(8)	3.1 جمع الفضاءات الشعاعية .....
(11)	4.1 الأرتباط الخطي والأستقلال الخطي .....
(17)	5.1 الاساس والبعد .....
(30)	تمارين .....

(36)	الفصل الثاني : التطبيقات الخطية .....
(36)	1.2 مبادئ أولية .....
(39)	2.2 صورة ونواة التطبيق الخطي .....
(42)	3.2 الاساس والتطبيقات الخطية .....
(52)	4.2 فضاء حاصل القسمة .....
(58)	5.2 فضاء التطبيقات الخطية .....
(61)	6.2 الفضاء التناوبي والأساس التناوبي .....
(67)	7.2 الاشكال متعددة الخطية .....
(74)	تمارين .....

(77)	الفصل الثالث : المصفوفات والمحددات .....
(77)	1.3 خواص أولية .....

- 2.3 المصفوفات والتطبيقات الخطية ..... (79)
- 3.3 الفضاء الشعاعي للمصفوفات ..... (85)
- 4.3 جداء المصفوفات ..... (89)
- 5.3 المصفوفة المربعة ..... (92)
- 6.3 منقول وأثر المصفوفة ..... (96)
- 7.3 مصفوفة العبور ..... (97)
- 8.3 المحددات ..... (104)
- 9.3 المحددات والأشكال الخطية ..... (112)
- 10.3 ايجاد مقلوب المصفوفة ..... (121)
- تمارين ..... (126)

- الفصل الرابع - الفضاء الأقليدي والهيرميتي ..... (132)
- 1.4 الأشكال التربيعية ..... (132)
- 2.4 الفضاء الأقليدي ..... (145)
- 3.4 الفضاءات الاقليدية الجزئية المتعامدة ..... (149)
- 4.4 الأساس المعياري المتعامد ..... (153)
- 5.4 التطبيقات المتعامدة والمصفوفات العودية ..... (162)
- 6.4 الفضاء الهرميتي ..... (172)
- 7.4 ايزومورفزم الفضاءات الهرميتية ..... (185)
- تمارين ..... (189)

الفصل الخامس : الأئمة الذاتية والقيم الذاتية ..... (195)

1.5 مبادئ أولية ..... (195)

2.5 تقطير المصنوفة ..... (202)

3.5 نظرية كايبي - هاملتون ..... (210)

4.5 الأئمة الذاتية والتطبيقات العودية والأحادية ..... (213)

5.5 صيغ جوردان القانونية ..... (219)

تمارين ..... (226)

الفصل السادس : الفضاء الترابي ..... (230)

1.6 مبادئ أولية ..... (230)

2.6 الفضاء الترابي الجزئي ..... (233)

3.6 التطبيقات الترابية ..... (241)

تمارين ..... (247)

فهرست الرموز المتعلقة ..... (249)

فهرست المواضيع ..... (252)

المصادر ..... (255)

## - تمهيد -

سنفرض للمجموعات بالأحرف اللاتينية الكبيرة  $A, B, \dots$  الخ ولعناصر المجموعة بالأحرف  $a, b, \dots$  الخ .

الزوج المرتب ذات العنصر الأول  $a$ ، والعنصر الثاني  $b$ ، نرمز له بـ:  $(a, b)$ .  
ومجموعة جميع الأزواج المرتبة  $(a, b)$  عندما  $a \in A$  و  $b \in A$ ، نرمز لها بـ  $A \times B$  ونسميها بالجداء الديكارتي للمجموعتين  $A, B$  .

العلاقة  $R$  في المجموعة  $A$  هي أي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي  $A \times A$  . ونقول أن العلاقة  $R$  في المجموعة  $A$  هي:

(1) انعكاسية : إذا كانت لكل  $a \in A$  ،  $a R a$  .

(2) تناظرية : إذا كانت لكل  $a, b \in A$  ،  $a R b$  ، فأن  $b R a$  .

(3) متعدية : إذا كانت لكل  $a, b, c \in A$  ،  $a R b$  و  $b R c$  فأن  $a R c$  .

العلاقة التي تحققت (1)، (2) و (3) تسمى علاقة تكافؤ .

التطبيق  $f$  من المجموعة  $A$  في المجموعة  $B$ ، والذي نرمز له بالرمز  $f: A \rightarrow B$  هو عملية ربط كل عنصر  $a \in A$  بعنصر  $b \in B$  يسمي بصورة العنصر  $a \in A$  وفق التطبيق  $f$ ، ونكتب  $f(a) = b$  . ونرمز للتطبيقات بالرمز  $f, g, h, \dots$  الخ .

إذا كان  $f: A \rightarrow B$  تطبيقاً، فأن صورة المجموعة الجزئية  $A_1 \subset A$  وفق التطبيق  $f$  نرمز لها بـ  $f(A_1)$  وعبارة عن :

$$f(A_1) = \{ b \in B ; \exists a \in A_1 , f(a) = b \}$$

والصورة العكسية للمجموعة الجزئية  $B_1 \subset B$  وفق التطبيق  $f$

نوفر لها بالرمز  $f^{-1}(B)$  ، عبارة عن :  $f^{-1}(B) = \{a \in A : f(a) \in B\}$  ،  
 إذا كان  $f: A \rightarrow B$  ،  $f(A) = B$  عندئذ نقول ان  $f$  عبارة عن  
 تطبيع غامر من المجموعة  $A$  على المجموعة  $B$  ، ونقول عن  $f$   
 انه متباين اذا تحقق ، لكل  $a, b \in A$  ، اذا كان  $f(a) = f(b)$  فان  
 $a = b$  أو بالعكس ، اذا كان  $a \neq b$  فان  $f(a) \neq f(b)$  . التطبيع  
 المتباين والغامر نسميه بالتطبيع التقابللي .

التطبيع  $f: A \rightarrow A$  والمعروف بـ: لكل  $a \in A$  ،  $f(a) = a$  نسميه  
 بالتطبيع المطابفة (أو الكياردي) ونفرله بالرمز  $Id_A$  .

يتاوىء التطبيقتان  $f, g: A \rightarrow B$  ، اذا كان لكل  $a \in A$  ،  $f(a) = g(a)$  .  
 اذا كان  $f: A \rightarrow B$  ،  $g: B \rightarrow C$  ، تطبيقتين ، فان التطبيقتان  $h: A \rightarrow C$   
 والذي يحقق : انه لكل  $a \in A$  ،  $h(a) = g(f(a))$  ، يسمون بتراكيب  
 التطبيقتين  $f$  ،  $g$  ، ونفرل ذلك بـ  $g \circ f$  اي ان :

$$\forall a \in A , h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

اذا كان  $f: A \rightarrow B$  تطبيعاً تقابلياً ، فانه يوجد تطبيقتان  
 وهما  $g: B \rightarrow A$  بحيث  $f \circ g = Id_B$  ،  $g \circ f = Id_A$  ، نسميه بالتطبيع  
 العكسي للتطبيع  $f$  ونفرله بـ  $f^{-1}$  ، ويكون لدينا ،

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

العملية الداخلية في المجموعة  $A$  ، نتجت للأفتصار العملية في  
 $A$  هي كل تطبيقتان من  $A \times A$  في  $A$  .  
 والعملية الخارجية على المجموعة  $A$  بالنسبة للمجموعة  $B$  ، هي  
 كل تطبيقتان من  $B \times A$  في  $A$  .

نعرف الزمرة بأنها مجموعة غير خالية  $G$ ، ذات عملية داخلية  
لتكن  $*$ ، بحيث تتحقق الشروط التالية :-

(1) العملية  $*$  تجميعية في المجموعة  $G$  أي أنه :

$$\forall a, b, c \in G, \quad a * (b * c) = (a * b) * c$$

(2) يوجد عنصر محايد  $e$  بالنسبة للعملية  $*$  في المجموعة  $G$  أي

$$\exists e \in G, \forall a \in G, \quad a * e = e * a = a$$

(3) لكل  $a \in G$  يوجد عنصر نظير  $a' \in G$  بالنسبة للعملية  $*$

في المجموعة  $G$ ، أي أنه :

$$\forall a \in G \exists a' \in G, \quad a * a' = a' * a = e$$

ونقول عندئذ إن  $(G, *)$  زمرة. ونقول إن  $(G, *)$  زمرة

تبدلية إذا كانت العملية  $*$  تبدلية في  $G$ ، أي أنه :

$$\forall a, b \in G; \quad a * b = b * a$$

ننظر للعملية  $*$  في الزمرة في هذا الكتاب بالجمع وبذلك

يكون العنصر المحايد هو "0" ونظير العنصر  $a$  هو  $-a$ .

الزمرة الجبرية في الزمرة  $(G, +)$  هي مجموعة جزئية غير خالية

ولتكن  $H$  من الزمرة  $(G, +)$ ، بحيث إن  $(H, +)$  هي نفسها زمرة،

أي إن الزمرة الجزئية في الزمرة  $G$  هي مجموعة جزئية غير خالية

$H$ ، بحيث إن  $H$  هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في  $G$ .

نعرف الحلقة بأنها مجموعة غير خالية  $M$  ذات عمليتين داخليتين،

ننظر للأزواج بالجمع، وللثانية بالضرب، بحيث يكون  $(M, +)$  زمرة

تبدلية، وتكون عملية الضرب تجميعية في  $M$  وتوزيعية

بالنسبة للجمع.



إذا وجد عنصر حيدري بالنسبة للضرب في  $M$  نزرله بـ  $1$  ،  
ونقول ان  $(M, +, \cdot)$  حلقة ذات عنصر حيدري . وإذا كانت  
عملية الضرب تبديلية في  $M$  عندئذ نقول ان الحلقة  $M$   
هي حلقة تبديلية .

إذا كانت في الحلقة التبديلية ذات العنصر الحيدري  $M$  تحقق  
الخاصية انه لكل  $a, b \in P$  ، إذا كان  $ab = 0$  فإن  $a = 0$  أو  $b = 0$   
(وهذا الشرط يكافئ الشرط انه إذا كان  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  فإن  
 $ab \neq 0$ ) عندئذ نقول أن الحلقة  $P$  هي حلقة تامة .  
نعرف الحقول بأنه الحلقة التامة  $K$  والتي يحقق انه  
لكل  $a \in K$  ،  $a \neq 0$  يوجد  $a^{-1} \in K$  بحيث انه  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$  .  
أي انه لكل عنصر من  $K$  مختلف عن الصفر نظيراً بالنسبة لعملية الضرب . أي  
انه  $(K, +)$  زمرة تبديلية و  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  زمرة تبديلية .

## الفصل الاول الفضاء الشعاعي

### 1.1 خواص أولية

#### 1.1.1 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً ،  $V$  مجموعة غير خالية ، نقول ان  $V$  هي فضاء شعاعي على الحقل  $K$  اذا تحققت الشرطان التاليان:

(1) اذا كان  $(V, +)$  زجراً تبديلياً .

(2) اذا وجد تطبيق الجداء الديكارتي  $K \times V$  في  $V$  بحيث

يسار كل زوج مرتب  $(\lambda, x) \in K \times V$  بعنصر من  $V$  نذل

عليه بالرمز  $\lambda x$  ، وتحقق الخواص التالية :

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad (a)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x, y \in V, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (b)$$

$$\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in V, \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x \quad (c)$$

$$\forall x \in V, 1 \cdot x = x \quad (d)$$

حيث  $1$  هو العنصر المحايد في الحقل  $K$  . ثم عناصر

$V$  بالاشعة ، وعناصر  $K$  عناصر سلمية ، ومن

التطبيق  $\lambda x \rightarrow (\lambda, x)$  ضرب الشعاع  $x$  بالمقدار

السلمي  $\lambda$  .

2.1.1 أمثلة :

- (1) مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$ ، هي فضاء شعاعي على حقل الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ .
- (2) مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$ ، هي فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{R}$ .

(3)  $\mathbb{R}^2$  هي فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{R}$ ، لأن  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  أي  $\mathbb{R}^2$  هي زمرة أبيلية بالنسبة لعملية جمع الأزواج المرتبة، ونعرف الضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

بحقت جميع خواص الفضاء الشعاعي .  
ويكمن تعميم المثال السابق على  $\mathbb{R}^n$  . في المجموعة  $\mathbb{R}^n$  نعرف عملية الجمع كما يلي :

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

ونعرف الضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

نلاحظ ان  $(\mathbb{R}^n, +)$  زمرة تبديلية ، والضرب بمقدار سلمي يحقت جميع خواص الفضاء الشعاعي .

(4) ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $K$  . نعرف عملية الجمع في  $V_1 \times V_2$  كما يلي :

$$\forall (x, y), (x_1, y_1) \in V_1 \times V_2, (x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

من الواضح ان  $(V_1 \times V_2, +)$  زمرة تبديلية .

وتعرف الضرب بمقدار سلمي كما يلي :

$$\forall \lambda \in K, \forall (x, y) \in V_1 \times V_2, \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

تحقق جميع خواص الفضاء الشعاعي . فإذن  $V_1 \times V_2$  هو فضاء شعاعي على الحقل  $K$  ، يسمى بالجاء الديكارتي للفضاءين  $V_1, V_2$  .

### 3.1.1 قواعد الحساب في الفضاء الشعاعي

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  .

(1) ندرس للعنصر المحايد في الزمرة  $(V, +)$  بالرمز  $0_V$  ، ونسميه

الشعاع الصفري ، فإنه لأي  $\lambda \in K$  ،  $\lambda \cdot 0_V = 0_V$  ، لأنه :-

$$\begin{aligned} \forall n \in V, \lambda \cdot 0_V &= \lambda \cdot 0_V + 0_V = \lambda \cdot 0_V + ((\lambda n) + (-\lambda n)) = \\ &= (\lambda \cdot 0_V + \lambda n) + (-\lambda n) = \lambda(0_V + n) + (-\lambda n) = \\ &= \lambda n + (-\lambda n) = 0_V \end{aligned}$$

(2) ندرس للعنصر المحايد بالنسبة للجمع في الحقل  $K$  بالرمز  $0_K$  ، فإنه

$$\text{لكل } n \in V, 0_K \cdot n = 0_V, \text{ لأنه :-}$$

$$\begin{aligned} 0_K \cdot n &= 0_K \cdot n + 0_V = 0_K \cdot n + (n + (-n)) = (0_K \cdot n + 1 \cdot n) + (-n) = \\ &= (0_K + 1)n + (-n) = 1 \cdot n + (-n) = n + (-n) = 0_V \end{aligned}$$

(3) لكل  $n \in V$  ،  $(-1)n = -n$  ، لأنه :

$$\begin{aligned} (-1)n &= (-1)n + 0_V = (-1)n + (n + (-n)) = ((-1)n + 1 \cdot n) + (-n) = \\ &= ((-1) + 1)n + (-n) = 0_K \cdot n + (-n) = 0_V + (-n) = -n \end{aligned}$$

(4) لكل  $\lambda \in K$  ، حيث  $\lambda \neq 0_K$  ، ولكل  $n \in V$  ، إذا كان

$$\lambda n = 0_V \text{ ، فإن } n = 0_V .$$

لنفرض  $\lambda v = 0_V$  فإنه يوجد  $\lambda^{-1}$  في الحقل  $K$  ،

$$v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1} \lambda) v = \lambda^{-1} (\lambda v) = \lambda^{-1} \cdot 0_V = 0_V$$

(5) لكل  $v_1, v_2, v_3 \in V$  إذا كان  $v_1 + v_3 = v_2 + v_3$  فإنه:  $v_1 = v_2$

$$\begin{aligned} v_1 &= v_1 + (v_3 + (-v_3)) = (v_1 + v_3) + (-v_3) = (v_2 + v_3) + (-v_3) = \\ &= v_2 + (v_3 + (-v_3)) = v_2 \end{aligned}$$

ونقول ان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي  $V$ .

(6) لكل  $v_1, v_2 \in V$  نعرف  $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$  فإنه:

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V, (-\lambda)v = -\lambda v = \lambda(-v)$$

$$\begin{aligned} \lambda(-v) &= \lambda(-v) + ((\lambda v) + (-\lambda v)) = (\lambda(-v) + \lambda v) + (-\lambda v) = \\ &= \lambda((-v) + v) + (-\lambda v) = \lambda \cdot 0_V + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) = \\ &= -\lambda v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-\lambda)v &= (-\lambda)v + (\lambda v + (-\lambda v)) = ((-\lambda)v + \lambda v) + (-\lambda v) = \\ &= ((-\lambda) + \lambda)v + (-\lambda v) = 0_K \cdot v + (-\lambda v) = 0_V + (-\lambda v) = \\ &= -\lambda v \end{aligned}$$

### ملاحظة

أعتبراً من الآن نستخدم "0" بدلاً عن كل من

$0_V$  ،  $0_K$  . وعلى الصارح أن يميز إذا كان مقدراً

سليماً أو سجعاً .

## 2.1 الفضاء الشعاعي الجزئي

### 1.2.1 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $F$  مجموعة جزئية غير خالية من  $V$  . نسمي  $F$  فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي  $V$  ، إذا كان  $F$  فضاءاً شعاعياً بالنسبة لنفس العمليتين في  $V$  (أي الجمع في  $V$  والضرب بمقدار سليم في  $K$ ) . أي أنه إذا كان  $(F, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(V, +)$  وكذلك لكل  $\lambda \in K$  ، ولكل  $v \in V$  يكون  $\lambda v \in F$  ، وتحقق الشرط من (a) المذكورة في (1.1.1) .

### 2.2.1 نظرية

ليكن  $F$  مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  . فإن  $F$  تكون فضاءاً شعاعياً جزئياً إذا وفقط إذا كانت :

$$\forall v_1, v_2 \in F, \quad v_1 - v_2 \in F \quad (1)$$

$$\forall v_1 \in F, \forall \lambda \in K, \quad \lambda v_1 \in F \quad (2)$$

البرهان :

إذا كان  $F$  فضاءاً شعاعياً جزئياً ، عنده  $(F, +)$  زمرة جزئية من الزمرة  $(V, +)$  ، أي أنه لكل  $v_1, v_2 \in F$  فإن  $-v_2 \in F$  ، ومن خواص الفضاء الشعاعي  $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2) \in F$  . وبذلك يوجد التقييف  $f : K \times F \rightarrow F$  بحيث لكل  $v_1 \in F$  ، لكل  $\lambda \in K$  ،

$f(\lambda, v) = \lambda v$  أي أنه يتحقق الشرط الثاني .  
للبهتان على العكس ، باستخدام الشرط الأول لكل  $v \in F$  فإن  
 $0 = v - v \in F$  . وكذلك لكل  $v \in F$  ، بما أن  $0 \in F$  فإن  $0 - v = -v \in F$  .  
وأخيراً لكل  $v_1, v_2 \in F$  فإن  $-v_2 \in F$  . ومنه  $v_1 + (-v_2) = v_1 - v_2 \in F$  . نستنتج  
أن  $F$  هي زمرة بالنسبة لنفس العملية في  $V$  ، وبما أن  $0$  محتواة في  $V$  فإن  
 $F$  هي زمرة جزئية من  $V$  . ومن الشرط الثاني نستنتج أنه لكل  $v \in F$   
ولكل  $\lambda \in K$  فإن  $\lambda v \in F$  ، ومن هنا فإن جميع الشروط من (a) إلى (d)  
تتحقق ، أي أن  $F$  هو فضاء شعاعي على الحقل  $K$  ، وهي مجموعة  
جزئية من  $V$  . فإن  $F$  فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي  $V$  .  
(و.ه.م. ٣٠)

### 3.2.1 نتيجة

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $F$  مجموعة  
جزئية غير خالية من  $V$  . فإن  $F$  تكون فضاء شعاعياً جزئياً  
من الفضاء الشعاعي  $V \Leftrightarrow \forall \lambda, \mu \in K, \forall v_1, v_2 \in F, (\lambda v_1 + \mu v_2) \in F$   
من هنا نلاحظ أنه :  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, \forall v_1, \dots, v_n \in F, (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \in F$

### 4.2.1 أمثلة

(1)  $\{0_v\}$  والمجموعة  $V$  هما فضاءان شعاعيان جزئيان من  
كل فضاء شعاعي  $V$  على الحقل  $K$  . الفضاء الشعاعي الجزئي  
الذي يختلف عن  $\{0_v\}$  و  $V$  يسمى بالفضاء الشعاعي  
الجزئي الكصبي .

(2) لتكن  $\mathbb{R}^2$  فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{R}$  ، فإن المجموعة الجزئية  $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 ; x \in \mathbb{R}\}$  هي فضاء شعاعي جزئي من  $\mathbb{R}^2$  .

### 5.2.1 نظرية

لتكن  $\{F_i\}_{i \in I}$  أسرة فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، و  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  . فإن  $F$  عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي  $V$  .

البرهان:

بما أنه لكل  $i \in I$  ،  $F_i$  عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من  $V$  ، فإن  $0 \in F_i$  لكل  $i \in I$  ، ومنه  $0 \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$  . ليكن  $x_1, x_2 \in F$  ، فإنه  $x_1 \in F_i$  و  $x_2 \in F_i$  لكل  $i \in I$  . بما أن  $F_i$  هي فضاء شعاعي جزئي من  $V$  لكل  $i \in I$  ، فإن  $x_1 - x_2 \in F_i$  لكل  $i \in I$  ، أي ان  $x_1 - x_2 \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$  .  
لكل  $\lambda \in K$  ولكل  $x \in F$  فإن  $x \in F_i$  لكل  $i \in I$  . بما أن  $F_i$  هي فضاء شعاعي جزئي من  $V$  لكل  $i \in I$  ، فإن  $\lambda x \in F_i$  لكل  $i \in I$  ، أي ان  $\lambda x \in F = \bigcap_{i \in I} F_i$  .  
فإن  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  عبارة عن فضاء شعاعي جزئي من الفضاء  $V$  . (و.ه.م)

من الجدير بالذكر ان اتحاد فضاءين شعاعيين جزئيين

ليس لكل عام فضاءً شعاعياً جزئياً .



فإن في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، لكن  
فضائين  $F_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2; y \in \mathbb{R}\}$  ،  $F_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\}$   
شعاعيين هزئيين من  $\mathbb{R}^2$  ، فإن  $F_1 \cup F_2$  لا يكونان فضاءً  
شعاعياً هزئياً من  $\mathbb{R}^2$  ، لأنه مثلاً  $(3, 0) \in F_1$  و  $(0, 2) \in F_2$   
فإن  $(3, 0) \in F_1 \cup F_2$  و  $(0, 2) \in F_1 \cup F_2$  ، عندنا  $(3, 0) + (0, 2) = (3, 2)$   
لكن  $(3, 2) \notin F_1 \cup F_2$  .

### 3.1 جمع الفضاءات الشعاعية

#### 1.3.1 نظرية

ليكن  $V_1$  ،  $V_2$  فضاءين شعاعيين هزئيين  
من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، فإن  
 $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}$  هو فضاء  
شعاعي هزئى من الفضاء الشعاعي  $V$  .

البرهان :

لكل  $x, y \in V_1 + V_2$  فإنه توجد  $v_1, v_1' \in V_1$  و  $v_2, v_2' \in V_2$

حيث  $x = v_1 + v_2$  ،  $y = v_1' + v_2'$  ، فإن :

$$x - y = v_1 + v_2 - (v_1' + v_2') = (v_1 - v_1') + (v_2 - v_2')$$

بما أن  $V_1$  ،  $V_2$  فضاءان شعاعيان هزئيان من  $V$  ،

فإنه حسب النظرية (2.2.1) ،  $v_1 - v_1' \in V_1$  و  $v_2 - v_2' \in V_2$

فإن  $x - y \in V_1 + V_2$  .

لكل  $\lambda \in K$  ولكل  $x \in V_1 + V_2$  ، فإن  $x = v_1 + v_2$  حيث

$\lambda x = \lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$  ، فأن  $v_2 \in V_2$  و  $v_1 \in V_1$   
لكن حسب النظرية (2.2.1)  $\lambda v_2 \in V_2$  ،  $\lambda v_1 \in V_1$  لأن  
 $V_1$  ،  $V_2$  فضاءان شعاعيين جزئيين من  $V$  ، فأن  
 $\lambda x \in V_1 + V_2$  ، فأنه بذلك  $V_1 + V_2$  هو فضاء  
شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$ .  
(و.ه.م)

### تعريف 2.3.1

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي  $V_1 + V_2$  من النظرية  
(1.3.1) ، مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين  $V_1$  ،  $V_2$  ،  
ويكون تعميم هذا التعريف الى جمع  $n$  من الفضاءات  
الشعاعية الجزئية ، ليكن  $V_1, \dots, V_n$  فضاءات  
شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  
 $K$  ، فأن  $V_1 + \dots + V_n$  هو فضاء شعاعي جزئي  
من الفضاء  $V$  ، يسمي بمجموع الفضاءات الشعاعية  
الجزئية  $V_1, \dots, V_n$ .

### نظرية 3.3.1

ليكن  $V_1, \dots, V_n$  ( $n \geq 2$ ) فضاءات شعاعية  
جزئية من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، فأن  
الشرطين التاليين متكافئان :

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n) = \{0\} \quad (1)$$

$$(2) \text{ إذا كان } a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$(j=1, \dots, n) \ a_j = b_j$  فأن  $i=1, \dots, n$  لأي  $a_i, b_i \in V_i$

البرهان:

نترض (1) صحيحة ، وليكن  $a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$

حيث  $a_i, b_i \in V_i$  لأي  $i=1, \dots, n$  ، ولأي  $1 \leq j \leq n$  فأن:

$$a_j - b_j = (b_1 - a_1) + \dots + (b_{j-1} - a_{j-1}) + (b_{j+1} - a_{j+1}) + \dots + (b_n - a_n)$$

وبما أن  $a_i, b_i \in V_i$  لأي  $i=1, \dots, n$  و  $V_i$  هو فضاء

تحتي هبرتي من  $V$  ، فأن  $b_i - a_i \in V_i$  أي أن :

$$a_j - b_j \in V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_n)$$

لكن حسب الشرط الاول

$$V_j \cap (V_1 + \dots + V_{j-1} + V_{j+1} + \dots + V_n) = \{0\}$$

إذن  $a_j - b_j = 0$  ، ومنه  $a_j = b_j$  لأي  $j=1, \dots, n$ .

نترض (2) صحيحة ، ولنترض ان

$$V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n) \neq \{0\}$$

ليكن  $a \in V_i \cap (V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n)$

فأن  $a \in V_i$  وكذلك  $a \in V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n$

فأن :  $a = a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_n$

حيث  $a_j \in V_j$  لكل  $j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$  من هنا

نتنتج ان :

$$a_1 + \dots + a_{i-1} + (-a) + a_{i+1} + \dots + a_n = 0 + \dots + 0$$

من (2) نتنتج أن :  $a_1 = 0, \dots, a_{i-1} = 0, -a = 0, a_{i+1} = 0, \dots, a_n = 0$

أي أن  $a = 0$  . (و.ه.و.ع.)

### 4.3.1 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $V_1, \dots, V_n$  فضاءات شعاعية جزئية من الفضاء الشعاعي  $V$  . نقول ان الفضاء الشعاعي  $V$  هو المجموع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية  $V_1, V_2, \dots, V_n$  ، اذا كان :

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (1)$$

(2) اذا تحققت احدى شرطي النظرية ( 3.3.1 )

عندئذ نكتب  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

### 4.1 الارتباط الخطي والاستقلال الخطي

#### 1.4.1 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليتكن  $v_1, \dots, v_n$  أشعة مامن  $V$  ،  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  مقادير سلمية من الحقل  $K$  . فان الشعاع  $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  يسمى مزجاً خطياً للأشعة  $v_1, v_2, \dots, v_n$  . ونقول ان الفضاء الشعاعي  $V$  حولد بالأشعة  $v_1, \dots, v_n$  ، اذا كان كل شعاع  $v \in V$  هو مزجاً خطياً للأشعة  $v_1, \dots, v_n$  .

#### 2.4.1 مثال

لتكن  $v_1 = (1, 1, 1)$  ،  $v_2 = (1, 2, 3)$  ،  $v_3 = (2, -1, 1)$  اشعة ما من الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، فان الشعاع  $v = (2, -2, 1)$  عبارة عن مزج خطي للأشعة  $v_1, v_2, v_3$  .

3.4.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ ، وليكن  
 مجموعة من الأشعة من  $V$  . فإت  
 مجموعة جميع المزوج الخطية  $B$  للأشعة  $v_1, \dots, v_m$ ،  
 هي فضاء شعاعياً جزئياً من الفضاء  $V$ ، وهو أصغر  
 فضاء شعاعياً جزئياً من  $V$ ، يحوي المجموعة  $A$ .

البرهان :

$$B = \{v \in V; v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, \alpha_i \in K\}$$

$$\forall u, v \in B; u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m, v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m$$

حيث  $\alpha_i, \beta_i \in K$  لأي  $i = 1, 2, \dots, m$ .

$$u - v = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_m - \beta_m) v_m \in B$$

$$\text{وكذلك لكل } \alpha \in K \text{ ولكل } u \in B \text{ فإن } \alpha u = \alpha \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha \alpha_m v_m \in B$$

إي أن  $B$  هي فضاء شعاعياً جزئياً من  $V$ .

$$\text{لكل } v \in A, v = 1 \cdot v \text{ حيث } 1 \in K \text{ إي أن } v \in B$$

ومنه  $A \subseteq B$ . ليكن  $C$  فضاءاً شعاعياً جزئياً

افتر من  $V$  بحيث  $A \subseteq C$ ، فإنه لكل  $v \in B$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m, \text{ وبإت } v_1, \dots, v_m \in C, \text{ فإنه}$$

$$v \in C, \text{ إي أن } B \subseteq C \text{ (3.2.1) حسب النتيجة}$$

وهكذا نستنتج أن  $B$  أصغر فضاء شعاعياً جزئياً

من  $V$  تحوي  $A$ .

(و.ه.م.)

نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي B بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالهجومية A ونفرض لها  $B = [v_1, \dots, v_n]$ .

نلاحظ انه اذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي  $V$  و  $v_1, \dots, v_n$  جميع المتجهات الشعاعية الجزئية من  $V$  بحيث  $A \subseteq V_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$ ، فان  $\bigcap_{i=1}^n V_i$  هو فضاء شعاعي جزئي كوي A، وهو المعروف بفضاء شعاعي جزئي كوي A.

#### 4.4.1 تعريف

ليكن  $V$  فضاء شعاعي على الحقل  $K$ . نقول ان الاسعة  $v_1, \dots, v_p$  مرتبطة خطياً اذا وجد  $p$  مقداراً سلمياً  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$  ليست كلها معدومة بحيث  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ . وتكون الاسعة  $v_1, v_2, \dots, v_p$  مستقلة خطياً، اذا لم تكن مرتبطة خطياً، اي انه لا يي مقادير سلمية  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$ ، اذا كانت  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$  فان  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$ . اي انه اذا كان  $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0$  فان  $\lambda_i = 0$  لكل  $i$ .

#### 5.4.1 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$ ، الاسعة  $e_1 = (1, 0)$ ،  $e_2 = (0, 1)$  مستقلة خطياً. لأنه لا يي مقادير سلمية  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

إذا كانت  $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = 0$  فإن  $\lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) = (0,0)$  ،  
فإن  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$  ،  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  .

(2) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الكتل  $\mathbb{R}$  ، الشععة  $v_1 = (1,3,1)$  ،  
 $v_2 = (0,1,-1)$  ،  $v_3 = (2,5,3)$  مرتبطة خطياً ، لأنه إذا كان

فإن  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  حيث  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

$$\lambda_1(1,3,1) + \lambda_2(0,1,-1) + \lambda_3(2,5,3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1, 3\lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) + (2\lambda_3, 5\lambda_3, 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_3, 3\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3) = (0,0,0)$$

نتنتج أن  $\lambda_1 = -2\lambda_3$  ،  $\lambda_2 = \lambda_3$  . لتكن  $\lambda_3 = 1$

عندئذ  $\lambda_1 = -2$  ،  $\lambda_2 = 1$  ، وهذه القيم تحقق الشرط :

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

(3)  $i, 1$  متقلة خطياً في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{C}$

على الكتل  $\mathbb{R}$  ، لأنه لأي  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  إذا كانت

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot i = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot i$$

$$\lambda_1 = 0 , \lambda_2 = 0$$

### 6.4.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الكتل  $K$  ، فإن

الشععة  $v_1, \dots, v_m$  ( $m \geq 2$ ) مرتبطة خطياً  $\Leftrightarrow$  إذا

كان من الممكن كتابة أحدهما بكل مزج خطي للبقية .

### البرهان

لتفرض ان الأشعة  $v_1, \dots, v_p$  مرتبطة خطياً ، اي أنه  
توجد  $p$  مقداراً حقيقياً  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$  ليست كلها معدومة  
بحيث  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$  ، لنفرض ان  $\lambda_p \neq 0$  عندئذ:

$$-\lambda_p v_p = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$$

$$v_p = \frac{-\lambda_1}{\lambda_p} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_{p-1}}{\lambda_p} v_{p-1} \quad \text{فإن:}$$

$$\text{نضع} \quad \tilde{\lambda}_i = \frac{-\lambda_i}{\lambda_p} \quad \text{فإن:}$$

$$v_p = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_{p-1} v_{p-1}$$

ومنه الشعاع  $v_p$  عبارة عن مزيج خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_{p-1}$  .

للبرهان على العكس ، نفرض ان الشعاع  $v_p$  عبارة عن مزيج

خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_{p-1}$  ، فإن  $v_p = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1}$  ،

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{p-1} v_{p-1} + (-1)v_p = 0 \quad \text{حيث} \quad \lambda_p = -1 \neq 0$$

ومنه نستنتج ان  $v_1, \dots, v_p$  مرتبطة خطياً .

(و.ه.و.٣)

### 7.4.1 نتائج

(1) إذا كان الشعاع  $v$  مزيجاً خطياً للأشعة  $u_1, \dots, u_n$  ،

وإذا كان  $u_i$  لأي  $i=1, \dots, n$  مزيجاً خطياً للأشعة

$w_1, \dots, w_m$  ، فإن  $v$  هو مزيج خطي للأشعة  $w_1, \dots, w_m$  .

(2) أي مجموعة هزئية من مجموعة اشعة منقلة خطياً ،

تكون منقلة خطياً .

(3) إذا كانت مجموعة هزئية من مجموعة من الأشعة مرتبطة

خطياً ، فإن المجموعة تكون مرتبطة خطياً .



البرهان:

(1) بما ان  $v$  مزيج خطي للأشعة  $u_1, \dots, u_n$  فإن

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad , \quad \alpha_i \in K \quad , \quad i=1, \dots, n$$

و  $u_i$  لأي  $i=1, \dots, n$  عبارة عن مزيج خطي للأشعة  $w_1, \dots, w_m$   
فإن:

$$u_1 = \alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m \quad , \quad \alpha_{i1} \in K \quad , \quad i=1, \dots, m$$

$$u_2 = \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m \quad , \quad \alpha_{i2} \in K \quad , \quad i=1, \dots, m$$

..... , .....  
..... , .....

$$u_n = \alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m \quad , \quad \alpha_{in} \in K \quad , \quad i=1, \dots, m$$

فإن:

$$v = \alpha_1 (\alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{m1} w_m) + \alpha_2 (\alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_{m2} w_m) + \dots + \alpha_n (\alpha_{1n} w_1 + \dots + \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} w_1 + \alpha_2 \alpha_{12} w_1 + \dots + \alpha_n \alpha_{1n} w_1) + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} w_m + \alpha_2 \alpha_{m2} w_m + \dots + \alpha_n \alpha_{mn} w_m)$$

$$v = (\alpha_1 \alpha_{11} + \alpha_2 \alpha_{12} + \dots + \alpha_n \alpha_{1n}) w_1 + \dots + (\alpha_1 \alpha_{m1} + \alpha_2 \alpha_{m2} + \dots + \alpha_n \alpha_{mn}) w_m$$

فإن:

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m$$

ومنه  $v$  عبارة عن مزيج خطي للأشعة  $w_1, \dots, w_m$

(2) لتكن  $v_1, \dots, v_n$  أُلُعة متقلّة خطياً ، نبرهن على ان  $v_1, \dots, v_m$  (  $m < n$  ) متقلّة خطياً . لأي مقادير سلمية  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  ، إذا كان

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

فإن :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

لكن  $v_1, \dots, v_n$  متقلّة خطياً ، فإن  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_m = 0$  ، ومنه نستنتج أن  $v_1, \dots, v_m$  متقلّة خطياً .

(3) لنفرض ان المجموعة  $\{v_1, \dots, v_m\}$  مجموعة جزئية من المجموعة  $\{v_1, \dots, v_m, \dots, v_n\}$  ، وان  $v_1, \dots, v_m$  مرتبطة خطياً ، فإنه توجد مقادير سلمية  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$  ، ليست جميعها معدومة بحيث  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$  اي ان :

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + 0 \cdot v_{m+1} + \dots + 0 \cdot v_n = 0$$

وكذلك ليست كل المقادير السلمية معدومة ، وبالتالي فإن  $v_1, \dots, v_m, \dots, v_n$  مرتبطة خطياً .

(و.ه.م. ٣٠)

### 5.1 الأساس والبعد

#### 1.5.1 تعريف

ليكن  $V$  مضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، نقول أن مجموعة الأُلُعة  $\{v_1, \dots, v_n\}$  هي أساس للمضاء الشعاعي  $V$  ، إذا تحققت ما يلي :

- (1) إذا كانت  $v_1, \dots, v_n$  متقلّة خطياً .
- (2) إذا كان أي شعاع من  $V$  متباً خطياً للأُلُعة  $v_1, \dots, v_n$  ، أي

ان مجموعة الاسعة  $\{v_1, \dots, v_n\}$  تولد الفضاء الشعاعي  $V$  .  
نسمي عدد اسعة الأساس بعد الفضاء الشعاعي  $V$  . إذا  
كان عدد اسعة الأساس في الفضاء  $V$  هو  $n$  ، عندئذ نقول  
ان  $V$  ذو بعد منتهي  $n$  . نوفر لبعدها الفضاء الشعاعي  
 $V$  بالرمز  $\dim V$  ونكتب  $\dim V = n$  ، وأن  $\dim\{0\} = 0$  .  
إذا لم يوجد للفضاء الشعاعي أساس منتهي ، عندئذ نقول  
ان بعد الفضاء الشعاعي  $V$  غير منتهي ونكتب  $\dim V = \infty$  .  
إذا كان الشعاع  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  ،  
نسمي المقادير  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ، مركبات الشعاع  $v$  في  
الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  .

### 2.5.1 أمثلة

(1) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، برهنا ان الشعاعين  
 $e_1 = (1, 0)$  ،  $e_2 = (0, 1)$  مستقلان خطياً ، وكذلك لكل  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$   
 $(\alpha, \beta) = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1)$  . أي ان، أي شعاع من  $\mathbb{R}^2$  عبارة  
عن مزج خطي للشعاعين  $e_1, e_2$  ، أي ان المجموعة  $\{e_1, e_2\}$  تولد  
الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  ، وبذلك فإن  $\{e_1, e_2\}$  هي أساس للفضاء  
الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  وان  $\dim \mathbb{R}^2 = 2$  . ويسمى هذا الأساس ،  
بالأساس النظامي لـ  $\mathbb{R}^2$  . وعلى غرار ذلك نلاحظ ان الأساس  
النظامي للفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^n$  على الحقل  $\mathbb{R}$  هو المجموعة  
 $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)\}$  .  
 $\dim \mathbb{R}^n = n$  وبذلك

(2) اساس الفضاء الشعاعي  $\mathcal{E}$  على الحقل  $\mathbb{R}$  هو  $\{1, i\}$  حيث  
لأنه  $1, i$  متقلبان خطياً ، وكذلك لكل  $z \in \mathcal{E}$  فإن  
 $z = a \cdot 1 + b \cdot i$  حيث  $a, b \in \mathbb{R}$ .

### 3.5.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $v_1, \dots, v_n$   
أشعة من الفضاء الشعاعي  $V$  . تكمل مجموعة الأشعة  
 $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً للفضاء الشعاعي  $V$   $\Leftrightarrow$  إذا كانت  
أي شعاع من  $V$  يكتب بصورة وحيدة لكل مزج خطي  
للأشعة  $v_1, \dots, v_n$  .

### البرهان :

لتفرض ان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  تكمل أساساً للفضاء الشعاعي  
 $V$  ، وليكن  $v \in V$  أي شعاع ، فيكون :  
 $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  ، حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  ، وإذا  
فرضنا  $v = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n v_n$  ، حيث  $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n \in K$  ، فإن :  
 $(\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n)v_n = 0$   
وبما ان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساس للفضاء الشعاعي  $V$  ، فإن  
 $v_1, \dots, v_n$  متقلبة خطياً ، أي ان  $\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1 = 0, \dots, \lambda_n - \tilde{\lambda}_n = 0$  ،  
فإن  $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1, \dots, \lambda_n = \tilde{\lambda}_n$  . أي ان أي شعاع  $v$  من الفضاء  
 $V$  يكتب بصورة وحيدة لكل مزج خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_n$  .  
للبرهان على العكس ، نفرض ان أي شعاع  $v$  من  $V$  يكتب

بصورة وهيئة لكل مزيج خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_n$  ، لتكن  
الضلع الصفري عبارة عن  $0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$  ، من ومدانية  
التجيد فأن  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$  ، أي ان الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  مستقلة  
خطياً ، ومنه  $\{v_1, \dots, v_n\}$  عبارة عن أساس للفضاء الشعاعي  
(و. هـ. ٣٠)

### 4.5.1 تعريف

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ، لنقول عن  
مجموعة الأشعة  $S = \{v_1, \dots, v_n\}$  بأنها أقصى مجموعة مستقلة  
خطياً ، إذا تحقت ما يلي :

(1) المجموعة  $S$  مستقلة خطياً .

(2) إذا كان لكل  $y \in V$  ،  $y \notin S$  ، المجموعة  $\{v_1, \dots, v_n, y\}$

مرتبطة خطياً .

### 5.5.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  . وتكن

$S = \{v_1, \dots, v_n\}$  مجموعة هزئية من اشعة  $V$  ، فإن المجموعة

$S$  هي أساس للفضاء  $V \iff$  إذا كانت المجموعة  $S$  أقصى

مجموعة مستقلة خطياً .

البرهان :

نُفرض ان المجموعة  $S$  هي اساس للفضاء  $V$  ، فأن  
 $v_1, \dots, v_n$  متقلة خطياً . وكذلك لكل  $y \in V$  و  $y \notin S$   
توجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  بحيث  $y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  ، أي أن :  
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + (-1)y = 0$  ، لكن  $-1 \neq 0$  ، فأن المجموعة  
 $\{v_1, \dots, v_n, y\}$  مرتبطة خطياً .

للبرهان على العكس ، نفرض ان  $S$  اقصى مجموعة متقلة  
خطياً . لكل  $y \in V$  ، اذا كان  $y \in S$  فأنه يوجد  $\lambda_i$  بحيث  
 $y = v_i$  ، فأن  $y = v_i = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n$  ، و اذا كان  $y \notin S$   
فأن المجموعة  $\{v_1, \dots, v_n, y\}$  مرتبطة خطياً ، فأنه توجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in K$   
ليتهن كلها معدومة بحيث  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda_{n+1} y = 0$  . اذا كان  
 $\lambda_{n+1} = 0$  فأن  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  ، لكن  $v_1, \dots, v_n$  متقلة خطياً ،  
فأن  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$  ، أي ان  $v_1, \dots, v_n, y$  متقلة خطياً ،  
وهذا تناقض ، باذن  $\lambda_{n+1} \neq 0$  فأن

$$y = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{n+1}} v_1 + \frac{-\lambda_2}{\lambda_{n+1}} v_2 + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_{n+1}} v_n$$

أي أن كل سَطاع من  $V$  هو مزيج  
خطي للزوجة  $\{v_1, \dots, v_n\} = S$  ، ومنه  $S$  عبارة عن اساس  
للفضاء الشامي  $V$  .

(و. ه. م. ٣٠)

### 6.5.1 نظرية

كل فضاء شعاعي مولد لعدد منتهي من الأشعة يحتوي على اساس منتهي .

#### البرهان :

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، لنفرض أن الفضاء  $V$  مولد لعدد منتهي من الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  ، وإذا كانت هذه الأشعة متقلة خطياً ، عندئذ  $v_1, \dots, v_n$  تكون اساساً للفضاء الشعاعي  $V$  .

إذا لم تكن هذه الأشعة متقلة خطياً ، أي إذا كانت مرتبطة خطياً ، لتكن  $v_1, \dots, v_m$  ( $m < n$ ) اقصى مجموعة جزئية متقلة خطياً من الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  ، بذلك فإن الأشعة  $v_1, \dots, v_m, v_i$  ( $i = m+1, \dots, n$ ) مرتبطة خطياً . فتوجد مقادير سلمية  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_i \in K$  ليست كلها معدومة بحيث  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m + \lambda_i v_i = 0$  ، وإذا كان  $\lambda_i = 0$  ، فإن  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  ، من كون الأشعة  $v_1, \dots, v_m$  متقلة خطياً ، فإن  $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0$  ، أي ان  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_i$  كلها معدومة ، بذلك  $v_1, \dots, v_m, v_i$  متقلة خطياً . وهذا مغاير للفرص ، أي ان  $\lambda_i \neq 0$  ( $i = m+1, \dots, n$ ) ، فإن  $v_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_m}{\lambda_i} v_m$  ، وبذلك فإن كل فرع خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  هو فرع خطي للأشعة  $v_1, \dots, v_m$  .

أيان  $v_1, \dots, v_m$  مجموعة تولد الفضاء  $V$  ، وهي متقلة خطياً ، فأن  $\{v_1, \dots, v_m\}$  هي عبارة عن أساس للفضاء  $V$  . وبذلك  $V$  تحتوي على أساس منتهي .

(و.ه.م.و.)

مبررة من برهان النظرية هذه نستخرج :

(1) إذا كان الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  مولداً بعدد منتهي من الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  ، وكانت الأشعة  $\{v_1, \dots, v_m\}$  أساساً للفضاء الشعاعي  $V$  ، فأن  $m \leq n$  .

(2) إذا كانت الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  تولد الفضاء الشعاعي  $V$  وكانت  $u_1, \dots, u_m$  متقلة خطياً فأن  $m \leq n$  .

(3) إذا كانت  $v_1, \dots, v_n$  ،  $u_1, \dots, u_m$  أساسين للفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، فأن  $m = n$  .

(4) إذا كان  $V$  بعد  $n$  ، فأن أي  $n$  أشعة متقلة خطياً تكون أساساً لـ  $V$  .

### 7.5.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، ذا بعد منته  $n$  ، وليكن  $v_1, \dots, v_m$  أشعة من  $V$  متقلة خطياً حيث  $p < n$  ، فيمكن إيجاد أشعة  $v_{m+1}, \dots, v_n$  بحيث أن الأشعة  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  تكون أساساً للفضاء  $V$  .  
[ أيان أي مجموعة من  $m$  أشعة متقلة خطياً ، يمكن تكملتها إلى أساس في فضاء شعاعي ذي بعد  $n$  ( $p < n$ ) ]



البرهان :

لتكن  $\{u_1, \dots, u_n\}$  اى اساس للفضاء الشعاعى  $V$  على الحقل  $K$ .  
 باذا كانت كل من  $u_1, \dots, u_n$  مزجاً خطياً للأشعة  $v_1, \dots, v_m$  عندئذ  
 الفضاء الشعاعى  $V$  يكون مولداً بالأشعة  $v_1, \dots, v_m$  وكذلك  $u_1, \dots, u_n$   
 متقلة خطياً فان  $n \leq m$ ، لكن من الفرض  $n < m$  وهذا تناقض،  
 اى انه توجد بين الأشعة  $u_1, \dots, u_n$  على الأقل شعاع واحد لا يكون  
 مزجاً خطياً للأشعة  $v_1, \dots, v_m$  وليكن  $u_{i_1}$ . لقرض ان  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in K$   
 حيث  $\lambda_1 u_{i_1} + \lambda_2 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ ، باذا كان  $\lambda = 0$  فان  
 $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ ، لكن  $v_1, \dots, v_m$  متقلة خطياً، فان  
 $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$ ، اى ان من  $\lambda_1 u_{i_1} + \lambda_2 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$  نستنتج  
 ان  $\lambda = 0, \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_p = 0$ ، اى ان الأشعة  $u_{i_1}, v_1, \dots, v_m$   
 متقلة خطياً. باذا كان  $\lambda \neq 0$  فيكون :

$$u_{i_1} = \frac{-\lambda_1}{\lambda} v_1 + \dots + \frac{-\lambda_p}{\lambda} v_p$$

اى ان  $u_{i_1}$  مزج خطياً للأشعة  $v_1, \dots, v_m$ ، وهذا خلاف فرضنا.  
 اى ان الأشعة  $u_{i_1}, v_1, \dots, v_m$  متقلة خطياً. وهكذا  
 حصلنا على  $p+1$  من الأشعة المتقلة خطياً. باذا كان  
 $n < p+1$ ، تنفى الطريقة يوجد شعاع واحد بين الأشعة  
 $u_1, \dots, u_n$ ، فضلاً عن  $u_{i_2}$  حيث لا يكون مزجاً خطياً للأشعة  
 $v_1, \dots, v_m$ ، ونضيف لهذا الشعاع ونحصل على  $p+2$   
 شعاع وهكذا الى ان نحصل على  $n$  من الأشعة المتقلة خطياً،  
 وبما ان بعد الفضاء  $V$  هو  $n$ ، فان المجموعة التى نحصل  
 عليها تحوي  $n$  اشعة متقلة هـ اساس. اى أننا

كاملنا الأشعة  $v_1, \dots, v_m$  الى اساس .

(و. هـ. ٣٠)

### 8.5.1 نظرية

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي  $n$  على  
الحقل  $K$  ، وليكن  $F$  فضاءً شعاعياً هزئياً من الفضاء  
 $V$  فأن :

$$\dim F \leq \dim V \quad (1)$$

(2) إذا كان  $\dim F = \dim V$  فأن  $F = V$  .

### البرهان :

(1) فضاء شعاعياً بعد منتهى لأنه فضاء شعاعياً

هزئياً من الفضاء  $V$  . لتكن  $\{v_1, \dots, v_m\}$  اساساً للفضاء

$F$  ، فأن هذه الأشعة مستقلة خطياً ، حسب النظرية (7.5.1)

يمكن تكملتها الى اساس ، اي يمكن ايجاد اشعة  $v_{m+1}, \dots, v_n$

حيث  $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$  تكون اساساً للفضاء  $V$  ،

فنتج ان  $\dim F \leq \dim V$  ، اي ان  $m \leq n$  .

(2) إذا كان  $n = m$  ، فأن هذا يعني أن الفضاءين الشعاعيين

$F, V$  مولدان بنفس الأشعة ، فأن  $F = V$  .

(و. هـ. ٣٠)

### 9.5.1 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين هزيبين من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$ ، فأن:

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

البهان:

لتكن  $\{v_1, \dots, v_p\}$  أساساً للفضاء الشعاعي  $V_1 \cap V_2$ ، أي ان  $\dim(V_1 \cap V_2) = p$ ، نعلم ان  $V_1 \cap V_2 \subset V_2$ ،  $V_1 \cap V_2 \subset V_1$ ، من النظرية (7.5.1) يمكن كتابة  $\{v_1, \dots, v_p\}$  ان كان أساساً للفضاء  $V_1$ ، وكن أساساً للفضاء  $V_2$ ، أي انه توجد الأضعة  $v_{p+1}^2, \dots, v_r^2$  من الفضاء  $V_1$  بحيث  $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}^2, \dots, v_r^2\}$  تكون أساساً للفضاء  $V_1$ ، وكذلك توجد الأضعة  $v_{p+1}^2, \dots, v_s^2$  من الفضاء  $V_2$  بحيث  $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}^2, \dots, v_s^2\}$  تكون أساساً للفضاء  $V_2$ ، فأن  $\dim V_1 = r$  و  $\dim V_2 = s$ ، لكل  $h \in V_1 + V_2$ ، فأن  $h = y + z$  حيث  $y \in V_1$ ،  $z \in V_2$ ، فأنه توجد مقادير سلمية  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_r$ ،  $\beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{p+1}, \dots, \beta_s$  في  $K$  بحيث:

$$y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \alpha_{p+1} v_{p+1}^2 + \dots + \alpha_r v_r^2$$

$$z = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p + \beta_{p+1} v_{p+1}^2 + \dots + \beta_s v_s^2$$

فأن:

$$h = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_p + \beta_p)v_p + \alpha_{p+1}v_{p+1}^2 + \dots + \alpha_r v_r^2 + \beta_{p+1}v_{p+1}^2 + \dots + \beta_s v_s^2$$

أي ان كل شعاع من  $V_1 + V_2$  هو مزيج خطي للأضعة التالية:

$$v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r, v_{p+1}, \dots, v_s$$

لديه مقادير سلبية  $c_1, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+s-p} \in K$  إذا كانت :

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_{p+1} v_{p+1} + \dots + c_r v_r + c_{r+1} v_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v_s = 0$$

فإنه :

$$x = c_{r+1} v_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v_s = -(c_1 v_1 + \dots + c_p v_p + c_{p+1} v_{p+1} + \dots + c_r v_r)$$

لكن  $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r\}$  هي أساس للفضاء الشعاعي  $V_1$  ، وكذلك  $v_{p+1}, \dots, v_s$  هي ائعة من الفضاء  $V_2$  .  
فإن  $x \in V_1 \cap V_2$  ،  $x \in V_1$  ،  $x \in V_2$  ، لكن الأئعة  $v_1, \dots, v_p$  هي أساس للفضاء  $V_1 \cap V_2$  فإن :

$$x = d_1 v_1 + \dots + d_p v_p$$

حيث  $d_1, \dots, d_p \in K$  ، من هنا فإن

$$d_1 v_1 + \dots + d_p v_p = c_{r+1} v_{p+1} + \dots + c_{r+s-p} v_s$$

أيان :

$$d_1 v_1 + \dots + d_p v_p - c_{r+1} v_{p+1} - \dots - c_{r+s-p} v_s = 0$$

لكن بجان الأئعة  $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_s$  مستقلة خطياً ، فإن  $d_1 = \dots = d_p = c_{r+1} = \dots = c_{r+s-p} = 0$  ، من هنا نستنتج

$$c_1 = \dots = c_r = 0$$

أيان الأئعة  $v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_r, v_{p+1}, \dots, v_s$  مستقلة خطياً ، أي أنها عبارة عن أساس للفضاء  $V_1 + V_2$  .

وهو  $\dim(V_1 + V_2) = r + s - p$  فإن :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

وهو

10.5.1 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين هزئيين من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$ ، بحيث  $V = V_1 \oplus V_2$  فإن:

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

البرهان:

إذا كان  $V = V_1 \oplus V_2$ ، فإن  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ، وكذلك  $V = V_1 + V_2$  أيان  $\dim(V_1 \cap V_2) = 0$  و  $\dim V = \dim(V_1 + V_2)$ ، لكن هذه النظرية (9.5.1)

$$\dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

$$\dim V = \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 \quad \text{فإن:}$$

(و. ه. ١٠.٣)

11.5.1 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين، بعددين  $m, n$  على التوالي على الحقل  $K$  فإن:

$$\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$$

البرهان:

لتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساس للفضاء  $V_1$ ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  للفضاء  $V_2$ ، نبرهن  $\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_m)\}$  هي أساس لـ  $V_1 \times V_2$ .

$$\forall v \in V_1 \times V_2, v = (\alpha, \beta) = (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m)$$

$$= \alpha_1(v_1, 0) + \dots + \alpha_n(v_n, 0) + \beta_1(0, u_1) + \dots + \beta_m(0, u_m)$$

كذلك لاية مقادير سلمية  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in K$  باذا كان:

$$\alpha_1(v_1, 0) + \dots + \alpha_n(v_n, 0) + \beta_1(0, u_1) + \dots + \beta_m(0, u_m) = (0, 0)$$

فان:

$$(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m) = (0, 0)$$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \quad \text{و} \quad \beta_1 u_1 + \dots + \beta_m u_m = 0$$

فان  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  ، لئلا الـ  $v_1, \dots, v_m$  متقلة خطياً ،

و  $\beta_1 = \dots = \beta_m = 0$  لئلا الـ  $u_1, \dots, u_m$  متقلة خطياً .

اي ان  $\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, u_1), \dots, (0, u_m)\}$  هي اساس

للعضاء العام  $V_1 \times V_2$  ، ومنه  $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

(و. ه. ٣. ١)

## تمارين

(1) بين أيّ من المجموعات التالية  $V$ ، عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل المذكور  $K$  بالنسبة للعتين المعرفتين :-

(a) لتكن  $K = V = \mathbb{R}$  وتكن عملية الجمع معرفة كالآتي:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y = 2x + 2y$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \circ x = \lambda x$$

(b) لتكن  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  حيث  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  عبارة عن مجموعة جميع التطبيقات من  $\mathbb{R}$  في  $\mathbb{R}$  وليكن  $K = \mathbb{R}$ .

لتكن عملية الجمع معرفة كالآتي :

$$\forall f, g \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

(c) لتكن  $V = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$  و  $K = \mathbb{R}$ . وتكن

عملية الجمع معرفة كالآتي :

$$\forall (a, b), (c, d) \in V, \quad (a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

والضرب بمقدار سلمي يكون معرفاً كالآتي :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b) \in V, \quad \lambda(a, b) = (\lambda a, b)$$

(2) أيّ من المجموعات الجزئية  $A$  هي فضاء شعاعي جزئي

من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$ .

(a)  $A = \{(a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$  ,  $K = \mathbb{R}$  ,  $V = \mathbb{R}^3$

$$A = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}, \quad K = \mathbb{R}, \quad V = \mathbb{R}^3 \quad (b)$$

$$A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ عبارة عن تطبيق مستمر}\}, \quad K = \mathbb{R}, \quad (c)$$
$$V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$A = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) = f(-x)\}, \quad K = \mathbb{R}, \quad (d)$$
$$V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

(3) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ ، وليكن  
 $V_1 = \{(x, 0) : x \in V\}$ ،  $V_2 = \{(0, y) : y \in V\}$  فضاءين  
شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي  $V^2$  على الحقل  
 $K$ ، برهن ان  $V^2 = V_1 \oplus V_2$ .

(b) برانا كان  $V_1 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ ،  $V_2 = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$   
فضاءان شعاعيان جزئيان من الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على  
الحقل  $\mathbb{R}$ . فهل ان  $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$ ؟ وضح ذلك.

(4) ألتب الشعاع  $v = (1, -2, 5)$  لكل مزج خطي للأربعة  
 $v_1 = (1, 1, 1)$ ،  $v_2 = (1, 2, 3)$ ،  $v_3 = (2, -1, 1)$ .

(5) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$ ، اثبت ان الأربعة  
 $v_1 = (1, 2, -1)$ ،  $v_2 = (1, 3, 0)$ ،  $v_3 = (1, 3, -1)$  متقلة خطياً.  
ثم أثبت ان الشعاع  $v = (7, 14, -1)$  عبارة عن مزج خطي  
للأربعة  $v_1$ ،  $v_2$ ،  $v_3$ .



(6) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، اثبت ان الأُسعة  $v_1 = (1, 2, 3)$  ،  $v_2 = (3, 2, 1)$  ،  $v_3 = (4, 4, 5)$  مستقلة خطياً .

(7) ماهي القيمة التي يجب إعطاؤها للعضد  $a$  ، لكي تكون الأُسعة  $v_1 = (1, 2, 3, 1)$  ،  $v_2 = (0, 3, -1, 2)$  ،  $v_3 = (1, 0, 3, -4)$  ،  $v_4 = (2, 5, a, -1)$  في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^4$  على الحقل  $\mathbb{R}$  مرتبطة خطياً .

(8) لتكن  $v_1, \dots, v_n$  أُسعة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  . برهن ان الأُسعة  $u_1, \dots, u_n$  المعرفة بالتالي :  $u_1 = v_1$  ،  $u_2 = v_1 + v_2$  ،  $u_n = v_1 + \dots + v_n$  ، ... مستقلة خطياً .

(9) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^n$  على الحقل  $\mathbb{R}$  أثبت أن الأُسعة :

$$X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$$

$$X_2 = (0, x_{22}, \dots, x_{2n})$$

$$\vdots$$
$$X_i = (0, 0, \dots, x_{ii}, \dots, x_{in})$$

$$\vdots$$
$$X_n = (0, 0, \dots, 0, x_{nn})$$

حيث  $x_{ii} \neq 0$  لكل  $i = 1, \dots, n$  ، مستقلة خطياً .

(10) اكتب كثيرة الحدود  $v = 3t^2 + 8t - 5$  كمزيج خطي لكثيرات

الحدود:  $v_1 = 2t^2 + 3t - 4$  ،  $v_2 = t^2 - 2t - 3$  .

(11) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، في اي حالة تكون

مجموعة الأشعة  $\{v_1, v_2, v_3\}$  اساساً لذلك الفضاء .

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad , \quad v_2 = (1, 1, 0) \quad , \quad v_3 = (3, -1, 1) \quad (a)$$

$$v_1 = (3, 1, 2) \quad , \quad v_2 = (2, 1, 2) \quad , \quad v_3 = (-1, 2, 5) \quad (b)$$

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad , \quad v_2 = (0, 1, 1) \quad , \quad v_3 = (1, 2, 1) \quad (c)$$

(12) اوجد اساس للفضاء الشعاعي الكبري

$$V_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$$

في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$  .

(13) اوجد بعد الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $\mathbb{R}$  في

في كل مما يلي :

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_2 , x_3 = x_2 , x_i \in \mathbb{R} \} \quad (a)$$

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3 + x_4 = 0 \} \quad (b)$$

$$V = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 , 2x_3 - x_4 = 0 \} \quad (c)$$

(14) ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  بعده 6 ، وليكن

$V_1$  ،  $V_2$  فضاءين شعاعيين خريئين بعد كل منهما 4 ،

$V_1 \neq V_2$  . اوجد الأبعاد الممكنة للفضاء  $V_1 \cap V_2$  .

(15) لتكن  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m\}$  مجموعة متقلة خطياً في الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، وليكن  $V_1$  الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ،  $V_2$  الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة  $\{w_1, \dots, w_m\}$  . برهن أن  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  .

(16) ليكن  $\mathbb{R}^4$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، ولتكن

$$A = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$$

$$B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 1)\}$$

بإذا كانت  $V_2 = [B]$  ،  $V_1 = [A]$  .

(a) ما هو الشكل الذي يكتب بها عناصر  $V_1$  وعناصر  $V_2$  .

(b) اوجد  $\dim V_1$  ،  $\dim V_2$  .

(c) أوجد أساس لـ  $V_1 \cap V_2$  .

(d) هل  $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$  ؟

(17) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^4$  على الحقل  $\mathbb{R}$  اوجد أساس

الفضاء الشعاعي المولد بالأشعة .

$$\{v_1 = (1, 0, 2, 3), v_2 = (7, 4, -2, -1), v_3 = (5, 2, 4, 7), v_4 = (3, 2, 0, 1)\}$$

(18) ليكن  $V_1$  فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي

$\mathbb{R}^4$  على الحقل  $\mathbb{R}$  مولداً بالأشعة:  $v_1 = (2, 2, 1, 0)$  ،  $v_2 = (1, 4, 2, -1)$  ،

وليكن  $V_2$  فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء  $\mathbb{R}^4$  مولداً بالأشعة:  $v_3 = (2, 1, -1, 0)$  ،  $v_4 = (2, -5, -4, 2)$  ،

جزئياً آخراً من الفضاء  $\mathbb{R}^4$  مولداً بالأشعة:  $v_5 = (2, 1, 4, 5)$  .

$$u_2 = (1, 2, 3, 4)$$

(a) أوجد أساس لـ  $V_1$  ،  $V_2$  .

(b) أوجد  $\dim(V_1 \cap V_2)$  .

(c) أوجد  $\dim(V_1 + V_2)$  .

(d) اكتب أساس  $V_1$  الك اساس لـ  $\mathbb{R}^4$  .

(19) ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن

$V_1, \dots, V_m$  فضاءات شعاعية جزئية من  $V$  ، بحيث

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m .$$

وإذا كانت  $\{u_{11}, \dots, u_{n_11}\}$  أساساً لـ  $V_1$  ،  $\{u_{12}, \dots, u_{n_12}\}$  أساساً لـ  $V_2$  ، ... ،

$\{u_{1m}, \dots, u_{n_1m}\}$  أساساً لـ  $V_m$  . برهن ان المجموعة

$$\{u_{11}, \dots, u_{n_11}, u_{12}, \dots, u_{n_12}, \dots, u_{1m}, \dots, u_{n_1m}\}$$

هي الأساس لـ  $V$  .

## الفصل الثاني التطبيقات الخطية

### 1.2 مبادئ أولية

#### 1.1.2 تعريف

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً من  $V_1$  في  $V_2$ . فنقول ان  $f$  هو تطبيق خطي من  $V_1$  في  $V_2$  اذا تحققت الشرطين التاليين :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1, f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad (1)$$

$$\forall v \in V_1, \forall \lambda \in K, f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad (2)$$

ويكون كتابة الشرطين في شرط واحد كالآتي :

$$\forall v_1, v_2 \in V_1, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$$

#### 2.1.2 أمثلة

(1) ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $K$ ،  $f$  تطبيقاً من الفضاء  $V_1$  في الفضاء  $V_2$ ، وعرفاً كالآتي  $\forall x \in V_1, f(x) = 0$ ، فأن  $f$  عبارة عن تطبيق خطي،

$$\forall x, y \in V_1, f(x+y) = 0 = 0+0 = f(x) + f(y) \quad \text{حيث}$$

$$\forall \lambda \in K, \forall x \in V_1, f(\lambda x) = 0 = \lambda \cdot 0 = \lambda f(x)$$

وهي التطبيق الخطي من هذا النوع، بالتطبيق الصفري ونرمزه بالرمز  $f_0$ .

(2) ليكن  $\mathbb{R}^2$  ،  $\mathbb{R}^3$  فضاءين شعاعيين على نفس القل  $\mathbb{R}$  ،

و  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقاً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x - y, y - z)$$

فإن  $f$  عبارة عن تطبيق خطي لأنه :

$$\forall (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3, f((x, y, z) + (x_1, y_1, z_1)) =$$

$$= f(x + x_1, y + y_1, z + z_1) = (x + x_1 - (y + y_1), y + y_1 - (z + z_1))$$

$$= (x - y + x_1 - y_1, y - z + y_1 - z_1) = (x - y, y - z) + (x_1 - y_1, y_1 - z_1)$$

$$= f(x, y, z) + f(x_1, y_1, z_1)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda$$

$$= (\lambda x - \lambda y, \lambda y - \lambda z) = (\lambda(x - y), \lambda(y - z)) = \lambda(x - y, y - z)$$

$$= \lambda f(x, y, z).$$

نسمي التطبيق الخطي  $f: V_1 \rightarrow V_2$  التيرمورفيزم إذا كان  
تقابلاً .

إذا كان  $0_2$  هو العنصر الكياري في الفضاء الشعاعي  $V_2$  ،

هو العنصر الكياري في الفضاء الشعاعي  $V_1$  ، و  $f$  تطبيقاً

خطياً للفضاء الشعاعي  $V_1$  في الفضاء  $V_2$  فإن :

$$\forall v \in V_1, v + 0_1 = 0_1 + v = v$$

$$f(v) = f(v + 0_1) = f(0_1 + v)$$

$$f(v) = f(v) + f(0_1)$$

لكن  $f$  خطي فإن :

$$f(v) = f(v) + 0_2$$

بما أن  $f(v) \in V_2$  فإن :

$$f(v) + f(0_1) = f(v) + 0_2$$

فإن :

بيان كل عنصر منتظم بالنسبة للجمع في الفضاء الشعاعي فأن:

$$f(0_1) = 0_2$$

وكذلك:

$$\forall v \in V_1, f(-v) = f(-v) + (f(v) + (-f(v)))$$

$$= (f(-v) + f(v)) + (-f(v))$$

$$= f((-v) + v) + (-f(v))$$

$$= f(0_1) + (-f(v)) = 0_2 + (-f(v)) = -f(v)$$

$$\forall v \in V_1, f(-v) = -f(v) \quad \text{فأن:}$$

### 3.1.2 نظرية

تركيب التطبيقات الخطية يكون تطبيقاً خطياً

البرهان:

ليكن  $V_1, V_2, V_3$  ثلاثة فضاءات شعاعية على نفس

الحقل  $K$ . وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  و  $g: V_2 \rightarrow V_3$  تطبيقين

خطيين. نبرهن ان  $h = g \circ f: V_1 \rightarrow V_3$  عبارة عن

تطبيق خطي من  $V_1$  في  $V_3$ .

$$\forall v_1, v_2 \in V_1, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, h(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \\ = g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)]$$

بيان ان  $f$  تطبيق خطي فأن:

$$g[f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)] = g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)]$$

وبما ان  $g$  تطبيق خطي فأن:

$$g[\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)] = \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2))$$

$$= \lambda_1 (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 (g \circ f)(v_2) = \lambda_1 h(v_1) + \lambda_2 h(v_2)$$

(و.ه.م.ع)

## 2.2 صورة ونواة التطبيق الخطي

### 1.2.2 تعريف

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين خطيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً للفضاء الخطي  $V_1$  في الفضاء الخطي  $V_2$ . نهي مجموعة العناصر  $x \in V_1$  والتي تحقق  $f(x) = 0_2$ ، نواة التطبيق الخطي  $f$ ، ونرمز لها بالرمز  $\text{Ker} f$  اي ان:

$$\text{Ker} f = \{x \in V_1 : f(x) = 0_2\} = f^{-1}(0_2)$$

ونهي مجموعة العناصر  $y \in V_2$  والتي هي صور لعناصر من  $V_1$  بصورة  $f$  ونرمز لها بالرمز  $\text{Im} f$ ، اي ان:

$$\text{Im} f = \{y \in V_2 : \exists x \in V_1, f(x) = y\}$$

### 2.2.2 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين خطيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً للفضاء  $V_1$  في الفضاء  $V_2$  فان:

(1)  $\text{Ker} f$  عبارة عن فضاء خطي هزئي من الفضاء الخطي  $V_1$ .

(2)  $\text{Im} f$  عبارة عن فضاء خطي هزئي من الفضاء  $V_2$ .

(3)  $f$  يكون عتبانياً  $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{0_1\}$



البرهان :

$$\forall x, y \in \text{Ker } f, \quad f(x) = 0_2, \quad f(y) = 0_2 \quad (1)$$

بذلك فإن:

$$f(x) - f(y) = 0_2 \Rightarrow f(x-y) = 0_2 \Rightarrow x-y \in \text{Ker } f$$

وعكسًا

$$\forall \lambda \in K, \quad \forall x \in \text{Ker } f, \quad f(x) = 0_2$$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \cdot 0_2 = 0_2 \Rightarrow \lambda x \in \text{Ker } f$$

ومن هنا نستنتج أن  $\text{Ker } f$  فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي  $V_1$  على الحقل  $K$ .

$$\forall y_1, y_2 \in \text{Im } f, \quad \exists x_1, x_2 \in V_1, \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2 \quad (2)$$

$$y_1 - y_2 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$$

$$y_1 - y_2 \in \text{Im } f, \quad \text{لكن } x_1 - x_2 \in V_1 \text{ ، فإن :}$$

وعكسًا :

$$\forall \lambda \in K, \quad \forall y \in \text{Im } f, \quad \exists x \in V_1, \quad f(x) = y$$

$$\lambda y = \lambda f(x) = f(\lambda x)$$

$$\text{لكن } \lambda x \in V_1, \quad \text{فإن : } \lambda y \in \text{Im } f, \quad \text{ومن هنا } \text{Im } f \text{ فضاء}$$

شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي  $V_2$  على الحقل  $K$ .

$$(3) \text{ لنفرض } f \text{ متباين، فإنه لكل } x \in \text{Ker } f, \quad f(x) = 0_2$$

$$\text{لكن } f(0_1) = 0_2, \quad \text{فإن } f(x) = f(0_1), \quad \text{بما أن } f \text{ متباين}$$

$$\text{فإن } x = 0_1. \quad \text{أي أن } \text{Ker } f = \{0_1\}$$

$$\text{نفرض الآن } \text{Ker } f = \{0_1\}, \quad \text{ونفرض أنه لكل } x, y \in V_1, \quad f(x) = f(y)$$

$$\text{فإن : } f(x) - f(y) = 0_2 \Rightarrow f(x-y) = 0_2 \Rightarrow x-y \in \text{Ker } f$$

لكن  $\ker f = \{0\}$ ، فمنه  $x - y = 0$ ، أي ان  $x = y$ ، وبذلك  $f$  متباين.

(و.ه.و.٣)

### 3.2.2 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  ايزومورفيماً، فأن  $f^{-1}: V_2 \rightarrow V_1$  عبارة عن ايزومورفيزم.

البرهان:

لكل  $v_1, v_2 \in V_2$  يوجد  $u_1, u_2 \in V_1$  بحيث  $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$ ، فأن  $f^{-1}(v_1) = u_1, f^{-1}(v_2) = u_2$  من هنا فأن:

$$f^{-1}(v_1 + v_2) = f^{-1}(f(u_1) + f(u_2)) = f^{-1}(f(u_1 + u_2)) = (f^{-1} \circ f)(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = f^{-1}(v_1) + f^{-1}(v_2)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V_2, f^{-1}(\lambda v) = f^{-1}(\lambda f(u)) = f^{-1}(f(\lambda u)) = (f^{-1} \circ f)(\lambda u) = \lambda u = \lambda f^{-1}(v)$$

فأن  $f^{-1}$  تطبق خصائص الفضاء  $V_2$  في الفضاء  $V_1$ .

لكل  $v_1, v_2 \in V_2$  يوجد  $u_1, u_2 \in V_1$  بحيث  $f(u_1) = v_1, f(u_2) = v_2$ ، فأنه إذا كان  $f^{-1}(v_1) = f^{-1}(v_2)$  فأن  $u_1 = u_2$ ، ومنه نستنتج  $f(u_1) = f(u_2)$  فأن  $v_1 = v_2$  ومنه  $f^{-1}$  متباين.

ونلاحظ انه لكل  $v \in V_2$  يوجد  $u \in V_1$  بحيث  $f(u) = v$ ، ومنه  $f^{-1}(v) = u$  فأن  $f^{-1}$  عامر. نستنتج ان  $f^{-1}$

(و.ه.و.٣)

ايزومورفيزم.

### 4.2.2 نظرية

الصورة العكسية لمضاد شعاعي جزئي عبارة عن مضاد

شعاعي جزئي .

البرهان :

ليكن  $V_1, V_2$  مضادين شعاعيين على نفس الحقل  $K$  ،  
 $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً . وليكن  $F$  مضاداً شعاعياً  
جزئياً من الفضاء  $V_2$  . نبرهن أن  $f^{-1}(F)$  هو مضاد شعاعي جزئي  
من الفضاء الشعاعي  $V_1$  .

$$\forall v_1, v_2 \in f^{-1}(F) \quad \exists u_1, u_2 \in F, \quad f(v_1) = u_1, \quad f(v_2) = u_2, \\ f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = u_1 - u_2 \in F \Rightarrow v_1 - v_2 \in f^{-1}(F)$$

وكذلك

$$\forall \lambda \in K, \quad \forall v_1 \in f^{-1}(F) \quad \exists u_1 \in F, \quad f(v_1) = u_1, \quad f(\lambda v_1) = \\ = \lambda f(v_1) = \lambda u_1 \in F \Rightarrow \lambda v_1 \in f^{-1}(F) .$$

(و.ه.ع. ١.٣)

### 3.2 الأساس والتطبيق الخطي

#### 1.3.2 نظرية

ليكن  $V_1$  مضاداً شعاعياً على الحقل  $K$  ، ذا  
بعد منتهي  $n$  ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً للفضاء  
الشعاعي  $V_1$  . وليكن  $V_2$  مضاداً شعاعياً على  
الحقل  $K$  ،  $u_1, \dots, u_n$  أسعة ما من الفضاء  $V_2$  ،  
فإنه يوجد تطبيقاً خطياً وحيداً  $f: V_1 \rightarrow V_2$  ، بحيث

يكون  $f(v_i) = u_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$ .

البرهان :

كل شعاع من  $V_1$  يمكن كتابته بشكل فريد خطي  
 للشعاع الأساس، أي أنه لكل  $v \in V_1$  توجد مقادير سلمية  
 $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$  حيث  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$   
 نعرف  $f: V_1 \rightarrow V_2$  كما يلي :

$$\forall v \in V_1, f(v) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n)$$

$$= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

$$\forall u, v \in V_1 \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K, \exists \beta_1, \dots, \beta_n \in K$$

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \quad \text{حيث}$$

$$f(u+v) = f[(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)] \quad \text{فإن}$$

$$= f[(\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) v_n]$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) u_n$$

$$= (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n)$$

$$= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n)$$

$$= f(u) + f(v)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V_1, f(\lambda v) = f(\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n))$$

$$= f(\lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_n v_n) = \lambda \alpha_1 u_1 + \dots + \lambda \alpha_n u_n$$

$$= \lambda(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \lambda f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \lambda f(v)$$

بذلك نستنتج ان  $f$  تطبق خطية. واضح من تعريف  $f$

ان  $f(v_i) = u_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$ .

إذا كان  $g$  أي تطبيقت خطية اخر من  $V_1$  في  $V_2$  ، بحيث  
 $g(v_i) = u_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$  فإنه :

$$\begin{aligned} \forall v \in V_1, \quad g(v) &= g(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 g(v_1) + \dots + \alpha_n g(v_n) \\ &= \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_n f(v_n) \\ &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = f(v) \end{aligned}$$

ومنه  $f = g$  و  $f$  وحيد .

(و. ه. م. ٢٠)

### 2.3.2 نتيجة

ليكن  $V_1$  فضاءً خطياً على الحقل  $K$  : بعد  $n$   
ولتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V_1$  . وليكن  $V_2$  فضاءً  
خطياً على نفس الحقل  $K$  ،  $u_1, \dots, u_n$  أسعة ما  
من الفضاء  $V_2$  ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقتاً خطياً  
بحيث  $f(v_i) = u_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$  : فإن :

(1)  $f$  يكون متينياً  $\Leftrightarrow$  إذا كانت  $u_1, \dots, u_n$   
متقلة خطياً .

(2)  $f$  يكون عامراً  $\Leftrightarrow$  إذا كانت  $u_1, \dots, u_n$  تولد  $V_2$  .

البرهان :

(1) لكل  $x \in V_1$  ، توجد مقادير سلمية  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

بحيث  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  . نرض ان الأسعة  $u_1, \dots, u_n$   
متقلة خطياً . ليكن  $x \in \ker f$  فإن  $f(x) = 0$  أي ان

$$f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

بما أن  $u_1, \dots, u_n$  متقلة خطياً، فإن  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  أي أن  $\text{Ker } f = \{0\}$  ومنه  $x = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n = 0$  حسب النظرية (2.2.2) يكون متبايناً .

لنفرض ان  $f$  متباين ، ولتكن  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  بحيث  $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0$  فإن :  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0$  ومنه  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker } f = \{0\}$  لكن ، فإن  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$  ، بما ان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  عبارة عن اساس في الفضاء  $V_1$  ، فإن  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  ، ومنه نستنتج ان الأتعة  $u_1, \dots, u_n$  متقلة خطياً .

(2) لنفرض  $V_2 = [u_1, \dots, u_n]$  ، فإنه لكل  $u \in V_2$  توجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  بحيث  $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$  ، ولكن  $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$  أي ان كل  $u \in V_2$  هو صورة لعنصر  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  من  $V_1$  ، ومنه نستنتج ان  $f$  عامر .

ليكن  $f$  عامر ، لكل  $u \in V_2$  يوجد  $v \in V_1$  بحيث  $f(v) = u$  ، فإنه توجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  بحيث  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  ، فإن :  $f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = u$  أي ان كل سُماع  $u \in V_2$  هو مزج خطي للأتعة  $u_1, \dots, u_n$  ، ومنه نستنتج ان  $V_2 = [u_1, \dots, u_n]$  .

(و.ه.و.٣)

لنتنتج مباشرة من النتيجة السابقة ان :  
التطبيق  $f$  يكون ايزومورفيزماً  $\Leftrightarrow$  صورة اساس  $V_1$  في الفضاء  
 $V_2$  وفقه التطبيق الخطي  $f$  هي اساس  $V_2$ .

### 3.3.2 نظرية

كل فضاء شعاعي بعد منتهي  $n$  على الحقل  $K$  ، يكون  
ايزومورفيزماً مع الفضاء  $K^n$  .

البرهان :

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  بعد  $n$  .  
ولكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساس في  $V$  . لتأخذ في  $K^n$   
الاساس النظامي  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ، ويعرف  $f: V \rightarrow K^n$  كما يلي:  
 $f(v_i) = e_i$  من اجل كل  $i=1, \dots, n$  . برهننا في النظرية (3.2.1)  
ان  $f$  تطبيق خطي ، وكذلك بما ان  $\{e_1, \dots, e_n\}$  اساس ،  
فانه حسب النتيجة (2.3.2)  $f$  يكون ايزومورفيزماً .  
(و.ه.و. 3.0)

### 4.3.2 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  
 $K$  ، فان  $V_1, V_2$  ايزومورفيزيان  $\Leftrightarrow$  وانا كان لهما  
نفس البعد .

البرهان :

ليكن  $V_1, V_2$  ايزومورفيزيان ، أي ان صورة اساس

من  $V_1$  هي اساس في  $V_2$ ، وفنه عدد أضعه الاساس متساوية  
فلهما نفس البعد .

ليكن للفضائين  $V_1$  ،  $V_2$  نفس البعد  $n$  ، فان  $V_1$  يكون  
ايزومورفيًا مع  $K^n$ ، وكذلك  $V_2$  يكون ايزومورفيًا مع  $K^n$ .  
بيان تركيب ايزومورفيين هو ايزومورفيزم ، فان الفضاء  
 $V_1$  ايزومورفيًا مع الفضاء  $V_2$  .

(و.ه.م.٣)

5.3.2 نظرية

ليكن  $V_1$  ،  $V_2$  فضاءين شعاعيين لبعدين منتهين  
على نفس الحقل  $K$  ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً عندئذ  
$$\dim V_1 = \dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f)$$

البرهان :

اذا كانت  $\text{Ker}f = \{0_{V_1}\}$  عندئذ  $f$  يكون متبايناً ،  $\dim(\text{Ker}f) = 0$   
والتطبيق  $f$  من  $V_1$  على  $f(V_1)$  يكون تقابلاً ، فان :

$$\dim V_1 = \dim(\text{Im}f)$$

$$\dim V_1 = \dim(\text{Ker}f) + \dim(\text{Im}f) \quad \text{اذا كان :}$$

اذا كانت  $\text{Ker}f \neq \{0_{V_1}\}$  ، نفرض ان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  هي اساس  
في  $\text{Ker}f$  ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  اساس في  $\text{Im}f$  ، كما نفرض

ان  $v_{n+1}, \dots, v_{n+m}$  هي اشعة من  $V_1$  بحيث  $f(v_{n+i}) =$

لك  $i = 1, \dots, m$  . نبرهن ان  $\{v_1, \dots, v_{n+m}\}$  هي

اساس في  $V_1$  . لتكن  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m} \in K$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{V_1} \quad \text{فان :}$$



$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m}) = f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$$

لكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساس في  $\text{ker } f$  فان :

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{ker } f$$

اذن  $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = 0_{V_2}$  ، وكذلك فان  $f(v_{n+i}) = u_i$

$$\lambda_{n+1} u_1 + \dots + \lambda_{n+m} u_m = 0_{V_2} \text{ ، اذ ان } i = 1, \dots, m$$

لكن الشعبة  $u_1, \dots, u_m$  مستقلة خطياً فان  $\lambda_{n+1} = \dots = \lambda_{n+m} = 0$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \dots + \lambda_{n+m} v_{n+m} = 0_{V_1}$$

نتيج ان  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + 0 \cdot v_{n+1} + \dots + 0 \cdot v_{n+m} = 0_{V_1}$  . اذ ان

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_{V_1} \text{ . لكن } \{v_1, \dots, v_n\} \text{ اساس}$$

في  $\text{ker } f$  ، فان  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  ، ومنه نتيج ان الشعبة

$$v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m} \text{ مستقلة خطياً .}$$

لكل  $v \in V_1$  فان  $f(v) \in \text{Im } f$  ، بان ان  $\{u_1, \dots, u_m\}$  اساس

$$\text{Im } f \text{ ، فان توجد } \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K \text{ بحيث } f(v) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$$

بان ان  $f$  خطية فان :

$$f[v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m})] = f(v) - f(\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) =$$

$$= f(v) - (\alpha_1 f(v_{n+1}) + \dots + \alpha_m f(v_{n+m})) = 0_{V_2}$$

$$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) \in \text{ker } f \text{ فان :}$$

$$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = u \in \text{ker } f \text{ لنفرض}$$

بان ان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  عبارة عن اساس في  $\text{ker } f$  ، فان توجد

$$u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \text{ حيث } \beta_1, \dots, \beta_n \in K$$

$$v - (\alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m}) = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \text{ : اذ ان}$$

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n + \alpha_1 v_{n+1} + \dots + \alpha_m v_{n+m} = v \text{ فان :}$$

نتنتج أن الاسعة  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}$  تولد الفضاء  $V_1$ . أي أن  $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+m}\}$  هي أساس في الفضاء السُباعي  $V_1$ ، ومنه نتنتج أن  $\dim \text{Im} f = m$  ،  $\dim \text{Ker} f = n$  ، بما أن  $\dim V_1 = n + m$   
فإن:  $\dim V_1 = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)$   
(و.ه.م.و.)

### 6.3.2 تعريف

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين سُباعيين على نفس الحقل  $K$  ،  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً ، نسمي بعد  $\text{Im}(f)$  رتبة التطبيق الخطي  $f$  ، ونرمز لها بالرمز  $\text{Rank}(f)$  . ونسمي بعد  $\text{Ker} f$  صفرية  $f$  ، ونرمز لها بالرمز  $\text{nul}(f)$  .

### 7.3.2 نظرية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين سُباعيين ببعدين متساويين  $n$  على نفس الحقل  $K$  ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً ، فإن الشروط التالية متكافئة :

(1)  $f$  ايزومورفيزم

(2)  $f$  عاصر

(3)  $f$  متباين

(4) يوجد تطبيق خطي  $g: V_2 \rightarrow V_1$  بحيث  $f \circ g = \text{Id}_{V_2}$

(5) يوجد تطبيق خطي  $g: V_2 \rightarrow V_1$  بحيث  $g \circ f = \text{Id}_{V_1}$

البرهان :

(5) ← (1)

بما ان  $f$  ايزومورفيزم فإنه حسب النظرية (3.2.2)  $f^{-1}$  ايزومورفيزم ، ليكن  $g = f^{-1}$  بذلك فإن :  
 $g \circ f = f^{-1} \circ f = \text{Id}_{V_1}$

(3) ← (5)

ليكن  $g \circ f = \text{Id}_{V_1}$  ، لكل  $a \in \text{Ker } f$  ، فإن  $f(a) = 0_{V_2}$  ، لكن  $a \in V_1$  فإن :

$a = \text{Id}_{V_1}(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(0_{V_2}) = 0_{V_1}$   
اي ان  $\text{Ker } f = \{0_{V_1}\}$  ، ومنه نستنتج  $f$  متباين .

(1) ← (3)

بما ان  $f$  تطبيقت قطبي متباين فإن  $\text{Ker } f = \{0_{V_1}\}$  ، فإن  $\dim(\text{Ker } f) = 0$  من هنا نستنتج :

$$\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } f) + 0 = \dim(f(V_1)) + \dim(\text{Ker } f) = \dim V_1$$

فمنه نستنتج ان  $\dim(\text{Im } f) = \dim V_1 = \dim V_2$  ، اي ان  $f$  عامر .  
بذلك فإن  $f$  ايزومورفيزم .

(4) ← (1)

بما ان  $f$  ايزومورفيزم فإنه حسب (3.2.2) ،  $f^{-1}$  ايزومورفيزم  
ليكن  $g = f^{-1}$  ، فإن :  
 $f \circ g = f \circ f^{-1} = \text{Id}_{V_2}$

(2) ← (4)

ليكن  $f \circ g = \text{Id}_{V_2}$  ولكل  $a \in V_2$  فإن :

$$a = \text{Id}_{V_2}(a) = (f \circ g)(a) = f(g(a))$$

بها ان  $g(a) \in V_1$  ، فإن كل  $a \in V_2$  هو صورة لعنصر  $g(a)$  من  $V_1$  ، بذلك  $f$  يكون عامر .

(1) ← (2)

بها ان  $f$  عامر وللضمان نفس البعد  $n$  ، فإن :

$$\dim V_1 = \dim V_2 = \dim(\text{Im} f) = \dim(\text{Im} f) + 0$$

$$\dim V_1 = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) \quad \text{لكن}$$

فإن  $\dim(\text{Ker} f) = 0$  ، اي ان :  $\text{Ker} f = \{0\}$  ، ومنه  $f$

الزوجي غير مزم .

(و. ه. م. ع.)

## 4.2 فضاء ماص للقيمة

### 1.4.2 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $V_1$  فضاءاً شعاعياً جزئياً من الفضاء  $V$  . نعرف في الفضاء  $V$  العلاقة  $R$  كما يلي :

$$\forall v_1, v_2 \in V, v_1 R v_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in V_1$$

نلاحظ أنه لكل  $v \in V$  ، بما أن  $v - v = 0 \in V_1$  فإن  $v R v$  .  
 ولكل  $v_1, v_2 \in V$  ، إذا كانت  $v_1 R v_2$  فإن  $v_1 - v_2 \in V_1$  ومن هنا  
 $v_2 - v_1 \in V_1$  ، أي أن  $v_2 R v_1$  . ولكل  $v_1, v_2, v_3 \in V$  ، إذا كانت  
 $v_1 R v_2$  و  $v_2 R v_3$  فإن  $v_1 - v_2 \in V_1$  و  $v_2 - v_3 \in V_1$  ، فإن  
 $v_1 - v_3 \in V_1$  ومنه  $v_1 R v_3$  . نستنتج مما سبق أن  $R$   
 هي علاقة تكافؤ على الفضاء  $V$  .

لكل  $v \in V$  ، إذا رمزنا لصف  $v$  بالرمز  $\bar{v}$  فإن :

$$\bar{v} = \{ u \in V ; v R u \}$$

لكل  $u, v \in V$  ، إذا كان  $\bar{u} \cap \bar{v} \neq \emptyset$  فإنه يوجد  $x \in V$   
 حيث  $x \in \bar{u} \cap \bar{v}$  ، فإن  $x \in \bar{u}$  و  $x \in \bar{v}$  ، ومنه  $x R u$  و  $x R v$  ،  
 بما أن  $R$  علاقة تكافؤ فإن  $x R u$  و  $x R v$  ومنه نستنتج  
 $u R v$  . لكل  $y \in \bar{u}$  فإنه  $u R y$  ، لدينا سابقاً  $u R v$  ، ومنه  
 نستنتج  $v R y$  ، أي أن  $y \in \bar{v}$  ، ومنه  $\bar{u} \subseteq \bar{v}$  . بنفس  
 الطريقة نبرهن أن  $\bar{v} \subseteq \bar{u}$  ، وبذلك نستنتج أن  $\bar{u} = \bar{v}$  .  
 إذن علاقة التكافؤ هذه تقسم  $V$  إلى صفوف تكافؤ منفصلة .

ونلاحظ ان :  $\bar{v} = \{u \in V ; u R v\} = \{u \in V ; u - v \in V_1\}$

$$= \{u \in V ; \exists h \in V_1 , u - v = h\}$$

$$= \{u \in V ; u = v + h\} = v + V_1$$

ننظر لمجموعة صفوف التكافؤ بالرمز  $H = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots ; v_1, v_2, \dots \in V\}$

نبرهن ان عملية الجمع في الفضاء الشعاعي  $V$  منسجمة مع

علاقة التكافؤ  $R$  المعروفة اعلاه ، اي اننا نبرهن :

لكل  $v_1, v_2, u_1, u_2 \in V$  باذا كان  $v_1 R v_2$  و  $u_1 R u_2$  ، فان

$$v_1 + u_1 R v_2 + u_2$$

باذا كان  $v_1 R v_2$  فان  $v_1 - v_2 \in V_1$

وباذا كان  $u_1 R u_2$  فان  $u_1 - u_2 \in V_1$  ، لكن  $V_1$  فضاء

شعاعي جزئي فان :  $v_1 - v_2 + u_1 - u_2 \in V_1$

اي ان  $(v_1 + u_1) - (v_2 + u_2) \in V_1$  فان  $v_1 + u_1 R v_2 + u_2$

ونبرهن ان عملية الضرب بمقدار سلمي منسجمة مع علاقة

التكافؤ  $R$  . اي اننا نبرهن لكل  $\lambda \in K$  ولكل  $v_1, v_2 \in V$

باذا كان  $v_1 R v_2$  فان  $\lambda v_1 R \lambda v_2$  .

باذا كان  $v_1 R v_2$  فان  $v_1 - v_2 \in V_1$  ، بيان  $V_1$

فضاء شعاعي جزئي من  $V$  ، فانه لكل  $\lambda \in K$  ،  $\lambda(v_1 - v_2) \in V_1$  ،

اي ان  $\lambda v_1 - \lambda v_2 \in V_1$  ومنه  $\lambda v_1 R \lambda v_2$  .

نعرف عملية الجمع في  $H$  كما يلي  $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \overline{v_1 + v_2}$  ،  $\forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H$

وعملية الضرب بمقدار سلمي  $\lambda$  كما يلي  $\lambda \bar{v}_1 = \overline{\lambda v_1}$  ،  $\forall \bar{v}_1 \in H$

بذلك عرفنا في  $H$  عملية داخلية هو الجمع ، وعملية خارجية هو

الضرب بمقدار سلمي ،  $0$  هو العنصر المحايد في  $H$  ونظير

$\bar{v}$  في  $H$  هو  $\bar{v}$  - اي ان  $H$  هي زمرة تبديلية بالنسبة لعملية الجمع المعرفة اعلاه . ولذلك نلاحظ انه لكل  $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in H$  ولكل  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  تتحقق الشروط :

$$(a) (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \bar{v}_1 = \lambda_1 \cdot \bar{v}_1 + \lambda_2 \cdot \bar{v}_1$$

$$(b) \lambda_1 (\bar{v}_1 + \bar{v}_2) = \lambda_1 \cdot \bar{v}_1 + \lambda_1 \cdot \bar{v}_2$$

$$(c) \lambda_1 (\lambda_2 \bar{v}_1) = (\lambda_1 \lambda_2) \bar{v}_1$$

$$(d) 1 \cdot \bar{v}_1 = \bar{1 \cdot v_1} = \bar{v}_1$$

فان  $H$  عبارة عن فضاء شعاعي على الحقل  $K$  ،

نسبته فضاء حاصل قسمة الفضاء  $V$  على الفضاء

الشعاعي الجزئي  $V_1$  ، ونفرز له بالرمز  $V/V_1$  .

### 2.4.2 نظرية

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $V_1$

فضاء شعاعياً جزئياً من  $V$  . وليكن  $\chi: V \rightarrow V/V_1$

تطبيقاً معرفاً كما يلي :  $\forall v \in V$  ،  $\chi(v) = \bar{v} = v + V_1$

فان  $\chi$  هو تطبيق خطي من  $V$  على  $V/V_1$  ،  $\text{Ker } \chi = V_1$

نسمي هذا التطبيق ، بالتطبيق الخطي القانوني (الطبيعي)

من الفضاء  $V$  على فضاء حاصل القسمة  $V/V_1$  .

البرهان :

نبرهن  $\chi$  تطبيق خطي .

$$\forall v_1, v_2 \in V ; \chi(v_1 + v_2) = \overline{v_1 + v_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \chi(v_1) + \chi(v_2)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V, \chi(\lambda v) = \overline{\lambda v} = \lambda \bar{v} = \lambda \chi(v) \quad \text{و}$$

ومن هنا نستنتج  $\chi$  تطبيق خطي .

نعلم ان العنصر الكياري في  $V/V_1$  هو  $\bar{0}$  اي ان  $\bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكل  $v \in \text{Ker } \chi$  فان :  $\chi(v) = \bar{0} = 0 + V_1 = V_1$

لكن حسب تعريف  $\chi$  ،  $\chi(v) = v + V_1$  اي ان :

$$v + V_1 = 0 + V_1 \quad \text{ومن هنا } v - 0 = v \in V_1 \quad \text{فان } \text{Ker } \chi \subset V_1 \dots (1)$$

ولكل  $v \in V_1$  ،  $\chi(v) = v + V_1 = V_1$  اي ان :

$$\chi(v) = 0 + V_1 = V_1$$

ومن هنا  $v \in \text{Ker } \chi$  فان  $\chi(v) = 0 + V_1 = \bar{0}$

اذن  $V_1 \subset \text{Ker } \chi \dots (2)$  . من (1) و (2) نستنتج

$$V_1 = \text{Ker } \chi$$

(و.ه.م.و)

### 3.4.2 نظرية (هوك الهومومورفيزم)

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل

$K$  ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً . فانه يوجد

تطبيق خطي وحيد  $g: V_1/\text{Ker } f \rightarrow V_2$  ، بحيث  $g \circ \chi = f$  حيث

$\chi$  هو التطبيق الخطي الطبيعي من الفضاء  $V_1$  على فضاء

ماصل القسمة  $V_1/\text{Ker } f$  .

البرهان :

برهاننا سابقاً ان  $\text{Ker } f$  هو فضاء شعاعي جزئي

من الفضاء  $V_1$  ، لذلك فان عناصر فضاء ماصل القسمة



$V_1/\ker f$  يكون بالكل  $v + \ker f$  حيث  $v \in V_1$ .  
 وكذلك عدنا  $\chi: V_1 \rightarrow V_1/\ker f$  هو مصور فنزيم خاص، اي  
 انه لكل  $\bar{v} = v + \ker f \in V_1/\ker f$  يوجد  $v \in V_1$  بحيث  $\chi(v) = \bar{v}$   
 لعرف الآن  $g: V_1/\ker f \rightarrow V_2$  كما يلي:

$$\forall \bar{v} \in V_1/\ker f ; g(\bar{v}) = f(v)$$

نرمظ ان  $g$  لعرف تطبيقا لئذ:

$$(1) \text{ لكل } \bar{v} \in V_1/\ker f, v \in V_1, \text{ بان } f \text{ تطبيقت}$$

فانه يوجد عنصر وحيد  $u \in V_2$ ، بحيث  $f(v) = u$ ، اي ان  
 لكل عنصر  $\bar{v}$  من  $V_1/\ker f$  يوجد  $f(v) = u$  من  $V_2$  بحيث  
 $g(\bar{v}) = f(v)$ .

$$(2) \text{ لئذ } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f \text{، اذا كان } \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \text{ فاذن } \chi(v_1) = \chi(v_2)$$

$$\text{اي ان } \chi(v_1) - \chi(v_2) = \bar{0}, \text{ فاذن } \chi(v_1 - v_2) = \bar{0} \text{ ومنه } v_1 - v_2 \in \ker \chi$$

$$\text{لكن حسب (2.4.2) لدينا } \ker \chi = \ker f \text{، فاذن } v_1 - v_2 \in \ker f$$

$$\text{اي ان } f(v_1 - v_2) = 0 \text{، ومنه } f(v_1) - f(v_2) = 0 \text{، فاذن } f(v_1) = f(v_2)$$

$$\text{ومنه نستنج: } g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2) \text{، فاذن } g \text{ تطبيقت.}$$

$$\text{وكذلك لكل } \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f \text{، فاذن:}$$

$$\begin{aligned} g(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) &= g(\overline{v_1 + v_2}) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \\ &= g(\bar{v}_1) + g(\bar{v}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in K, \forall \bar{v} \in V_1/\ker f, g(\lambda \bar{v}) &= g(\overline{\lambda v}) = f(\lambda v) \\ &= \lambda f(v) = \lambda g(\bar{v}) \end{aligned}$$

ومنه نستنج  $g$  خطية.

$$\forall v \in V_1, (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v)) = g(\bar{v}) = f(v)$$

ومنه  $g \circ \chi = f$

ليكن  $g_1: V_1/\ker f \rightarrow V_2$  اية تطبيق خطية اخرى

$g_1 \circ \chi = f$  فإنه لكل  $\bar{v} \in V_1/\ker f$

$$g_1(\bar{v}) = g_1(\chi(v)) = (g_1 \circ \chi)(v) = f(v) = (g \circ \chi)(v) = g(\chi(v)) = g(\bar{v})$$

ومنه نستنج  $g = g_1$ ، اية ان  $g$  وحيد.

(و.ه.م.و.ع)

4.4.2 نظرية (هول الأيزومورفيزم)

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل

$K$ ، وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً فأن:

(1) يوجد ايزومورفيزم بين  $V_1/\ker f$  و  $\text{Im } f$ .

(2) إذا كان  $f$  تطبيقاً خطياً عامراً فأن  $g$  يكون

ايزومورفيزماً بين  $V_1/\ker f$  و  $V_2$ .

البرهان:

(1) لغرف التطبيق  $g$  كما في النظرية (3.4.2) فأن:

$$g(V_1/\ker f) = g(\chi(V_1)) = (g \circ \chi)(V_1) = f(V_1) = \text{Im } f$$

ايع ان  $g: V_1/\ker f \rightarrow \text{Im } f$  عامر

لكل  $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V_1/\ker f$  إذا كان  $g(\bar{v}_1) = g(\bar{v}_2)$  فأن  $f(v_1) = f(v_2)$

ايع ان  $f(v_1) - f(v_2) = 0$  ومنه  $f(v_1 - v_2) = 0$  فأن  $v_1 - v_2 \in \ker f$

لكن  $\ker f = \ker \chi$ ، فأن  $v_1 - v_2 \in \ker \chi$  فأن  $\chi(v_1 - v_2) = 0$

ايع ان  $\chi(v_1) - \chi(v_2) = 0_{V_2/\ker f}$  فأن  $\chi(v_1) = \chi(v_2)$  ومنه  $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$

ايع ان  $g$  متباين.

(2) لما كان  $f$  عامر فأن:

$$g(v_1/\ker f) = g(\chi(v_1)) = (g \circ \chi)(v_1) = f(v_1) = v_2$$

وبهذا نرى في (1)  $g$  متباين ، نستنتج ان  $g$  ايزومورفيزم .

(و.ه.م.3)

### 5.2 فضاء التطبيقات الخطية

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $K$  ، وليكن  $L(V_1, V_2)$  مجموعة جميع التطبيقات الخطية من العضاء  $V_1$  في العضاء  $V_2$  . المجموعة  $L(V_1, V_2) \neq \emptyset$  لأنها تحتوي على الأقل على التطبيق الصفري .

لكل  $f_1, f_2 \in L(V_1, V_2)$  نعرف  $f_1 + f_2$  كما يلي :

$$\forall v \in V_1, (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$$

لنبرهن ان  $L(V_1, V_2)$  مغلقة بالنسبة لهذه العملية ، اي ان جميع تطبيقات خطيين كما هو معروف اعلام ، هو تطبيق خطي .

$$\begin{aligned} \forall \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in V_1, \forall f_1, f_2 \in L(V_1, V_2); \\ (f_1 + f_2)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= f_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) + f_2(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \\ &= \lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_1(v_2) + \lambda_1 f_2(v_1) + \lambda_2 f_2(v_2) \\ &= \lambda_1 (f_1(v_1) + f_2(v_1)) + \lambda_2 (f_1(v_2) + f_2(v_2)) \\ &= \lambda_1 (f_1 + f_2)(v_1) + \lambda_2 (f_1 + f_2)(v_2) \end{aligned}$$

ونعرف ضرب تطبيق خطي  $f \in L(V_1, V_2)$  بمقدار سلمي  $\lambda$  كما يلي :

$$\forall \lambda \in K, \forall v \in V_1, \forall f \in L(V_1, V_2), (\lambda f)(v) = \lambda f(v)$$

ونرمضان :

$$\forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in K, \forall v_1, v_2 \in V_1, \forall f \in L(V_1, V_2) :$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda (f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = \lambda (\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \\ &= \lambda \lambda_1 f(v_1) + \lambda \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 ((\lambda f)(v_1)) + \lambda_2 ((\lambda f)(v_2)) \end{aligned}$$

أي أن الضرب بمقدار سلمي كما هو معروف أعلاه هو تطبيق خطي . نلاحظ أن المجموعة  $L(V_1, V_2)$  وعملية جمع التطبيقات زمرة تبديلية لأنه :

$$(1) \text{ لكل } f, g \in L(V_1, V_2), \text{ ولكل } v \in V_1$$

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v) = g(v) + f(v) = (g+f)(v)$$

فإن  $f+g = g+f$  أي أن عملية جمع التطبيقات تبديلية في  $L(V_1, V_2)$  .

$$(2) \text{ لكل } f, g, h \in L(V_1, V_2), \text{ ولكل } v \in V_1$$

$$\begin{aligned} (f+(g+h))(v) &= f(v) + (g+h)(v) = f(v) + (g(v)+h(v)) \\ &= (f(v) + g(v)) + h(v) = (f+g)(v) + h(v) = ((f+g)+h)(v) \end{aligned}$$

فإن  $f+(g+h) = (f+g)+h$  أي أن عملية جمع التطبيقات جمعية في  $L(V_1, V_2)$  .

$$(3) \text{ حسب (2.1, 2) يوجد التطبيق الصفري } f_0 \in L(V_1, V_2)$$

$$\text{حيث لكل } v \in V_1$$

$$(f+f_0)(v) = f(v) + f_0(v) = f(v) + 0 = f(v)$$

فإن  $f + f_0 = f$  ومنه  $f_0$  هو العنصر المحايد بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في  $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ .

(4) لكل  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  ولكل  $v \in V_1$  ،  $f(v) \in V_2$

فإن  $-f(v) \in V_2$  وأن :  $f(v) + (-f(v)) = 0 = f_0(v)$

أي أن  $f + (-f) = f_0$  ومنه  $(f + (-f))(v) = f_0(v)$

أي أن  $-f$  هو العنصر النظير بالنسبة لعملية جمع التطبيقات في  $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ .

ونلاحظ كذلك: (1) لكل  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  ولكل  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$  ، ولكل  $v \in V_1$

$$\begin{aligned} ((\lambda_1 + \lambda_2)f)(v) &= (\lambda_1 + \lambda_2)f(v) = \lambda_1(f(v)) + \lambda_2(f(v)) \\ &= (\lambda_1 f)(v) + (\lambda_2 f)(v) = (\lambda_1 f + \lambda_2 f)(v) \end{aligned}$$

فإن  $(\lambda_1 + \lambda_2)f = \lambda_1 f + \lambda_2 f$  ونفس الطريقة نبرهن :

(2) لكل  $f, g \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  ولكل  $\lambda_1 \in K$

$$\lambda_1(f + g) = \lambda_1 f + \lambda_1 g$$

(3) لكل  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  ولكل  $\lambda_1, \lambda_2 \in K$

$$(\lambda_1 \lambda_2)(f) = \lambda_1(\lambda_2 f)$$

(4) لكل  $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$  ،  $1 \cdot f = f$

نتنتج مما سبق أن  $\mathcal{L}(V_1, V_2)$  وهاتين العمليتين هو فضاء شعاعي على الحقل  $K$  ، ويسمى بفضاء التطبيقات الخطية.

6.2 الفضاء الثنوي والأساس الثنوي

1.6.2 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  . كل تطبيق خطي  $f: V \rightarrow K$  يسمى شكلاً خطياً . نزيد مجموعة جميع الأشكال الخطية من  $V$  في  $K$  بالرمز  $\mathcal{L}(V, K)$  .

2.6.2 مثال

ليكن  $\mathbb{R}^n$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، وليكن  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  مقادير سلمية و  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في الفضاء  $\mathbb{R}^n$  . فإن التطبيق  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  المرفق بالأشكال التالية:

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

هو شكل خطي من  $\mathbb{R}^n$  في  $\mathbb{R}$  لأنه :

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, u = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n, \lambda_i, \beta_i \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f(v+u) &= f((\lambda_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \beta_n)v_n) = \text{فإن} \\ &= (\lambda_1 + \beta_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda_n + \beta_n)\alpha_n = (\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n) + (\beta_1\alpha_1 + \dots + \beta_n\alpha_n) \\ &= f(v) + f(u) \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda v) &= f(\lambda \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda \lambda_n v_n) = (\lambda \lambda_1)\alpha_1 + \dots + (\lambda \lambda_n)\alpha_n \\ &= \lambda(\lambda_1\alpha_1 + \dots + \lambda_n\alpha_n) = \lambda f(v) \end{aligned}$$

3.6.2 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  . كما في  
(5.2) برهنا ان  $L(V, K)$  هو فضاء شعاعياً على الحقل  
 $K$  . نسمي هذا الفضاء ، بالفضاء التوحي للفضاء  $V$  ونرمز  
له بالرمز  $V^*$  .

4.6.2 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ذي بعد  
 $n$  ، فان  $V^*$  ايزومورفية مع  $K^n$  .

البرهان :

لتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في الفضاء الشعاع  $V$  ،

لكل  $f \in L(V, K)$  نعرف  $f: V \rightarrow K$  كما يلي :

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K; v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ;$$

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$$

نلاحظ ان  $f$  عبارة عن "كل خطي" بحيث  $f(v_i) = \alpha_i$  لكل  $i$

حيث  $i = 1, \dots, n$  . لنرمز لكل الخطي بالرمز  $f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$  .

نعرف  $g: K^n \rightarrow L(V, K)$  كما يلي :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n, g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

لكل  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$  ، اذا كان :

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ فان } \alpha_i = \beta_i \text{ لكل } i = 1, \dots, n .$$

من هنا فاننا لكل  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$  فان :

$$\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n = \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n$$

إعانة :

$$f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n)$$

فإن

$$\forall v \in V, f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(v) = f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(v)$$

ومن إعانة  $g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g(\beta_1, \dots, \beta_n)$  تَبَيَّنَ

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n, g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

$$, g(\beta_1, \dots, \beta_n) = f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$$

$$\forall v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V, \lambda_i \in K, f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(v) + f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(v) =$$

$$= \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n + \lambda_1 \beta_1 + \dots + \lambda_n \beta_n = \lambda_1 (\alpha_1 + \beta_1) + \dots + \lambda_n (\alpha_n + \beta_n)$$

$$= f_{(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)}(v)$$

فإن

$$f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} + f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = f_{(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)}$$

من هنا فإن :

$$g((\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n)) = g(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) =$$

$$= f_{(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)} = f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} + f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)} = g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + g(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

وكذلك لكل  $\lambda \in K$  فإن :

$$f_{(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n)}(v) = \lambda_1 (\lambda \alpha_1) + \dots + \lambda_n (\lambda \alpha_n) = \lambda (\lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n)$$

$$= \lambda f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(v)$$

$$g(\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = g(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n) = f_{(\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n)}$$

فإن



$$= \lambda f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = \lambda g(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

فأن  $g$  هو تطبيق خطي.

لكل  $f \in V^*$  ولكل  $i=1, \dots, n$  فإن:

$$f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(v_i) = f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)}(0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_i + \dots + 0 \cdot v_n) \\ = 1 \cdot \alpha_i = \alpha_i$$

أي أن:  $f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_i)}(v_i) = \alpha_i$  حيث  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$

أي أنه لكل  $f \in V^*$  توجد مقادير سلمية  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  بحيث

$f(v_i) = \alpha_i$  ، أي أنه لكل  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$  فإن:

$$f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$$

أي أنه لكل  $f \in V^*$  توجد  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$  بحيث:

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$$

وأخيراً لكل  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_1, \dots, \beta_n) \in K^n$  إذا كان

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g(\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ فإن } f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}$$

$$f_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}(v_i) = f_{(\beta_1, \dots, \beta_n)}(v_i) \text{ ، } i=1, \dots, n$$

أي أن  $\alpha_i = \beta_i$  لكل  $i=1, \dots, n$ .

فإن  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  ومنه  $g$  متباين.

بذلك نستنتج  $V^* \cong K^n$  ايزومورفيضان.

(و.ه.و. ١.٣)

2.6.5 نتيجة

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، فإن  $V^*$  لها نفس البعد ، وصورة اساس  $V$  هي اساس  $V^*$  ، لأنه إذا كان  $\dim V = n$  فإن  $K^n \simeq V^*$  ،  $K^n \simeq V$  ، فإن  $V \simeq V^*$  . اي ان  $V^*$  لها نفس البعد وصورة اساس  $V$  هي اساس  $V^*$  .

2.6.6 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، ولتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $V$  ، وليكن  $f_1, \dots, f_n \in V^*$  بحيث أن:

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases} \text{ لكل } i=1, \dots, n$$

فإن  $\{f_1, \dots, f_n\}$  اساس للفضاء  $V^*$

البرهان :

لكل  $f \in V^*$  فإنه  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  ولكل  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

فإن :  $f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_n \alpha_n$

و  $f(v_i) = \alpha_i$  لكل  $i=1, \dots, n$

فإنه لكل  $i=1, \dots, n$

$(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(v_i) = \alpha_1 f_1(v_i) + \dots + \alpha_n f_n(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = f(v_i)$

ومنه فإن  $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$  اي ان  $V^* = [f_1, \dots, f_n]$

لكل  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  إذا كان  $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = f_0 = 0_{V^*}$

فأنه لكل  $(\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n)(v_i) = f_0(v_i) = 0$  ،  $i=1, \dots, n$  لكن  
 لكن  $f_j(v_i) = 0$  عندما  $i \neq j$  و  $f_j(v_i) = 1$  عندما  $i=j$   
 فإن  $\alpha_i f_i(v_i) = \alpha_i \cdot 1 = \alpha_i = 0$  لكل  $i=1, \dots, n$  أي ان  
 $f_1, \dots, f_n$  مستقلة خطياً ، وبذلك فإن المجموعة  $\{f_1, \dots, f_n\}$   
 هي أساس للفضاء  $V^*$  .

(و. هـ . ٣٠)

### ٢ . ٦ . ٧ تعريف

الاساس  $\{f_1, \dots, f_n\}$  للفضاء الثنوي  $V^*$  في النظرية  
 (٦ . ٦ . ٢) نسميه الاساس الثنوي للأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  .

### ٢ . ٦ . ٨ مثال

لنأخذ الفضاء العام  $\mathbb{R}^2$  على النقل  $\mathbb{R}$  ، والمجموعة  
 $\{v_1 = (2, 1), v_2 = (0, 3)\}$  اساساً للفضاء العام  $\mathbb{R}^2$  .  
 نبحث عن خطين  $f_1, f_2$  على  $\mathbb{R}^2$  بحيث  $f_1(v_1) = 1$  ،  
 $f_1(v_2) = 0$  ،  $f_2(v_1) = 0$  ،  $f_2(v_2) = 1$  . نعرف  $f_1, f_2$  كما يلي :  
 $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  ;  $f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$  ،  $f_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$   
 من هنا فإن :  $f_1(v_2) = f_1(0, 3) = 0 + 3b = 0$  ،  $f_1(v_1) = f_1(2, 1) = 2a + b = 1$  ،  
 ومنه نستنتج أن  $a = 1/2$  ،  $b = 0$  .  
 ومن  $f_2(v_2) = f_2(0, 3) = 0 + 3d = 1$  ،  $f_2(v_1) = f_2(2, 1) = 2c + d = 0$   
 نستنتج أن  $c = -1/6$  ،  $d = 1/3$  . فإن الاساس الثنوي هي  
 $\{f_1, f_2\}$  حيث  $f_1, f_2$  هما  $f_1, f_2$  خطوط عرضية من  $\mathbb{R}^2$  من  $\mathbb{R}$   
 كما يلي :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ،  $f_1(x, y) = ax + by = 1/2 x$  ،  $f_2(x, y) = cx + dy = -1/6 x + 1/3 y$

7.2 أشكال متعددة الخطية

1.7.2 تعريف

ليكن  $V, V_1, \dots, V_n$  فضاءات شعاعية على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow V$  تطبيقاً يحقق ما يلي:

$\forall (v_1, \dots, v_n), (v'_1, \dots, v'_n) \in V_1 \times \dots \times V_n, \forall \lambda \in K, \forall i=1, \dots, n$

(1)  $f(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n)$

(2)  $f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$

نقول عندها ان  $f$  عبارة عن تطبيق متعدد الخطية من الدرجة  $n$ .

وإذا كان  $V_1 = \dots = V_n = V$  نسمي  $f$  عندها تطبيق متعدد الخطية من الدرجة  $n$  على الفضاء  $V$ .

2.7.2 تعريف

ليكن  $V_1, \dots, V_n$  فضاءات شعاعية على الحقل  $K$ . التطبيق  $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow K$  الذي يحقق الشرطين (1)، (2) من (1.7.2) يسمى بكل متعدد الخطية من الدرجة  $n$ .

ملاحظة

إذا كان  $n=2$  في (1.7.2)، (2.7.2) عندها نسمي  $f: V_1 \times V_2 \rightarrow V$  بتطبيق مزدوج الخطية،  $f: V_1 \times V_2 \rightarrow K$  بشكل ثنائي الخطية، وإذا كان  $n=3$  عندها نسمي  $f: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow V$  بتطبيق ثلاثي الخطية، و  $f: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow K$  بشكل ثلاثي الخطية.

3.7.2 تعريف

ليكن  $f$  كلاً فتعدد الخطية من الدرجة  $n$  ، نقول أن  $f$  متناوب إذا كان  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$  كلما تساوت اثنين من الأُسعة  $v_1, \dots, v_n$  .

4.7.2 نظرية

ليكن  $f$  كلاً فتعدد الخطية، ومتناوباً، من الدرجة  $n$  على الفضاء الحُاصي  $V$  على الحقل  $K$  ، فأن قيمة  $f(v_1, \dots, v_n)$  تضرب بالعدد  $-1$  كلما يجري تبديل بين اثنين من الأُسعة  $v_1, \dots, v_n$  .

البرهان :

بما ان  $f$  متناوب فأنه لك  $v_i, v_j, i \neq j$

$$f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) = 0$$

لكن  $f$  فتعدد الخطية من الدرجة  $n$  فأن :

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) &= f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, \\ &\dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

بما أن  $f$  متناوب فأن :

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0, \quad f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$$

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) = 0 \quad \text{فأن :}$$

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \quad \text{ومنه نتيج (و. ه. ٣.٠)}$$

### 5.7.2 نظرية

ليكن  $f$  شكلًا متعدد الخطية من الدرجة  $n$  ومتناهيًا على الفضاء  $V$ . إذا كانت الأربعة  $v_1, \dots, v_n \in V$  مرتبطة خطيًا، فإن  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$

البرهان:

بيان  $v_1, \dots, v_n$  مرتبطة خطيًا، فإنه حسب النظرية (6.4.1) يمكن كتابة احد الأربعة بكل مزيج خطي للبقية. لنفرض ان  $v_1$  هو مزيج خطي لبقية الأربعة، فإنه توجد مقادير

$$v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \quad ; \quad \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \text{ بحيث}$$

فإن:

$$f(v_1, \dots, v_n) = f(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n)$$

بيان  $f$  شكل متعدد الخطية فإن:

$$f(\lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n v_n, v_2, \dots, v_n) = \lambda_2 f(v_2, v_2, \dots, v_n) + \lambda_3 f(v_3, v_2, v_3, \dots, v_n) + \dots + \lambda_n f(v_n, v_2, v_3, \dots, v_n)$$

بيان  $f$  متناهي فإن:

$$f(v_2, v_2, \dots, v_n) = f(v_3, v_2, v_3, \dots, v_n) = \dots = f(v_n, v_2, \dots, v_n) = 0$$

إعانة:

$$f(v_1, \dots, v_n) = \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = 0$$

ومنه نستنتج ان  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$

(و.ه.م.)

6.7.2 نظرية

ليكن  $f$  كلاً متعدد الخطية من الدرجة  $n$  ومتنازلاً على الفضاء  $V$  ، ولتكن  $v_1, \dots, v_n$  أسطوانة من  $V$ . فأن قيمة  $f(v_1, \dots, v_n)$  لا تتغير عندما نضيف إلى أي أسطوانة  $v_i$  مزجاً خطياً للأسطوانة الباقية  $v_j$  حيث  $i \neq j$ .

البرهان :

ليكن  $y$  مزجاً خطياً للأسطوانة  $v_j$  حيث  $i \neq j$ . فأنه توجد مقادير سلمية  $\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$  بحيث :

$$y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \dots + \lambda_n v_n$$

و  $f(v_1, \dots, v_i + y, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, y, \dots, v_n)$  وبالتالي  $f$  متناوب فأن :

$$f(v_1, \dots, y, \dots, v_n) = 0$$

أي أن :

$$f(v_1, \dots, v_i + y, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

(و.ه.و. ١٣)

## تبارين -

(1) بين أياً من التطبيقات التالية عبارة عن تطبيق خطي :-

(a)  $f: V \rightarrow V$  معرفاً كالاتي ،  $\forall v \in V, f(v) = -v$

(b)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  معرفاً كالاتي ،  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفاً كالاتي ،  $f(x) = x^3$

(d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  معرفاً كالاتي ،  $f(x) = 2x + 3$

(2) ليكن  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  تطبيقاً معرفاً كالاتي :  $f(z) = \bar{z}$ .

اثبت ان  $f$  عبارة عن تطبيق خطي عندما  $\mathbb{C}$  يكون متضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، لكنه لا يكون تطبيقاً خطياً عندما  $\mathbb{C}$  يكون متضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{C}$ .

(3) اوجد  $\text{Im} f$  و  $\text{Ker} f$  ، اذا كان :

(a)  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  معرفاً كالاتي :  $f(z_1, z_2) = (z_1 + z_2, 2z_1 + 2z_2)$

(b)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفاً كالاتي :  $f(x, y) = x - y$

(4) ليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقاً خطياً معرفاً كالاتي : لكل

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ،  $f(x, y) = (x + y, x - y)$  . اثبت ان  $f$  انيزومورفيزم.

(5) ليكن  $V_1, V_2$  متضاءلين شعاعيين جزئيين من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  ، وليكن  $V = V_1 \oplus V_2$  ، اثبت



أن  $V/V_1 \simeq V_2$  .

(6) ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين هزئيين من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$ . حيث  $V = V_1 \oplus V_2$  وليكن التطبيق

$$f: V_1 \oplus V_2 \rightarrow V_1$$

$$\forall x_1 \in V_1, \forall x_2 \in V_2, f(x_1 + x_2) = x_1$$

(9) برهن ان  $f$  تطبيق خطي .

(6) اوجد  $\text{Im} f$  ,  $\text{Ker} f$  .

(7) ليكن  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  حيث  $\mathbb{R}^3$  فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{R}$  عرفاً كما يلي :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x, zx + z, y + z)$$

هل ان  $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)$  ؟  
برهن جوابك .

(8) ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  وليكن

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}, g: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\forall v \in V, h(v) = (f(v), g(v))$$

هل ان  $h$  تطبيق خطي ؟ برهن جوابك .

(9) ليكن  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تطبيقاً خطياً معرفاً كما يلي :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_1 - x_3)$$

- (a) اكتب  $f(e_1)$  ،  $f(e_2)$  ،  $f(e_3)$  حيث  $\{e_1, e_2, e_3\}$  عبارة عن الأساس النظامي في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$ .
- (b) اثبت ان  $f(e_3) < f(e_2) < f(e_1)$  أسرة متقلة خطياً،  
مستنتجاً ان  $f$  تقابلي .
- (c) اوجد صورة الشعاع  $x$  بواسطة التطبيق  $f^2 = f \circ f$ .

(10) ليكن  $\mathbb{C}$  ،  $\mathbb{R}^2$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $\mathbb{R}$

وليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = x + iy$$

- (a) برهن ان  $f$  تطبيق خطي .
- (b) اوجد  $\text{Im} f$  ،  $\text{Ker} f$  هل ان  $f$  ايزومورفيزم ؟
- (c) باذا كان  $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  اساساً في  $\mathbb{R}^2$  فأوجد اساساً في  $\mathbb{C}$  .
- (d) برهن ان :  $\dim \mathbb{R}^2 = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)$

(11) ليكن  $\mathbb{R}^3$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$

- (a) بين ان الأسرة  $x_1 = (1, 7, 1)$  ،  $x_2 = (1, 7, 4)$  متقلة خطياً في  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) اوجد شعاعاً ثالثاً بحيث يكون  $\{x_1, x_2, x_3\}$  اساساً لـ  $\mathbb{R}^3$  .
- (c) لنفرض ان  $b_1 = (1, 2, 3)$  ،  $b_2 = (3, 4, 6)$  ،  $b_3 = (3, 1, 1)$  اساساً في  $\mathbb{R}^3$   
ونفرض وجود التطبيق الخطي  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  الذي من أجله يكون

$h(0,1,2)$  اوجد قيمة  $h(b_3) = -3$  ،  $h(b_2) = 5$  ،  $h(b_1) = -2$

(12) ليكن  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , h(x,y,z) = (0, x+y, x+y+z)$$

(a) اوجد  $\text{Ker } h$  .

(b) هل  $h$  متباين ؟ بين لماذا  $\text{Ker } h$  فضاء شعاعين هيزيين من  $\mathbb{R}^3$  ؟

(c) اوجد  $\dim(\text{Ker } h)$  .

(13) ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين شعاعيين هيزيين من الفضاء

الشعاعي  $V$  على الكتل  $K$  وزي ابعاد منتهية ، وليكن

$f: V_1 \times V_2 \rightarrow V$  معرفاً كالآتي :

$$\forall (x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 , f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

(a) تحقق من كون  $f$  خطياً .

(b) اعب  $\text{Ker } f$  واستج ان  $\text{Ker } f$  انيزومورفيزية مع  $V_1 \cap V_2$  .

(c) اعب  $\text{Im } f$  وبرهن ان :

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

(14) ليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً . واذا كانت الاسعة

$f(v_1), \dots, f(v_n)$  مستقلة خطياً في  $V_2$  فبرهن ان  $v_1, \dots, v_n$

مستقلة خطياً في  $V_1$  . واذا كانت الاسعة  $v_1, \dots, v_n$  مرتبطة

خطياً في  $V_1$  فبرهن ان  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  مرتبطة خطياً في  $V_2$  .

(15) ليكن  $V_1, V_2, \dots, V_n$  فضاءات شعاعية هزئية من  
الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل  $K$  بحيث

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

برهن ان :

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2 + \dots + \dim V_n$$

(16) ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  وليكن  $\{a_1, a_2, a_3\}$   
اساس للفضاء  $V$  ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$   
من نفسه .

(a) برهن ان  $f$  يكون معرف تماماً اذا علمت القيم  $f(a_1)$  ،  
 $f(a_2)$  ،  $f(a_3)$  .

(b) لتفرض ان  $f(a_1) = a_2 + a_3$  ،  $f(a_2) = a_1 + a_3$  ،  $f(a_3) = a_1 + a_2$  ،  
ارصد  $f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3)$  .

(c) برهن ان  $f$  حثاين وعابر .

(d) ارصد  $f^{-1}$  .

(e) ارصد  $\text{Ker } f^{-1}$  .

(17) ليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ،  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقين خطيين معرفين

كالآتي :  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  ،  $f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$  ،

$$g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 0)$$

امب  $2f$  ،  $f \circ g + f^3 + 3g$  حيث  $f^3 = f \circ f \circ f$  . ابي من

التطبيقين  $f$  ،  $g$  عبارة عن ايزومورفيزم للفضاء  $\mathbb{R}^2$  على  $\mathbb{R}^2$  ؟

(18) ليكن  $\mathbb{R}^n$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، وليكن :

$y = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n$  ،  $x = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$   
حيث  $\{v_1, \dots, v_n\}$  عبارة عن أساس للفضاء  $\mathbb{R}^n$  وليكن  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   
تطبيقاً معرفاً كالآتي :  $f(x, y) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$   
ابته ان  $f$  هو شكل مزدوج الخطية .

(19) ليكن  $g, h$  شكلين خطيين من الفضاء الشعاعي  $V$  على الحقل

$K$  ، وليكن  $f: V \times V \rightarrow K$  معرفاً كالآتي :  $f(v_1, v_2) = g(v_1)h(v_2)$   
برهن ان  $f$  شكل مزدوج الخطية . هل ان  $f$  متناوب ؟ .  
(20) ليكن  $g, h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  معرفين كالآتي .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = x - y \quad , \quad h(x, y) = 3x - y$$

(a) برهن ان  $g, h$  خطيان .

(b) برهن ان  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  المعرف بالمثل التالي :

$$f((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = g(x_1, y_1)h(x_2, y_2)$$

(21) ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $V_1$  فضاءً

شعاعياً جزئياً من  $V$  ، لكل  $a \in V$  لغرف  $a + V_1 = \{a + x : x \in V_1\}$

ونسبها مجموعة متآلفة للفضاء الشعاعي الجزئي  $V_1$  المحدود من قبل العنصر  $a$ .

نفرز لمجموعة جميع المتآلفات بالنسبة لـ  $V_1$  بالرمز  $V/V_1$  ، ونعرف

عملية جمع مجموعتين متآلفتين والضرب بمقدار سلس كما يلي :

$$\forall \lambda \in K, \lambda(a + V_1) = \lambda a + V_1 \quad , \quad \forall a, b \in V; (a + V_1) + (b + V_1) = (a + b) + V_1$$

(a) برهن ان  $V/V_1$  هو فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  بالنسبة لهاتين العمليتين.

(b) برهن ان  $a + V_1 = b + V_1 \iff a - b \in V_1$  لاحظ  $V/V_1 = V/V_1$  .

(22) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  ، لتكن  $V_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$

فضاءً شعاعياً جزئياً من  $\mathbb{R}^2$  ، اوجد  $\mathbb{R}^2/V_1$  .

## الفصل الثالث المصفوفات والمحددات

### 1.3 خواص أولية

#### 1.1.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً ، وليكن  $m$  ،  $n$  عددين طبيعيين ، ولتأخذ جميع المقادير السلمية  $a_{ij}$  من الحقل  $K$  حيث  $i = 1, \dots, m$  ،  $j = 1, \dots, n$  ، ولنشكل الجدول التالي :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

نسمي هذا الجدول مصفوفة . نسمي مجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الأول طراً ، ومجموعة العناصر التي لها نفس الدليل الثاني عموداً ، ونقول عندئذ ان المصفوفة هي ذات  $m$  طر و  $n$  عمود .

نلاحظ ان  $a_{ij}$  هو عنصر من الحقل  $K$  وبذلك فأننا نعتبر أعمدة المصفوفة اعمدة من الفضاء  $K^m$  ، وأطر المصفوفة اعمدة من الفضاء  $K^n$  . لنلاحظ ان العنصر  $a_{ij}$  هو عنصر من المصفوفة يقع في الطر  $i$  والعمود  $j$  . نوفر عادة للمصفوفات بالأحرف  $A$  ،  $B$  ، ... الخ . ونوفر لمصفوفة كهذه عادة بالرمز  $A = (a_{ij})$  .

نسمي المصفوفة التي عدد أقطارها  $m$  وعدد أعمدتها  $n$  بمصفوفة من الدرجة  $m \times n$ . ونفرز لمجموعة المصفوفات ذي  $m$  قطراً و  $n$  عموداً ذي العناصر من الحقل  $K$  بالرمز  $M_{m,n}(K)$ .  
 نقول عن المصفوفتين  $A = (a_{ij})$  ،  $B = (b_{ij})$  من المجموعة  $M_{m,n}(K)$  انهما متساويتان ، اذا كان عناصرهما المناظرة متساوية ، اي انه  

$$a_{ij} = b_{ij} \text{ لكل } i = 1, \dots, m \text{ ، } j = 1, \dots, n$$
  
 نلاحظ هنا ان المصفوفتين المتساويتين يجب ان تكونا من نفس الدرجة.

### 2.1.3 تعريف

نقول عن المصفوفة  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$  بأنها مصفوفة صفرية اذا كان  $a_{ij} = 0$  لكل  $i = 1, \dots, m$  ،  $j = 1, \dots, n$ .  
 نقول عن المصفوفة  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$  بأنها مصفوفة مربعة اذا كان  $n = m$  ، عنئذ يسمي  $n$  بدرجة المصفوفة  $A$ .  
 وتسمى العناصر  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  بالقطر الرئيسي للمصفوفة  $A$ .  
 نسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ والتي تكون}$$

عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي اصغاراً ، بمصفوفة مثلثة علوية .

ونسمي المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ والتي تكون عناصرها}$$

الواقعة فوق القطر الرئيسي اصغاراً ، بمصفوفة مثلثة سفلية .

ونسمي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفاراً عدا القطر الرئيسي، ومصفوفة قطرية .

ونسمي المصفوفة  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$  مصفوفة سلمية،

وعندما  $\lambda = 1$  نقول ان  $A$  هي مصفوفة الوحدة ، ونرمز لها بالرمز  $I_n$  .

نقول عن المصفوفة  $A = (a_{ij})$  انها مصفوفة متماثلة اذا كان  $a_{ij} = a_{ji}$  لكل  $i, j$  .

### 2.3 المصفوفات والتطبيقات الخطية

#### 1.2.3 تعريف

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين خطيين على نفس الحقل  $K$  بعددين  $m, n$  على التوالي . وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساس  $V_1$  في  $V_1$  ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  أساس  $V_2$  في  $V_2$  . وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً خطياً ، فان  $f(v_1), \dots, f(v_n) \in V_2$  اي ان :

$$f(v_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m$$

$$f(v_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m$$

.....

$$f(v_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m$$

حيث  $a_{ij} \in K$



فإن المصفوفة

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

تمثل المصفوفة

المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالنسبة للأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  في  $V_1$  والأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$  في  $V_2$ . ونقول بأختصار المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  إذا كان الأساس  $V_1$  ،  $V_2$  معلومين. ويقال عن  $f$  انه التطبيق الخطي المرافقة للمصفوفة  $A$ .

نلاحظ ان العنود  $n$  في هذه المصفوفة هو مركبات الحُجج  $v_1$  وفت التطبيق الخطي  $f$  في الاساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$  . اي ان عدد الأعمدة في المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هو عدد الحُجج الاساس  $v_1$  الذي هو  $n$  ، بينما عدد الاسطر في المصفوفة  $A$  يحددها عدد الحُجج الاساس  $v_2$  والذي هو  $m$ . ندرس

أحياناً للمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالرمز  $M(f)$ .

من التعريف فإنه إذا كان  $V_1$  فضاءً حُججياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$  ،  $V_2$  فضاءً حُججياً ذا بعد  $m$  على الحقل  $K$  ،

فإنه لكل  $f \in L(V_1, V_2)$  توجد مصفوفة مرافقة  $A \in M_{m,n}(K)$

لهذا التطبيق الخطي، وبذلك فإنه  $\mathcal{G}: L(V_1, V_2) \rightarrow M_{m,n}(K)$

والمعرف كما يلي :

$$\forall f \in L(V_1, V_2) , \mathcal{G}(f) = M(f) = A$$

حيث  $A \in M_{m,n}(K)$  ، هو تطبيق لأنه :

لكل  $f, g \in L(V_1, V_2)$  لنفرض ان  $A = (a_{ij})$  مصفوفة مرافقة

للتطبيق الخطي  $f$  ،  $B = (b_{ij})$  مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي

g ، فأذا كان f=g فإن  $f(v_j) = g(v_j)$  لك  $j=1, \dots, n$  فإن:

$$a_{1j} u_1 + \dots + a_{mj} u_m = b_{1j} u_1 + \dots + b_{mj} u_m$$

على فرض ان  $\{u_1, \dots, u_m\}$  أساس في  $V_2$  فإن:

$$(a_{ij} - b_{ij}) u_1 + \dots + (a_{mj} - b_{mj}) u_m = 0$$

فإن  $a_{ij} - b_{ij} = 0$  لك  $i=1, \dots, m$  ،  $j=1, \dots, n$  ومنه

نتيج ان  $a_{ij} = b_{ij}$  لك  $i=1, \dots, m$  ،  $j=1, \dots, n$  ، فإن

$$A = B \text{ وبذلك } \mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$$

وبالعكس لكن  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  مصفوفة من  $M_{m,n}(K)$

ولنأخذ  $K^n$  وأساسه النظامي  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ، وأساس  $K^m$  النظامي  $\{l_1, \dots, l_m\}$  ، ولنأخذ الأضعة  $y_1, \dots, y_n \in K^m$  فإنه يوجد  $b_{ij} \in K$  بحيث:

$$y_1 = b_{11} l_1 + b_{21} l_2 + \dots + b_{m1} l_m$$

$$y_2 = b_{12} l_1 + b_{22} l_2 + \dots + b_{m2} l_m$$

$$\dots$$

$$y_n = b_{1n} l_1 + b_{2n} l_2 + \dots + b_{mn} l_m$$

فإنه مع (1.3.2) يوجد تطبيع خطي  $f: K^n \rightarrow K^m$  وحيث

$$f(e_i) = y_i \text{ لك } i=1, \dots, n$$

$$f(e_1) = b_{11} l_1 + b_{21} l_2 + \dots + b_{m1} l_m$$

$$f(e_2) = b_{12} l_1 + b_{22} l_2 + \dots + b_{m2} l_m$$

$$\dots$$

$$f(e_n) = b_{1n} l_1 + b_{2n} l_2 + \dots + b_{mn} l_m$$

وهي ان  $\{e_1, \dots, e_n\}$  اساس في  $K^n$  و  $\{l_1, \dots, l_m\}$  اساس في  $K^m$  ، فان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هي :

$$B \in M_{m,n}(K) \text{ حيث } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

فانه لكل مصفوفة ذي  $m$  سطرا و  $n$  عمود يوجد تطبيق خطي وهي لفضاء شعاعي ذو بعد  $n$  في فضاء شعاعي ذو بعد  $m$  ، وبهذا فانه يوجد تطبيق  $h$  ،  
 $h : M_{m,n}(K) \rightarrow L(K^n, K^m)$  بحيث :

$$\forall A \in M_{m,n}(K) \exists f \in L(K^n, K^m) , h(A) = f$$

2.2.3 مثال

ليكن  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  فضاءين شعاعيين على نفس الحقل  $\mathbb{R}$  ،  
وليكن  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تطبيقا معرفا كالآتي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 , f(x, y) = (x - y, 2x + y, x + 3y)$$

واضح ان  $f$  تطبيق خطي من  $\mathbb{R}^2$  في  $\mathbb{R}^3$  .

لتكن  $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  اساس نظامي في  $\mathbb{R}^2$  ، ولتكن  $\{l_1 = (1, 0, 0), l_2 = (0, 1, 0), l_3 = (0, 0, 1)\}$  اساس نظامي في  $\mathbb{R}^3$  ،  
فان :-

$$f(e_1) = f(1, 0) = (1, 2, 1) = a_{11}l_1 + a_{21}l_2 + a_{31}l_3 = a_{11}(1, 0, 0) + a_{21}(0, 1, 0) + a_{31}(0, 0, 1)$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = (-1, 1, 3) = a_{12}l_1 + a_{22}l_2 + a_{32}l_3 = a_{12}(1, 0, 0) + a_{22}(0, 1, 0) + a_{32}(0, 0, 1)$$

$$\text{فان } a_{32} = 3 , a_{22} = 1 , a_{12} = -1 , a_{31} = 1 , a_{21} = 2 , a_{11} = 1$$

نذلك فإن المصفوفة  $A$  المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

وهي ذات عمودين (عدد الأس  $\mathbb{R}^2$ ) وثلاثة أسطر

(عدد الأس  $\mathbb{R}^3$ ) ، أي أن  $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ .

وبالعكس لنبدأ الآن بأي مصفوفة  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$  :

ولنأخذ الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  وأساسه النظامي  $\{e_1, e_2\}$  والفضاء

الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  وأساسه النظامي  $\{l_1, l_2, l_3\}$  (كما هو على الحقل  $\mathbb{R}$ )

ولتكن  $y_1, y_2, y_3$  أسعة ما من  $\mathbb{R}^2$  فإنه حسب (1.3.2)

يوجد تطبيق خطي وحيد  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  بحيث  $f(l_i) = y_i$  ،  $i=1,2,3$  ،

أي أن :

$$f(l_1) = y_1 = a_1 e_1 + a_2 e_2 = (a_1, a_2)$$

$$f(l_2) = y_2 = b_1 e_1 + b_2 e_2 = (b_1, b_2)$$

$$f(l_3) = y_3 = c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1, c_2)$$

حيث  $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$  . فإنه لكل  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ،

$$f(x, y, z) = f(xl_1 + yl_2 + zl_3) = xf(l_1) + yf(l_2) + zf(l_3) =$$

$$= (a_1 x, a_2 x) + (b_1 y, b_2 y) + (c_1 z, c_2 z) = (a_1 x + b_1 y + c_1 z, a_2 x + b_2 y + c_2 z)$$

وهذه الصيغة العامة للتطبيق الخطي من  $\mathbb{R}^3$  في  $\mathbb{R}^2$  .

$$f(1, 0, 0) = (a_1, a_2) = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 = 2(1, 0) + 0(0, 1) = (2, 0) \quad \text{فإن :}$$

$$f(0, 1, 0) = (b_1, b_2) = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 = 1(1, 0) + 1(0, 1) = (1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (c_1, c_2) = a_{13} e_1 + a_{23} e_2 = -1(1, 0) + 1(0, 1) = (-1, 1)$$

فأنت  $c_2 = 1$  ،  $c_1 = -1$  ،  $b_2 = 1$  ،  $b_1 = 1$  ،  $a_2 = 0$  ،  $a_1 = 2$   
بهذا  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ;  $f(x, y, z) = (2x + y - z, y + z)$

### 3.2.3 نظرية

(1) المصفوفة المرافقة للتطبيق الصفري هي المصفوفة الصفرية .

(2) المصفوفة المرافقة للتطبيق الحيدري هي المصفوفة الحيدرية .

البرهان :

(1) ليكن  $V_1$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، ذا الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$   
 $V_2$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ذا الأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$   
وليكن  $f_0 : V_1 \rightarrow V_2$  تطبيقاً معرفاً كالآتي :  
 $\forall v \in V_1$  ،  $f_0(v) = 0$

فأنت :

$$f_0(v_1) = 0 = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m$$

$$f_0(v_2) = 0 = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m$$

.....

$$f_0(v_n) = 0 = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_m$$

فأنت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f_0$  هي :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة الصفرية.

(2) ليكن  $V_1 = V_2$  وليكن  $f: V_1 \rightarrow V_1$  تطبيقاً معرفاً

$$\forall v \in V_1, f(v) = v$$

كالاتي :

فأنت :

$$f(v_1) = v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$\dots$$

$$f(v_n) = v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_n$$

فأنت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هي :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

وهي المصفوفة الكيادية.

(و. هـ . 3. 1)

### 4. 2. 3 تعريف

نحرف مرتبة المصفوفة  $A$  بأنها وتبته التطبيق الخطي

المرافق للمصفوفة  $A$ ، ونرمز لمرتبة  $A$  بالرمز  $\text{rank}(A)$ .

### 3. 3 الفضاء الشعاعي للمصفوفات

#### 1. 3. 3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً، وليكن  $A, B \in M_{m \times n}(K)$ ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$

أساساً للفضاء الشعاعي  $K^m$ ،  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً للفضاء الشعاعي

$K^n$ . وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة  $A$  و  $g$

تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة  $B$ . برهنا من (5. 2)

ان  $f+g$  تطبيق خطي وهو عنصر من  $L(K^n, K^m)$ .

لتكن

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث  $a_{ij}, b_{ij} \in K$

لكل  $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$  فإن:

$$(f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j)$$

$$\begin{aligned} (f+g)(v_1) &= f(v_1) + g(v_1) = (a_{11}u_1 + \dots + a_{m1}u_m) + (b_{11}u_1 + \dots + b_{m1}u_m) \\ &= (a_{11} + b_{11})u_1 + \dots + (a_{m1} + b_{m1})u_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(v_2) &= f(v_2) + g(v_2) = (a_{12}u_1 + \dots + a_{m2}u_m) + (b_{12}u_1 + \dots + b_{m2}u_m) \\ &= (a_{12} + b_{12})u_1 + \dots + (a_{m2} + b_{m2})u_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(v_n) &= f(v_n) + g(v_n) = (a_{1n}u_1 + \dots + a_{mn}u_m) + (b_{1n}u_1 + \dots + b_{mn}u_m) \\ &= (a_{1n} + b_{1n})u_1 + \dots + (a_{mn} + b_{mn})u_m \end{aligned}$$

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f+g$  ولتكن  $C$  هي:

$$C = \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m1} + b_{m1}) & (a_{m2} + b_{m2}) & \dots & (a_{mn} + b_{mn}) \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة  $C$  حاصل جمع المصفوفتين  $B$  و  $A$

ونكتب  $C = A + B$

نلاحظ أن الحدود الذي ترتيبه  $n$  في المصفوفة  $C$  يتكون بإيجاد

مركبات  $f(v_j)$  ،  $g(v_j)$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$  ومن ثم

جميعها ، فيضاف بذلك العنصر  $a_{ij}$  في المصفوفة  $A$  الى العنصر  $b_{ij}$  من المصفوفة  $B$  . من هنا نرى ان :

$$M(f+g) = C = A+B = M(f) + M(g)$$

### تعريف 2.3.3

لتكن  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$  ، وليكن  $f$  تطبيقا خطيا مرافقا للمصفوفة  $A$  ، اي ان  $f$  هو تطبيقت خطية من  $K^n$  في  $K^m$  .  
 فاذا كان  $\lambda \in K$  فاننا برهنا في (1.3.2) ان  $\lambda f$  تطبيقت خطية .  
 لتكتب المصفوفة المرافقة للتطبيقت  $\lambda f$  .  
 لتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساسا في  $K^n$  ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  اساسا في  $K^m$  ،  
 فان :

$$\begin{aligned} (\lambda f)(v_1) &= \lambda (f(v_1)) = \lambda (a_{11}u_1 + \dots + a_{m1}u_m) = \\ &= \lambda a_{11}u_1 + \dots + \lambda a_{m1}u_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(v_2) &= \lambda (f(v_2)) = \lambda (a_{12}u_1 + \dots + a_{m2}u_m) \\ &= \lambda a_{12}u_1 + \dots + \lambda a_{m2}u_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda f)(v_n) &= \lambda (f(v_n)) = \lambda (a_{1n}u_1 + \dots + a_{mn}u_m) \\ &= \lambda a_{1n}u_1 + \dots + \lambda a_{mn}u_m \end{aligned}$$

فان المصفوفة المرافقة للتطبيقت الخطية  $\lambda f$  ، وتكون  $B$  هي :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$



وتسمى المصفوفة  $B$  ، مصفوفة حاصل ضرب المصفوفة  $A$  بالمقدار السلمي  $\lambda$  ونكتب  $B = \lambda A$  .

### 3.3.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلًا ، المجموعة  $M_{m,n}(K)$  هي مجموعة مغلقة وتجميعية وتبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، حيث المصفوفة الصفرية عنصرها المحايد ، ولكل مصفوفة  $A \in M_{m,n}(K)$  فإن المصفوفة  $-A \in M_{m,n}(K)$  هي نظير  $A$  بالنسبة للجمع .  
فإن المجموعة  $M_{m,n}(K)$  وعملية جمع المصفوفات هي زمرة أبيلية .  
مباشرة من (2.3.3) نستنتج ان ضرب المصفوفة بالمقدار سلمي يحقق الخواص التالية :-

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in K , \forall A_1, A_2 \in M_{m,n}(K) ;$

$$(1) \lambda_1 (A_1 + A_2) = \lambda_1 A_1 + \lambda_1 A_2$$

$$(2) (\lambda_1 + \lambda_2) A_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_1$$

$$(3) \lambda_1 (\lambda_2 A_1) = (\lambda_1 \lambda_2) A_1$$

$$(4) 1 \cdot A_1 = A_1$$

فإن المجموعة  $M_{m,n}(K)$  هي فضاء شعاعي على الحقل  $K$  يسمى بالفضاء الشعاعي للمصفوفات .

### 4.3 جداء المصفوفات

#### 1.4.3 تعريف

ليكن  $V_1, V_2, V_3$  ثلاث فضاءات شعاعية على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $\{k_1, \dots, k_m\}$  أساساً في  $V_1$ ، و  $\{l_1, \dots, l_n\}$  أساساً في  $V_2$ ، و  $\{h_1, \dots, h_r\}$  أساساً في  $V_3$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V_1$  في  $V_2$ ،  $A = (\alpha_{ij})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ ، وليكن  $g$  تطبيقاً خطياً من  $V_2$  في  $V_3$ ،  $B = (\delta_{ij})$  هي المصفوفة المرافقة للتطبيق  $g$ . برهننا في (3.1.2) أن ترتيب تطبيقين خطيين هو تطبيق خطي، بذلك  $g \circ f$  هو تطبيق خطي من  $V_1$  في  $V_3$ . نجد المصفوفة  $C$  المرافقة للتطبيق  $g \circ f$ .

نلاحظ أن :

$$B = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{r1} & \delta_{r2} & \dots & \delta_{rn} \end{pmatrix}, \quad A = (\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

لكي نحصل على أعمدة  $C$  نوجد مركبات الشعاع  $\{k_1, \dots, k_m\}$  ونفت التطبيق الخطي  $g \circ f$  في الأساس  $\{h_1, \dots, h_r\}$ ، فأن:

$$\begin{aligned} g(k_1) &= (g \circ f)(k_1) = g(f(k_1)) = g(\alpha_{11}l_1 + \alpha_{21}l_2 + \dots + \alpha_{n1}l_n) \\ &= \alpha_{11}g(l_1) + \alpha_{21}g(l_2) + \dots + \alpha_{n1}g(l_n) \\ &= \alpha_{11}(\delta_{11}h_1 + \delta_{21}h_2 + \dots + \delta_{r1}h_r) + \alpha_{21}(\delta_{12}h_1 + \delta_{22}h_2 + \dots + \delta_{r2}h_r) + \\ &+ \dots + \alpha_{n1}(\delta_{1n}h_1 + \delta_{2n}h_2 + \dots + \delta_{rn}h_r) \end{aligned}$$

$$= (\alpha_{11} \delta_{11} + \alpha_{21} \delta_{12} + \dots + \alpha_{n1} \delta_{1n}) h_1 + \dots + (\alpha_{1r} \delta_{r1} + \alpha_{2r} \delta_{r2} + \dots + \alpha_{nr} \delta_{rn}) h_r$$

$$\begin{aligned} g(k_m) &= (g \circ f)(k_m) = g(f(k_m)) = g(\alpha_{1m} l_1 + \alpha_{2m} l_2 + \dots + \alpha_{nm} l_n) \\ &= \alpha_{1m} g(l_1) + \alpha_{2m} g(l_2) + \dots + \alpha_{nm} g(l_n) \end{aligned}$$

$$= \alpha_{1m} (\delta_{11} h_1 + \dots + \delta_{r1} h_r) + \alpha_{2m} (\delta_{12} h_1 + \dots + \delta_{r2} h_r) + \dots + \alpha_{nm} (\delta_{1n} h_1 + \dots + \delta_{rn} h_r)$$

$$= (\delta_{11} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{1n} \alpha_{nm}) h_1 + \dots + (\delta_{r1} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{rn} \alpha_{nm}) h_r$$

فإن المصفوفة C المرافقة للتطبيق الخطي  $g \circ f$  هي :

$$C = \begin{pmatrix} (\delta_{11} \alpha_{11} + \dots + \delta_{1n} \alpha_{n1}) & \dots & (\delta_{11} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{1n} \alpha_{nm}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\delta_{r1} \alpha_{11} + \dots + \delta_{rn} \alpha_{n1}) & \dots & (\delta_{r1} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{rn} \alpha_{nm}) \end{pmatrix}$$

نسمي المصفوفة C بمصفوفة حاصل ضرب المصفوفة

B في المصفوفة A ونكتب  $BA = C$

أي أن :

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{r1} & \dots & \delta_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} \alpha_{11} + \dots + \delta_{1n} \alpha_{n1} & \dots & \delta_{11} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{1n} \alpha_{nm} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{r1} \alpha_{11} + \dots + \delta_{rn} \alpha_{n1} & \dots & \delta_{r1} \alpha_{1m} + \dots + \delta_{rn} \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

لنلاحظ هنا أن :  $M(g \circ f) = C = BA = M(g) \cdot M(f)$

ونلاحظ أنه حتى نتأكد من أن نجد حاصل ضرب المصفوفة B في المصفوفة A يجب أن يكون عدد الأعمدة من المصفوفة B مساوياً لعدد الأسطر في المصفوفة A، وهذا ناتج

من أن  $f$  هو تطبيق من  $V_1$  في  $V_2$  و  $g$  هو تطبيق من  $V_2$  في  $V_3$ .

3.4.2 ملاحظة

ليكن  $V_1, V_2$  فضاءين حقيقيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V_1$ ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  أساساً في  $V_2$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V_1$  في  $V_2$ .  
 $A = (a_{ij})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ .  
لكل  $x \in V_1$  فإن  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$   
فإن المصفوفة التي تمثل مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  تكون مصفوفة ذات عمود واحد و  $n$  سطراً

ونكتب:

$$X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

وهي أن  $f(x) \in V_2$  فإن:  $y = f(x) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$   
المصفوفة التي تمثل مركبات  $f(x)$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$

هنا:

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

من هنا فإن:

$$y = f(x) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 (a_{11} u_1 + \dots + a_{m1} u_m) + \dots + \lambda_n (a_{1n} u_1 + \dots + a_{mn} u_m) = (a_{11} \lambda_1 + \dots + a_{1n} \lambda_n) u_1 + \dots + (a_{m1} \lambda_1 + \dots + a_{mn} \lambda_n) u_m$$

بيان  $\{u_1, \dots, u_m\}$  هو اساس في  $V_2$ ، فإنه يجب (3.5.1) كل شعاع يكتب ليكل وحيد ليكل مزج خطي لاشعة الاساس فان :

$$\alpha_1 = a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n$$

-----

$$\alpha_m = a_{m1}\lambda_1 + \dots + a_{mn}\lambda_n$$

فان :

$$Y = AX \quad \text{اي ان} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

### 5.3 المصفوفة المربعة

في (2.1.3) قلنا ان المصفوفة التي يتاوى عدد اعمدها وعدد اطرافها تسمى مصفوفة مربعة .  
نلاحظ ان المصفوفة المربعة هي مصفوفة مرافقة لتطبيق خطي من فضاء في فضاء اخر ذي بعدين متاويين .  
نوفر لجموعه المصفوفات المربعة من الدرجة n ذي العناصر من الحقل K بالرمز  $M_n(K)$  .

#### 1.5.3 تعريف

ليكن K حقلاً ، لأي  $A, B, C \in M_n(K)$  ، بماذا كان  $f_1$  هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة A ،  $f_2$  هو التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة B ،  $f_3$  هو التطبيق الخطي

المرافقة للمصفوفة  $C$  ، فإنه :

$$\begin{aligned} A.(B.C) &= (M(f_1))(M(f_2).M(f_3)) = (M(f_1))(M(f_2 \circ f_3)) = \\ &= M(f_1 \circ (f_2 \circ f_3)) = M((f_1 \circ f_2) \circ f_3) = (M(f_1).M(f_2)).(M(f_3)) \\ &= (A.B).C \end{aligned}$$

وأن :

$$\begin{aligned} C(A+B) &= M(f_3)(M(f_1) + M(f_2)) = M(f_3)(M(f_1 + f_2)) = \\ &= M(f_3 \circ (f_1 + f_2)) = M((f_3 \circ f_1) + (f_3 \circ f_2)) = \\ &= M(f_3 \circ f_1) + M(f_3 \circ f_2) = C.A + C.B \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نبرهن أن :  $(A+B).C = A.C + B.C$

استناداً إلى ما سبق نستنتج أن  $M_n(K)$  هي حلقة بالنية  
لعملية الجمع وضرب المصفوفات . بصورة عامة جداء المصفوفات  
ليست تبديلية لأن تركيب التطبيقات الخطية ليست تبديلية .

### 2.5.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً ،  $A \in M_n(K)$  ، فإذا وجدت مصفوفة  
 $B \in M_n(K)$  بحيث  $A.B = B.A = I_n$  عندها نقول أن المصفوفة  
 $A$  عكوس في الحلقة  $M_n(K)$  ، وتسمى المصفوفة  $B$   
نظير  $A$  ونزفر له بالرمز  $A^{-1}$  .

### 3.5.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً ، ولتكن  $A, B \in M_n(K)$  ، فإذا كان  
 $A, B$  عكوسين فإن المصفوفة  $AB$  عكوس .

البرهان :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = B^{-1}B = I_n \quad \text{بما أن :}$$

وكذلك :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$$

فإن  $AB$  عكوس ونظيرها هو  $B^{-1}A^{-1}$  .

(و.ه.ع.٣)

### 4.5.3 نتيجة

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

البرهان :

$$(AB)^{-1} = (AB)^{-1}I_n$$

$$= (AB)^{-1}((AB)(B^{-1}A^{-1})) = ((AB)^{-1}(AB))(B^{-1}A^{-1})$$

$$= I_n B^{-1}A^{-1}$$

$$= B^{-1}A^{-1}$$

(و.ه.ع.٣)

### 5.5.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً ، وليكن  $A \in M_n(K)$  ، وليكن  $f$

تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة  $A$  فإن الشرط التالي

متكافئة :

(1)  $A$  عكوس

(2)  $f$  تقابل

(3) اسعة اعمدة المصفوفة  $A$  منتقلة خطياً .

$$\text{rank}(A) = n \quad (4)$$

البرهان :

نبرهن على تكافؤ كل من هذه الشروط مع الشرط (1) ،

وبذلك نحصل على تكافؤ جميع الشروط .

ليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $K^n$  في  $K^n$  ، وليكن  $\{e_1, \dots, e_n\}$  اساعاً نظامياً في  $K^n$  .

نبرهن (1)  $\leftrightarrow$  (2)

نفرض ان  $A$  عكوس ، وليكن  $B$  نظير  $A$  ، اي ان

$$BA = AB = I_n \text{ . وليكن } h \text{ تطبيقاً خطياً مرافقاً للمصفوفة}$$

$$B \text{ ، فانه حسب (1.4.3) يكون } h \circ f = f \circ h = \text{Id}_{K^n}$$

$$\text{فانه حسب (7.3.2) يكون } f \text{ تقابل .}$$

نفرض الآن ان  $f$  تقابل ، فاذا كانت المصفوفة  $C$  هي

المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f^{-1}$  ، فانتا نجد ان :

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}_{K^n} \text{ ، فانه حسب (1.4.3) نستنتج ان}$$

$$A \cdot C = C \cdot A = I_n \text{ ، بذلك } A \text{ عكوس .}$$

نبرهن (1)  $\leftrightarrow$  (3)

$$\text{حسب (2.3.2) } f \text{ تقابل } \Leftrightarrow \text{صورة اساس في } K^n \text{ هي}$$

$$\text{اساس في } K^n \text{ . اي ان } f \text{ تقابل } \Leftrightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \text{ اساس}$$

$$\text{في } K^n \text{ . اي ان } f \text{ تقابل } \Leftrightarrow \{f(e_1), \dots, f(e_n)\} \text{ منتقلة خطياً .}$$



وبذلك فإن  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow f$  تقابل  $\Leftrightarrow f(e_1), \dots, f(e_n)$  متقلة  
خطية ، أي ان :  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow$  اشعة اعمدة  $A$  متقلة خطياً.

نبرهن (1)  $\leftrightarrow$  (4)

$$A \text{ عكوس} \Leftrightarrow f \text{ تقابل} \Leftrightarrow \text{rank}(f) = n = \text{rank}(A)$$

(و.ه.م.و.)

نلاحظ من هنا ان رتبة المصفوفة  $A$  هو العدد الاعظم  
للشعة المتقلة خطياً والتي يمكن الحصول عليها من اشعة  
اعمدة المصفوفة  $A$ .

### 3.6 منقول وأثر المصفوفة

ليكن  $K$  حقلاً ، ولتكن  $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$  ،

منقول المصفوفة  $A$  هو المصفوفة  $B = (b_{ji})$  حيث

$B \in M_{n,m}(K)$  و  $a_{ij} = b_{ji}$  . اي اننا نجعل اعمدة  $A$

اسطر في  $B$  ، واسطر  $A$  اعمدة في  $B$  . ونزف منقول

المصفوفة  $A$  بالرمز  $A^T$  .

واذا كانت  $A = A^T$  عندئذ نقول ان المصفوفة  $A$  هي

مصفوفة متناظرة ، ونلاحظ ان  $(A^T)^T = A$  .

لكل  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  نعرف اثر المصفوفة  $A$  بأنه

مجموع عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة  $A$  ، ونزف

له بالرمز  $TV(A)$  وبذلك فإن :

$$TV(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

من هنا فإنه يمكن البرهان بسهولة على أن: (تقرير (7)).

$$\forall A, B \in M_{m,n}(K), (A+B)^T = A^T + B^T \quad (1)$$

$$\forall A \in M_{m,n}(K), \forall B \in M_{n,p}(K), (AB)^T = B^T \cdot A^T \quad (2)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall A \in M_{m,n}(K), (\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (3)$$

$$\forall A, B \in M_n(K), \text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \quad (4)$$

$$\forall \lambda \in K, \forall A \in M_n(K), \text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A) \quad (5)$$

### 7.3 مصفوفة العبور

#### 1.7.3 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً  $n$  طابعاً على الحقل  $K$ ، وليكن

$\{v_1, \dots, v_n\}$ ،  $\{u_1, \dots, u_n\}$  أساسان في  $V$ ، فإنه

لكل  $i=1, \dots, n$ ،  $u_i$  هو مزيج خطي للترتبة  $\{v_1, \dots, v_n\}$

أي أن:

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

.....

$$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

تسمى المصفوفة

مصفوفة الحبور من الالاس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الالاس  $\{u_1, \dots, u_n\}$

### 3.7.2 أقلية

(1) لکن  $A = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  ،  $B = \{l_1 = (1, 2), l_2 = (2, 3)\}$

الالاس في الفضاء العامي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  فان :

$$l_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2$$

$$l_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2$$

اي ان :

$$(1, 2) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1) = (a_{11}, a_{21})$$

$$(2, 3) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1) = (a_{12}, a_{22})$$

$$\text{فان : } a_{11} = 1, a_{21} = 2, a_{12} = 2, a_{22} = 3$$

فان مصفوفة الحبور  $P$  من الالاس  $A$  الى الالاس  $B$

هـ :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) لکن الآن  $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  مصفوفة الحبور من

الالاس النظامي في  $\mathbb{R}^2$  الى الالاس  $\{l_1, l_2\}$  . ارجد  $l_1, l_2$  .

$$l_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 = 1(1, 0) + (-1)(0, 1) = (1, -1)$$

$$l_2 = a_{12} e_1 + a_{22} e_2 = 4(1, 0) + 2(0, 1) = (4, 2)$$

$$\text{فان : } \{l_1 = (1, -1), l_2 = (4, 2)\}$$

### 3.7.3 ملاحظات

(1) من (1.7.3) نلاحظ انه لو اخذنا التطبيق الكياري  $Id_V$  من  $V$  على  $V$  ، وأذا اعتبرنا  $\{u_1, \dots, u_n\}$  اساساً في مجموعة الرنظلات ،  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في مجموعة الاستقرار

ونعرف لذلك عندئذ كمالياً :  $Id_V: V_{\{u_1, \dots, u_n\}} \rightarrow V_{\{v_1, \dots, v_n\}}$

فإن :  $Id_V(u_1) = u_1, Id_V(u_2) = u_2, \dots, Id_V(u_n) = u_n$  اي ان :

$$Id_V(u_1) = u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$Id_V(u_2) = u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

.....

$$Id_V(u_n) = u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

فإن :

$$P = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

هذه مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي  $Id_V$  ، وهي من نفس الوقت مصفوفة العبور من الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  اي ان مصفوفة العبور هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الكياري  $Id_V$  تطبيقاً تقابلياً ، فإن  $P$  عكوس ،  $P^{-1}$  هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $Id_V^{-1}$  وبذلك  $P^{-1}$  هي مصفوفة العبور من الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  الى الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  .

(2) في (1.7.3) لكل  $x \in V$  فإن :

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n$$

$$x = y_1 v_1 + y_2 v_2 + \dots + y_n v_n$$

وكذلك

بالاعتماد على (1) فإن :

$$\begin{aligned} y_1 v_1 + \dots + y_n v_n &= x = \text{Id}_V(x) = \text{Id}_V(x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n) = \\ &= x_1 \text{Id}_V(u_1) + x_2 \text{Id}_V(u_2) + \dots + x_n \text{Id}_V(u_n) = \\ &= x_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n) + x_2 (a_{12} v_1 + \dots + a_{n2} v_n) + \dots + \\ &\quad + x_n (a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n) \end{aligned}$$

فإن :

$$y_1 v_1 + \dots + y_n v_n = (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \dots + x_n a_{1n}) v_1 + \dots + (x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \dots + x_n a_{nn}) v_n$$

فإن :

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n$$

-----

$$y_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n$$

أيان :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فإن :

حيث  $y_1, \dots, y_n$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$   
'  $x_1, \dots, x_n$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$   
'  $P$  هي مصفوفة العبور من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

(3) من (1.7.3) فأن :

$$u_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$u_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

-----

$$u_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

و

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة العبور

من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ .

لكن من (1) فأن :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

أيان :

(4) ليكن  $V_2, V_1$  فضاءين متجهيين على نفس الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V_1$  في  $V_2$ ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V_1$ ،  $\{u_1, \dots, u_m\}$  أساساً في  $V_2$ ، فإن:

$$v'_1 = b_{11}v_1 + b_{21}v_2 + \dots + b_{n1}v_n$$

$$v'_2 = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + \dots + b_{n2}v_n$$

.....

$$v'_n = b_{1n}v_1 + b_{2n}v_2 + \dots + b_{nn}v_n$$

فإن مصفوفة الجور  $P$  من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  إلى الأساس

$$P = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{حيث } \{v'_1, \dots, v'_n\}$$

وكذلك عندنا

$$f(v_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + \dots + a_{m1}u_m$$

$$f(v_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{m2}u_m$$

.....

$$f(v_n) = a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + \dots + a_{mn}u_m$$

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هي  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

فيكون لدينا :

$$V_1 \xrightarrow{\text{Id}_{V_1}} V_1 \xrightarrow{f} V_2$$

$\{u'_1, \dots, u'_n\}$                        $\{u_1, \dots, u_n\}$                        $\{u_1, \dots, u_m\}$

حيث  $M(\text{Id}_{V_1}) = P$  ،  $M(f) = A$  وأن :

$$M(f \circ \text{Id}_{V_1}) = M(f) \cdot M(\text{Id}_{V_1}) = AP$$

وفي  $V_2$  نلاحظ ان :

$$u'_1 = c_{11}u_1 + c_{21}u_2 + \dots + c_{m1}u_m$$

$$u'_2 = c_{12}u_1 + c_{22}u_2 + \dots + c_{m2}u_m$$

-----

$$u'_m = c_{1m}u_1 + c_{2m}u_2 + \dots + c_{mm}u_m$$

فإن مصفوفة العبور من الأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$  الى الأساس  $\{u'_1, \dots, u'_m\}$

$$Q = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

هذه :

لكن  $Q$  هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $\text{Id}_{V_2}$ .

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $(\text{Id}_{V_2})^{-1}$  هي  $Q^{-1}$ .

وهي مصفوفة العبور من الأساس  $\{u_1, \dots, u_m\}$  الى الأساس

$\{u'_1, \dots, u'_m\}$  ، وبذلك يكون لدينا :

$$V_1 \xrightarrow{\text{Id}_{V_1}} V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{\text{Id}_{V_2}^{-1}} V_2$$

$\{u'_1, \dots, u'_n\}$                        $\{u_1, \dots, u_n\}$                        $\{u_1, \dots, u_m\}$                        $\{u'_1, \dots, u'_m\}$

حيث  $M(\text{Id}_{V_2}^{-1}) = Q^{-1}$  ، فإن :

$$M(\text{Id}_{V_2}^{-1} \circ f \circ \text{Id}_{V_1}) = M(\text{Id}_{V_2}^{-1}) \cdot M(f) \cdot M(\text{Id}_{V_1}) = Q^{-1}AP$$



فإن المصفوفة  $B = \bar{\varphi}' A P$  هي المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالنسبة للأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  في  $V_1$  والأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  في  $V_2$ .

وهذه العلاقة نستخدمها عند تغير الأساس لإيجاد المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي.

(5) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ ، وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ،  $\{u_1, \dots, u_n\}$  أساسان في  $V$ . وليكن  $A$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالنسبة للأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ،  $B$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالنسبة للأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ ،  $P$  مصفوفة العبور من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  إلى الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ ، فإنه من (3) نستنتج أن  $B = P^{-1} A P$ .

### 8.3 المحددات

#### 1.8.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً، وليكن  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ ، لكل عددين طبيعيين  $n, z \leq n$ ، نعرف المصفوفة  $A_{nz}$  بأنها المصفوفة الناتجة من المصفوفة  $A$  وذلك بحذف الطر  $n$  والعمود  $z$  من المصفوفة  $A$ .

2.8.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً ،  $f: M_n(K) \rightarrow K$  تطبيفاً يحقق  
الشرطين :-

(1) اذا كانت  $A = (a)$  ،  $a \in K$  ، فان  $f(A) = a$

(2) اذا كانت  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  حيث  $n > 1$  فان:

$$f(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} f(A_{ij})$$

لأي عدد طبيعي  $1 \leq j \leq n$

نسمي التطبيق  $f$  محدد المصفوفة  $A$  ونوزلها بالرمز  $\det(A)$ .

نلاحظ هنا ان :

$$f(A) = \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} f(A_{ij})$$

عند تبنيته  $j$  لأحد القيم من  $1, \dots, n$ .

3.8.3 أمثلة

(1) اذا كانت  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  مصفوفة في  $M_2(K)$

حيث  $K$  حقلاً . لنفرض ان  $j = 2$  فان :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) \\ &= (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + (-1)^{2+2} a_{22} \det(A_{22}) \\ &= (-1) a_{12} a_{21} + a_{22} a_{11} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned}$$

(2) لتكن  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  مصفوفة في  $M_3(K)$

ولیکن  $j=1$  فأن :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

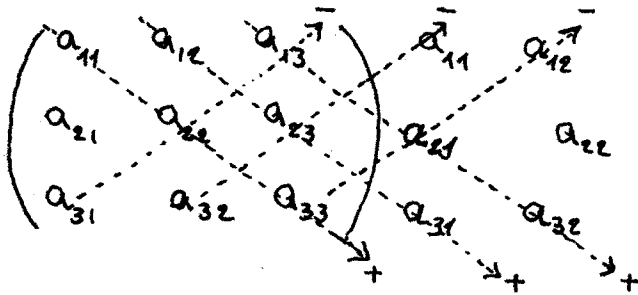
$$= (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{2+1} a_{21} \det(A_{21}) + (-1)^{3+1} a_{31} \det(A_{31})$$

$$= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-a_{21}) \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{31} a_{13} a_{22}$$

وهناك طريقة خاصة مختصرة لإيجاد محدد المصفوفة من الدرجة

3 وهي :



لنوجد محدد  $A$  بإيجاد حاصل ضرب العناصر الموجودة على كل سهم مع إعطاء الإشارة الموجودة في نهاية السهم لناتج الضرب ، ثم جمع هذه العناصر .  
فأن :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

4.8.3 نظرية

لتكن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة في  $M_n(K)$

فأنت :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)} a_{nn}$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي  $n$ .

إذا كانت  $n=1$  فأنت  $A = (a_{11})$  ومن التعريف فأنت  $\det(A) = a_{11}$ .

لتفرض ان النظرية صحيحة من اجل مصفوفة من الدرجة  $n-1$ .

لتكن الآن  $A$  مصفوفة من الدرجة  $n$  ، من تعريف محدد المصفوفة

فأنت :

$$\det(A) = (-1)^{n+n} a_{nn} \det(A_{nn}) = a_{nn} \det(A_{nn})$$

لكن من الفرضية بما ان  $A_{nn}$  هي مصفوفة من الدرجة  $n-1$

فأنت :

$$\det(A_{nn}) = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)}$$

وبذلك فأنت :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{(n-1)(n-1)} a_{nn}$$

(و.ه.و.ع.)

5.8.3 نتيجة

(1) اذا كانت

مصفوفة قطرية  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

من  $M_n(K)$  فان :

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$

(2) اذا كانت  $A = I_n$  فان :

$$\det(A) = 1$$

6.8.3 تعريف

لتكن  $A = (a_{ij})$  مصفوفة مربعة من الدرجة  $n$  ،

$B = (b_{ij})$  ، مصفوفة مربعة من الدرجة  $m$  ،  $C = (c_{ij})$  ،

مصفوفة من الدرجة  $n \times m$  ،  $D = (d_{ij})$  ، مصفوفة

من الدرجة  $m \times n$  ، حيث  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in K$  .

نعرف المصفوفة  $E$  من الدرجة  $n+m$  كما يلي :

$$c_{rs} = \begin{cases} a_{ij} & \text{اذا كان } r \leq n, s \leq n \\ c_{ij} & \text{اذا كان } r \leq n, s > n \\ d_{ij} & \text{اذا كان } r > n, s \leq n \\ b_{ij} & \text{اذا كان } r > n, s > n \end{cases}$$

حيث  $r, s = 1, \dots, n+m$

نسمي المصفوفة

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & \dots & c_{nm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{11} & \dots & d_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} & b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

مصفوفة القوالب  $E =$

ونفرض لها بالرفر :

$$E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$$

### 7.8.3 نظرية

لتكن  $E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$  مصفوفة كما في (6.8.3).  
 فإذا كانت  $C$  هي مصفوفة صفرية ، فإن :  

$$\det(E) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي  $m$ .  
 $C$  مصفوفة صفرية معناه  $c_{ij} = 0$  لكل  $i=1, \dots, m$  ،  $j=1, \dots, n$   
 نفرض عندها للمصفوفة  $C$  بالرفر  $\theta$  ، وليكن  $n$  اي عدد طبيعي و  $m=1$  فإن :

$$\det(E) = \det \begin{pmatrix} A & \theta \\ D & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & b_{11} \end{pmatrix} = b_{11} \det(A)$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

لتفرض ان النظرية صحيحة من اجل عدد طبيعي  $m-1$  . فإن :

$$\det \begin{pmatrix} A & \theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m (-1)^{(n+m)+(n+i)} b_{im} \det \begin{pmatrix} A & \theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$$

حيث  $B_{im}$  هي مصفوفة من الدرجة  $(m-1)$  ، وبذلك فإن  $D_i$  هي مصفوفة ناتجة من المصفوفة  $D$  بحذف الطر  $i$

أي أن  $D_i$  هي مصفوفة من الدرجة  $(m-1) \times n$   
 أي أن المصفوفة  $\begin{pmatrix} A & \theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix}$  هي مصفوفة من الدرجة  $n+(m-1)$   
 فأنه من الفرضية ينتج أن :

$$\det \begin{pmatrix} A & \theta \\ D_i & B_{im} \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B_{im})$$

من هنا فأن :

$$\det \begin{pmatrix} A & \theta \\ D & B \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m (-1)^{n+m+n+i} b_{im} \det(A) \cdot \det(B_{im})$$

$$= (-1)^{2n} \det(A) \cdot \sum_{i=1}^m (-1)^{m+i} b_{im} \det(B_{im})$$

$$= \det(A) \cdot \det(B)$$

(و. ه. ق.)

بنفس الطريقة نبرهن على :

### 8.8.3 نتيجة

إذا كانت  $A$  مصفوفة من الدرجة  $(m \times n)$  و  $B$   
 مصفوفة من الدرجة  $(n \times m)$  و  $C$  مصفوفة مربعة  
 من الدرجة  $m$  و  $D$  مصفوفة مربعة من الدرجة  $n$ ،  
 (جميع المصفوفات ذي العناصر من الحقل  $K$ ) و  $E = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix}$   
 فأن  $B = \theta$  فأن :

$$\det(E) = (-1)^{n \cdot m} \det(C) \cdot \det(D)$$

### 9.8.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً، وليكن  $A \in M_n(K)$  مصفوفة، فأن

$$\det(A) = \det(A^T)$$

البرهان :

نبرهن على النظرية بالتراجع بالنسبة للعدد الطبيعي  $n$ .

إذا كان  $n=1$  فإن  $A=(a_{11})$  وبذلك فإن  $\det(A)=\det(A^T)$ .

لتفرض ان النظرية صحيحة من اجل  $n-1$  ، لتكن  $A=(a_{ij})$

مصفوفة مربعة من الدرجة  $n$  ، وتكن  $A_{i,n;j,j,n}$  مصفوفة

ناجئة من المصفوفة  $A$  وذلك بحذف الطرفين  $n$  ،  $i$

والعمودين  $j$  ،  $n$  ، فإنه عنونئ :-

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}^T)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \left( \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n-1} a_{nj} \det(A_{i,n;j,j,n}^T) \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{i+j+2n-1} a_{in} a_{nj} \det(A_{i,n;j,j,n})$$

وكذلك :

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det((A^T)_{jn}) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A_{nj})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \left( \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n-1} a_{in} \det(A_{i,n;j,j,n}) \right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{i+j+2n-1} a_{in} a_{nj} \det(A_{i,n;j,j,n})$$

من هنا، فإنه :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det((A^T)_{jn})$$



من هنا . نستنتج ان :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) + a_{nn} \det(A_{nn})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} + a_{nn} \det(A^T)_{nn}$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} a_{nj} \det(A^T)_{jn} = \det(A^T)$$

(و. ه. ق. ١٠٣)

### 9.3 المحددات والأساس الخطية

#### 1.9.3 تعريف

(١) ليكن  $V$  فضاءاً خطياً على الحقل  $K$  ، وليكن

$f$  شكلاً مزدوجاً خطياً ومتناوباً على  $V$  . وليكن  $\{v_1, v_2\}$

أساساً في  $V$  . لكل  $x_1, x_2 \in V$  فإن :

$$x_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2$$

$$x_2 = a_{12} v_1 + a_{22} v_2$$

حيث  $a_{ij} \in K$  .

ولتكن  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  مصفوفة مركبات الأربعة

$x_1, x_2$  في الأساس  $\{v_1, v_2\}$  فإن :

$$f(x_1, x_2) = f(a_{11} v_1 + a_{21} v_2, a_{12} v_1 + a_{22} v_2)$$

لكن  $f$  "كحل مزروع الخطية وعتاوب، فان :-

$$f(x_1, x_2) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) f(v_1, v_2)$$

فأنتا نهي المقدار  $(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$  حدد مصفوفة مركبات العاين  $x_1, x_2$  في الأساس  $\{v_1, v_2\}$ ، ونزمن له بالرفز  $\det_{\{v_1, v_2\}}(x_1, x_2)$ .

(2) واذا كان  $v$  فضاءاً عايناً زا بعد  $3$  على الكقل

$K, \{v_1, v_2, v_3\}$  الـ  $f$  تطبيقاً لثلاثي الخطية

وعتاوب على  $v$ ، فان لكل  $x_1, x_2, x_3 \in v$ :

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3$$

$$x_3 = a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3$$

حيث  $a_{ij} \in K$ ، وتكون :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مركبات الأستعة  $x_3, x_2, x_1$  في الأساس

$\{v_1, v_2, v_3\}$ .

بالت  $f$  "كحل لثلاثي الخطية وعتاوب، فان :

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3, a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3, a_{13}v_1 + a_{23}v_2 + a_{33}v_3)$$

$$= [a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{32}a_{13})]$$

$\cdot f(v_1, v_2, v_3)$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \det(A) \cdot f(v_1, v_2, v_3)$$

فان :

نسي  $\det(A)$  محدد مصفوفة مركبات الأُسعة  
 $x_1, x_2, x_3$  في الأساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$  وننفرله بالرمز  $\det_{\{v_1, v_2, v_3\}}(x_1, x_2, x_3)$

(3) وإذا كان  $V$  مضاءً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$ ،  
 $f$  كلاً متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة  $n$  على  $V$ ،  
 و  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$  فإنه لكل  $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$   
 فأن:

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

-----

$$x_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

حيث  $a_{ij} \in K$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$   
 فأن:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det(A) \cdot f(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مركبات الأُسعة  $x_1, \dots, x_n$  في الأساس

$\{v_1, \dots, v_n\}$  وننفرله بالرمز  $\det_{\{v_1, \dots, v_n\}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

ونكتب  $\det(x_1, \dots, x_n)$  عندما لا يوجد أي أساس بالنسبة

للأساس المتحول.

نرمضان :

$$\det_{\{v_1, \dots, v_n\}} (v_1, v_2, \dots, v_n) =$$

$$= \det_{\{v_1, \dots, v_n\}} (1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n, 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n, \dots, 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_n)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 1$$

2.9.3 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً بعدده  $n \geq 2$  على الحقل  $K$ ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$ . لأي أسعة  $x_1, \dots, x_n \in V$  فإن  $\det_{\{v_1, \dots, v_n\}}(x_1, \dots, x_n)$  هو لكل متعدد الخطية ومساوي من الدرجة  $n$  على  $V$ .

البرهان :

لكل  $x_1, \dots, x_n$  في  $V$ ، فإن :

$$x_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n$$

.....

$$x_k = a_{1k}v_1 + \dots + a_{nk}v_n$$

.....

$$x_n = a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n$$

ولكل  $1 \leq k \leq n$

ليكن  $x'_k = a'_{1k}v_1 + \dots + a'_{nk}v_n$  حيث  $a'_{ij}, a_{ij} \in K$ ، فإن :

$$\det(x_1, \dots, x_k + x'_k, \dots, x_n) =$$

$$= \det(a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n, \dots, (a_{1k} + a'_{1k})v_1 + \dots + (a_{nk} + a'_{nk})v_n, \dots, a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} + a'_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} + a'_{nk} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} (a_{ik} + a'_{ik}) \det(A_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \det(A_{ik}) + \sum_{i=1}^n (-1)^{k+i} a'_{ik} \det(A_{ik})$$

$$= \det(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + \det(x_1, \dots, x'_k, \dots, x_n)$$

بنفس الطريقة نبرهن أنه لكل  $\lambda \in K$ ، فإن:

$$\det(x_1, \dots, \lambda x_k, \dots, x_n) = \lambda \det(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

فأنه من هنا نستنتج أن  $\det(x_1, \dots, x_n)$  هو "كل مقدر"

الخطية من الدرجة  $n$  على  $V$ .

نبرهن على التناوب بالتراجع بالنسبة للعدد  $n$ .

ليكن  $n=2$ ، ولتكن  $\{v_1, v_2\}$  أساساً للمضاء العام

$V$  على الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  كل مزوج الخطية على  $V$

فإن:

$$x_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2$$

$$x_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2$$

حيث  $a_{ij} \in K$

بإذا كان  $x_1 = x_2$  ، فإن :

$$\det(x_1, x_2) = \det(a_{11}v_1 + a_{21}v_2, a_{11}v_1 + a_{21}v_2) = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$$

فإن :  $\det(x_1, x_2)$  متساوي .

لتفرض ان الفرضية صحيحة من اجل  $n-1$  . وليكن  $V$  فضاءً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$  ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $V$  ، وليكن  $f$  "كلاً متعدد الخطية من الدرجة  $n$  على  $V$  . لكل  $x_1, \dots, x_n \in V$  ، بإذا كان  $x_m = x_l$  حيث  $1 \leq m < l \leq n$  فإن :

$$\det(x_1, \dots, x_m, \dots, x_l, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1})$$

لكن المصفوفة  $A_{i1}$  هي من الدرجة  $n-1$  ، ومن الفرضية

فإن :  $\det(A_{i1}) = 0$  وبذلك فإن :

$$\det(x_1, \dots, x_m, \dots, x_l, \dots, x_n) = 0$$

من الأستحة  $x_1, \dots, x_n$  . فإن التطبيق  $\det$  هو "كل متعدد الخطية ومتساوي من الدرجة  $n$  على  $V$  .

(و.هـ. ٣٠)

من خواص الـ "كلاً المتعدد الخطية والمتساوي ( ٧. ٢ )

وبان  $\det$  هو "كل متعدد الخطية ومتساوي كما برهننا

في النظرية السابقة فإن :

3.9.3 نتيجة

- (1) نضرب محدد المصفوفة  $A$  بالعدد  $(-1)$  كلما أجرى تبديل بين اعمدة اي اثنين من اعمدة المصفوفة  $A$ .  
(2) لا تتغير قيمة محدد المصفوفة  $A$ ، باذا اُضيف الى اي عمود من اعمدة المصفوفة  $A$  اي مزج خطي لبقية الاعمدة.

4.9.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً ، ولتكن  $A, B \in M_n(K)$  ، فأن :

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

البرهان :

لتكن  $C = \begin{pmatrix} A & \theta \\ -I_n & B \end{pmatrix}$  ، فأن  $C \in M_{2n}(K)$  . حسب (7.8.3)

$$\det(C) = \det(A) \cdot \det(B) :$$

لنضيف الآن الى العمود  $n+i$  من المصفوفة  $C$  لكل  $i=1, \dots, n$  المزج الخطي التالي :

$$b_{1i}C_1 + b_{2i}C_2 + \dots + b_{ni}C_n$$

حيث  $C_1, \dots, C_n$  هي الاعمدة  $1, 2, \dots, n$  من المصفوفة  $C$  . ولنفرز للمصفوفة الناتجة بالرمز  $C'$  ، فأن :

$$C' = \begin{pmatrix} A & AB \\ -I_n & \theta \end{pmatrix}$$

حسب (8.8.3) فأن  $\det(C') = (-1)^{n^2} \det(-I_n) \det(AB)$  :

$$= (-1)^{n^2+n} \det(AB) = \det(AB)$$

$\det(c) = \det(c')$  حسب (3.9.3) فأن :

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$  وبذلك فأن :

(و.ه.و.3)

### 5.9.3 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً "عامياً" ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$ ،

ولتكن  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  ،  $B = \{u_1, \dots, u_n\}$  أساسين في  $V$

فأنه لكل  $x_1, \dots, x_n \in V$  ، فأن :

$$\det_A(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) \det_A(u_1, \dots, u_n)$$

البرهان :

ليكن  $f$  "كلاً" متعدد الخطية ومتناوباً من الدرجة  $n$

على  $V$  ، فأن :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_A(x_1, \dots, x_n) f(v_1, \dots, v_n)$$

وكذلك :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) f(u_1, \dots, u_n)$$

و

$$f(u_1, \dots, u_n) = \det_A(u_1, \dots, u_n) f(v_1, \dots, v_n)$$

من هنا ينتج أن :

$$\det_A(x_1, \dots, x_n) f(v_1, \dots, v_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) \det_A(u_1, \dots, u_n) f(v_1, \dots, v_n)$$

إذا كان  $f \neq f_0$  فأن :  $f(v_1, \dots, v_n) \neq 0$  ، ومنه فأن



$$\det_A(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) \det_A(u_1, \dots, u_n)$$

(١.٣.٥.١)

### 6.9.3 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً خطياً على الحقل  $K$  ذا بعد  $n$   
 وليكن  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  وليكن  $x_1, \dots, x_n$  وليكن  $V$  فضاءاً خطياً من  $V$  فأن :

$$\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff x_1, \dots, x_n \text{ مرتبطة خطياً}$$

البرهان :

إذا كانت المجموعة  $x_1, \dots, x_n$  مرتبطة خطياً، فأنه

توجد  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  ليست كلها معدومة بحيث :

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

ولنفرض ان  $\lambda_i \neq 0$  فأن  $(1 \leq i \leq n)$

$$x_i = \frac{-\lambda_1}{\lambda_i} x_1 + \dots + \frac{-\lambda_{i-1}}{\lambda_i} x_{i-1} + \frac{-\lambda_{i+1}}{\lambda_i} x_{i+1} + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_i} x_n$$

$$x_i = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n$$

$$\beta_j = \frac{-\lambda_j}{\lambda_i} \quad \text{حيث}$$

فأن :

$$\det_B(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, \beta_1 x_1 + \dots + \beta_{i-1} x_{i-1} + \beta_{i+1} x_{i+1} + \dots + \beta_n x_n, \dots, x_n)$$

$$= \beta_1 \det_B(x_1, \dots, x_1, \dots, x_n) + \dots + \beta_n \det_B(x_1, \dots, x_n, \dots, x_n)$$

$$= \beta_1 \cdot 0 + \dots + \beta_n \cdot 0 = 0$$

لنفرض الآن أن:  $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$ . وإذا كانت الأُسعة

$x_1, \dots, x_n$  متقلبة خطياً فإن  $A = \{x_1, \dots, x_n\}$  تكون

أساساً للفضاء  $V$  لأن عدد الأُسعة في  $A$  هو  $n$ .

حسب (5.9.3) فإن:

$$\det_A(x_1, \dots, x_n) = \det_B(x_1, \dots, x_n) \det_A(v_1, \dots, v_n)$$

لكن  $\det_B(x_1, \dots, x_n) = 0$  حسب الفرض.

ولكن  $\det_A(x_1, \dots, x_n) = 1$ . وهذا تناقض، من هذا نستنتج

أن الأُسعة  $x_1, \dots, x_n$  مرتبطة خطياً.

(و.ه.و. ٣.١)

### 3. 10. إيجاب مقلوب المصفوفة

#### 1. 10.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً، وليكن  $A \in M_n(K)$  فإن:

$$A \text{ عكوس} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

البرهان:

حسب (5.5.3) فإن  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow$  أسعة أعمدة

المصفوفة  $A$  متقلبة خطياً. وكذلك حسب (6.9.3)

فإن أسعة أعمدة المصفوفة  $A$  متقلبة خطياً  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

فإن المصفوفة  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$ .

(و.ه.و. ٣.١)

2.10.3 تعريف

ليكن  $K$  حقلاً ولتكن  $A \in M_n(K)$  حيث  $\det(A) \neq 0$ . نعرف مقلوب المصفوفة  $A$  والتي رمزنا له بـ  $A^{-1}$  كما يلي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (B)^T$$

حيث:  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$  وأن  $b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

لكل  $i, j = 1, \dots, n$  ، وتسمى  $B^T$  احياناً بالمرافقة التليدية للمصفوفة  $A$  ويرمز لها بالرمز  $\text{adj}(A)$ .

3.10.3 نظرية

ليكن  $K$  حقلاً ، ولتكن  $A \in M_n(K)$  مصفوفة عكسية فإن:  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

البرهان:

بما ان  $A$  عكوس فإن  $\det(A) \neq 0$  ، فإن:

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= \det(A^{-1}) (\det(A) \cdot (\det(A))^{-1}) \\ &= (\det(A^{-1}) \cdot \det(A)) \cdot (\det(A))^{-1} \\ &= \det(A^{-1}A) \cdot (\det(A))^{-1} \\ &= \det(I_n) (\det(A))^{-1} = 1 \cdot (\det(A))^{-1} = (\det(A))^{-1} \end{aligned}$$

(و.ه.و.ع)

4.10.3 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $C = \{u_1, \dots, u_n\}$  ،  $D = \{v_1, \dots, v_n\}$  أساسين في  $V$  ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  . وليكن  $A$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس  $C$  ، وليكن  $B$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس  $D$  .  
فإن  $\det(A) = \det(B)$  .

البرهان :

لتكن  $P$  هي مصفوفة العبور من الأساس  $C$  الى الأساس  $D$  ، فإنه حسب ( 3.7.3 فرع (5) ) فإن :

$$B = P^{-1}AP$$

فإن :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

(و.ه.و.م.)

نلاحظ من هذه النظرية ان محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي لا يعتمد على اختيار الأساس .

5.10.3 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل

$K$ ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$ . نسهي بمحدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في أي أساس للفضاء الشعاعي  $V$  بمحدد التطبيق الخطي  $f$  ونرمز له بالرمز  $\det(f)$ .

### 6.10.3 نظرية

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل  $K$ . لكل تطبيقين خطيين  $f, g$  من  $V$  في  $V$  فإن:

$$\det(\text{Id}_V) = 1 \quad (1)$$

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g) \quad (2)$$

$$\det(f) \neq 0 \iff f \text{ قابل} \quad (3)$$

$$(4) \text{ إذا كان } f \text{ قابلاً فإن: } \det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$$

البرهان:

(1) بيان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي

$\text{Id}_V$  هو  $I_n$ ، فإنه حسب (5.8.3)  $\det(I_n) = 1$ .

وحسب (5.10.3) ينبع أن  $\det(\text{Id}_V) = 1$ .

(2) لتكن  $A$  المصفوفة المرافقة لـ  $f$ ،  $B$

المصفوفة المرافقة لـ  $g$  فإنه حسب (4.9.3)،

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$  حسب (5.10.3) فإن:

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$$

(3) لتكن  $A$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  ، فإنه من النظرية (1.10.3)  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  . لكن من النظرية (5.5.3) فإن  $A$  عكوس  $\Leftrightarrow f$  تقابل ، فإن  $f$  تقابل  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$  اي ان  $f$  تقابل  $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$  .

(4) لتكن  $A$  المصفوفة المرافقة لـ  $f$  . بما ان  $f$  تقابل فإن  $A$  عكوس ، فإن  $f^{-1}$  هو التطبيق الخطي المرافقة للمصفوفة  $A^{-1}$  . من النظرية (3.10.3) فإن 
$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$$
 فإنه من (5.10.3) 
$$\det(f^{-1}) = (\det(f))^{-1}$$

(و.و.ه.و.ع.)

- تمارين -

(1) لتكن  $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$  ،  $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

أوجد :

(a)  $2A + B$

(b)  $AC$

(c)  $3A^T - 2B^T$

(d) هل  $AB$  ،  $CA$  معرفتين .

(e)  $TV(C)$  أوجد

(2) ليكن  $\mathcal{C}$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $\mathcal{R}$  ،

$f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي :

$$\forall z \in \mathcal{C} ; f(z) = \bar{z}$$

أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  بالنسبة لكل

في الأساس (a)  $\{1, i\}$  ، (b)  $\{(1+i), (1+zi)\}$

(3) في  $M_2(\mathcal{R})$  لتكن :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, c \in \mathcal{R} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix} ; b, d \in \mathcal{R} \right\} \text{ و}$$

- (a) برهن ان  $F_2 \subset F_1$  هما فضاءين شعاعيين  
مميزين من الفضاء الشعاعي  $M_2(\mathbb{R})$ .
- (b) اوجد  $F_1 \cap F_2 \subset F_1 + F_2$
- (c) هل ان  $M_2(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$  ؟
- (d) اوجد أساس لكل من  $F_1 \subset F_2$ . ثم استنتج  
أساساً للفضاء  $M_2(\mathbb{R})$ .

(4) ليكن  $\mathbb{R}^2$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$ . وليكن

$$A = \{ v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1) \}$$

$$B = \{ u_1 = (1, 3), u_2 = (3, 1) \} \quad \text{و}$$

أساسين في الفضاء  $\mathbb{R}^2$ . وليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيعاً  
خطياً معرفاً كالآتي:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ .

(5) لتكن  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي  $f$ . وليكن  $A = \{ e_1 = (1, 0), e_2 = (1, 1) \}$  أساساً

في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$ ، وليكن

$B = \{ f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (2, 1, 1), f_3 = (0, 0, 1) \}$  أساساً

في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$ .

(a) اوجد التطبيق  $f$ .

(b) اوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ .



بإذا كانت:  $A = \{e_1 = (0, 1), e_2 = (2, 1)\}$  أساس في  $\mathbb{R}^2$  و  $B = \{f_1 = (1, 0, 0), f_2 = (0, 1, 0), f_3 = (0, 0, 1)\}$  أساس في  $\mathbb{R}^3$ .

(6) ليكن  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقاً خطياً معرفاً كالآتي:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

ولتكن  $A = \{v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 5)\}$  أساس في  $\mathbb{R}^2$ ,

$B = \{u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (1, 0, 0)\}$  أساس في  $\mathbb{R}^3$ .

أوجد المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ .

(7) (a) أثبت أنه لكل  $A, B \in M_{m,n}(K)$  ولكل  $\lambda \in K$ .

$$(A + B)^T = A^T + B^T \quad (1)$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \quad (2)$$

$$(\lambda A)^T = \lambda \cdot A^T \quad (3)$$

(b) أثبت أنه لكل  $A, B \in M_n(K)$  ولكل  $\lambda \in K$ .

$$TV(A + B) = TV(A) + TV(B) \quad (1)$$

$$TV(\lambda A) = \lambda TV(A) \quad (2)$$

(8) أوجد مرتبة المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -7 & -2 \end{pmatrix}$$

(9) لتكن  $A = \{ e_1 = (0, 0, -1), e_2 = (0, -1, 0), e_3 = (1, -1, 0) \}$

و  $B = \{ f_1 = (2, 0, 1), f_2 = (0, 1, 1), f_3 = (1, 1, -1) \}$

أساسين في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$ .

(a) اوجد مصفوفة العبر  $M$  من الأساس  $A$  الى

الأساس  $B$ .

(b) هل ان  $M$  عكوس ؟

(c) اوجد  $M^{-1}$ .

(10) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  بعده 3،

لتكن  $A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$  ،  $B = \{ a'_1 = a_1, a'_2 = a_1 + a_2, a'_3 = a_1 + a_2 + a_3 \}$

اساسين في الفضاء  $V$ .

(a) اوجد مصفوفة العبر  $M$  من الأساس  $A$

الاساس  $B$ .

(b) هل ان  $M$  عكوس ؟

(11) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  بعده 2،

ولتكن  $\{ e_1, e_2 \}$  اسساً في  $V$ ، وليكن  $f, g: V \rightarrow V$

تطبيقين خطيين معرفين كالآتي :

$$f(e_1) = 5e_1 + e_2, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad g(e_1) = 2e_1 - e_2,$$

$$g(e_2) = 3e_1 + 2e_2$$

(a) اوجد المصفوفة المرافقة لكل من  $f$

$$g \circ f, \quad f \circ g, \quad g$$

(6) إذا كانت  $A$  مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي  $f$  ،  $B$  مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي  $g$  ،  $C$  مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي  $f \circ g$  ،  $D$  مصفوفة مرافقة للتطبيق الخطي  $g \circ f$  ، اوجد  $D$  بدلالة  $B$  ،  $A$

(12) لتكن  $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 9 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  . إذا كانت  $E$  أساساً نظامياً في  $\mathbb{R}^2$  ،  $F$  أساساً نظامياً في  $\mathbb{R}^3$  ، اوجد التطبيق الخطي  $f$  المرافق للمصفوفة  $A$  .  
 إذا كانت  $F = \{(0,0,3), (0,2,0), (1,0,0)\}$  أساساً آخر في  $\mathbb{R}^3$  ، اوجد مصفوفة العبور  $H$  من الأساس  $F$  إلى الأساس  $F'$  .

(13) اوجد المصفوفة العكسية لكل من :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(14) اكتب :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

(15) لتكن :  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$  ،  $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$  ،  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(16) لتكن  $A \in M_n(K)$  ، برهن ان :  $A(\text{adj } A) = \det(A) \cdot I_n$

(17) أثبت ان :

$$\det \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ a^2+2 & ab+1 & b^2 \\ a^2-1 & ab & b^2+1 \end{pmatrix} = (a-b)^2 \quad (a)$$

$$\det \begin{pmatrix} a & a & b+c \\ a+c & b & b \\ c & a+b & c \end{pmatrix} = 4abc \quad (b)$$

$$\det \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix} = (a+b+c)^3 \quad (c)$$

(18) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  بعدد 3 ،  
ولتكن  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  اساساً في  $V$  . برهن ان ما اذا ساد  
شعاعان من الربعة  $x_1, x_2, x_3$  في  $V$  فان :  $\det_B(x_1, x_2, x_3) = 0$

## الفصل الرابع الفضاء الأقليدي والهيبريتي

### 1.4 أشكال التربيعية

#### 1.1.4 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$ ، وليكن  $f$  شكلاً مزدوج الخطية على  $V$ . نقول ان  $f$  هو شكل متماثل، إذا كان لكل  $x, y \in V$  :  $f(x, y) = f(y, x)$ .

#### 2.1.4 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ذا بعد  $n$ . وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$ ، وليكن  $f$  شكلاً مزدوج الخطية على  $V$ ، فإنه لكل  $u, v \in V$  :  
 $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$  ،  $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$  حيث  $\alpha_i, \beta_i \in K$ . فإنت :

$$\begin{aligned} f(v, u) &= f(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n, \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \beta_1 \alpha_1 f(v_1, v_1) + \beta_1 \alpha_2 f(v_1, v_2) + \dots + \beta_1 \alpha_n f(v_1, v_n) + \\ &+ \beta_2 \alpha_1 f(v_2, v_1) + \beta_2 \alpha_2 f(v_2, v_2) + \dots + \beta_2 \alpha_n f(v_2, v_n) + \\ &+ \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \\ &+ \beta_n \alpha_1 f(v_n, v_1) + \beta_n \alpha_2 f(v_n, v_2) + \dots + \beta_n \alpha_n f(v_n, v_n) \end{aligned}$$

أي إنت :  $f(v, u) = \sum_{i,j=1}^n f(v_i, v_j) \beta_i \alpha_j$  حيث  $f(v_i, v_j) \in K$

ليكن  $f(v_i, v_j) = a_{ij}$  ، فإنه لكل أساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  في الفضاء الشعاعي  $V$  ، كل شكل مزدوج الخطية يكتب بالكل :

$$f(v, u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \beta_i \alpha_j$$

حيث  $\beta_i$  هي مركبات الشعاع  $v$  ،  $\alpha_j$  هي مركبات الشعاع  $u$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ، والعدد السلمي  $a_{ij} = f(v_i, v_j)$  يعتمد على اختيار الأساس .

المصفوفة  $A = (a_{ij})$  تسمى المصفوفة المرافقة لكل مزدوج الخطية  $f$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  .  
 لذى الآن ماذا يحدث عند تغيير الأساس . لتكن  $\{u_1, \dots, u_n\}$  أساساً آخر في الفضاء  $V$  . فأن :

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_n$$

-----

$$u_n = c_{1n} v_1 + c_{2n} v_2 + \dots + c_{nn} v_n$$

حيث  $c_{ij} \in K$  . فأن مصفوفة العبور من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

ولتكن  $A = (a_{ij})$  المصفوفة المرافقة لكل مزدوج

الخطية  $f$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . نبحث عن المصفوفة  $B = (b_{ij})$  المرافقة لكل  $f$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . لكل  $1 \leq p \leq i$  و  $1 \leq q \leq j$  فإن:

$$\begin{aligned} b_{pq} &= f(u_p, u_q) = f(c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n, c_{1q}v_1 + c_{2q}v_2 + \dots + c_{nq}v_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n f(v_i, v_j) c_{ip} c_{jq} \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ip} c_{jq} \end{aligned}$$

من هنا فإن:

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^n c_{pi} a_{ij} c_{jq}$$

حيث  $c_{pi} = c_{ip}$  هي عناصر المصفوفة  $C^T$  والتي هي منقول المصفوفة  $C$  أي أن:

$$B = C^T A C$$

### 3.1.4 مثال

لنأخذ الأساس النظامي  $\{e_1, e_2, e_3\}$  في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$ . وليكن  $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  "كلاً معرفاً كالآتي:

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

$$f(x, y) = x_1 y_1 - 4x_2 y_3 + 6x_1 y_2$$

حيث  $x_i$  هي مركبات الشعاع  $x$ ،  $y_i$  هي مركبات الشعاع  $y$  في الأساس النظامي.

نبرهن أن  $f$  "كلاً مزدوج الخطية. لكل  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  فإن:

فأنت :

$$\begin{aligned}
f(x+x', y) &= f((x_1+x'_1, x_2+x'_2, x_3+x'_3), (y_1, y_2, y_3)) \\
&= (x_1+x'_1)y_1 - 4(x_2+x'_2)y_3 + 6(x_1+x'_1)y_2 \\
&= (x_1y_1 - 4x_2y_3 + 6x_1y_2) + (x'_1y_1 - 4x'_2y_3 + 6x'_1y_2) \\
&= f(x, y) + f(x', y)
\end{aligned}$$

ولكل  $\lambda \in \mathbb{R}$  فأنت :

$$\begin{aligned}
f(\lambda x, y) &= f((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3)) \\
&= \lambda x_1 y_1 - 4\lambda x_2 y_3 + 6\lambda x_1 y_2 \\
&= \lambda f(x, y)
\end{aligned}$$

ونفس الطريقة نبرهن انه لكل  $y \in \mathbb{R}^3$  فأنت :

$$f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$$f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$$

نذلك فأنت  $f$  شكل مزدوج الخطية على  $\mathbb{R}^3$ .

نجد الآن المصفوفة المرافقة لكل  $f$ .

حيث  $\{ e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1) \}$  عبارة عن

الاساس النظامي في  $\mathbb{R}^3$  ، فأنت :

$$a_{11} = f(e_1, e_1) = 1, \quad a_{12} = f(e_1, e_2) = 6, \quad a_{13} = f(e_1, e_3) = 0$$

$$a_{21} = f(e_2, e_1) = 0, \quad a_{22} = f(e_2, e_2) = 0, \quad a_{23} = f(e_2, e_3) = -4$$

$$a_{31} = f(e_3, e_1) = 0, \quad a_{32} = f(e_3, e_2) = 0, \quad a_{33} = f(e_3, e_3) = 0$$

فأنت المصفوفة المرافقة لكل  $f$  هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



لتكن  
افراً في  $V$  . فأن :

$$u_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3$$

$$u_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$$

$$u_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$$

$$c_{11} = 1 , \quad c_{21} = 1 , \quad c_{31} = -1 : \text{فأن}$$

$$c_{12} = 0 , \quad c_{22} = 1 , \quad c_{32} = 2$$

$$c_{13} = 0 , \quad c_{23} = 0 , \quad c_{33} = 1$$

فأن مصفوفة العبور  $C$  من الأساس  $\{e_1, e_2, e_3\}$  الى الأساس  $\{u_1, u_2, u_3\}$  هي :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فأن :

من هنا فأن المصفوفة  $B$  المرافقة للشكل الخطي  $f$  في الأساس  $\{u_1, u_2, u_3\}$  هي :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & 4 \\ 4 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.1.4 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $f$  شكلاً مزدوجاً الخطية ومتماثراً على  $V$  . التطبيق  $\varphi: V \rightarrow K$  نسميه شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل  $f$  إذا كان لكل  $v \in V$  ،  $\varphi(v) = f(v, v)$  ، ونقول عن  $f$  انه الشكل القطبي المرتبط بالشكل التربيعي  $\varphi$  . المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي  $\varphi$  هي المصفوفة المرافقة للشكل القطبي  $f$  .

نقول ان الشكل التربيعي  $\varphi$  محددة موجبة إذا كان لكل

$$v \in V, \quad \varphi(v) \geq 0 \quad \text{و} \quad \varphi(v) = 0 \iff v = 0$$

نرمز انه لكل  $x, y \in V$  فان :

$$f(x+y, x+y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$$

فان :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x+y, x+y) - f(x, x) - f(y, y))$$

ومن

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y))$$

اي ان الشكل المزدوج الخطية والمتماثل  $f$  يعين بواسطة شكل التربيعي المرافقة له . وتسمى هذه الكتابة الأخرى بالكتابة القطبية للشكل  $f$  .

نرمز كذلك انه لكل  $v \in V$  ولكل  $\lambda \in K$  فان :

$$\varphi(\lambda v) = f(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 f(v, v) = \lambda^2 \varphi(v)$$

### 5.1.4 نظرية

المصفوفة المرافقة لكل التربيعي هي مصفوفة

متماثلة .

البرهان :

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$  ،  
 وليكن  $f$  شكلاً مزدوجاً الخطية ومتماثلاً على  $V$  . وليكن  
 $\varphi$  شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل المزدوج الخطية والمتماثل  $f$  .  
 ولتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$  ، فإنه لكل  $x \in V$

فإن  $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  :

$$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \lambda_i \lambda_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

حيث  $\lambda_i$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ،  
 $A = (a_{ij})$  هي المصفوفة المرافقة للشكل التربيعي  $\varphi$  .  
 نلاحظ هنا أنه لكل  $1 \leq i, j \leq n$  ، يمان  $f$  متماثل

$$a_{ij} = f(v_i, v_j) = f(v_j, v_i) = a_{ji} \quad \text{فإن :}$$

بذلك فإن المصفوفة  $A$  المرافقة للشكل التربيعي  $\varphi$   
 هي متماثلة .

(و.هـ. ١٠٢)

### 6.1.4 مثال

التطبيق  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  المعروف بالشكل التالي :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$$

هو شكل تربيعي على الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  .

لكل  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  فإن لكل المزدوج الخطية والمتماثل المرتبط بالمثل  $f$  هي :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} (g(x+y) - g(x) - g(y)) \\ &= \frac{1}{2} (g(x_1+y_1, x_2+y_2) - g(x_1, x_2) - g(y_1, y_2)) \\ &= \frac{1}{2} [2(x_1+y_1)^2 - 3(x_1+y_1)(x_2+y_2) + (x_2+y_2)^2 - 2x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2 - \\ &\quad - 2y_1^2 + 3y_1y_2 - y_2^2] \end{aligned}$$

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + x_2y_2$$

فإن  $f$  لكل مزدوج الخطية ومتماثل.

وكذلك لكل  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  فإن  $g(x) = f(x, x)$

لنأخذ الأساس النظامي  $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  في  $\mathbb{R}^2$  ونوجد المصفوفة المرافقة لكل التربيعي  $f$ . أي أننا نوجد المصفوفة المرافقة لكل المزدوج الخطية والمتماثل  $f$  في الأساس النظامي في  $\mathbb{R}^2$ .

$$a_{11} = f(e_1, e_1) = 2, \quad a_{12} = f(e_1, e_2) = -\frac{3}{2}$$

$$a_{21} = f(e_2, e_1) = -\frac{3}{2}, \quad a_{22} = f(e_2, e_2) = 1$$

فإن المصفوفة  $A$  المرافقة لكل المزدوج الخطية

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{والمتماثل } f \text{ هي :}$$

وهي المصفوفة المرافقة لكل التربيعي  $f$ ، ونلاحظ

أن المصفوفة  $A$  متماثلة.

7.1.4 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً بعدده  $n$  على الحقل  $K$ .  
 وليكن  $f$  شكلاً مزدوجاً الخطية ومتماثلاً على  $V$ ، وليكن  
 $\varphi: V \rightarrow K$  شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل  $f$ .

لتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$ ، وليكن  $A = (a_{ij})$   
 المصفوفة المرافقة للشكل  $f$ ، فإنه لكل  $x \in V$ :  
 $\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  حيث  $x_1, \dots, x_n$  هي  
 مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

فإذا وجد أساس  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$  في  $V$  بحيث انه:

$$\varphi(x) = a'_{11} x'^2_1 + \dots + a'_{nn} x'^2_n$$

حيث  $x'_i$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$   
 و  $a'_{ij} \in K$ ، عندها نقول ان للشكل التربيعي  $\varphi$  الصيغة  
 القانونية (أو القطرية) في الأساس  $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ .

8.1.4 تحويل الشكل التربيعي الى الصيغة القانونية (القطرية)

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  
 $K$ ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً في  $V$ ، وليكن  
 $f$  شكلاً مزدوجاً الخطية ومتماثلاً على  $V$  و  $\varphi: V \rightarrow K$   
 شكلاً تربيعياً مرتبطاً بالشكل  $f$ . لتكن  $A = (a_{ij})$

المصفوفة المرافقة للشكل  $f$ ، فإنه لكل  $x \in V$ :

$$\varphi(x) = f(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \dots (1)$$

حيث  $x_1, \dots, x_n$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

(1) طريقة لالكرانك

سنجس عن اساس اخر في  $V$  بحيث ان (1) يكتب

لكل  $i$  نجد فيها كل الحدود التي يكون فيها  $i \neq j$  .  
 اذا وجد  $1 \leq k \leq n$  بحيث  $a_{kk} \neq 0$  ، فأننا نعيد ترقيم  
 العوامل ، ونضرب لهذا العامل بـ  $a_{11}$  . واذا كان لكل  $1 \leq k \leq n$

$a_{kk} = 0$  ، فأنه يوجد احد العوامل وليكن  $a_{ij} \neq 0$  ( $i \neq j$ )  
 والا لكان في تطبيقاً صفرياً . لنفرض ان  $a_{12} \neq 0$  ، بهأن

في هو  $x_1^2$  تربيعي فأن المصفوفة المرافقة له هي  
 مصفوفة متماثلة ، فأن  $a_{12} = a_{21}$  ، من هنا فأن

$$2a_{12}x_1x_2 \neq 0 \text{ . عندئذ نضع } x_1 = x'_1 + x'_2 \text{ ، } x_2 = x'_1 - x'_2 \text{ ،}$$

$$x_k = x'_k \text{ ، لكل } k = 3, \dots, n$$

فيكون  $2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(x_1'^2 - x_2'^2)$  نجد ان العامل عند  $x_1'^2$

يختلف عن الصفر ، ولعيد الترقيم ونضرب له  $a_{11}$  .

بناءً على ما سبق نرى انه يمكننا ان نفرض ان  $a_{11} \neq 0$

(أو بعد الترقيم نفرض ان  $a_{11} \neq 0$ ) .

في (1) الحدود التي تحوي على  $x_1$  هي :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n$$

نكمل هذا الحد اي مربع كامل فيكون لدينا :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 - B$$

حيث  $B$  يحوي على مجموع مربعات ومواصل ضرب

العناصر  $\{a_{12}x_2, a_{13}x_3, \dots, a_{1n}x_n\}$

بالتعويض في (1) ينتج أن :

$$G(x) = f(x, x) = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + \dots$$

حيث الحدود الغير مكتوبة هي بدلالة  $x_2, \dots, x_n$

$$y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$$

نفرض الآن أن :

$$y_2 = x_2$$

-----

$$y_n = x_n$$

وبذلك فإن :

$$G(x) = f(x, x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j$$

نلاحظ ان المقدار  $\sum_{i,j=2}^n b_{ij} y_i y_j$  مشابه الى المقدار (1) عدا ان المجموع يبدأ من 2

نفس الطريقة نفرض ان  $b_{22} \neq 0$  ونعيد نفس العملية فيكون :

$$z_1 = y_1$$

$$z_2 = b_{22} y_2 + b_{23} y_3 + \dots + b_{2n} y_n$$

$$z_3 = y_3$$

-----

$$z_n = y_n$$

فإن :

$$G(x) = f(x, x) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \frac{1}{b_{22}} z_2^2 + \sum_{i,j=3}^n c_{ij} z_i z_j$$

وهكذا نعيد العملية هذه ونحصل على :

$$G(x) = f(x, x) = \lambda_{11} d_1^2 + \lambda_{22} d_2^2 + \dots + \lambda_{nn} d_n^2$$

حيث  $\lambda_{ii} \in K$  ،  $d_1, \dots, d_n$  هي مركبات الشعاع  $x$   
 في اساس اخر جديد  $\{u_1, \dots, u_n\}$  في  $V$  .  
 لايجاد هذا الاساس الجديد نكتب كل من  $x_1, \dots, x_n$   
 بدلالة  $d_1, \dots, d_n$  ، ثم باستخدام (3.7.3 فرع (2))  
 نوجد مصفوفة العبور من الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى  
 الاساس الجديد  $\{u_1, \dots, u_n\}$  ، ببيان  $\{v_1, \dots, v_n\}$  معروف  
 فانتنا نوجد الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  .

(2) طريقة جالويي (سنقتصر على ذكر هذه الطريقة فقط)

بإذا كان كل المحددات  $\Delta_1 = a_{11}$  ،  $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ،

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots$$

يختلف عن الصفر .

فأنه يوجد الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  في  $V$  . حيث ان الشكل  
 التربيعي  $\mathcal{Q}$  يأخذ الشكل

$$\mathcal{Q}(x) = f(x, x) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2$$

حيث  $y_1, \dots, y_n$  هي مركبات الشعاع  $x$  في الاساس  
 الجديد  $\{u_1, \dots, u_n\}$  .

9.1.4 مثال

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ذا بعد 3

ولتكن  $\{v_1, v_2, v_3\}$  اساساً في  $V$  .



ولیکن  $f(x, x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 8x_3^2$  كلاًً تربيعياً  
 على  $V$ ، حيث  $x_1, x_2, x_3$  هـ مركبات السّاع  $x$  في  
 الاساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$  . نضع :

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = y_1, \quad x_3 = y_3$$

فأنت :

$$\begin{aligned} f(x, x) &= -y_1^2 + 2y_1y_2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2) + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \\ &= -(y_1 - y_2)^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 \end{aligned}$$

نضع :

$$z_1 = (y_1 - y_2) = -y_1 - y_2, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3$$

فأنت :

$$\begin{aligned} f(x, x) &= -z_1^2 + z_2^2 + 4z_2z_3 - 8z_3^2 \\ &= -z_1^2 + (z_2 + 2z_3)^2 - 12z_3^2 \end{aligned}$$

نضع :

$$d_1 = z_1, \quad d_2 = z_2 + 2z_3, \quad d_3 = z_3$$

فأنت :

$$f(x, x) = -d_1^2 + d_2^2 - 12d_3^2$$

حيث  $d_1, d_2, d_3$  هـ مركبات السّاع  $x$  في الاساس  
 الجديد  $\{u_1, u_2, u_3\}$  . لنبحث عن هذا الاساس . بالقول

$$d_1 = z_1 = -y_1 + y_2 = x_2 - x_1 \quad \text{نحل على :}$$

$$d_2 = z_2 + 2z_3 = y_2 + 2y_3 = x_1 + 2x_3$$

$$d_3 = z_3 = y_3 = x_3$$

من هنا فإن :

$$x_1 = d_2 - 2d_3$$

$$x_2 = d_1 + d_2 - 2d_3$$

$$x_3 = d_3$$

فإن مصفوفة الصور من الأساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$  الى الأساس

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{ هو } \{u_1, u_2, u_3\}$$

فإننا عرفنا الأساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$  فأننا نجد الأساس  $\{u_1, u_2, u_3\}$ .

## 2.4 الفضاء الأقليدي

### 1.2.4 تعريف

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، نقول ان التطبيق  $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  هو حاصل الضرب الداخلي على  $V$  إذا تحققت ما يلي :-

$$(1) \quad f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1), \quad v_1, v_2 \in V \text{ لكل}$$

$$(2) \quad f(\lambda v_1, v_2) = \lambda f(v_1, v_2), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ ولكل } v_1, v_2 \in V$$

$$(3) \quad f(v_1 + v_3, v_2) = f(v_1, v_2) + f(v_3, v_2), \quad v_1, v_2, v_3 \in V \text{ لكل}$$

$$(4) \quad v = 0 \Leftrightarrow f(v, v) = 0 \text{ و } f(v, v) > 0, \quad v \in V \text{ لكل}$$

ونكتب عادة  $v_1 \circ v_2$  بدلاً عن  $f(v_1, v_2)$ .

نلاحظ من التعريف مباشرة انه لكل  $v_1, v_2, v_3 \in V$  فان:

$$v_1 \circ (v_2 + v_3) = (v_2 + v_3) \circ v_1 = v_2 \circ v_1 + v_3 \circ v_1 = v_1 \circ v_2 + v_1 \circ v_3$$

وكذلك لكل  $\lambda \in \mathbb{R}$  فان:

$$v_1 \circ \lambda v_2 = \lambda v_2 \circ v_1 = \lambda (v_2 \circ v_1) = \lambda (v_1 \circ v_2)$$

من هنا ومن تعريف الضرب السلمي ينتج مباشرة النظرية

التالية :-

### 2.2.4 نظرية

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، فان

$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  هو ضرب سلمي على  $V \Leftrightarrow f$  لكل مزدوج الخطية ومتماثل على  $V$  والشكل التربيعي المرافق له محددة موجبة .

### 3.2.4 مثال

على الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^n$  على الحقل  $\mathbb{R}$  لغرف التطبيق

$$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ كما يلي :}$$

لكل  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$  اذا كان  $v_1 = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ،  $v_2 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

$$f(v_1, v_2) = v_1 \circ v_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \quad \text{فان :}$$

من الواضح أن  $f$  تحققت جميع الشروط من تعريف الضرب السلمي .

#### 4.2.4 تعريف

نسمي الفضاء الشعاعي  $E$  ، ذا البعد المنتهي على الحقل  $\mathbb{R}$  ، والمعروف عليه الضرب الداخلي ، فضاءاً أقليدياً . فإذا كان  $\theta$  ضرباً سلمياً على  $E$  ، نعرف للفضاء الأقليدي  $E$  بالرمز  $(E, \theta)$  . نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي  $E_1$  من الفضاء الشعاعي  $E$  بالفضاء الأقليدي الجزئي من  $E$  .

#### 5.2.4 تعريف

ليكن  $(E, \theta)$  فضاءً أقليدياً . لكل  $v \in E$  نعرف طول الشعاع  $v$  بأنه المقدار  $\sqrt{v\theta v}$  ونرفقه بالرمز  $\|v\|$  اي ان :  $\|v\| = \sqrt{v\theta v}$  .

#### 6.2.4 نظرية

ليكن  $(E, \theta)$  فضاءً اقليدياً فإنه :

$$(1) \text{ لكل } v \in E , \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(2) \text{ لكل } v \in E \text{ ولكل } \lambda \in \mathbb{R} , \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$(3) \text{ لكل } v_1, v_2 \in E , |v_1\theta v_2| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

وتسمى هذه الخاصية ، بخاصية كوشي سفارز .

$$(4) \text{ لكل } v_1, v_2 \in E , \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

وتسمى هذه الخاصية ، بالخاصية المثلثية .

البرهان :

$$(1) \text{ لكل } v \in E \text{ فإن } \|v\| = \sqrt{v\theta v} \text{ وكذلك حسب (1.2.4)}$$

$$\text{فإن : } v\theta v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \text{ وبذلك فإن : } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

(2) لكل  $v \in E$  ولكل  $\lambda \in \mathbb{R}$  فأن:

$$\|\lambda v\| = \sqrt{\lambda v \circ \lambda v} = \sqrt{\lambda^2 (v \circ v)} = |\lambda| \sqrt{v \circ v} = |\lambda| \|v\|$$

(3) لكل  $v_1, v_2 \in E$  وإذا كان  $v_1$  هو الشعاع الصفري

(أو  $v_2$  هو الشعاع الصفري) فأن:  $\|v_1\| \cdot \|v_2\| = 0$

وكذلك  $|v_1 \circ v_2| = 0$  فأن:  $|v_1 \circ v_2| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$

لتفرض ان  $v_1, v_2$  غير معدومان فأنه يوجد  $c \in \mathbb{R}$  حيث

$$\|v_2\| = c \|v_1\|$$

$$v_2 \circ v_2 = \|v_2\|^2 = \|v_2\| \cdot \|v_2\|$$

$$= c \|v_1\| \cdot c \|v_1\| = c^2 \|v_1\|^2 = c^2 (v_1 \circ v_1)$$

ومن هنا فأن:

$$0 \leq (c v_1 \pm v_2) \circ (c v_1 \pm v_2) = c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2) \pm 2c (v_1 \circ v_2)$$

أي ان:

$$\pm 2c (v_1 \circ v_2) \leq c^2 (v_1 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

فأن:

$$\pm 2c (v_1 \circ v_2) \leq c^2 \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

وبذلك

$$\pm 2c (v_1 \circ v_2) \leq c \|v_1\| \cdot \|v_2\| + c \|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

فأن:

$$\pm 2c (v_1 \circ v_2) \leq 2c \|v_1\| \|v_2\|$$

وبذلك فأن:

$$|v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \|v_2\|$$

(4) لكل  $v_1, v_2 \in E$  فأن :

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= (v_1 + v_2) \cdot (v_1 + v_2) = v_1 \cdot v_1 + 2(v_1 \cdot v_2) + (v_2 \cdot v_2) \\ &\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \cdot \|v_2\| + \|v_2\|^2 = (\|v_1\| + \|v_2\|)^2 \end{aligned}$$

فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq (\|v_1\| + \|v_2\|)^2$$

أي أن :

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

(و. ه. م. 3.0)

### 3.4 الفضاءات الإقليدية الجزئية المتعامدة

#### تعريف 1.3.4

ليكن  $(E, \cdot)$  فضاءاً إقليدياً ، لكل  $v_1, v_2 \in E$  نعرف الزاوية  $\theta$  بين الشعاعين  $v_1, v_2$  بأنها :

$$\theta = \arccos \left( \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} \right)$$

أي أن :

$$\cos \theta = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|}$$

حيث  $0 \leq \theta \leq \pi$

ونقول ان  $v_1, v_2$  متعامدان اذا كانت الزاوية بينهما هي  $\frac{\pi}{2}$  . من هنا نرى ان  $v_1, v_2$  متعامدان  $\Leftrightarrow v_1 \cdot v_2 = 0$  . ونقول أن  $v_1$  عمودي على  $v_2$  (أو ان  $v_2$

عمودي على  $v_1$  ونكتب  $v_1 \perp v_2$

### 2.3.4 نظرية

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءً اقليدياً . لكل  $v_1, v_2 \in E$  ، إذا

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \quad \text{فإن } v_1 \perp v_2$$

البرهان :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2) \circ (v_1 + v_2)$$

$$= (v_1 \circ v_1) + (v_1 \circ v_2) + (v_2 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2)$$

لكن  $v_1 \circ v_2 = 0$  ،  $v_2 \circ v_1 = 0$  فإن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = v_1 \circ v_1 + v_2 \circ v_2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

(و.ه.م.)

ويمكن تعميم النظرية السابقة كما يلي :

لكل  $v_1, \dots, v_n \in E$  ، إذا كانت المجموعة  $v_1, \dots, v_n$  متعامدة

أزواجاً أزواجاً فإن :

$$\left\| \sum_{i=1}^n v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|v_i\|^2$$

### 3.3.4 تعريف

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءً اقليدياً . لكل  $v_1, v_2 \in E$

نعرف البعد بين المتعامدين  $v_1, v_2$  بأنه العدد الحقيقي

$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$

نلاحظ أنه لكل  $v \in E$  فإن  $d(v, v) = 0$

وكذلك لكل  $v_1, v_2 \in E$  فإن  $v_1 \neq v_2 \Leftrightarrow d(v_1, v_2) > 0$

وكذلك:  $d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\| = |-1| \|v_2 - v_1\| = d(v_2, v_1)$   
وأخيراً لكل  $v_1, v_2, v_3 \in E$  فإن:

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3) &= \|v_1 - v_2\| + \|v_2 - v_3\| \\ &\geq \|v_1 - v_2 + v_2 - v_3\| = \|v_1 - v_3\| = d(v_1, v_3) \end{aligned}$$

أي أن:

$$d(v_1, v_3) \leq d(v_1, v_2) + d(v_2, v_3)$$

#### 4.3.4 تعريف

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءاً اقليدياً،  $(E_1, \phi)$  فضاءاً  
أقليدياً جزئياً من  $E$ . نقول ان الضاع  $v \in E$  عمودي  
على الفضاء الاقليدي الجزئي  $E_1$  اذا كان  $v$  عمودياً  
على جميع اعضاء  $E_1$ . ايانه لكل  $u \in E_1$ ،  $v \cdot u = 0$ .  
ونكتب  $v \perp E_1$ . نهي المجموعة  $\{v \in E; v \perp E_1\}$   
المكتملة العمودية للفضاء الاقليدي الجزئي  $E_1$  ونرمز لها  
بالرمز  $E_1^\perp$ .

نقول ان الفضاءان الاقليديان الجزئيان  $E_1, E_2$  من  
الفضاء الاقليدي  $E$  هما متعامدان اذا كان لكل  
 $v_1 \in E_1$  ولكل  $v_2 \in E_2$ ،  $v_1 \cdot v_2 = 0$  ونكتب عندئذ  
 $E_1 \perp E_2$ .

#### 5.3.4 نظرية

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءاً اقليدياً،  $E_1$  فضاءاً اقليدياً  
جزئياً من  $E$ . فان  $E_1^\perp$  هو فضاء اقليدي جزئي من  $E$ .



البرهان :

لكل  $v_1, v_2 \in E_1^\perp$  ولكل  $x \in E_1$  فإن :

$$\begin{aligned} (v_1 - v_2) \circ x &= v_1 \circ x + (-v_2) \circ x \\ &= v_1 \circ x + (-1)(v_2 \circ x) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

فإن  $v_1 - v_2 \in E_1^\perp$

لكل  $\lambda \in \mathbb{R}$  يكون :  $\lambda v_1 \circ x = \lambda(v_1 \circ x) = \lambda \cdot 0 = 0$

ومنه  $\lambda v_1 \in E_1^\perp$

بهذا فإن  $E_1^\perp$  هو فضاء أوتيلوي جزئي من  $E$ .

(و.ه.و. ١٣)

#### 6.3.4 نظرية

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءاً أوتيلدياً و  $E_1$  فضاءاً

أوتيلدياً جزئياً من  $E$ . وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  أساساً

للفضاء  $E_1$  فإنه لكل  $x \in E$

$$x \perp E_1 \iff x \circ v_i = 0 \text{ لكل } i=1, \dots, n$$

البرهان :

لتفرض ان  $x \perp E_1$  فإنه من التعريف لكل  $v \in E_1$

$x \circ v = 0$  ، وبذلك فإنه لكل  $i=1, \dots, n$  ،  $x \circ v_i = 0$

لتفرض الآن انه لكل  $i=1, \dots, n$  فإن  $x \circ v_i = 0$

فإنه لكل  $y \in E_1$  حيث  $y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$  ، حيث  $\lambda_i \in \mathbb{R}$

فإن :  $x \circ y = x \circ (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 (x \circ v_1) + \dots + \lambda_n (x \circ v_n)$

$$= 0 + \dots + 0 = 0$$

(و.ه.و. ١٣)

فإن  $x \perp E_1$

## 4.4 الأساس المعياري المتعامد

### 1.4.4 تعريف

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءً اقليدياً ذا بعد  $n$  .  
 نقول ان الاساس  $\{w_1, \dots, w_n\}$  هو اساس متعامد  
 للفضاء الاقليدي  $E$  ، اذا كان كل زوج من هذه الشعاع  
 متعامداً ، اي انه لكل  $i \neq j$  ، فان  $\phi(w_i, w_j) = 0$  . ونقول  
 ان الاساس  $\{e_1, \dots, e_n\}$  هو اساس معياري متعامد  
 ، اذا كان كل زوج من هذه الشعاع متعامداً وطول كل  
 شعاع هو 1 . اي انه :

$$\phi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

### 2.4.4 نظرية

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءً اقليدياً ذا بعد  $n$  ،  
 ولتكن  $e_1, \dots, e_n$  شعاعاً من  $E$  بحيث ان :  
 $\phi(e_i, e_j) = 0$  عندما  $i \neq j$   
 و  $\phi(e_i, e_i) = \|e_i\|^2 = 1$  لكل  $i = 1, \dots, n$   
 فان المجموعة  $\{e_1, \dots, e_n\}$  هي اساس معياري متعامد  
 للفضاء الاقليدي  $E$  .  
 البرهان :

بيان  $\dim E = n$  وعدد الشعاع  $\{e_1, \dots, e_n\}$  هو  $n$   
 فيكفي ان نبين ان هذه الشعاع مستقلة خطياً .

لأي  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  إذا كان  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_i \varepsilon_i + \dots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$  فإنه لكل  $c = 1, \dots, n$

$$(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_i \varepsilon_i + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ \varepsilon_i = 0$$

من هنا فإن :

$$\lambda_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_i) + \dots + \lambda_i (\varepsilon_i \circ \varepsilon_i) + \dots + \lambda_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_i) = 0$$

أي أن :

$$\lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_i \cdot 1 + 0 + \dots + 0 = 0$$

ومنه فإن  $\lambda_i = 0$  لكل  $c = 1, \dots, n$

أي أن الأشعة  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  متقلة خطياً

وبذلك فإن  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  هي أساس معيارى متعامد للنضاء الأقليدي  $E$ .

(و. ه. ٣.٠)

### 3.4.4 نظرية

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءً اقليدياً ذا بعد  $n$ .

ولتكن  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  أساس معيارى متعامداً في  $E$ .

فإنه لكل  $x, y \in E$  إذا كان  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i$  ،  $y = \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i$  ،

حيث  $\mu_i, \lambda_i \in \mathbb{R}$  فإن :

$$x \circ y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \mu_i$$

البرهان :

$$x \circ y = (\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ (\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_n \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_1 \mu_n (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_n) + \dots + \lambda_n \mu_1 (\varepsilon_n \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_n \mu_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \mu_1 + \dots + \lambda_n \mu_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$$

(و. ه. ٣.٠)

### 4.4.4 طريقة كرام شملت الوصول على اساس متعامد

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءاً أقليدياً ذا بعد  $n$  ،  
 ولتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $E$  .  
 تعتمد طريقة كرام شملت على الاختيار التالي :

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

$$w_i = a_{i1} w_1 + a_{i2} w_2 + \dots + a_{i,i-1} w_{i-1} + v_i$$

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \dots + a_{n,n-1} w_{n-1} + v_n$$

حيث توجد  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  بحيث تكون الشعبة  $w_1, \dots, w_n$  متعامدة فيما بينها ازواً ازواً .  
 لكي تكون  $w_1, w_2$  متعامدين ، فإنه يجب ان يتحقق الشرط :  $w_1 \phi w_2 = 0$

$$w_1 \phi (a_{21} w_1 + v_2) = 0 \quad \text{اي انه :}$$

$$a_{21} (w_1 \phi w_1) + w_1 \phi v_2 = 0 \quad \text{فان :}$$

$$a_{21} = - \frac{w_1 \phi v_2}{w_1 \phi w_1} = - \frac{w_1 \phi v_2}{\|w_1\|^2} \quad \text{اي ان :}$$

حيث  $w_1, v_2$  معروفتين فنجد  $a_{21}$  وهكذا نجد  $w_2$  عمودي على  $w_1$  .

وهكذا نستمر ونجد الشعبة  $w_1, \dots, w_{i-1}$  متعامدة فيما بينها .  
 ليكن  $w_i$  لاي  $i$  الشعبة  $w_i$  والمتعامد على جميع الشعبة  $w_1, \dots, w_{i-1}$  فإنه :

وكيف  $w_i = a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{i,i-1}w_{i-1} + v_i$

$\cdot \quad j = 1, \dots, i-1 \quad \text{لكل} \quad w_i \circ w_j = 0$

$(a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{i,i-1}w_{i-1} + v_i) \circ w_1 = 0$

$(a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{i,i-1}w_{i-1} + v_i) \circ w_2 = 0$

-----

$(a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \dots + a_{i,i-1}w_{i-1} + v_i) \circ w_{i-1} = 0$

بما ان الـ  $w_1, \dots, w_{i-1}$  متعامدة فيما بينها

انزاعاً انزاعاً فان :

$a_{i1}(w_1 \circ w_1) + v_i \circ w_1 = 0$

$a_{i2}(w_2 \circ w_2) + v_i \circ w_2 = 0$

-----

$a_{i,i-1}(w_{i-1} \circ w_{i-1}) + v_i \circ w_{i-1} = 0$

اي ان :

$a_{i1} = -\frac{v_i \circ w_1}{w_1 \circ w_1} = -\frac{v_i \circ w_1}{\|w_1\|^2}$

$a_{i2} = -\frac{v_i \circ w_2}{w_2 \circ w_2} = -\frac{v_i \circ w_2}{\|w_2\|^2}$

-----

$a_{i,i-1} = -\frac{v_i \circ w_{i-1}}{w_{i-1} \circ w_{i-1}} = -\frac{v_i \circ w_{i-1}}{\|w_{i-1}\|^2}$

وهكذا فان السَّعاع  $w_n$  والعمودي على بقية السَّعاع

$w_n = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \dots + a_{n,n-1}w_{n-1} + v_n$  يكون  $w_1, \dots, w_{n-1}$

$a_{n1} = -\frac{v_n \circ w_1}{\|w_1\|^2}, \dots, a_{n,n-1} = -\frac{v_n \circ w_{n-1}}{\|w_{n-1}\|^2}$  صحة

نبرهن ان الـرئعة  $\omega_1, \dots, \omega_n$  متقله فظيا .

لدى  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  اذا كان:  $\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \dots + \lambda_{n-1} \omega_{n-1} + \lambda_n \omega_n = 0$

لكن  $\omega_1 = v_1$

$$\omega_2 = a_{21} \omega_1 + v_2 = b_{21} v_1 + v_2$$

$$\begin{aligned} \omega_3 &= a_{31} \omega_1 + a_{32} \omega_2 + v_3 = a_{31} v_1 + a_{32} (b_{21} v_1 + v_2) + v_3 \\ &= b_{31} v_1 + b_{32} v_2 + v_3 \end{aligned}$$

$$\omega_{n-1} = b_{(n-1)1} v_1 + b_{(n-1)2} v_2 + \dots + b_{(n-1)(n-2)} v_{n-2} + v_{n-1}$$

$$\omega_n = b_{n1} v_1 + b_{n2} v_2 + \dots + b_{n(n-1)} v_{n-1} + v_n$$

فان:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 v_1 + \lambda_2 (b_{21} v_1 + v_2) + \lambda_3 (b_{31} v_1 + b_{32} v_2 + v_3) + \dots + \lambda_{n-1} (b_{(n-1)1} v_1 + b_{(n-1)2} v_2 + \dots \\ &+ b_{(n-1)(n-2)} v_{n-2} + v_{n-1}) + \lambda_n (b_{n1} v_1 + b_{n2} v_2 + \dots + b_{n(n-1)} v_{n-1} + v_n) = 0 \end{aligned}$$

فان:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 b_{21} + \lambda_3 b_{31} + \dots + \lambda_{n-1} b_{(n-1)1} + \lambda_n b_{n1}) v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 b_{32} + \dots + \lambda_{n-1} b_{(n-1)2} + \lambda_n b_{n2}) v_2 \\ &+ \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n b_{n(n-1)}) v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0 \end{aligned}$$

بان الـرئعة  $v_1, \dots, v_n$  متقله فظيا ، فان  $\lambda_n = 0$

وكذلك  $\lambda_{n-1} + \lambda_n b_{n(n-1)} = 0$  فان  $\lambda_{n-1} = 0$  وهكذا ... فان:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$  . اي ان الـرئعة  $\omega_1, \dots, \omega_n$  متقله فظيا .

وبذلك فان  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  له اساس متعامد للفضاء الاقليدي  $E$  .

فاذا وضعنا  $\varepsilon_i = \frac{\omega_i}{\|\omega_i\|}$  لكل  $i = 1, \dots, n$  فان:  $\varepsilon_i = 1$  ،  $\varepsilon_i = 0$  لكل  $i = 1, \dots, n$  .  
 بذلك فاننا نصل على اساس معياري متعامد

$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  للفضاء الاقليدي انطلاقا من الـاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  .

5.4.4 مثال

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءً أقليدياً جزئياً من الفضاء

الأقليدي  $\mathbb{R}^4$  على الحقل  $\mathbb{R}$ . وليكن :

$$\{v_1 = (1, 2, 2, -1), v_2 = (1, 1, -5, 3), v_3 = (3, 2, 8, -7)\}$$

الآن للفضاء  $E$ . لنبحث عن الأساس المتعاقد  $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

للفضاء الأقليدي  $E$ . فإن :

$$\omega_1 = v_1$$

$$\omega_2 = a_{21} \omega_1 + v_2$$

$$\omega_3 = a_{31} \omega_1 + a_{32} \omega_2 + v_3$$

وكذلك :

$$a_{21} = -\frac{v_2 \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \quad a_{31} = -\frac{v_3 \cdot \omega_1}{\|\omega_1\|^2}, \quad a_{32} = -\frac{v_3 \cdot \omega_2}{\|\omega_2\|^2}$$

$$\omega_1 = (1, 2, 2, -1)$$

فإن :

$$a_{21} = -\frac{(1, 1, -5, 3) \cdot (1, 2, 2, -1)}{\|(1, 2, 2, -1)\|^2} = \frac{-1 - 2 + 10 + 3}{1 + 4 + 4 + 1} = \frac{10}{10} = 1$$

أي أن :

$$\omega_2 = 1 \cdot \omega_1 + v_2 = (1, 2, 2, -1) + (1, 1, -5, 3) = (2, 3, -3, 2)$$

$$a_{31} = -\frac{(3, 2, 8, -7) \cdot (1, 2, 2, -1)}{\|(1, 2, 2, -1)\|^2} = \frac{-3 \cdot 0}{10} = -3$$

$$a_{32} = -\frac{(3, 2, 8, -7) \cdot (2, 3, -3, 2)}{\|(2, 3, -3, 2)\|^2} = \frac{26}{26} = 1$$

فإن :

$$\omega_3 = -3(1, 2, 2, -1) + (2, 3, -3, 2) + (3, 2, 8, -7) = (2, -1, -1, -2)$$

واضح ان الربعة  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  منقلة متعامدة. بذلك نتبع

ان  $\{w_1, w_2, w_3\}$  هي اساس للفضاء  $E_1$   
وكذلك

$$w_1 \cdot w_2 = (1, 2, 2, -1) \cdot (2, 3, -3, 2) = 2 + 6 - 6 - 2 = 0$$

$$w_1 \cdot w_3 = (1, 2, 2, -1) \cdot (2, -1, -1, -2) = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$$

$$w_2 \cdot w_3 = (2, 3, -3, 2) \cdot (2, -1, -1, -2) = 4 - 3 + 3 - 4 = 0$$

اي ان الاشعة  $\{w_1, w_2, w_3\}$  هي اساس متعامد للفضاء  $E_1$   
من هنا فان:

$$e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{(-1, 2, 2, -1)}{\sqrt{10}} = \left( \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{(2, 3, -3, 2)}{\sqrt{26}} = \left( \frac{2}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}}, \frac{-3}{\sqrt{26}}, \frac{2}{\sqrt{26}} \right)$$

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{(2, -1, -1, -2)}{\sqrt{10}} = \left( \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}} \right)$$

ونرمضان:

$$\|e_1\| = \sqrt{e_1 \cdot e_1} = \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10}} = 1$$

$$\|e_2\| = \sqrt{e_2 \cdot e_2} = \sqrt{\frac{4}{26} + \frac{9}{26} + \frac{9}{26} + \frac{4}{26}} = 1$$

$$\|e_3\| = \sqrt{e_3 \cdot e_3} = \sqrt{\frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{4}{10}} = 1$$

لذلك فاننا حصلنا على الاشعة  $\{e_1, e_2, e_3\}$  وهي

اساس معياري متعامد للفضاء الاقليدي  $E_1$  انظروا

من الاساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

#### 6.4.4 نظرية

ليكن  $(E, \cdot)$  فضاءً اقليدياً ذا بعد  $n$ ، وليكن



$E_1$  فضاءاً أقليدياً جزئياً ذا بعد  $k$  من الفضاء  $E$ .  
فأنة لوجود في الفضاء  $E$  اساس معياري متعامد  
 $\{e_1, \dots, e_k\}$  حيث ان  $e_1, \dots, e_k \in E_1$  اساس للفضاء  $E_1$   
و  $e_{k+1}, \dots, e_n \in E_1^\perp$   
البرهان:

لتكن  $\{v_1, \dots, v_k\}$  اساس في  $E_1$  فأنه  
حسب (7.5.1) يمكن تكملة هذا الاساس الى  
اساس للفضاء  $E$  ، لتكن  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  اساس  
للفضاء  $E$  . من هذا الاساس يمكننا الحصول على  
اساس متعامد  $\{w_1, \dots, w_n\}$  كما يلي:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = a_{21} w_1 + v_2$$

-----

$$w_k = a_{k1} w_1 + a_{k2} w_2 + \dots + a_{kk} w_{k-1} + v_k$$

-----

$$w_n = a_{n1} w_1 + a_{n2} w_2 + \dots + a_{nn} w_{n-1} + v_n$$

بما ان  $v_1, \dots, v_k \in E_1$  فان  $w_1, \dots, w_k \in E_1$   
الاشعة  $e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$  لكل  $i=1, \dots, n$  هي  
اشعة معيارية متعامدة وعددها  $n$  ، فأنها عبارة  
عن اساس معياري متعامد للفضاء  $E$  .  
كذلك نلاحظ ان الاشعة  $e_i \in E_1$  لكل  $i=1, \dots, k$  .  
فأن هذه الاشعة اساس معياري متعامد للفضاء  $E_1$  .

وكذلك  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_{k+j} = 0$  لكل  $j=1, \dots, n-k$  ، ولكل  $i=1, \dots, k$  ،  
فإن الأضعة

$$\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n \in E_1^\perp$$

(و. ه. ٣.٠)

#### 7.4.4 نظرية

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءاً اقليدياً ذا بعد  $n$  ، وليكن  $E_1$  فضاءاً  
اقليدياً جزئياً من  $E$  ، فأن :  $E = E_1 \oplus E_1^\perp$   
البرهان :

إذا كان  $E_1$  بعده  $k$  مثلاً فأنه حسب (6.4.4)

يوجد اساس معياري متعامد  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  للفضاء  $E_1$  بحيث  
أن  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  اساس للفضاء  $E_1$  و  $\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n \in E_1^\perp$  .  
لكل  $x \in E$  فأن  $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$  حيث  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  .

ولذلك  $\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_k \varepsilon_k \in E_1$  و  $\lambda_{k+1} \varepsilon_{k+1} + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \in E_1^\perp$   
بذلك فأنه لكل  $x \in E$  فأن  $x = a + b$  حيث  $a \in E_1$  ،

$b \in E_1^\perp$  ومنه  $E \subseteq E_1 + E_1^\perp$  . وبما أن  $E_1 + E_1^\perp \subseteq E$  فأن

$E = E_1 + E_1^\perp$  . لكل  $x \in E_1 \cap E_1^\perp$  فأن  $x \in E_1$  و  $x \in E_1^\perp$

اي ان  $x \cdot x = 0$  وهذا غير ممكن لأنه  $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_i = 1$  لكل

$i=1, \dots, n$  . وبذلك فأن  $E_1 \cap E_1^\perp = \{0\}$  اي ان  $E = E_1 \oplus E_1^\perp$  .

(و. ه. ٣.٠)

من النظرية السابقة ومن النظرية (10.5.1) ينتج مباشرة

النتيجة التالية .

8.4.4 نتيجة

ليكن  $(E, \theta)$  فضاءً أقليدياً ،  $E_1$  فضاءً  
 أقليدياً جزئياً من  $E$  ، فإن :  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^\perp$  .

5.4 التطبيقات العمودية والمصفوفات المتعامدة

1.5.4 تعريف

ليكن  $(E_1, \theta)$  ،  $(E_2, \theta)$  فضاءين أقليديين ،  
 وليكن  $f \in L(E_1, E_2)$  . نقول ان  $f$  تطبق عمودياً إذا  
 كان لكل  $v, u \in E_1$  ،  $f(v) \theta f(u) = v \theta u$  .  
 نلاحظ من هذا التعريف مباشرة انه إذا كان  $u = v$  فإن :

$$f(v) \theta f(v) = v \theta v$$

$$\text{أي أن: } \|f(v)\|^2 = \|v\|^2$$

2.5.4 مثال

ليكن  $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$  فضاءً أقليدياً على الحقل  $\mathbb{R}$  .  
 لكل  $v, u \in \mathbb{R}^2$  حيث  $v = (v_1, v_2)$  ،  $u = (u_1, u_2)$  فإن  
 $v \theta u = v_1 u_1 + v_2 u_2$  . لاحظ المثال (3.2.4) .  
 ليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

فإن  $f$  تطبق عمودياً لأنه :

$$f(v) \theta f(u) = f(v_1, v_2) \theta f(u_1, u_2) = (-v_1, v_2) \theta (-u_1, u_2)$$

$$= \nu_1 u_1 + \nu_2 u_2 = (\nu_1, \nu_2) \circ (u_1 \circ u_2) = \nu \circ u$$

### 3.5.4 نظرية

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءاً اقليدياً . ولتكن  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  أئعة معيارية متعامدة في  $E$  ، وليكن  $f: E \rightarrow E$  تطبقاً عمودياً ، فإن مجموعة الأئعة  $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$  هي مجموعة معيارية متعامدة .  
البرهان :

لكل  $n, z, i = 1, \dots, n$  حيث  $i \neq z$  فإن :

$$f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_z) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_z = 0$$

أي ان الأئعة  $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$  متعامدة .

بإثباته لكل  $n, i = 1, \dots, n$  فإن :  $\|\varepsilon_i\|^2 = 1$  ، لذلك فإن :

$$\|f(\varepsilon_i)\|^2 = \|\varepsilon_i\|^2 = 1$$

ومنه نستنتج ان مجموعة الأئعة  $f(\varepsilon_1), \dots, f(\varepsilon_n)$  مجموعة معيارية متعامدة .

(و.ه. ٣.٠)

### 4.5.4 تعريف

لتكن  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  . نقول ان المصفوفة  $A$  هي مصفوفة متعامدة باذا وحفظ باذا كانت أئعة اعمدة المصفوفة  $A$  مجموعة معيارية متعامدة .  
فأذا رمزنا لأعمدة المصفوفة  $A$  بالرمز  $c_1, \dots, c_n$  فإن  $A$  متعامدة  $\Leftrightarrow c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  لكل  $n, z, i = 1, \dots, n$  .

5.5.4 نظرية

$A^T A = I_n \Leftrightarrow$  مصفوفة متعامدة  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

البرهان:

لتكن  $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  وليكن  $c_i$  اعمدة

المصفوفة  $A$ ، فأن:  $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

فأنه لكل  $i, j = 1, \dots, n$ ، وإذا كان  $i = j$  فإن  $c_i \cdot c_j = 1$ ، وإذا كان  $i \neq j$  فإن  $c_i \cdot c_j = 0$ .

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

وبالعكس، وإذا كانت  $A^T A = I_n$  فإن  $c_i \cdot c_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$ .

فأن اعمدة اعمدة المصفوفة  $A$  مجموعة معيارية متعامدة ومنه المصفوفة  $A$  هي مصفوفة متعامدة. (و.ه. ٣.٠)

لنلاحظ هنا، انه إذا كانت  $A$  مصفوفة متعامدة، فإن اعمدة اعمدة  $A$  متقلة خطياً، ومنه فإن التطبيق الخطي المرافق للمصفوفة  $A$  تقابل، ومنه نستنتج إذا كانت  $A$  مصفوفة متعامدة فإن  $A$  عكوس.

## 6.5.4 نظرية

- (1) المصفوفة الكيادية هي مصفوفة متعامدة .  
 (2) لكل  $A \in M_n(\mathbb{R})$  فإن  $A$  مصفوفة متعامدة  $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$   
 (3) حاصل ضرب مصفوفتين متعامدتين هي مصفوفة متعامدة .  
 (4) محدد المصفوفة المتعامدة يساوي  $\pm 1$  .  
 (5) المصفوفة العكوسة للمصفوفة المتعامدة هي مصفوفة متعامدة .

البرهان :

- (1) وإذا كانت  $I_n \in M_n(\mathbb{R})$  ، فإنه من الواضح ان :  
 $I_n^T I_n = I_n$  ومنه  $I_n$  مصفوفة متعامدة .  
 (2) وإذا كانت  $A$  مصفوفة متعامدة فإنه يجب  
 (5.5.4)  $A^T A = I_n$  فإن  $A^T = A^{-1}$  .  
 وبالعكس وإذا كانت  $A^T = A^{-1}$  فإن :  $A^T A = A^{-1} A = I_n$   
 ومنه  $A$  مصفوفة متعامدة .  
 (3) لنفرض ان  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$  مصفوفتين متعامدتين  
 فإنه يجب (2) فإن  $A^T = A^{-1}$  ،  $B^T = B^{-1}$  .  
 ومنه :  $(AB)^T = B^T A^T = B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$   
 فإنه يجب (2) تكون  $AB$  مصفوفة متعامدة .  
 (4) لئكن  $A \in M_n(\mathbb{R})$  مصفوفة متعامدة ، عنده  
 $A^T \cdot A = I_n$  . من هنا فإن :  
 $\det(A)^2 = \det(A) \cdot \det(A) = \det(A^T) \cdot \det A = \det(A^T A)$   
 $= \det(I_n) = 1$   
 فإن  $\det(A) = \pm 1$

(5) لتكن المصفوفة  $A \in M_n(\mathbb{R})$  مصفوفة متعامدة  
 فأن  $A^T = A^{-1}$  . ولتكن  $A^{-1} = C$  نذهن ان  $C$  متعامدة  
 نرغظ ان :  $C^{-1} = (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = C^T$   
 لهذا نستنج ان  $C$  مصفوفة متعامدة .  
 (و.ه.م.و)

### 7.5.4 نظرية

ليكن  $(E_1, \theta)$  ،  $(E_2, \phi)$  فضاءين اقليديين  
 ذوي بعدين  $n$  . ولتكن  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  اساساً معيارياً  
 متعامداً في  $E_1$  ،  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  اساساً معيارياً متعامداً  
 في  $E_2$  . وليكن  $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  ، فأن  $f$  يكون  
 تطبيقاً عمودياً  $\Leftrightarrow$  المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$   
 بالنسبة للأساسين المذكورين مصفوفة متعامدة .

البرهان :

لتكن  $A = (a_{ij}) = M(f)$  المصفوفة المرافقة للتطبيق  
 الخطي  $f$  بالنسبة للأساس  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  في  $E_1$  والاساس  
 $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  في  $E_2$  . لنفرض لأعمدة هذه المصفوفة  $b_1, \dots, b_n$   
 لنفرض ان  $\theta$  هو الضرب الداخلي في  $\mathbb{R}^n$  ، فأن لكل  
 $i, j$

$$f(\epsilon_i) = a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n$$

$$f(\epsilon_j) = a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n$$

$$f(\epsilon_i) \cdot f(\epsilon_j) = \left( \sum_{p=1}^n a_{pi}\beta_p \right) \cdot \left( \sum_{q=1}^n a_{qj}\beta_q \right) \quad \text{فأن :}$$

$$= \sum_{p,q=1}^n a_{pi} a_{qj} (\beta_p \text{ ó } \beta_q) = \sum_{p=1}^n a_{pi} a_{pj} (\beta_p \text{ ó } \beta_p)$$

$$= \sum_{p=1}^n a_{pi} a_{pj}$$

وكذلك :

$$C_i \text{ ó } C_j = (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \text{ ó } (a_{1j}, \dots, a_{nj}) = \sum_{p=1}^n a_{pi} a_{pj}$$

اي ان :

$$f(\varepsilon_i) \text{ ó } f(\varepsilon_j) = C_i \text{ ó } C_j$$

فإذا كان  $f$  تطبيقاً عمودياً فإنه لكل  $i, j = 1, \dots, n$  :

$$C_i \text{ ó } C_j = f(\varepsilon_i) \text{ ó } f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \text{ ó } \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

وبذلك نستنج ان المجموعة  $C_1, \dots, C_n$  هي مجموعة معيارية متعامدة. اي ان اعمدة المصفوفة  $A$  هي مجموعة معيارية متعامدة، ومنه فان المصفوفة  $A$  هي مصفوفة متعامدة. وبالعكس واذا كانت  $A$  مصفوفة متعامدة، فان المجموعة

$C_1, \dots, C_n$  مجموعة معيارية متعامدة. بما ان الـ  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  مجموعة معيارية متعامدة، فإنه لكل  $i, j = 1, \dots, n$

$$C_i \text{ ó } C_j = 0 = \varepsilon_i \text{ ó } \varepsilon_j \quad \text{ماذا كان } i \neq j \text{ فإن :}$$

$$C_i \text{ ó } C_j = 1 = \varepsilon_i \text{ ó } \varepsilon_j \quad \text{ماذا كان } i = j \text{ فإن :}$$

من هنا فإنه لكل  $x, y \in E$  حيث  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i$ ،  $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j$

$$f(x) \text{ ó } f(y) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i\right) \text{ ó } f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \varepsilon_j\right)$$



$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \gamma_j (f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j)) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \gamma_j (c_i \circ c_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \gamma_j (\varepsilon_i \circ \varepsilon_j)$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \right) \circ \left( \sum_{j=1}^n \gamma_j \varepsilon_j \right) = x \circ y$$

بهذا نستنتج ان  $f$  عكسي

(و.ه.م.ع)

#### 8.5.4 تعريف

ليكن  $(E_1, \circ)$  ،  $(E_2, \circ')$  فضاءين اقليديين

وليكن  $f \in L(E_1, E_2)$  . نسمي

التطبيق  $f^* : E_2 \rightarrow E_1$  بالتطبيق الثنوي للتطبيق

$f$  ، واذا و فقط اذا كان لكل  $v \in E_1$  ولكل  $u \in E_2$  ،

$$f(v) \circ' u = v \circ f^*(u)$$

اذا كان  $f : E_1 \rightarrow E_1$  عندئذ نقول ان التطبيق  $f$

هو التطبيق الثنوي لنفسه اذا كان  $f = f^*$  اي انه

لكل  $v, u \in E_1$  فان :  $f(v) \circ u = v \circ f(u)$

#### 5.4 و نظرية

ليكن  $(E_1, \circ)$  ،  $(E_2, \circ')$  فضاءين اقليديين ذي

بعدين  $m, n$  على التوالي . وليكن  $f \in L(E_1, E_2)$  فانه يوجد

$f^*$  وحيد من  $E_2$  في  $E_1$  بحيث أنه لكل  $v \in E_1$  ولكل

$f(v) \circ u = v \circ f^*(u)$  : فأن  $u \in E_2$

البرهان:

لتكن  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  أساساً معيارياً متعامداً للفضاء  $E_1$

$\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  أساساً معيارياً متعامداً للفضاء  $E_2$

وليكن  $f: E_1 \rightarrow E_2$  تطبيقاً خطياً ، فأنه لكل  $v \in E_2$

$v = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n$  حيث  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  . ولتكن  $A = (a_{ij})$

المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  بالنسبة للأساسين

المذكورين . فأن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$$

وأن :

$$f(v) = (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{n1}) \beta_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn}) \beta_m$$

ليكن  $f^*: E_2 \rightarrow E_1$  معرفاً كما يلي :

$$\forall u = \delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m \in E_2 , \quad \delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{R}$$

$$f^*(u) = f^*(\delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m) = (a_{11} \delta_1 + \dots + a_{m1} \delta_m) \varepsilon_1 + \dots$$

$$+ \dots + (a_{1n} \delta_1 + \dots + a_{mn} \delta_m) \varepsilon_n$$

واضح ان  $f^*$  تطبيقاً خطياً . نبرهن ان  $f^*$  خطي .

$$u = \delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m , \quad v = \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_m \beta_m \quad \text{حيث } v, u \in E_2$$

و  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \delta_1, \dots, \delta_m \in \mathbb{R}$  : فأن :

$$f^*(u+v) = f^*((\delta_1 + \alpha_1) \beta_1 + \dots + (\delta_m + \alpha_m) \beta_m)$$

$$= (a_{11}(\delta_1 + \alpha_1) + \dots + a_{m1}(\delta_m + \alpha_m)) \varepsilon_1 + \dots + (a_{1n}(\delta_1 + \alpha_1) + \dots + a_{mn}(\delta_m + \alpha_m)) \varepsilon_n$$

$$= f^*(u) + f^*(v)$$

وكذلك لكل  $\lambda \in \mathcal{R}$  فإن :

$$\begin{aligned}
f^*(\lambda u) &= f^*(\lambda \delta_1 \beta_1 + \dots + \lambda \delta_m \beta_m) = (a_{11} \lambda \delta_1 + \dots + a_{m1} \lambda \delta_m) \varepsilon_1 + \\
&+ \dots + (a_{1n} \lambda \delta_1 + \dots + a_{mn} \lambda \delta_m) \varepsilon_n \\
&= \lambda f^*(u)
\end{aligned}$$

بهذا فإن  $f^*$  خطي، والمصفوفة المرافقة له هي  $A^T$ .

لكل  $x = \lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n \in E_1$  بيان  $\beta_1, \dots, \beta_m$  قاعدة معيارية متعامدة، و  $f(x) = \lambda_1 f(\varepsilon_1) + \dots + \lambda_n f(\varepsilon_n)$

فإنه لكل  $k = 1, \dots, m$  فإن :

$$f(x) \circ \beta_k = \left( \left( \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_i \right) \beta_1 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n a_{mi} \lambda_i \right) \beta_m \right) \circ \beta_k$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_i (\beta_k \circ \beta_k) = \sum_{i=1}^n a_{ki} \lambda_i$$

ومن جهة أخرى بيان :

$$f^*(\beta_k) = a_{k1} \varepsilon_1 + \dots + a_{kn} \varepsilon_n$$

لكل  $k = 1, \dots, m$  فإن :

$$x \circ f^*(\beta_k) = \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i \right) \circ (a_{k1} \varepsilon_1 + \dots + a_{kn} \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 a_{k1} (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_n a_{kn} (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{ki}$$

فإنه بذلك :

$$f(x) \circ \beta_k = x \circ f^*(\beta_k) \quad , \quad k = 1, \dots, m \text{ لكل}$$

وبذلك فإنه لكل  $y = \delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m \in E_2$  يكون :

$$f(x) \circ y = f(x) \circ \left( \sum_{k=1}^m \delta_k \beta_k \right) = \sum_{k=1}^m \delta_k (f(x) \circ \beta_k)$$

$$= \sum_{k=1}^m \delta_k (x \circ f^*(\beta_k)) = x \circ \sum_{k=1}^m \delta_k f^*(\beta_k)$$

$$= x \circ f^*\left(\sum_{k=1}^m \delta_k \beta_k\right) = x \circ f^*(y)$$

بهذا نستنتج ان  $f^*$  هو التطبيق النوي للتطبيق  $f$ .

اذا كان  $f_1^*$  تطبيقاً نويّاً اخرّاً للتطبيق  $f$  ، فإنه

لكل  $y \in E_2$  ، نضع  $x \in E_1$  حيث  $(f_1^* - f^*)(y) = x$  فإن:

$$f(x) \circ y = x \circ f_1^*(y)$$

$$f(x) \circ y = x \circ f^*(y) \quad \text{ولذلك}$$

من هنا فإن:

$$0 = (x \circ f_1^*(y)) - (x \circ f^*(y)) = x \circ (f_1^* - f^*)(y)$$

وبذلك فإن:

$$(f_1^* - f^*)(y) \circ (f_1^* - f^*)(y) = 0$$

$$(f_1^* - f^*)(y) = 0 \quad \text{اي ان:}$$

$$y \in E_2 \quad \text{لكل} \quad f_1^*(y) = f^*(y)$$

$$\text{فإن} \quad f_1^* = f^*$$

(و.ه.و.ع)

#### 10.5.4 نظرية

ليكن  $(E_1, \theta)$  ،  $(E_2, \delta)$  فضاءين اقليديين .

وليكن  $f \in L(E_1, E_2)$  . فإن  $f$  عمودي  $\Leftrightarrow f^* = f^{-1}$

البرهان:

لتفرض ان  $f^* = f^{-1}$  ، فإنه لكل  $u, v \in E_1$  فإن

$$f(v), f(u) \in E_2$$

فأنه :

$$f(v) \circ f(u) = v \circ f^*(f(u)) = v \circ f^{-1}(f(u)) = v \circ u$$

وبذلك فإن  $f$  يكون تطبيقاً عمودياً

لتفرض الآن ان  $f$  عمودي ، فإنه لكل  $v_1, v_2 \in E_1$  ،

$$f(v_1) \circ f(v_2) = v_1 \circ v_2$$

فأنه لكل  $v \in E_1$  ولكل  $u \in E_2$  :

$$f(v) \circ u = f(v) \circ f(f^{-1}(u)) = v \circ f^{-1}(u)$$

$$f^* = f^{-1} \quad \text{فأن}$$

(و. هـ. ١٣)

### 6.4 الفضاء الهيرميتي

#### 1.6.4 تعريف

ليكن  $H_1, H_2$  فضاءين شعاعيين على حقل  
الاعداد العقدية  $\mathbb{C}$  ، وليكن  $f$  تطبيقاً من  $H_1$  في  
 $H_2$  . نقول ان التطبيق  $f$  هو تطبيق نصف خطي  
بإذا تحققت ما يلي :-

$$(1) \quad f(u+v) = f(u) + f(v) \quad , \quad u, v \in H_1 \quad \text{لكل}$$

$$(2) \quad f(\lambda u) = \bar{\lambda} f(u) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ولكل } u \in H_1$$

بإذا كان  $f: H_1 \rightarrow \mathbb{C}$  تطبيقاً وتحققت (1) و (2)  
عندها نقول ان  $f$  هو كل نصف خطي على  $H_1$ .

2.6.4 تعريف

ليكن  $H$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{C}$  . وليكن  
 $f : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$  تطبيقاً . نقول ان  $f$  هو شكل  
 مترتبة أنصاف الخطية على  $H$  ، اذا كان لكل  $u_1, u_2, u_3 \in H$   
 ولكل  $\lambda \in \mathbb{C}$  فان :

$$f(u_1 + u_2, u_3) = f(u_1, u_3) + f(u_2, u_3) \quad (1)$$

$$f(u_1, u_2 + u_3) = f(u_1, u_2) + f(u_1, u_3)$$

$$f(\lambda u_1, u_2) = \lambda f(u_1, u_2) \quad (2)$$

$$f(u_1, \lambda u_2) = \bar{\lambda} f(u_1, u_2)$$

ونقول ان  $f$  هو شكل هيرميتي على  $H$  اذا كان :-

$$\forall u_1, u_2 \in H, f(u_1, u_2) = \overline{f(u_2, u_1)}$$

ونقول ان الشكل الهيرميتي  $f$  محددة موجبة اذا كان :

$$f(u, u) \geq 0 \quad \text{لكل } u \in H$$

$$u = 0 \Leftrightarrow f(u, u) = 0 \quad \text{و}$$

3.6.4 مثال

على الفضاء الشعاعي  $\mathbb{C}^n$  على الحقل  $\mathbb{C}$  لغرف التثبيت

$$f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{كما يلي :-}$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n; f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

فان  $f$  هو شكل هيرميتي على الفضاء  $\mathbb{C}^n$  .

4.6.4 تعريف

ليكن  $H$  فضاءً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $\mathbb{C}$ . وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $H$ ، وليكن  $f$  شكلاً هرميتياً على  $H$ . فإنه لكل  $v, u \in H$ ،

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

حيث  $\alpha_i, \lambda_i \in \mathbb{C}$ . من هنا ومن كون  $f$  شكلاً هرميتياً، فإن:

$$\begin{aligned} f(v, u) &= f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \\ &= \alpha_1 \bar{\lambda}_1 f(v_1, v_1) + \dots + \alpha_1 \bar{\lambda}_n f(v_1, v_n) + \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_1 f(v_n, v_1) \\ &\quad + \dots + \alpha_n \bar{\lambda}_n f(v_n, v_n). \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n f(v_i, v_j) \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث  $f(v_i, v_j) \in \mathbb{C}$ . فإذا وضعنا  $a_{ij} = f(v_i, v_j)$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$ ، فإن:

$$f(v, u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_i \bar{\lambda}_j$$

حيث  $\lambda_j$  هي مركبات الشعاع  $u$ ،  $\alpha_i$  هي مركبات الشعاع  $v$  في الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

نسوي المصفوفة  $A = (a_{ij})$  بالمصفوفة المرافقة للشكل الهرميتي  $f$  في الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

لتكن الآن  $\{u_1, \dots, u_n\}$  اساساً اخر في  $H$ ، فإن:

$$u_1 = c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n$$

$$u_2 = c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_n$$

-----

$$u_n = c_{1n}v_1 + c_{2n}v_2 + \dots + c_{nn}v_n$$

حيث  $c_{ij} \in \mathbb{C}$  . فإن مصفوفة العبور من الأساس

$\{v_1, \dots, v_n\}$  الى الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  هي :

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

نجد المصفوفة المرافقة لكل الهيرميتي  $f$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  وليكن  $B = (b_{ij})$  . فأنه لكل

$$1 \leq q \leq n, \quad 1 \leq p \leq n$$

$$b_{pq} = f(u_p, u_q) = f(c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n, c_{1q}v_1 + c_{2q}v_2 + \dots + c_{nq}v_n)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n f(v_i, v_j) c_{ip} \bar{c}_{jq}$$

لكن كما سبق لدينا  $f(v_i, v_j) = a_{ij}$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$  فأن :

$$b_{pq} = \sum_{i,j=1}^n c_{pi} a_{ij} \bar{c}_{jq}$$

حيث  $c_{pi} = c_{ip}$  هي عناصر المصفوفة  $C$  . فأننا نعرفنا للمصفوفة التي عناصرها  $\bar{c}_{ij}$  بالرمز  $\bar{C}$

$$B = C^T A \bar{C} \quad \text{فأن :}$$

#### 5.6.4 تعريف

ليكن  $H$  فضاءً شعاعياً ذا بعد منتهي على الحقل



$C$  ، وليكن  $\{$  كلاً هيرميتياً محدداً موجباً على  $H$  .  
 نقول عندئذ ان  $H$  هو فضاء هيرميتي ، ونقول ان  $\{$  هو  
 الضرب السلمي على  $H$  . فإذا زدنا للضرب السلمي  
 بالدور  $o$  فأنتنا ندمر للفضاء الهيرميتي بالدور  $(H, o)$  .  
 الفضاء الشعاعي الجزئي في  $H$  نسميه بالفضاء الهيرميتي  
 الجزئي .  
 في المثال (3.6.4) فإن  $(C^n, o)$  هو فضاء هيرميتي .

#### 6.6.4 تعريف

ليكن  $(H, o)$  فضاء هيرميتياً . لكل  $u, v \in H$   
 نقول ان  $v$  عمودي على  $u$  (أو  $u$  عمودي على  $v$ ) ونكتب  
 $u \perp v$  إذا كان  $v \circ u = 0$  .  
 نقول عن الأساس  $\{w_1, \dots, w_n\}$  للفضاء  $H$  انه اساس متعامد  
 إذا كان :  $w_i \circ w_j = 0$  لكل  $i \neq j$  .  
 ونقول عن الأساس  $\{e_1, \dots, e_n\}$  للفضاء  $H$  انه  
 اساس قياسي متعامد إذا كان :

$$e_i \circ e_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ليكن  $H_1$  فضاء هيرميتياً جزئياً في  $H$  ، نقول  
 ان الشعاع  $u \in H$  عمودي على الفضاء  $H_1$  إذا كان  
 $u \circ v_1 = 0$  لكل  $v_1 \in H_1$  ونكتب  $u \perp H_1$  .  
 نهي المجموعة  $\{u \in H ; u \perp H_1\}$  بالجملة العمودية

للفضاء الهيرميتي الجزئي  $H_1$  وننجز لها بالرفز  $H_1^\perp$ .  
ونقول ان الفضاءين الهيرميتيين الجزئيين  $H_1$  ،  $H_2$  في  
الفضاء  $H$  أنهما متعامدين إذا كان لكل  $v_1 \in H_1$  ،  
ولكل  $v_2 \in H_2$  ،  $v_1 \circ v_2 = 0$  ونكتب  $H_1 \perp H_2$ .

### 7.6.4 نظرية

ليكن  $(H, \circ)$  فضاءً هيرميتياً، فأن :

$$(1) \text{ لكل } v \in H \text{ ، } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(2) \text{ لكل } v \in H \text{ ، ولكل } \lambda \in \mathbb{C} \text{ ، } \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$(3) \text{ لكل } v_1, v_2 \in H \text{ ، } |v_1 \circ v_2| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

$$(4) \text{ لكل } v_1, v_2 \in H \text{ ، } \|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

وإذا كان  $v_1, v_2$  متعامدين فأن :

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

البرهان :

برهان جميع فروع النظرية مشابهة لبرهان

النظرية (6.2.4) مع مراعاة خواص الاعداد العقدية ،

لذلك سنبرهن احد الفروع كنموذج . ليكن (4)

$$\begin{aligned} \|v_1 + v_2\|^2 &= (v_1 + v_2) \circ (v_1 + v_2) = (v_1 \circ v_1) + (v_1 \circ v_2) + (v_2 \circ v_1) + (v_2 \circ v_2) \\ &= \|v_1\|^2 + (v_1 \circ v_2) + \overline{(v_1 \circ v_2)} + \|v_2\|^2 \\ &= \|v_1\|^2 + 2\mathcal{R}(v_1 \circ v_2) + \|v_2\|^2 \\ &\leq \|v_1\|^2 + 2|v_1 \circ v_2| + \|v_2\|^2 \\ &\leq \|v_1\|^2 + 2\|v_1\| \|v_2\| + \|v_2\|^2 \end{aligned}$$

$$\|v_1 + v_2\|^2 \leq (\|v_1\| + \|v_2\|)^2 \quad \text{فأنت ،}$$

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \quad \text{من هنا نستنتج}$$

إذا كان  $v_1, v_2$  متعامدين فأنت :  $v_1 \circ v_2 = v_2 \circ v_1 = 0$

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \quad \text{فأنت :}$$

(و.ه.و.٣)

### 8.6.4 نظرية

ليكن  $(H, \circ)$  فضاءاً هيرميتياً ذا بعد  $n$ ، ولتكن

$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  أساساً معيارياً متعامداً في  $H$ . فأنت لكل

$x, y \in H$  إذا كان  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon_i$  ،  $y = \sum_{i=1}^n \mu_i \varepsilon_i$  حيث

$\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{C}$  فأنت :

$$x \circ y = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\mu}_i$$

البرهان :

$$x \circ y = (\lambda_1 \varepsilon_1 + \dots + \lambda_n \varepsilon_n) \circ (\mu_1 \varepsilon_1 + \dots + \mu_n \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \bar{\mu}_1 (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1) + \dots + \lambda_1 \bar{\mu}_n (\varepsilon_1 \circ \varepsilon_n) + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_1 (\varepsilon_n \circ \varepsilon_1) +$$

$$\dots + \lambda_n \bar{\mu}_n (\varepsilon_n \circ \varepsilon_n)$$

$$= \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \dots + \lambda_n \bar{\mu}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\mu}_i$$

(و.ه.و.٣)

نرى أن مفهوم التعامد والتضاربات المتعلقة به في الفضاء الأقلدي ينتقل إلى الفضاء الهيرميتي مع بعض التغييرات المتعلقة بالفرق بين الضرب السلمي في الفضاء الأقلدي

والفضاء الهيرميتي . لذلك فأننا سنتك دراسة تلك النظريات  
والمفاهيم للقارئ ، فمماثل طريقة كرام ستمت للوصول على أساس  
متعاد في الفضاء الأقليدي يمكن بحثها بنفس الطريقة في  
الفضاء الهيرميتي وستتركها للقارئ . كما وستترك للقارئ  
برهان النظرية التالية :

#### 9.6.4 نظرية

ليكن  $(H, \phi)$  فضاءاً هيرميتياً ذا بعد  $n$  ،  $H_1$  فضاءً  
هيرميتياً جزئياً في  $H$  . فأن :

$$(1) \quad H_1^\perp \text{ هو فضاء هيرميتي جزئي في } H .$$

$$(2) \quad \text{لكل } x \in H \text{ فإن } x \perp H_1 \Leftrightarrow x \text{ عمودي على جميع}$$

أشعة أساس  $H_1$  .

(3) إذا كانت  $\{e_1, \dots, e_n\}$  أشعة معيارية متعامدة في  $H$  ،

فأن  $\{e_1, \dots, e_n\}$  تكون أساساً معيارياً متعامداً في  $H$  .

(4) إذا كان بعد  $H_1$  هو  $k$  فأنه يوجد أساس

معيارية متعامد  $\{e_1, \dots, e_n\}$  في  $H$  بحيث أن

$$e_1, \dots, e_k \in H_1 \text{ و } e_{k+1}, \dots, e_n \in H_1^\perp .$$

$$(5) \quad H = H_1 \oplus H_1^\perp \text{ وكذلك :}$$

$$\dim H = \dim H_1 + \dim H_1^\perp$$

#### 6.4.10 تعريف

ليكن  $(H_1, \phi)$  ،  $(H_2, \phi)$  فضاءين هيرميتين

ولیکن  $f \in L(H_1, H_2)$

(1) نقول ان  $f$  هو تطبیق اهادی بازا كان :

$$\forall v, u \in H_1, f(v) \circ f(u) = v \circ u$$

(2) نقول ان  $f^* \in L(H_2, H_1)$  هو التطبیق التیوی للتطبیق

$f$  بازا كان :

$$\forall v \in H_1, \forall u \in H_2, f(v) \circ u = v \circ f^*(u)$$

وازا كان  $f: H_1 \rightarrow H_2$  حیث ان  $f = f^*$  نقول عنده

ان  $f$  هو التطبیق التیوی لنفسه .

نتیج من التعریف السابق مباشرة ، بازا كان  $(H, \circ)$  فضاءاً هیرمیتیاً و  $\{e_1, \dots, e_n\}$  السعة معیاریة متعامدة فی  $H$  ،  $f: H \rightarrow H$  تطبیقاً اهادیاً ، فان السعة  $f(e_1), \dots, f(e_n)$  هي السعة معیاریة متعامدة .

ولذلك من النظرية (10.5.4) يكون اهادياً  $f = f^*$

$$f \circ f^* = Id_H \iff$$

11.6.4 تعريف

لتكن  $A \in M_n(\mathbb{C})$  ، نهي المصفوفة  $\bar{A}^T$  لتیویة

المصفوفة  $A$  ونرمز لها بالرمز  $A^*$  . ونقول ان  $A$

هي مصفوفة هیرمیتیة بازا كانت  $A = A^*$  .

ونقول ان المصفوفة  $A$  هي مصفوفة اهادیة بازا

كانت السعة اعمدة  $A$  تكون مجموعة معیاریة

متعامدة .

12.6.4 نظرية

المصفوفة  $A \in M_n(\mathbb{C})$  هي مصفوفة امدادية  $\Leftrightarrow$

$$A^*A = I_n$$

البرهان :

لتكن :

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فإن :

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \dots & \bar{a}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \dots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

لتفرض الآن ، ان المصفوفة  $A$  هي مصفوفة امدادية ،  
فإن السّعة اعمدة المصفوفة  $A$  مجموعة متبادلة متعامدة .  
فإنه لكل  $i, j = 1, \dots, n$  العنصر في السطر  $i$  والعمود  $j$  في  
المصفوفة  $A^*A$  هي :

$$x = \bar{a}_{1i} a_{1j} + \bar{a}_{2i} a_{2j} + \dots + \bar{a}_{ni} a_{nj}$$

$$= \bar{a}_{1i} a_{1j} + \bar{a}_{2i} a_{2j} + \dots + \bar{a}_{ni} a_{nj} = \overline{c_i \cdot c_j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

فإن :

وبالعكس ، اذا كانت  $A^*A = I_n$  فإنه مما سبق في

البرهان ينتج أن :

$$c_i \circ c_j = \begin{cases} 1 & \text{عندما } i=j \\ 0 & \text{عندما } i \neq j \end{cases}$$

فإن السَّعة اعمدة  $A$  هي مجموعة معيارية متعامدة ، أي ان المصفوفة  $A$  اُحادية .

(و. هـ. ٣.٠)

من هنا وبأستخدام نفس الطرقتين في النظرية (6.5.4) يبرهن بسهولة ان : المصفوفة الحيارية هي مصفوفة اُحادية ،

$$A^* = A^{-1} \Leftrightarrow A \text{ اُحادية}$$

وماصل ضرب مصفوفتين اُحاديتين هي مصفوفة اُحادية .  
 وحدد المصفوفة الأُحادية هي  $\pm 1$  .  
 لأنية مصفوفة عكوسة  $A$  إذا كانت  $A$  اُحادية ، فإن  $A^{-1}$  تكون أيضاً اُحادية .

#### 13.6.4 نظرية

ليكن  $(H_1, \phi)$  ،  $(H_2, \psi)$  فضاءين هيرميتيين ذي بعدين  $n$  . ولتكن  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  أساساً معيارياً متعامداً في  $H_1$  ،  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  أساساً معيارياً متعامداً في  $H_2$  . وليكن  $f \in L(H_1, H_2)$  فإن :

$f$  يكون اُحادياً  $\Leftrightarrow$  المصفوفة المرافقة لـ  $f$  مصفوفة اُحادية .

البرهان :

لتكن  $A = (a_{ij})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي  $f$  بالنسبة للأساس المذكورين . وليكن  $\theta$  هو

الضرب السلمي في  $\mathbb{C}^n$  ، فأنه لكل  $i, j$  :

$$f(\varepsilon_i) = a_{i1}\beta_1 + \dots + a_{in}\beta_n$$

$$f(\varepsilon_j) = a_{j1}\beta_1 + \dots + a_{jn}\beta_n$$

فأنت :

$$f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j) = \left( \sum_{p=1}^n a_{pi}\beta_p \right) \circ \left( \sum_{q=1}^n a_{qj}\beta_q \right)$$

$$= \sum_{p=1}^n a_{pi} \bar{a}_{pj}$$

وكذلك :

$$c_i \circ c_j = \sum_{p=1}^n a_{pi} \bar{a}_{pj}$$

أيان :

$$f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j) = c_i \circ c_j$$

إذا كان  $f$  تطبيقاً أحاديياً فأنه لكل  $i, j = 1, \dots, n$  :

$$c_i \circ c_j = f(\varepsilon_i) \circ f(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \circ \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{عنا } i=j \\ 0 & \text{عنا } i \neq j \end{cases}$$

فأن المجموعة  $c_1, \dots, c_n$  مجموعة معيارية متعامدة

أيان المصفوفة  $A$  أحادية .

ويبرهن القارئ باستخدام نفس الأسلوب السابق

لامر النظرية ( 8 . 5 . 4 ) .

( و . ه . م . )



14.6.4 نظرية

ليكن  $(H_1, \phi)$  ،  $(H_2, \phi')$  فضاءين هيرميتيين ، وليكن  $f \in L(H_1, H_2)$  فإنه يوجد  $f^* \in L(H_2, H_1)$  وهي بحيث  
 انه لكل  $v \in H_1$  ولكل  $u \in H_2$  :  $f(v) \phi' u = v \phi f^*(u)$

البرهان :

لتكن  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  اساساً معيارياً متعامداً في  $H_1$  ،  
 و  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  اساساً معيارياً متعامداً في  $H_2$  وليكن  
 $f: H_1 \rightarrow H_2$  تطبيقاً خطياً ، المصفوفة المرافقة المرفقة  
 $A = (a_{ij})$  ،  $v \in H_1$  فإنه لكل  $v = \lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_n$   
 فإن :

$$f(v) = f(\lambda_1 \epsilon_1 + \dots + \lambda_n \epsilon_n) = (\lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_n a_{1n}) \beta_1 + \dots + (\lambda_1 a_{m1} + \dots + \lambda_n a_{mn}) \beta_m$$

ليكن  $f^*: H_2 \rightarrow H_1$  معرفة كما يلي :

$$\forall u \in H_2 , u = \delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m ; f^*(u) = f^*(\delta_1 \beta_1 + \dots + \delta_m \beta_m)$$

$$= (\bar{a}_{11} \delta_1 + \dots + \bar{a}_{m1} \delta_m) \epsilon_1 + \dots + (\bar{a}_{1n} \delta_1 + \dots + \bar{a}_{mn} \delta_m) \epsilon_n$$

نفس الطريقة كما في النظرية (9.5.4) نبرهن أن

$f^*$  تطبيق خطي ، وأنه التطبيق التوحي للتعريف  $f$

(و. ه. 3.0)

من برهان هذه النظرية وكما في النظرية (9.5.4) ننتج

أن : المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f^*$  هي المصفوفة

$$\bar{A}^T = A^*$$

### 7.4 إيزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية والأقليدية

في هذا البند سنذكر التعريف والنظريات بالنسبة للفضاءات الهيرميتية . ولتوضيح ان نفس التعريف والنظرية صالحة بالنسبة للفضاءات الأقليدية سنكتب بين قوسين كلمة الأقليدية . وسبرهن النظريات في حالة الفضاءات الهيرميتية وسنترك برهان حالة الفضاءات الأقليدية للقارئ .

#### 1.7.4 تعريف

ليكن  $(H_1, \phi)$  ،  $(H_2, \psi)$  فضاءين هيرميتيين

(أقليديين) . نقول ان التطبيق  $\phi: H_1 \rightarrow H_2$  هو إيزومورفيزم

الفضاءات الهيرميتية (الأقليدية) اذا تحقت :-

(1)  $\phi$  هو إيزومورفيزم الفضاءات المتجانسة .

(2) لكل  $u, v \in H_1$  ،  $\phi(u)\psi(v) = u\phi(v)$

إيزومورفيزم الفضاء الهيرميتي (الأقليدي) على نفسه نسميه اوتومورفيزمًا .

#### 2.7.4 نظرية

(1) التطبيق الحياتي لأي فضاء هيرميتي (أقليدي) هو

إيزومورفيزم .

(2) تركيب إيزومورفيزمين للفضاءات الهيرميتية (الأقليدية)

هو إيزومورفيزم فضاءات هيرميتية (أقليدية) .

(3) التطبيق العكسي لإيزومورفيزم فضاءات هيرميتية (أقليدية)

هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية).

البرهان:

(1) ليكن  $(H, \circ)$  فضاءاً هيرميتياً، وليكن  $\text{Id}_H: H \rightarrow H$  تطبيقاً حيارياً. واضح ان  $\text{Id}_H$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية.

$$\text{Id}_H(u) \circ \text{Id}_H(v) = u \circ v, \quad u, v \in H$$

وبذلك فان  $\text{Id}_H$  هو ايزومورفيزم لفضاءات هيرميتية.

(2) ليكن  $(H_1, \circ_1)$ ،  $(H_2, \circ_2)$ ،  $(H_3, \circ_3)$  ثلاث فضاءات هيرميتية، وليكن  $f_1: H_1 \rightarrow H_2$ ،  $f_2: H_2 \rightarrow H_3$  ايزومورفيزم للفضاءات الهيرميتية. لنبرهن ان:

$f_3 = f_2 \circ f_1: H_1 \rightarrow H_3$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية. بما ان تركيب تطبيقتين خطيتين هو تطبيق خطي، وتركيب تقابليين هو تقابلي، فان  $f_3$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية.

لكل  $u, v \in H_1$  فان:

$$\begin{aligned} f_3(u) \circ_3 f_3(v) &= (f_2 \circ f_1)(u) \circ_3 (f_2 \circ f_1)(v) \\ &= f_2(f_1(u)) \circ_3 f_2(f_1(v)) \end{aligned}$$

لكن بما ان  $f_1(u), f_1(v) \in H_2$  فان:

$$f_3(u) \circ_3 f_3(v) = f_1(u) \circ_1 f_1(v) = u \circ_1 v$$

وبذلك نستنتج ان  $f_3 = f_2 \circ f_1$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية.

(3) ليكن  $(H_1, 0)$  ،  $(H_2, 0)$  فضاءين هيرميتيين ، وليكن  $f: H_1 \rightarrow H_2$  ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية ، فأن  $f$  هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية ، كما برهننا سابقاً فأن  $f^{-1}: H_2 \rightarrow H_1$  هو ايضا ايزومورفيزم فضاءات شعاعية .  
 لكل  $u_1, v_1 \in H_1$  يوجد  $u_2, v_2 \in H_2$  حيث :  
 $f(u_1) = u_2$  ،  $f(v_1) = v_2$  فأن :  
 $f^{-1}(u_2) = f^{-1}(v_2) = u_1 = v_1 = f(u_1) \circ f(v_1) = u_2 \circ v_2$   
 بذلك فأن  $f^{-1}$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .  
 (و.ه.م.)

### 3.7.4 نظرية

ليكن  $(H_1, 0)$  ،  $(H_2, 0)$  فضاءين هيرميتيين (اقليديين) ، وليكن  $f: H_1 \rightarrow H_2$  تطبيقاً خطياً وليكن  $\dim H_1 = n$  ،  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $H_1$  . فأن  $f$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية (اقليدية)  $\Leftrightarrow$   
 (1)  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  اساساً للفضاء  $H_2$  .  
 (2)  $f(v_i) \circ f(v_j) = v_i \circ v_j$  لكل  $i, j = 1, \dots, n$  .

البرهان :

لتفرض ان  $f$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية ، فأن  $f$  هو ايزومورفيزم فضاءات شعاعية وبذلك فأن  $f(H_1) = H_2$  ، فأن  $\dim H_2 = n$  ، من هنا ومن (2.3.2) فأن صورة اساس في  $H_1$  هو اساس في  $H_2$  .

ومن (1) حَقَقَت .

من تعريف ايزومورفيزم الفضاءات الهيرميتية ينتج ان (2) حَقَقَت .

لفرض الآن ان الشرطين (1) ، (2) حَقَقَتان .

من (1) ومن (2.3.2) فأن  $\phi$  هو ايزومورفيزم فضاءات  $H_1$  حاعية .

لكل  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$  و  $y = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j$  من  $H_1$  ، فأن :

$$x \circ y = \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \circ \left( \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (v_i \circ v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (\phi(v_i) \circ \phi(v_j))$$

$$= \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i \phi(v_i)) \circ (\beta_j \phi(v_j))$$

$$= \phi \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) \circ \phi \left( \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right)$$

$$= \phi(x) \circ \phi(y)$$

وبذلك فأن  $\phi$  هو ايزومورفيزم فضاءات هيرميتية .

(و.ه.م. ٠٣)

## تمارين

(1) في الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على القل  $\mathcal{R}$  لتكن :

$$A = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, -1), v_3 = (1, -1, -1)\}$$

الأساس في  $\mathbb{R}^3$  .  
 ليكن  $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  تطبيقاً معرفاً كما يلي :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3; f(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$$

هل ان  $f$  متماثل ؟ اوجد المصفوفة المرافقة ل  $f$  .

(2) لتكن  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  المصفوفة المرافقة لكل مزدوج الخطية  $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  في الاساس  $A = \{v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1)\}$  اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الكل في الاساس  $B = \{u_1 = (4, -3), u_2 = (5, -3)\}$  . ثم اوجد هل الكل . هل ان  $f$  متماثل ؟ اوجد الكل المرافقة ل  $f$  في الاساس  $A$  .

(3) لتكن  $A = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$  اساساً نظامياً في  $\mathbb{R}^2$  . وليكن الكل التربيعي  $f$  معرفاً على  $\mathbb{R}^2$  كما يلي :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; f(x, x) = 2x_1^2 - 3x_1 x_2 + x_2^2$$

حيث  $x_i$  هي مركبات  $x$  في الاساس  $A$  .  
 اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الكل . ثم اوجد المصفوفة المرافقة لهذا الكل في الاساس  $B = \{v_1 = (1, 1), v_2 = (-2, 3)\}$  .  
 ثم آتت هذا الكل في الاساس  $B$  .

(4) ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، و  $\varphi$  كلاً تربيعياً على  $V$  ، كلاً مزدوجاً الخطية مرافقاً

ل  $\varphi$  . برهن انه لكل  $x, y, z \in V$  :

$$\varphi(x+y) + \varphi(x+z) + \varphi(y+z) - \varphi(x+y+z) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

ثم برهن ان :

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x) + 2\varphi(y)$$

$$\varphi(x+y) - \varphi(x-y) = 2f(x, y) + 2f(y, x) \quad \text{و}$$

(5) باستخدام طريقة لاگرانك آتب الكل التربيعي  $\varphi$

بالكل القطري حيث  $\varphi$  معرف على  $\mathbb{R}^3$  كما يلي :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \varphi(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

حيث  $x_i$  هي مركبات الشعاع  $x$  من الاساس النظامي .

(6) باستخدام طريقة جاكوبي آتب الكل التربيعي  $\varphi$

بالكل القطري حيث  $\varphi$  معرف على  $\mathbb{R}^3$  كما يلي :

$$\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \varphi(x) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$$

حيث  $x_i$  هي مركبات الشعاع  $x$  من الاساس النظامي .

(7) ليكن  $(E, \circ)$  فضاءاً أقليدياً ، لكل  $x, y \in E$  برهن

ان :

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \quad (1)$$

$$x \circ y = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad (2)$$

(8) ليكن  $\mathbb{R}^2$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ، وليكن

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 : \text{ معرفاً كما يلي :$$

$$x \circ y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

حيث  $x_1, x_2$  هي مركبات الشعاع  $x$  ،  $y_1, y_2$  هي مركبات الشعاع  $y$  ، في الأساس النظامي .

برهن ان  $\circ$  هو الضرب السلمي على  $\mathbb{R}^2$  . وبرهن ان

الشعاع  $(1, 0)$  عمودي على الشعاع  $(0, 1)$  ، وان الشعاع

$(1, 1)$  عمودي على الشعاع  $(-1, -1)$  . ثم اوجد طول كل

من هذه الأشعة .

(9) ليكن  $(\mathbb{R}^3, \circ)$  فضاءاً أقليدياً ، لكل  $u, v \in \mathbb{R}^3$  .

(a) بين انه اذا كان  $u$  متعامداً مع  $v$  ، فان كل

مضاعف عددي لـ  $u$  هو متعامد مع  $v$  .

(b) اذا كانت  $v_1 = (1, 1, 2)$  ،  $v_2 = (0, 1, 3)$  اوجد الشعاع

$v_3$  بحيث يكون متعامداً مع  $v_1$  و  $v_2$  .

(c) اذا كانت  $A = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 2), v_3 = (1, 0, 4)\}$  اوجد

في  $\mathbb{R}^3$  ما وجد اساس عياري متعامد في  $\mathbb{R}^3$  .

(10) ليكن  $(E, \circ)$  فضاءاً أقليدياً و  $E_1$  فضاءاً

أقليدياً خبيرياً في  $E$  .

(a) برهن ان  $(E_1^\perp)^\perp = E_1$

(b) اذا كان  $E = \mathbb{R}^3$



$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3); x_1 = x_3 \in \mathbb{R}\}$  (2) ،  $E_1 = \{(x_1, x_2, 0); x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$  (1) و

أوجد  $E_1^\perp$  في كل حالة . هل  $E = E_1 \oplus E_1^\perp$  ؟

(c) ليكن  $E = \mathbb{R}^4$  وتكن :

$E_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_2 = 0, x_4 = x_1 + x_3\}$  أوجد أساس

معياري متعامد  $A = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$  من  $E$  بحيث أن

$$\varepsilon_3, \varepsilon_4 \in E_1^\perp, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E_1$$

(11) ليكن  $(\mathbb{R}^2, 0)$  فضاءً إقليدياً ، وليكن  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

تطبيقاً معرفاً كما يلي :-

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, f(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)$$

برهن أن  $f$  تطبيق عمودي ، ثم أوجد المصفوفة المرافقة

للتطبيق  $f$  بالنسبة للأساس النظامي .

(12) ليكن  $(\mathbb{C}^2, 0)$  فضاءً هيرميتياً ، وليكن

$f, h: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  تطبيقين معرفين كالآتي :

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, f(z_1, z_2) = (2iz_1, iz_2), \quad h(z_1, z_2) = (z_1, iz_2)$$

بين أيّاً من  $f, h$  تطبيقاً إحادي بالنسبة للأساس

النظامي في  $\mathbb{C}^2$  ؟ أوجد المصفوفة المرافقة لكل

من  $f, h$  . أي من المصفوفتين أحادية ؟ .

(13) ليكن  $(E_1, 0), (E_2, 0)$  فضاءين إقليديين

نهي التطبيق  $f: E_1 \rightarrow E_2$  انزوعراً . ماذا كان :

$$\forall x, y \in E_1, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

بإذا كان  $F: E_1 \rightarrow E_2$  ايزومترياً بحيث  $F(0) = 0$  ، برهن ان  $F$  تطبيقت عمودي .

(14) ليكن  $(\mathbb{C}^2, 0)$  ،  $(\mathbb{C}^3, 0)$  فضاءين هيرميتيين .

ولتكن  $A = \{e_1, e_2\}$  ،  $B = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$  الاساسين نظاميين في  $\mathbb{C}^2$  ،  $\mathbb{C}^3$  على التوالي .

(a) ليكن  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$  معرفاً كالآتي :

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$$

السؤال  $x$  في الاساس النظامي ، اوجد التطبيق التوحي للتطبيق  $f$  .

(b) ليكن  $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  معرفاً كالآتي :

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$$

التوحي للتطبيق  $f$  .

(15) ليكن  $(H, 0)$  فضاءاً هيرميتياً ، لكل  $f_1, f_2 \in L(H, H)$

ولكل  $k \in \mathbb{C}$  ، إذا كان  $f_1^*$  ،  $f_2^*$  التطبيقان التوحيان

لـ  $f_1$  ،  $f_2$  على التوالي ، برهن ان :

$$f_0^* = f_0, \quad I^* = I \quad (a)$$

$$(f_1 + f_2)^* = f_1^* + f_2^* \quad (b)$$

$$(k f_1)^* = \bar{k} f_1^* \quad (c)$$

$$(f_1 \circ f_2)^* = f_2^* \circ f_1^* \quad (d)$$

$$(f_1^*)^* = f_1 \quad (5)$$

(#) ، إذا كان  $f_1$  عكوساً فإن:  $(f_1^{-1})^* = (f_1^*)^{-1}$

(9) لكل  $v \in H$  ،  $f(v) = 0 \iff f^*(v) = 0$  ،  $f$  أحادي

(16) ليكن  $H$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ،  $0$  صفراً

سليماً في  $H$  . وليكن  $f: H \rightarrow H$  تطبيقاً خطياً .

برهن أن  $f = f_0$  ، إذا تحققت أي من الشروط التالية :

$$(a) \text{ لكل } u, v \in H \text{ ، } f(u) \cdot v = 0$$

(b) إذا كان  $(H, 0)$  فضاءاً هيرميتياً فإن :

$$f(u) \cdot u = 0 \text{ لكل } u \in H$$

(c)  $f$  ثنوي لنفسه و  $f(u) \cdot u = 0$  لكل  $u \in H$  .

ثم اعط مثالاً لتطبيق خطي  $f$  على فضاء إقليدي  $E$

بحيث يكون  $f(u) \cdot u = 0$  لكل  $u \in E$  ، و  $f \neq f_0$  .

(17) ليكن  $(H, 0)$  فضاءاً هيرميتياً ، وليكن  $f$

تطبيقاً خطياً على  $H$  .

برهن أن الشروط التالية متكافئة :

$$(a) \text{ } f \text{ أحادي}$$

(b)  $f$  يحافظ على حاصل الضرب السلمي .

(c)  $f$  يحافظ على الأطوال .

## الفصل الخامس الأسعة الذاتية والقيم الذاتية

### 1.5 مبادئ أولية

#### 1.1.5 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ ، وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً. نقول ان الشعاع  $v \in V, v \neq 0$  هو شعاع ذاتي للتطبيق الخطي  $f$  اذا وجد  $\lambda \in K$  بحيث  $f(v) = \lambda v$ .

نلاحظ ان  $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$  لكل  $\lambda \in K$ ، لذلك فأننا في تعريف الشعاع الذاتي نشترط الاختلاف عن الصفر. ونلاحظ انه لكل شعاع ذاتي  $v$  للتطبيق الخطي  $f$  يوجد  $\lambda$  واحد فقط في  $K$  بحيث أن  $f(v) = \lambda v$ ، لأنه اذا وجد  $\lambda' \in K$  بحيث  $f(v) = \lambda' v$  فأن  $\lambda v = \lambda' v$  اي  $(\lambda - \lambda')v = 0$ ، بما ان  $v \neq 0$  فأن  $\lambda = \lambda'$ .

نقول ان  $\lambda$  هو قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $f$  اذا وجد  $v \in V, v \neq 0$  بحيث ان  $f(v) = \lambda v$ ، ونسمي عندئذ  $v$  شعاعاً ذاتياً مشاركاً للقيمة الذاتية  $\lambda$ ، عما ونسمي  $\lambda$  قيمة ذاتية مشاركة للشعاع الذاتي  $v$ .

نفرز لمجموعة الأسعة الذاتية المشاركة للقيمة الذاتية  $\lambda$  بالرمز  $V_\lambda$ .

2.1.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً . إذا كان  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $f$  ، فإن المجموعة  $V_\lambda$  هي فضاء شعاعياً جزئياً من  $V$  .

البرهان :

$V_\lambda$  ليست فارغة لأنه يوجد على الأقل  $v \in V$  واحد بحيث  $f(v) = \lambda v$  .

لكل  $v_1, v_2 \in V_\lambda$  فإن  $f(v_1) = \lambda v_1$  ،  $f(v_2) = \lambda v_2$  ، فإن :

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = \lambda(v_1 - v_2)$$

فإن :  $v_1 - v_2 \in V_\lambda$

$$f(\alpha v_1) = \alpha f(v_1) \quad , \quad \alpha \in K \quad \text{لكل}$$

$$= \alpha(\lambda v_1) = \lambda(\alpha v_1)$$

فإن  $\alpha v_1 \in V_\lambda$

وبذلك فإن  $V_\lambda$  هي فضاء شعاعياً جزئياً في  $V$  .

(و.ه.م. ٠٣٠)

3.1.5 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً ،  $\lambda$  قيمة ذاتية مثالية للتطبيق الخطي  $f$  . نسمي الفضاء الشعاعياً الجزئياً  $V_\lambda$  فضاءً شعاعياً جزئياً ذاتياً متاركاماً للقيمة الذاتية  $\lambda$  .

4.1.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً خطياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساساً في  $V$  ، وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً ،  $A = (a_{ij})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  . ليكن  $\lambda \in K$  فأن :

(1)  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$

(2)  $\det(A - \lambda I_n)$  لا يعتمد على اختيار الاساس .

البرهان :

(1) ليكن  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f$  ، فأنه يوجد

$v \in V$  ،  $v \neq 0$  بحيث أن  $f(v) = \lambda v$  اي ان  $f(v) = \lambda Id_V(v)$

فأن :

$$(f - \lambda Id_V)(v) = f(v) - \lambda Id_V(v) = 0$$

أي أن :  $v \in \text{Ker}(f - \lambda Id_V)$  ، ومنه فأن  $(f - \lambda Id_V)$  ليس

متباين ، وبذلك فأن  $f - \lambda Id_V$  ليس تقابل .

من هنا فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f - \lambda Id_V$  والتي

هي  $A - \lambda I_n$  غير عكوسة ، فأن  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  .

وبالعكس ، إذا كان  $\det(A - \lambda I_n) = 0$  نتنتج ان التطبيق

$f - \lambda Id_V$  ليس تقابل . من النظرية (2.3.7)

فأن  $f - \lambda Id_V$  ليس متباين ، وبذلك فأن  $\text{Ker}(f - \lambda Id_V) \neq \{0\}$

اي انه يوجد  $v \in \text{Ker}(f - \lambda Id_V)$  ،  $v \neq 0$  . من هنا فأن :

$$(f - \lambda Id_V)(v) = 0$$

ونبذك  $f(v) = \lambda v$  أي ان  $\lambda$  هو قيمة ذاتية للتطبيق  $f$ .

(2) لتكن  $\{u_1, \dots, u_n\}$  اساءاً اخرّاً للفضاء  $V$ .

ولتكن  $P$  مصفوفة العبور من الاساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  الى

الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$ . ولتكن المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي  $f$  من الاساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  هي  $B$ . فأنه حسب ما

برهنا من (3.7.3 مزع (5) فأن:  $B = P^{-1}AP$ .

فأن:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}I_n P) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) = \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \cdot \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

(و.ه.و. 3.7.3)

من برهان هذه النظرية نستنج:

### 5.1.5 نتيجة

(1)  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f \Leftrightarrow$  التطبيق  $(f - \lambda \text{Id}_V)$

غير قابل.

$$V_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_V) \quad (2)$$

### 6.1.5 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً خطياً ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$ .

وليكن  $f: V \rightarrow V$  تطبيقاً خطياً، ولتكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$

اساءاً من  $V$ .  $A = (a_{ij})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق

الخطي  $f$ ،  $x$  شعاعاً ذاتياً وشاركاً للقيمة الذاتية  $\lambda$ .

فأن:  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$  حيث  $x_i \in K$ .

من هنا يتبع أن :  $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right)$

$$= x_1 f(v_1) + \dots + x_n f(v_n)$$

$$= x_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{n1} v_n) + \dots + x_n (a_{1n} v_1 + \dots + a_{nn} v_n)$$

$$= (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}) v_1 + \dots + (x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn}) v_n$$

من جهة أخرى فأن :

$$f(x) = \lambda x = \lambda (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)$$

$$= (\lambda x_1) v_1 + \dots + (\lambda x_n) v_n$$

فأن :

$$(\lambda x_1) v_1 + \dots + (\lambda x_n) v_n = (x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}) v_1 + \dots + (x_1 a_{1n} + \dots + x_n a_{nn}) v_n$$

لكن المجموعة  $\{v_1, \dots, v_n\}$  هي أساس للفضاء  $V$  ، فأن :

$$\lambda x_1 = x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{n1}$$

-----

$$\lambda x_n = x_1 a_{n1} + \dots + x_n a_{nn}$$

من هنا فأن :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

فأن :

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

نسي  $\det(A - \lambda I_n)$  كثيرة الحدود المميزة للتطبيق  $f$  .  
 بأنه لكل مصفوفة  $A \in M_n(K)$  يوجد تطبيق خطي  $f$  لفضاء شعاعي ذات بعد  $n$  ، فأشأننا نقصد



بالقيم الذاتية والأشعة الذاتية للمصفوفة  $A$  ، القيم الذاتية والأشعة الذاتية للتطبيق الخطي  $f$  المرافقة للمصفوفة  $A$  .

لإيجاد القيم الذاتية والأشعة الذاتية المتداخلة للتطبيق الخطي  $f$  نتبع مايلي :

وإذا فرضنا ان  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f$  فإنه :

$$\det(A - \lambda I_n) = \det \left( \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

عند حساب  $\det(A - \lambda I_n)$  نصل على كثيرة حدود في  $\lambda$  ذي الحوامل من الكتل  $K$  ، وهذه الاعلى درجة هو ناتج جذاء الحدود الواقعة على القطر الرئيسي .  
فيكون :

$$\det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1} \lambda + p_n$$

نرمز لكثيرة الحدود هذه بالرمز  $g(\lambda)$  .

نقول ان  $g(\lambda)$  هي كثيرة الحدود المميزة للتطبيق  $f$  (أو

كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة  $A$ ) .

ونسمي المعادلة  $g(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$  بالمعادلة

المميزة للتطبيق  $f$  (أو المعادلة المميزة للمصفوفة  $A$ ) .

بإيجاد حلول هذه المعادلة توجد القيم الذاتية المتراكمة للتطبيق  $f$ ، ومنها توجد الرتبة الذاتية المتراكمة لتلك القيم الذاتية.

نلاحظ هنا، أنه إذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  مصفوفة مثلثية علوية (سفلية)، فإن كثرة الحدود المميزة للتطبيق  $f$  تكون:

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$$
 حيث  $a_{ii}$  هي عناصر القطر الرئيسي. فإن  $a_{ii}$  هي القيم الذاتية للتطبيق  $f$ .

ولذلك نلاحظ أنه إذا كانت كثرة الحدود المميزة للمصفوفة  $A$  هي حاصل ضرب  $n$  كثرات حدود خطية (من الدرجة الأولى) فإنه يوجد  $n$  قيم ذاتية.

### 7.1.5 مثال

ليكن  $\mathbb{R}^3$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$ . لنأخذ

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تطبيقاً خطياً معرفاً كما يلي:

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3, x_3)$$

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  من الأساس النظامي

هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن كثرة الحدود المميزة للتطبيق  $f$  هي:

$$g(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

عندما  $g(\lambda) = 0$  فإن  $(1-\lambda)^3 = 0$

فإن:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

فإن الرتبة الذاتية  $x = (x_1, x_2, x_3)$  المعادلة للقيم الذاتية  $\lambda = 1$

يحقّق:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

من هنا فإن  $x_3 = 0$  أي أن:

$$x = (x_1, x_2, 0) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0)$$

فإن الفضاء الشعاعي الجزئي الذاتي المارك للقيمة الذاتية  $\lambda = 1$

$$V_{\lambda=1} = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \quad \text{هو:}$$

## 2.5 تقطير المصفوفة

في (2.1.3) عرفنا المصفوفة القطرية، بأنها المصفوفة

التي تكون جميع عناصرها أصفاراً عدا عناصر القطر الرئيسي.

سندرس في هذا البند كيفية الحصول من أي مصفوفة  $A$  على

مصفوفة قطرية، ونسعى العلية هذه لتقطير المصفوفة.

### 1.2.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$ ،  $f$  تطبيقاً

خطياً من  $V$  في  $V$  ، وليكن  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  قيم ذاتية مختلفة للتطبيق  $f$  ، و  $x_1, \dots, x_n$  اُسعة ذاتية متراكمة لتلك القيم الذاتية على التوالي . فان اُسعة  $x_1, \dots, x_n$  متقلة خطياً .

البرهان :

اذا كان  $n=1$  ولما كان  $x_1 \neq 0$  لانه شعاع ذاتي ، فان

$x_1$  متقلة خطياً .

لنفرض الآن ان النظرية صحيحة من اجل  $x_1, \dots, x_{n-1}$  اُسعة ذاتية متراكمة للقيم الذاتية المختلفة  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  . وليكن  $\lambda_n$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f$  مختلفاً عن كل من  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  ، وليكن  $x_n$  شعاعاً ذاتياً متراكماً للقيمة الذاتية  $\lambda_n$  .  
لدي  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$  اذا كان :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + \alpha_n x_n = 0$$

فانه اذا كان  $\alpha_n = 0$  فان  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} = 0$

من الفرضية فان :  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0$

فان :  $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n = 0$

اي ان اُسعة  $x_1, \dots, x_n$  متقلة خطياً .

اذا كان  $\alpha_n \neq 0$  فان :

$$x_n = \delta_1 x_1 + \dots + \delta_{n-1} x_{n-1}$$

$$\delta_i = \frac{-\alpha_i}{\alpha_n} \quad \text{حيث}$$

وبما ان  $x_n$  هو شعاع ذاتي متراكم للقيمة الذاتية  $\lambda_n$

$$f(x_n) = \lambda_n x_n \quad \text{فان :}$$

ايعان :

$$f(x_n) = \lambda_n \delta_1 x_1 + \dots + \lambda_n \delta_{n-1} x_{n-1}$$

من جهة اخرى بيان  $f$  خطي فان :

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\delta_1 x_1 + \dots + \delta_{n-1} x_{n-1}) \\ &= \delta_1 f(x_1) + \dots + \delta_{n-1} f(x_{n-1}) \\ &= \delta_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \delta_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}$$

فان :

$$\lambda_n \delta_1 x_1 + \dots + \lambda_n \delta_{n-1} x_{n-1} = \delta_1 \lambda_1 x_1 + \dots + \delta_{n-1} \lambda_{n-1} x_{n-1}$$

ايعان :

$$\delta_1 (\lambda_n - \lambda_1) x_1 + \dots + \delta_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) x_{n-1} = 0$$

وبما ان الـ  $x_1, \dots, x_{n-1}$  متقلة خطيا حسب الفرض

فان :

$$\delta_1 (\lambda_n - \lambda_1) = 0, \dots, \delta_{n-1} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = 0$$

وبما ان  $\lambda_i$  مختلفة، فان  $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$  لكل  $i=1, \dots, n-1$

فان  $\delta_1 = 0, \dots, \delta_{n-1} = 0$  ايعان  $x_n = 0$

وهذا خلاف للفرض ان  $x_n \neq 0$  لانه شعاع ذاتي،

فان  $\lambda_n = 0$  وبالتالي الـ  $x_1, \dots, x_n$  متقلة خطيا.

(و. ه. ٣٠)

### 2.2.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاء شعاعيا ذا بعد  $n$  على الحقل  $K$ ،

وليكن  $f$  تطبيقا خطيا من  $V$  في  $V$ ، فاذا كان

للتطبيق  $f$ ،  $n$  الـ  $n$  ذاتية مختلفة، ولذا اعتبرنا

هذه الأشعة الأساسية للفضاء  $V$  . فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  من هذا الأساس هي مصفوفة قطرية . وبالعكس إذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  من أساس معين هي مصفوفة قطرية فإن جميع الأشعة تلك الأساس هي أشعة ذاتية للتطبيق  $f$  .

البرهان :

لتكن  $v_1, \dots, v_n$  أشعة ذاتية مختلفة للتطبيق  $f$  ذي القيم الذاتية المختلفة  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  على الترتيب ، فإن  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$  .

من النظرية (1.2.5) فإن الأشعة  $v_1, \dots, v_n$  مستقلة خطياً ، فإنها أساس للفضاء  $V$  .

وكذلك بيان  $v_1, \dots, v_n$  أشعة ذاتية فإن :

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 0 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

-----

$$f(v_n) = \lambda_n v_n = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  هي :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

وهي مصفوفة

قطرية .

وبالعكس وإذا كانت المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  من الأساس

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ له } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ : فأن } :$$

$$f(v_1) = a_{11}v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

$$f(v_2) = 0 \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

-----

$$f(v_n) = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

فأن  $f(v_i) = a_{ii} \cdot v_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$  حيث  $a_{ii} \in K$ .

فأن المجموعة  $v_1, \dots, v_n$  هي ائحة ذاتية للتطبيق  $f$ .

(و.ه. 3.0)

### 3.2.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاء شعاعيا ذا بعد  $n$  على الحقن

$K$ ، وليكن  $\{v_1, \dots, v_n\}$  اساسا في  $V$ . وليكن

$f$  تطبيقا خطيا من  $V$  في  $V$ . فإذا كان لعتبة

العدد المميز للتطبيق  $f$ ،  $n$  قيم ذاتية مختلفة  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ،

فأنه توجد اساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  للفضاء  $V$  بحيث ان

المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  من الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$

هـ مصفوفة قطرية، وعناصر القطر هي القيم الذاتية

للتطبيق  $f$ .

البهان:

لكل قيمة ذاتية  $\lambda_i$  يوجد على الحقن شعاع ذاتي

$u_i$  لكل  $i = 1, \dots, n$

بيان  $\lambda_i \neq \lambda_j$  لكل  $i \neq j$  فأنه حسب النظرية (4.2.5) الأربعة  $u_1, \dots, u_n$  متقلة خطياً ، وبيان عددها هو

$n$  ، فأن الأربعة  $\{u_1, \dots, u_n\}$  هي أساس للفضاء  $V$  .

فأنه حسب النظرية (2.2.5) المصفوفة  $B$  المرافقة

للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس  $\{u_1, \dots, u_n\}$  هي مصفوفة

قطرية ، بحيث أن عناصر القطر تكون هي القيم الذاتية

المختلفة  $\lambda_i$

(و.ه.3.0)

### 4.2.5 نتيجة

تفرض فرضيات النظرية (3.2.5) ، وإذا كانت

المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$

هي  $A$  ، ومصفوفة العبور من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  إلى الأساس

$\{u_1, \dots, u_n\}$  هي  $P$  ، فأن العلاقة بين المصفوفة

$$B = P^{-1} A P \quad : \quad A, B \text{ هي}$$

### 5.2.5 مثال

نأخذ الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^3$  على الحقل  $\mathbb{R}$  وأساسه

النظامي  $\{e_1, e_2, e_3\}$  . وليكن  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  تطبيقاً خطياً

معرفاً كما يلي :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 5x_2 + 3x_3, -2x_1 + 4x_3)$$

فأن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

: هي  $\{e_1, e_2, e_3\}$

فأنت:

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 5-\lambda & 3 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

فأنت المعادلة المميزة للتطبيق  $f$  هي  $\det(A - \lambda I_3) = 0$

$$(1-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) + 2(5-\lambda) = 0 \quad \text{أي أن:}$$

$$(5-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \text{فأنت:}$$

أي أن:  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$  هي قيم ذاتية

للتطبيق  $f$ .

فأنت الأربعة الذاتية  $x = (x_1, x_2, x_3)$  الخاصة للقيمة الذاتية

$$\begin{pmatrix} 1-5 & 0 & 1 \\ 0 & 5-5 & 3 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث } \lambda_1 = 5$$

من هنا فأنت  $x_1 = 0, x_3 = 0$  أي أن:

$$x = (0, x_2, 0) = x_2 (0, 1, 0)$$

$$V_{\lambda_1=5} = [(0, 1, 0)] \quad \text{فأنت:}$$

المشاركة

نفس الطريقة الأربعة الذاتية  $x = (x_1, x_2, x_3)$  للقيمة الذاتية

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{حيث } \lambda_2 = 2$$

فأنت :  $x_2 = -x_1$  ،  $x_1 = x_3$

أيان :  $x = (x_1, -x_1, x_1)$

$= x_1 (1, -1, 1)$

فأنت :  $V_{\lambda_2=2} = [(1, -1, 1)]$

نفس الطريقة الشعبة الذاتية  $x = (x_1, x_2, x_3)$  المشتركة

للقيمة الذاتية  $\lambda_3 = 3$  هي :

$x = (\frac{1}{2}x_3, -\frac{3}{2}x_3, x_3) = \frac{1}{2}x_3 (1, -3, 2)$

فأنت :  $V_{\lambda_3=3} = [(1, -3, 2)]$

فأنت الشعبة الذاتية المشتركة للقيم الذاتية 3 ، 2 ، 5

هي  $v_3 = (1, -3, 2)$  ،  $v_2 = (1, -1, 1)$  ،  $v_1 = (0, 1, 0)$

على الترتيب . نلاحظ ان  $v_1, v_2, v_3$  متقلة خطياً

الاساس للمضاء  $\mathbb{R}^3$

كذلك ،  $v_1 = (0, 1, 0) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$

$v_2 = (1, -1, 1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$

$v_3 = (1, -3, 2) = 1 \cdot e_1 + (-3) \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$

فأنت مصفوفة العبور من الاساس  $\{e_1, e_2, e_3\}$  الى الاساس

$\{v_1, v_2, v_3\}$  هي :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

والمصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  هي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في الأساس  $\{v_1, v_2, v_3\}$  هي :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

تلاحظان  $D$  هي مصفوفة قطرية وعناصر قطرها هي القيم الذاتية 5, 2, 3 .  
وهو نفس الجواب فيما لو استعملنا النظرية (3.2.5) مباشرة .

### 3.5 نظرية كايلي - هاميلتون

#### 1.3.5 نظرية

لتكن  $A \in M_n(K)$  ، كثيرة  $g(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n$  كثيرة

عدد في  $\lambda$  ذي العوامل من الحقل  $K$  . ولتكن :

كثيرة عدد من الدرجة  $(n-1)$   $c(\lambda) = c_0\lambda^{n-1} + c_1\lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}$

وعوامله هي المصفوفات  $C_i$  و  $C_i \in M_n(K)$

فإذا كان :  $g(\lambda)I_n = (A - \lambda I_n) c(\lambda)$

فإن :  $g(A) = 0$

البرهان :

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n) c(\lambda) &= (A - \lambda I_n) (c_0\lambda^{n-1} + c_1\lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1}) \\ &= Ac_0\lambda^{n-1} + Ac_1\lambda^{n-2} + \dots + Ac_{n-2}\lambda + Ac_{n-1} - c_0\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} - \dots - c_{n-2}\lambda^2 - c_{n-1}\lambda \end{aligned}$$

$$= AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \dots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n$$

من هنا فأن :

$$AC_{n-1} + (AC_{n-2} - C_{n-1})\lambda + (AC_{n-3} - C_{n-2})\lambda^2 + \dots + (AC_0 - C_1)\lambda^{n-1} - C_0\lambda^n =$$

$$= a_n I_n + a_{n-1} \lambda I_n + a_{n-2} \lambda^2 I_n + \dots + a_1 \lambda^{n-1} I_n + a_0 \lambda^n I_n$$

فأن :

$$AC_{n-1} = a_n I_n$$

$$AC_{n-2} - C_{n-1} = a_{n-1} I_n$$

$$AC_{n-3} - C_{n-2} = a_{n-2} I_n$$

-----

$$AC_0 - C_1 = a_1 I_n$$

$$-C_0 = a_0 I_n$$

نضرب المعادلة الثانية بـ  $A$  والثالثة بـ  $A^2$  .....  
والأخيرة بـ  $A^n$  ونجمعها ، فيكون لدينا :

$$a_n I_n + a_{n-1} A + \dots + a_0 A^n = 0$$

$$g(A) = 0 \quad \text{أي ان}$$

(و.ه.م.ع.)

### 2.3.5 نظرية (كاليب-هافلوتون)

لتكن  $A \in M_n(K)$  و  $g(\lambda)$  كثيرة الحدود المميزة

للمصفوفة  $A$  . فأن  $g(A) = 0$  .

البرهان :

نلاحظ ان  $\text{adj}(A - \lambda I_n)$  هي كثيرة حدود في  $\lambda$  ذات

درجة ليست أكبر من  $(n-1)$  . لنفرض ان  $\text{adj}(A - \lambda I_n) = C(\lambda)$  .

حسب التمرين (16) في الفصل الثالث، فأن:

$$(\det(A - \lambda I_n)) I_n = (A - \lambda I_n) (\text{adj}(A - \lambda I_n))$$

$$g(\lambda) I_n = (A - \lambda I_n) C(\lambda) \quad \text{أي أن:}$$

$$g(A) = 0, \quad (1.3.5)$$

(و.ه.و.م)

### 3.3.5 تعريف

لتكن  $A \in M_n(K)$ ، نسمي كثيرة الحدود  $h(\lambda)$  أدنى كثيرة حدود للمصفوفة  $A$ ، إذا كان العامل عند الحد ذي أعلى درجة في  $h(\lambda)$  هو 1، وكذلك  $h(\lambda)$  هي كثيرة حدود ذات أقل درجة ممكنة بحيث تلون  $A$  جذراً لها.

### 4.3.5 نظرية

لتكن  $A \in M_n(K)$ ،  $h(\lambda)$  أدنى كثيرة حدود للمصفوفة  $A$ . فأن كل كثيرة حدود والتي تلون  $A$  جذراً لها تقبل القسمة على  $h(\lambda)$ .

البرهان:

لتكن  $f(\lambda)$  كثيرة حدود بحيث  $A$  تلون جذراً لها، فأنه لكثيرتي الحدود  $h(\lambda)$ ،  $f(\lambda)$  توجد كثيرتي الحدود  $q(\lambda)$ ،  $r(\lambda)$  بحيث  $f(\lambda) = h(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda)$  حيث  $r(\lambda) = 0$  أو درجة  $r(\lambda)$  أقل من درجة  $h(\lambda)$ .

إذا كانت  $r(A) \neq 0$  ، فإن  $f(A) = h(A)g(A) + r(A)$  .  
لكن  $f(A) = 0$  ،  $h(A) = 0$  ، فإن  $r(A) = 0$  ، أي ان  
 $A$  هي جذر لكثير الحدود  $r(A)$  ذات الدرجة أقل من درجته  
 $h(A)$  ، وهذا غير ممكن لأن  $h(A)$  هي أدنى كثيره حدود  
للمصفوفة  $A$  ، فإن  $r(A) = 0$  .  
أي ان  $f(A) = h(A)g(A)$  ، أي ان  $f(A)$  تقبل  
القيمة على  $h(A)$  .

(و.ه.م. ٠٣)

### 5.3.5 نتيجة

للبنية مصفوفة  $A \in M_n(K)$  ، فإن كثيره الحدود  
المميز للمصفوفة  $A$  تقبل القيمة على كثيره الحدود  
الذيها للمصفوفة  $A$  .

### 4.5 الأسعة الذاتية والتطبيقات العددية والأحادية

#### 1.4.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً ذا بعد  $n$  على الحقل  
 $K$  ، وليكن  $f$  كلاً مزدوج الخطية وحقائراً على  $V$  ،  
فإنه يوجد اساس في  $V$  بحيث تكون المصفوفة  
المرافقة للتطبيق  $f$  بالنسبة لهذا الاساس مصفوفة قطرية .  
البرهان:

إذا كان  $f$  تطبيقاً صفرياً فإن النظرية صحيحة .

بإذا كان  $\dim V = 1$  فإن النظرية أيضاً صحيحة .  
 لنفرض ان  $f \neq f_0$  وان  $\dim V = n > 1$  ، ونفرض ان  
 النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذي بعد  $n-1$  .  
 ليكن  $v_1 \in V$  بحيث  $f(v_1, v_1) \neq 0$  .

وليكن  $U$  الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالشعاع  $v_1$  ، وليكن  
 $W = \{v \in V : f(v_1, v) = 0\}$  . لكل  $u \in U \cap W$  فإن  $u \in U$

و  $u \in W$  ، فإن  $u = k_1 v_1$  حيث  $k_1 \in K$  ، فإن :

$$0 = f(u, u) = f(k_1 v_1, k_1 v_1) = k_1^2 f(v_1, v_1)$$

لكن  $f(v_1, v_1) \neq 0$  فإن  $k_1 = 0$  وبالتالي  $u = k_1 v_1 = 0$

فإن  $U \cap W = \{0\}$  .

$$w = v - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \quad \text{لكل } v \in V \text{ نضع}$$

فإن :

$$f(v_1, w) = f(v_1, v) - \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} f(v_1, v_1) .$$

$$= f(v_1, v) - f(v_1, v) = 0$$

فإنه من تعريف  $W$  فإن  $w \in W$  ، ولذلك  $\frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} \in K$   
 وبذلك فإن :  $v = w + \frac{f(v_1, v)}{f(v_1, v_1)} v_1 \in W + U$   
 اي ان :

$$V = W + U$$

$$V = W \oplus U$$

فإن :

فإنه حسب النظرية ( 10 . 5 . 1 )  $\dim V = \dim W + \dim U$

بيان  $v_1$  يولد  $U$  فإن :  $\dim U = 1$  ، فإن  $\dim W = n - 1$

فأنه حسب الفرض يوجد أساس للفضاء  $W$  ولتكن  
 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ، بحيث المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$   
 من  $W$  من  $W$  من الأساس  $\{v_1, \dots, v_n\}$  تكون قطرية، أي  
 أنه  $f(v_i, v_j) = 0$  لكل  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ،  $i \neq j$ .  
 بيان  $\{v_i\}$  أساس للفضاء  $U$ ،  $V = W \oplus U$ ، فإنه  
 حسب التمرين (19 في الفصل الأول) تكون  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$   
 أساساً للفضاء العامي  $V$ ، ولذلك  $f(v_i, v_j) = 0$   
 لكل  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ،  $i \neq j$ ، فإن  $f(v_i, v_j) = 0$  لكل  
 $i, j = 1, 2, \dots, n$ ،  $i \neq j$ ، وذلك لأن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  من الأساس  
 $\{v_1, \dots, v_n\}$  تكون مصفوفة قطرية.  
 (و.ه.و. 3.0)

### 2.4.5 نظرية

ليكن  $(H, 0)$  فضاء هيرميتياً،  $f$  تطبيقاً خطياً  
 على  $H$ ، وليكن  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $f$   
 نأخذ :-

- (1) إذا كان  $f^* = f^{-1}$  فإن  $|\lambda| = 1$ .  
 (2) إذا كان  $f^* = f$  فإن  $\lambda$  قيمة حقيقية بحتة.  
 (3) إذا كان  $f^* = -f$  فإن  $\lambda$  قيمة تخيلية بحتة.

البرهان:

بيان  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f$ ، فإنه يوجد

$v \neq 0 \in H$  بحيث  $f(v) = \lambda v$ ، من هنا فإن  $v \neq 0$

$$\lambda \bar{\lambda} (v \circ v) = (\lambda v \circ \lambda v) = (f(v) \circ f(v)) = v \circ f^*(f(v)) \quad \therefore (1)$$



$$= \nu \circ f^{-1}(f(\nu)) = \nu \circ \nu$$

$$(\lambda \bar{\lambda} - 1)(\nu \circ \nu) = 0 \quad \text{فأنت:}$$

$$\lambda \bar{\lambda} = 1 \quad \text{لكن} \quad \nu \circ \nu \neq 0 \quad \text{فأنت:} \quad \lambda \bar{\lambda} - 1 = 0 \quad \text{أيان:}$$

$$|\lambda| = 1 \quad \text{فأنت:}$$

$$\lambda(\nu \circ \nu) = \lambda \nu \circ \nu = f(\nu) \circ \nu = \nu \circ f^*(\nu) \quad (2)$$

$$= \nu \circ f(\nu) = \nu \circ \lambda \nu = \bar{\lambda}(\nu \circ \nu)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\nu \circ \nu) = 0 \quad \text{فأنت:}$$

$$\lambda = \bar{\lambda} \quad \text{لكن} \quad \nu \circ \nu \neq 0 \quad \text{فأنت:} \quad \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad \text{أيان}$$

وبذلك فأنت  $\lambda$  قيمة حقيقية بحتة.

$$\lambda(\nu \circ \nu) = \lambda \nu \circ \nu = f(\nu) \circ \nu = \nu \circ f^*(\nu) \quad (3)$$

$$= \nu \circ (-f(\nu)) = \nu \circ (-\lambda \nu) = -\bar{\lambda}(\nu \circ \nu)$$

$$(\lambda + \bar{\lambda})(\nu \circ \nu) = 0 \quad \text{فأنت:}$$

$$\bar{\lambda} = -\lambda \quad \text{لكن} \quad \nu \circ \nu \neq 0 \quad \text{فأنت:} \quad \lambda + \bar{\lambda} = 0 \quad \text{أيان}$$

ومنه  $\lambda$  قيمة تخيلية بحتة.

(و.ه.و. ٣.٠)

### 3.4.5 نتيجة

إذا كان  $(E, \circ)$  فضاءً اقليدياً ،  $f$  تطبيقاً خطياً على  $E$  بحيث  $f = f^*$  فأنت:

(1) إذا كان  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق  $f$ ، فأنت

$\lambda$  قيمة حقيقية بحتة.

(2) كثيرة الحدود المميز  $g(\lambda)$  للتطبيق  $f$  هي حاصل ضرب

كثيرات حدود قطبية.

(3) توجد اُسعة ذاتية للتطبيق  $f$  .  
(4) االسعة الذاتية المماثلة للقيم الذاتية المختلفة متعامدة .  
البرهان :

(1) مباشرة حسب النظرية السابقة مزع (2) .  
(2) حسب (1) فان القيم الذاتية للتطبيق  $f$  تكون حقيقية بحتة ، اى ان كثرة الحدود المميزة  $g(\lambda)$  له حاصل ضرب كثرات حدود خطية .  
(3) من (2) مباشرة .

(4) لنفرض ان  $\lambda_1, \lambda_2$  قيمتان ذاتيتان مختلفتان للتطبيق  $f$  ، ولنفرض ان  $v_1, v_2$  شعاعان ذاتيان متماثلتان لهما على التوالي ، فان  $f(v_1) = \lambda_1 v_1$  ،  $f(v_2) = \lambda_2 v_2$  ،  
وهي ان  $f = f^*$  فان :

$$\lambda_1(v_1 \circ v_2) = \lambda_1 v_1 \circ v_2 = f(v_1) \circ v_2 = v_1 \circ f^*(v_2) = v_1 \circ f(v_2) = v_1 \circ \lambda_2 v_2 = \lambda_2 (v_1 \circ v_2)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \circ v_2) = 0$$

فان :

لكن  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  فان  $v_1 \circ v_2 = 0$  ، وعنه فان  $v_1, v_2$  متعامدان .

(و. ه. ٣٠)

### 4.4.5 نظرية

ليكن  $(E, \circ)$  فضاءً اقليدياً ،  $f$  تطبيقاً خطياً على  $E$  بحيث  $f = f^*$  . فانه عندئذ توجد اساس معيارى

متعامد للفضاء  $E$  فتكون من الأشعة الذاتية للتطبيق  $f$ .  
البرهان :

إذا كان  $\dim E = 1$  فإن النظرية صحيحة .

لنفرض ان  $\dim E = n > 1$  فإنه يوجد شعاع ذاتي  $v_1 \in E, v_1 \neq 0$   
للتطبيق  $f$ .

لنفرض ان النظرية صحيحة من اجل فضاء شعاعي ذا بعد  $(n-1)$ .

ليكن  $E_1$  فضاء شعاعياً جزئياً مولداً بالشعاع  $v_1$ .

وليكن  $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ ، فإن  $u_1 \in E_1$  شعاع معياري.

مب النظرية (7.4.4) فإن :  $E = E_1 \oplus E_1^\perp$ .

فإن :  $\dim E = \dim E_1 + \dim E_1^\perp$  اي ان :  $\dim E_1^\perp = n-1$ .

من الفرضية فإنه يوجد اساس معياري متعامد في  $E_1^\perp$ .

ولتكن  $\{u_2, \dots, u_n\}$  متكونة من الأشعة الذاتية

للتطبيق  $f$ . لكن  $u_1$  معياري وكذلك  $u_i = 0, u_j = 0$  لكل

$i = 2, \dots, n$ ، فإن المجموعة  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  هي اساس معياري

متعامد متكونة من الأشعة الذاتية للتطبيق  $f$ .

(و. ه. م. 3.)

### 5.4.5 نتيجة

ليكن  $(E, \phi)$  فضاءاً أقليدياً ،  $f$  تطبيقاً خطياً

على  $E$  يحقق  $f = f^*$  . فإنه يوجد اساس معياري متعامد

في  $E$ ، بحيث ان المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  في تلك

الاساس مصفوفة قطرية .

بطريقة مشابهة لبرهان النظرية (4.4.5)، نبرهن النظرية التالية .

### 6.4.5 نظرية

ليكن  $(H, \theta)$  فضاء هيرميتياً ،  $f$  تطبيقاً اعدادياً على  $H$  . فإنه يوجد اساس معياري معامد في  $H$  متكون من الأشعة الذاتية للتطبيق  $f$  . وتكون مصفوفة  $f$  في هذا الاساس مصفوفة قطرية .

### 5.5 صيغ جوردان القانونية

#### 1.5.5 تعريف

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  و  $V_1$  فضاء شعاعياً جزئياً من  $V$  . نقول ان الفضاء الشعاعي الجزئي  $V_1$  متميز باذا كان  $f(V_1) \subseteq V_1$  .

#### 2.5.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  ،  $V_1$  فضاء شعاعياً متميزاً من  $V$  . فإن المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  هي من الشكل 
$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$
 حيث  $A$  هي المصفوفة المرافقة لمقصور  $f$  الى  $V_1$  .

البرهان :

لنفرز لمقصود التطبيق  $f$  الى  $V_1$  بالرمز  $f_1$  .  
 لتكن  $\{u_1, \dots, u_r\}$  اساس  $V_1$  . نكمل هذا  
 الاساس الى اساس للفضاء  $V$  . ولتكن  $\{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$   
 اساس للفضاء  $V$  . بيان  $V_1$  متميز في  $V$  فان  
 $f(u_1), \dots, f(u_r) \in V_1$  ، فان :

$$f_1(u_1) = f(u_1) = a_{11}u_1 + \dots + a_{r1}u_r + 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_s$$

$$f_1(u_2) = f(u_2) = a_{12}u_1 + \dots + a_{r2}u_r + 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_s$$

-----

$$f_1(u_r) = f(u_r) = a_{1r}u_1 + \dots + a_{rr}u_r + 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_s$$

$$f(v_1) = b_{11}u_1 + \dots + b_{r1}u_r + c_{11}v_1 + \dots + c_{s1}v_s$$

$$f(v_2) = b_{12}u_1 + \dots + b_{r2}u_r + c_{12}v_1 + \dots + c_{s2}v_s$$

-----

$$f(v_s) = b_{1s}u_1 + \dots + b_{rs}u_r + c_{1s}v_1 + \dots + c_{ss}v_s$$

فان المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  هي :

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{s1} & c_{s2} & \dots & c_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

حيث  $A$  هي المصفوفة المرافقة لمقصود  $f$  الى  $V_1$  .

### 3.5.5 نظرية

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  ، وليكن  $V_1, \dots, V_m$  فضاءات شعاعية جزئية متباعدة في  $V$  . حيث :

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  ، ولتكن  $A_i$  المصفوفة المرافقة لمقصور  $f$  الى  $V_i$  لكل  $i = 1, \dots, m$  . فان المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$  هي :

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

البرهان :

لتكن  $\{u_{11}, \dots, u_{n_1,1}\}$  أساس  $V_1$

$\{u_{1m}, \dots, u_{n_m,m}\}$  أساس  $V_m$

بيان :  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  فان :

المجموعة  $\{u_{11}, \dots, u_{n_1,1}, u_{1m}, \dots, u_{n_m,m}\}$  عبارة عن أساس

في  $V$  .

نرمز لمقصور  $f$  الى  $V_i$  بالرمز  $f_i$  لكل  $i = 1, \dots, m$  .

$$f_1(u_{11}) = f(u_{11}) = a_{11} u_{11} + \dots + a_{n_1,1} u_{n_1,1} + 0 \cdot u_{12} + \dots + 0 \cdot u_{n_m,m}$$

$$f_1(u_{21}) = f(u_{21}) = a_{12} u_{11} + \dots + a_{n_1,2} u_{n_1,1} + 0 \cdot u_{12} + \dots + 0 \cdot u_{n_m,m}$$

$$f_1(u_{n_1,1}) = f(u_{n_1,1}) = a_{1n_1} u_{11} + \dots + a_{n_1,n_1} u_{n_1,1} + 0 \cdot u_{12} + \dots + 0 \cdot u_{n_m,m}$$

$$f_2(u_{12}) = f(u_{12}) = 0 \cdot u_{11} + \dots + 0 \cdot u_{n_1} + c_{11} u_{12} + \dots + c_{n_2} u_{n_2} + 0 \cdot u_{13} + \dots + 0 \cdot u_{n_m}$$

$$f_2(u_{n_2}) = f(u_{n_2}) = 0 \cdot u_{11} + \dots + 0 \cdot u_{n_1} + c_{1n_2} u_{12} + \dots + c_{n_2 n_2} u_{n_2} + 0 \cdot u_{13} + \dots + 0 \cdot u_{n_m}$$

$$f_m(u_{1m}) = f(u_{1m}) = 0 \cdot u_{11} + \dots + k_{11} u_{1m} + \dots + k_{n_1} u_{n_1 m}$$

$$f_m(u_{n_m}) = f(u_{n_m}) = 0 \cdot u_{11} + \dots + k_{1n_m} u_{1m} + \dots + k_{n_m n_m} u_{n_m m}$$

فإن المصفوفة المرافقة للخطية  $f$  هي

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n_1 1} & a_{n_1 2} & \dots & a_{n_1 n_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & \dots & c_{1n_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n_2 1} & \dots & c_{n_2 n_2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{11} & \dots & k_{1n_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n_m 1} & \dots & k_{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

( . ٢ . ٥ . ٥ )

4.5.5 تعريف  
 إذا كانت

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

مصنوفة كما

في النظرية (3.5.5)، فنقول أن  $M$  هو المجموع المباشر للمصفوفات  $A_i$ ، ونكتب:  $M = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_m$ .

5.5.5 صيغة جوردان القانونية

نص المصفوفة

$$J(\lambda; n) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

بقالب جوردان ونوزع لها بالرمز  $J(\lambda; n)$ .  
 إذا كان  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$  بحيث  $n = \sum_{i=1}^p n_i$ ، فأن:

$$J(\lambda; n_1, n_2, \dots, n_p) = J(\lambda; n_1) \oplus \dots \oplus J(\lambda; n_p) \in M_n(K)$$

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$ ، وتكن  $M$  المصفوفة المرافقة للتطبيق  $f$ .

في أساس معين. فإذا كانت:

$$M = J(\lambda_1; k_1^{(1)}, \dots, k_p^{(1)}) \oplus J(\lambda_2; k_1^{(2)}, \dots, k_p^{(2)}) \oplus \dots \oplus J(\lambda_m; k_1^{(m)}, \dots, k_p^{(m)})$$

حيث:

(1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  هي قيم ذاتية للتطبيق الخطي  $f$ .

(2)  $k_1^{(i)} + \dots + k_p^{(i)} = n_i$  حيث  $n_i$  هو عدد تكرار القيم الذاتية  $\lambda_i$ .



في كثيرة الحدود المميزة  $g(\lambda)$  للتطبيق  $F$ .

(3) إذا كانت في كثيرة الحدود الدنيا للمصفوفة  $M$  تكرار  $\lambda_i$  هو من الدرجة  $m_i$ ، فإنه تكون احدى متوالب جوردان على الأقل من الدرجة  $m_i$ ، والمتوالب الباقية هي من الدرجة أقل أو تساوي  $m_i$ .

نقول عندئذ ان للمصفوفة  $M$  صيغة جوردان القانونية.

### 6.5.5 أمثلة

$$J(5; 4) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$J(7; 2, 1) = J(7; 2) \oplus J(7; 1) \quad (2)$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \oplus (7) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(3) آتت صيغة جوردان القانونية للمصفوفة  $A$  المرافقة للتطبيق

الخطي  $F$  الذي كثيرة حدوده المميزة هي:  $g(\lambda) = (\lambda - 2)^4 (\lambda - 3)^3$

وكثيرة حدود الدنيا:  $h(\lambda) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)^2$ .

من التعريف نلاحظ ان  $\lambda_1 = 2$ ،  $\lambda_2 = 3$  تكرار  $\lambda_1$  هو 4،

وتكرار  $\lambda_2$  هو 3 في كثيرة الحدود المميزة.

في كثيرة الحدود الدنيا تكرار  $\lambda_1$  هو 2، وتكرار  $\lambda_2$  هو 2.

فإن صيغة جوردان القانونية هو إما:

$$M = J(2;2) \oplus J(2;1) \oplus J(2;1) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (2) \oplus (2) \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \left( \begin{array}{c|cc|c|c|c} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & & 0 \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & 0 & & & & 3 \\ & & & & & & 3 \end{array} \right)$$

أر هو :

$$M = J(2;2) \oplus J(2;2) \oplus J(3;2) \oplus J(3;1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \oplus (3)$$

$$= \left( \begin{array}{c|cc|c|c|c} 2 & 1 & & & \\ 0 & 2 & & & \\ \hline & & 2 & 1 & 0 \\ & & 0 & 2 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & 0 & & & & 3 \\ & & & & & & 3 \end{array} \right)$$

## تمارين

(1) برهن ان صفر هو قيمة ذاتية للتطبيق الخطي  $f \Leftrightarrow f$  غير متباين .

(2) باذا كان  $\lambda$  قيمة ذاتية للتطبيق الخطي المتقابل  $f$  ، فبرهن ان  $\lambda^{-1}$  هو قيمة ذاتية لـ  $f^{-1}$  .

(3) في كل الحالات الآتية اوجد المصفوفة  $A$  المرافقة للتطبيق  $f$  ، ثم حول المصفوفة هذه الى مصفوفة قطرية بان امكن .

$$f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{معرفاً بـ (a)}$$

$$f(x_1, x_2) = (-2x_2, 2x_1) \quad f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{معرفاً بـ (b)}$$

حيث  $\mathbb{R}^2$  هو فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{R}$  ،  $\mathbb{C}^2$  هو فضاء شعاعي على الحقل  $\mathbb{C}$  .

$$(4) \text{ لتكن } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

اي من المصفوفتين  $A$  ،  $B$  يمكن جعلها قطرية ؟ .

(5) لكون  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  ، و  $V_1$  فضاء شعاعياً فرعيًا متميزاً في  $V$  ،

برهن أن  $V_1^\perp$  هو أيضاً متميز في  $V$ .

(6) ليكن  $\mathbb{R}^2$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $\mathbb{R}$  ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $\mathbb{R}^2$  في  $\mathbb{R}^2$  معرفاً كالآتي :

$$V(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; f(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + 3x_2)$$

وليكن :

$$V_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\} , V_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$$

فضاءين شعاعيين جزئيين في  $\mathbb{R}^2$  . ابي من  $V_1$  ،  $V_2$  هو فضاء شعاعي جزئي متميز في  $\mathbb{R}^2$  ؟

(7) ليكن  $V$  فضاءً شعاعياً على الحقل  $K$  ،  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  . برهن انه يوجد لـ  $V$  فضاء شعاعي جزئي متميز ذات بعد واحد  $\Leftrightarrow$  يوجد قيم ذاتية لـ  $f$  .

(8) ليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من الفضاء الشعاعي  $\mathbb{R}^2$  على الحقل  $\mathbb{R}$  في نفسه معرفاً كالآتي :

$$f(x_1, x_2) = (x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha , x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha)$$

حيث  $0 < \alpha < \pi$  .

برهن انه لا يوجد لـ  $\mathbb{R}^2$  فضاء شعاعي جزئي متميز، ماعداً  $\{0\}$  ،  $\mathbb{R}^2$  .

(9) لتكن  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  ، أوجد لثيرة حدود بحيث تكون  $A$  جذراً لها.

(10) اوجد أدنى كثيرة حدود  $h(\lambda)$  للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(11) اوجد كثيرة الحدود الدنيا والمميزة للتطبيق الخطي  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$   
المعرف ب:  $f(x, y) = (x+y, y)$

(12) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية للمصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(13) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة لتلك المصفوفات  
التي كثيرة حدودها المميزة  $g(\lambda)$  ، وكثيرة حدودها الدنيا  $h(\lambda)$  ،  
في كل من الحالات :

$$g(\lambda) = (\lambda - 7)^5 \quad , \quad h(\lambda) = (\lambda - 7)^2 \quad (a)$$

$$h(\lambda) = (\lambda - 3)^2 (\lambda - 5)^2 \quad , \quad g(\lambda) = (\lambda - 3)^4 (\lambda - 5)^4 \quad (b)$$

(14) اوجد جميع صيغ جوردان القانونية الممكنة ل :

$$J(\lambda; k_1, k_2, k_3) \in M_3(K)$$

(15) ليكن  $(H, \theta)$  فضاء هيرميتياً ،  $f$  تطبيقاً اتحادياً على

$H$  ،  $A$  قيمة ذاتية لـ  $f$  .

- (a) برهن ان  $(f - A Id_H)$  تطبيق احادي .  
 (b) برهن ان كل شعاع ذاتي للتطبيق  $f$  هو شعاع ذاتي للتطبيق  $f^*$  .  
 (c) برهن ان الرتبة الذاتية المتدالة لقيم ذاتية مختلفة متعامدة .

(16) ليكن  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $f$  تطبيقاً خطياً من  $V$  في  $V$  و  $v \in V$  . نفرض ان  $f$  تحقق  $f^k(v) = 0$  ،  $f^{k-1}(v) \neq 0$  حيث  $k \in \mathbb{N}$  .  
 (a) برهن ان المجموعة  $K = \{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$  مجموعة متقلة خطياً .

(b) برهن ان الفضاء الشعاعي الجزئي  $V_1$  المولد بـ  $K$

متميز في  $V$  .

(c) برهن ان مقصور  $f$  الى  $V_1$  والذي نرضله بـ  $f_1$  ،

$$\text{تحقق: } f_1^k(v) = 0 , f_1^{k-1}(v) \neq 0$$

(d) برهن ان المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $f$  في

الأساس  $\{v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)\}$  للفضاء  $V_1$  هي من الشكل :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## الفصل السادس الفضاء الترابطي

### 1.6 مبادئ أولية

#### 1.1.6 تعريف

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$  ، وليكن  $T$  مجموعة غير خالية . إذا وجد التطبيق  $\omega$  من  $T \times T$  في  $V$  ، يحقق الشروط التالية :

(1) لكل  $a \in T$  ولكل  $v \in V$  يوجد  $b \in T$  وهيئ بحيث

$$\omega(a, b) = v$$

(2) لكل  $a, b, c \in T$   $\omega(a, b) + \omega(b, c) = \omega(a, c)$

نقول عندئذ ان  $T$  فضاء ترابطي مرتبط بالفضاء الشعاعي  $V$  . ونرمز أحياناً للفضاء الترابطي من هذا النوع بالرمز  $(T, V, \omega)$  ، ونعتبر  $V$  فضاء شعاعياً على الحقل  $K$  دائماً في هذا الفصل . أحياناً نكتفي بكتابة  $T$  كرمز للفضاء الترابطي . نسمي عناصر  $T$  بنقاط الفضاء الترابطي ، وعناصر  $V$  بالاشعة ، ونسمي التطبيق  $\omega$  بخريطة الفضاء الترابطي . بعد الفضاء الترابطي هو بعد الفضاء الشعاعي المرتبط به، ونرمز له بالرمز  $\dim(T)$  .

نلاحظ انه لكل  $a \in T$   $\omega(a, a) = 0_V$  لأنه حسب الشرط (2)

$$\omega(a, a) + \omega(a, a) = \omega(a, a)$$

من التعريف :

فأنت :  $\omega(a,a) = 0_V$

من هنا ومن الشرط (2) من التعريف نستنتج انه لكل  $a, b \in T$

$$\omega(a,b) + \omega(b,a) = \omega(a,a) = 0_V$$

فأنت :  $\omega(a,b) = -\omega(b,a)$

### 2.1.6 مثال

ليكن  $V$  فضاءاً شعاعياً على الحقل  $K$ . لنأخذ المجموعة

$V$  والتطبيق  $\omega : V \times V \rightarrow V$  المعروف بالمثل :-

$$\forall (a,b) \in V \times V ; \omega(a,b) = a - b$$

فأنه لكل  $a \in V$  ولكل  $v \in V$  يوجد  $b \in V$  وحيد، بحيث

$$\omega(a,b) = a - b = v$$

وكذلك لكل  $a, b, c \in V$  فأنت :

$$\omega(a,b) + \omega(b,c) = (a-b) + (b-c) = a-c = \omega(a,c)$$

ومنه، فأنت  $(V, V, \omega)$  فضاءاً ترابطياً.

### 3.1.6 تعريف

ليكن  $T$  فضاءاً ترابطياً، لكل  $a \in T$  ولكل  $v \in T$  فأنت يجب

(1.1.6) يوجد  $b \in T$  وحيد، بحيث ان  $\omega(a,b) = v$ . النقطة  $b$

تسمى بحاصل جمع النقطة  $a$  والشعاع  $v$  ونرمز لها بالرمز

$a + v$ . حاصل جمع النقطة  $a$  والشعاع  $-v$  نرمز لها

بالرمز  $a - v$  ونقول انها حاصل طرح النقطة  $a$  والشعاع  $v$ .

من هذا التعريف نستنتج انه لكل  $a \in T$  ولكل  $v \in T$  :



$$\omega(a, a+v) = v$$

ولذلك لكل  $v_1, v_2 \in V$  ولكل  $a \in T$  فأن :

$$\begin{aligned}\omega(a+v_1, a+v_2) &= \omega(a+v_1, a) + \omega(a, a+v_2) \\ &= \omega(a, a+v_2) - \omega(a, a+v_1) = v_2 - v_1\end{aligned}$$

### 4.1.6 نظرية

ليكن  $T$  فضاءاً ترابطياً، لكل  $v_1, v_2 \in V$  ولكل  $a, b \in T$

فأن :

(1) إذا كان  $a+v_1 = b+v_1$  فأن :  $a = b$  . وإذا كان

$v_1 = v_2$  فأن :  $a+v_1 = a+v_2$

$$\omega(a, b) = v_1 \iff a+v_1 = b \quad (2)$$

بشكل خاص  $v_1 = 0_V \iff a+v_1 = a$

$$(a+v_1)+v_2 = a+(v_1+v_2) \quad (3)$$

البرهان :

(1) إذا كان  $a+v_1 = b+v_1$  فأن :

$$\begin{aligned}\omega(a+v_1, a) &= -\omega(a, a+v_1) = -v_1 = -\omega(b, b+v_1) = \\ &= \omega(b+v_1, b) = \omega(a+v_1, b)\end{aligned}$$

بالتعريف (1.1.6) فأن :  $a = b$

وعكس ذلك إذا كان  $a+v_1 = a+v_2$  فأن :

$$v_1 = \omega(a, a+v_1) = \omega(a, a+v_2) = v_2$$

(2) ينتج البرهان مباشرة من تعريف  $a+v_1$  ومن التعريف

(1.1.6)

لكل خاص إذا كان  $a = b$  ، بما أن  $\omega(a, a) = 0_v$  فإن

$$v = 0 \Leftrightarrow a + v = a$$

(3) لنفرض أن  $a + v_1 = a_1$  وأن  $(a + v_1) + v_2 = a_2$  فإن:

$$\omega(a_1, a_2) = v_2 \quad , \quad \omega(a, a_1) = v_1$$

من هنا ومن (1.1.6) فإن:

$$v_1 + v_2 = \omega(a, a_1) + \omega(a_1, a_2) = \omega(a, a_2)$$

فإذا فرضنا أن  $\omega(a, a_2) = v_3$  فإن  $a + v_3 = a_2$  ومنه

$$a + \omega(a, a_2) = a_2$$

$$a + (v_1 + v_2) = a + \omega(a, a_2) = a_2 = (a + v_1) + v_2 \quad \text{فإن:}$$

$$(و.ه.و.٣)$$

## 6. الفضاء الترابطي الجبرتي

ليكن  $T$  فضاءاً ترابطياً مرتبطاً بالفضاء التام  $V$ ،

ولتكن  $T_1$  مجموعة جزئية غير خالية من  $T$  ،  $V_1$

مجموعة جزئية من  $V$  . فإن  $T_1 + V_1$  هي مجموعة

جميع العناصر  $a + v$  لكل  $a \in T_1$  ،  $v \in V_1$  .

إذا كانت  $T_1 = \{a\}$  فأننا نكتب  $a + V_1$  وإذا كانت

$V_1 = \{v\}$  عندئذ نكتب  $T_1 + v$  .

إذا كانت  $T_1, T_2$  مجموعتين جزئيتين من  $T$  ، فإن  $\omega(T_1, T_2)$

هي مجموعة جميع الاسعة  $\omega(a, b)$  لكل  $a \in T_1$  و  $b \in T_2$  .

إذا كانت  $T_1 = \{a\}$  مثلاً ، عندئذ نكتب  $\omega(a, T_2)$  .

من هنا يبرهن بسهولة انه لكل  $a, b \in T$  ، فأن :

$$\omega(a, b) + \omega(b, T) = \omega(a, T) \quad (1)$$

$$\omega(a, b + V_T) = \omega(a, b) + V_T \quad (2)$$

$$a + \omega(a, T) = T \quad (3)$$

### 1.2.6 نظرية

ليكن  $T$  فضاءاً تربطياً ولتكن  $\{a_i\}_{i \in I}$  مجموعة نقاط

في  $T$  ،  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  عقاير سلمية من الحقل  $K$  بحيث ان

$\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$  ، فأن المجموع :

$a + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$  لا يعتمد على اختيار النقطة  $a$  .

البرهان :

لتكن  $a'$  أي نقطة اخرى في  $T$  ، فأن :

$$a' + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a', a_i) = a' + \sum_{i \in I} \lambda_i (\omega(a', a) + \omega(a, a_i))$$

$$= a' + \left( \sum_{i \in I} \lambda_i \right) \omega(a', a) + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a' + \omega(a', a) + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

$$= a + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

وبذلك فأن المجموع  $a + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$  لا يعتمد على اختيار النقطة

(و.ه.و. ٠٣)

• ٥

2.2.6 تعريف

ليكن  $T$  فضاءً تربطياً، وليكن  $\{a_i\}_{i \in I}$  مجموعة نقاط من  $T$ ،  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  مقادير سلبية من الحقل  $K$  بحيث ان  $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ . نسمي المجموعة  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  بمجموعة نُقل، وتسمي النقطة  $a + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$  مركز نُقل مجموعة النقاط  $\{a_i\}_{i \in I}$  ذي النُقل  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  لثية نقطة  $a \in T$ .

نرمز لمركز نُقل مجموعة النقاط  $\{a_i\}_{i \in I}$  ذي النُقل  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  بالرمز  $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ . نسمي النقطة  $b$  بمركز نُقل المجموعة  $\{a_i\}_{i \in I}$  اذا وجدت مجموعة نُقل  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$ ، بحيث ان  $b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ .

3.2.6 تعريف

ليكن  $T$  فضاءً تربطياً، وليكن  $T_1$  مجموعة جزئية غير خالية من  $T$ ، فاذا كانت لكل مجموعة من النقاط  $\{a_i\}_{i \in I}$  من  $T_1$ ، ولكل مجموعة مقادير سلبية  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  فان مركز النُقل  $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$  هو عنصر من  $T_1$ . نقول عندئذ ان  $T_1$  هو فضاء تربطى جزئى من  $T$ .

4.2.6 نظرية

ليكن  $T$  فضاءً تربطياً،  $T_1$  مجموعة جزئية غير خالية من  $T$  فان الشرط التالي متكافئة:

(1)  $T_1$  هو فضاء ترتيبي جزئي من  $T$ .

(2) لكل  $a \in T_1$  فإن المجموعة  $\omega(a, T_1)$  هي فضاء

شعاعي جزئي من  $V$ .

البرهان :

(2)  $\leftarrow$  (1)

لتكن  $a$  نقطة من  $T$  ، لكل  $v_1, v_2 \in \omega(a, T_1)$  فإن :

$v_1 = \omega(a, a_1)$  ،  $v_2 = \omega(a, a_2)$  ، حيث  $a_1, a_2 \in T_1$ .

فإن :

$$a + (v_1 + v_2) = a + ((-1)\omega(a, a) + \omega(a, a_1) + \omega(a, a_2))$$

فأنه حسب (2.2.6) ، (3.2.6) :

$$a + (v_1 + v_2) = (-1)a + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 \in T_1$$

فإن :  $a + (v_1 + v_2) = c \in T_1$  وأن :

$$v_1 + v_2 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$$

لكل  $\lambda \in K$  فإن :

$$a + \lambda v_1 = a + ((1-\lambda)\omega(a, a) + \lambda\omega(a, a_1))$$

$$= (1-\lambda)a + \lambda a_1 \in T_1$$

فإن :  $a + \lambda v_1 = c \in T_1$

فإن :  $\lambda v_1 = \omega(a, c) \in \omega(a, T_1)$

وبنه  $\omega(a, T_1)$  هي فضاء شعاعي جزئي من  $V$ .

(1)  $\leftarrow$  (2)

لتفرض ان المجموعة  $\omega(a, T_1)$  هي فضاء شعاعي جزئي من  $V$  حيث  $a \in T_1$  ، ولتكن  $\{a_i\}_{i \in I}$  مجموعة من نقاط المجموعة

$T_1$  فأنه لثمة مجموعة نقل  $\{\lambda_i\}_{i \in I}$  فأن :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = a + \sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i)$$

وميتان  $\omega(a, a_i) \in \omega(a, \mathcal{T}_1)$  لكل  $i \in I$  . من الفرضية

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \omega(a, a_i) \in \omega(a, \mathcal{T}_1) \text{ فأن } \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in \mathcal{T}_1 \text{ فأن } \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in \mathcal{T}_1$$

بهذا فأن  $\mathcal{T}_1$  فضاء ترابطي جزئي من  $\mathcal{T}$  .

(و.ه.و. ٠٣)

### 5.2.6 نظرية

ليكن  $\mathcal{T}$  فضاء ترابطياً ،  $\mathcal{T}_1$  مجموعة جزئية غير خالية و  $a \in \mathcal{T}_1$  فأن  $\mathcal{T}_1$  هو فضاء ترابطي جزئي من  $\mathcal{T} \Leftrightarrow$  يوجد فضاء شعاعي جزئي  $V_1$  من  $V$  بحيث ان

$$\mathcal{T}_1 = a + V_1$$

البرهان :

نفرض ان  $\mathcal{T}_1$  هو فضاء ترابطي جزئي من  $\mathcal{T}$  ، فأنه

حسب النظرية (4.2.6) ،  $\omega(a, \mathcal{T}_1)$  هو فضاء شعاعي

جزئي من  $V$  . لكل  $b \in \mathcal{T}_1$  فأن  $b = a + \omega(a, b)$  .

لكن  $\omega(a, b) \in \omega(a, \mathcal{T}_1)$  فأن  $b \in a + \omega(a, \mathcal{T}_1)$  .

بنفس الطريقة لكل  $x \in a + \omega(a, \mathcal{T}_1)$  فأن  $x = a + \omega(a, c)$  ;

حيث  $c \in \mathcal{T}_1$  . فأن  $c = a + \omega(a, c)$  . فأن  $x \in \mathcal{T}_1$

وبذلك فأن  $\mathcal{T}_1 = a + \omega(a, \mathcal{T}_1)$  . اي انه يوجد فضاء شعاعي

جزئي  $V_1 = \omega(a, \mathcal{T}_1)$  من الفضاء  $V$  بحيث  $\mathcal{T}_1 = a + V_1$  .

لنفرض الآن انه يوجد فضاء شعاعي جزئي  $V_1$  من الفضاء

$V$  بحيث  $\mathcal{T}_1 = a + V_1$  فأن :  $\omega(a, \mathcal{T}_1) = \omega(a, a + V_1)$

لكل  $x \in \omega(a, a+V_1)$  فإن  $x = \omega(a, a+v)$  حيث  $v \in V_1$ .  
فإن :  $x = \omega(a, a+v) = v \in V_1$  وكذلك لكل  $v \in V_1$   
فإنه يوجد  $b \in T_1$  بحيث  $a + \omega(a, b) = b$ .  
لكن  $T_1 = a + V_1$  ، فإن :  $b = a + v$  حيث  $v \in V_1$ .  
فإن :  $a + \omega(a, a+v) = a + v$  ومنه  $\omega(a, a+v) = v$   
بهذا فإن :  $v \in \omega(a, a+V_1)$ .  
وبذلك فإن :  $V_1 = \omega(a, a+V_1)$  ، ومنه  $\omega(a, T_1) = V_1$  وهي  
فضاء شعاعي جزئي من  $V$ .  
ومن هنا فإن  $T_1$  هي فضاء تربطي جزئي من  $T$ .  
(و.ه.م. ١٠٣)

من هنا نستنج ان كل فضاء تربطي جزئي  $T_1$  من الفضاء  
التربطي  $T$  مرتبط بفضاء شعاعي جزئي  $V_1$  من الفضاء  
الشعاعي  $V$  ، بحيث ان  $(T_1, V_1, \omega)$  هو نفسه فضاء  
تربطي ، وان  $T_1 = a + V_1$  ،  $a \in T_1$ .

6.2.6 تعريف

ليكن  $(T_1, V_1, \omega)$  ،  $(T_2, V_2, \omega)$  فضاءين تربطيين جزئيين  
من الفضاء التربطي  $(T, V, \omega)$  . نقول ان  $T_1$  موازي لـ  $T_2$   
ونكتبه  $T_1 // T_2$  ، اذا كان  $V_1 = V_2$ .

7.2.6 نظرية

ليكن  $(T, V, \omega)$  فضاءاً تربطياً ، وليكن  $V_1$  فضاءً

شعاعاً خبرياً من  $V$  ،  $T_1$  مجموعة خبرية من  $T$  ،  
 فإنه  $a, b \in T$  :

(1) إذا كان  $\omega(a, b) \notin V_1$  فإن  $(a+V_1) \cap (b+V_1) = \emptyset$  :

(2) إذا كان  $\omega(a, b) \in V_1$  فإن  $a+V_1 = b+V_1$  :

البرهان :

(1) لنفرض ان  $\omega(a, b) \notin V_1$  ولنفرض ان  $(a+V_1) \cap (b+V_1) \neq \emptyset$

فإنه يوجد  $c \in (a+V_1) \cap (b+V_1)$  فإن :

$c = a + v_1$  ،  $c = b + v_2$  ،  $v_1, v_2 \in V_1$  فإن :

$$a + v_1 = b + v_2 \quad \text{أي ان} \quad b = a + (v_1 - v_2)$$

من هنا فإن :  $\omega(a, b) = \omega(a, a + (v_1 - v_2)) = v_1 - v_2 \in V_1$

وهذا يخالف الفرض ان  $\omega(a, b) \notin V_1$  فإن :

$$(a+V_1) \cap (b+V_1) = \emptyset$$

(2) ليكن  $\omega(a, b) \in V_1$  ،  $v \in V_1$  فإن  $\omega(a, a+v) = v$

ولذلك  $\omega(a, a+v) = v$

فإن :  $\omega(a, a+v) = \omega(a, a+(\omega(a, b)+v)) = \omega(a, b+v)$

فإن :  $a+v = b+v$

من هنا بسهولة نبرهن أن :  $a+V_1 = b+V_1$

(و.و.و.م.)

### 8.2.6 نتيجة

إذا كان  $(T_1, V_1, \omega)$  ،  $(T_2, V_2, \omega)$  فضاءين تربطين

خبريين من الفضاء الترابطي  $(T, V, \omega)$  ، فإنه إذا كان  $T_1 // T_2$

فإن  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$  أو  $T_1 = T_2$



9.2.6 نظرية (نظرية أفليدس).

لكل فضاء تربطي جزئي  $(T, V, \omega)$  من الفضاء التربطي  
 ولكل نقطة  $a \in T$ ، يوجد فضاء تربطي جزئي  
 واحد فقط والذي يحوي  $a$ ، ويكون موازياً للفضاء التربطي  
 الجزئي  $T_1$ .

البرهان:

نأخذ الفضاء التربطي الجزئي  $(a + V_1, V_1, \omega)$  فأن:  
 $a = a + 0_{V_1} \in a + V_1$  وكذلك  $\dim(a + V_1) = \dim T_1 = \dim V_1$   
 فأن:  $a + V_1 = T_2$  فضاء تربطي جزئي موازي للفضاء  
 التربطي  $T_1$  ويحوي  $a$ ، وهو وحيد.

(و.ه.و. ٣.٥)

10.2.6 نظرية

تقاطع مجموعة من الفضاءات الترابطية الجزئية هي  
 مجموعة خالية، أو فضاء تربطي جزئي.  
 البرهان:

ليكن  $\{(T_i, V_i, \omega)\}_{i \in I}$  مجموعة من الفضاءات الترابطية  
 الجزئية من الفضاء التربطي  $(T, V, \omega)$ .  
 لنفرض ان  $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$ ، فأنه يوجد  $a \in \bigcap_{i \in I} T_i$ ، فأن  
 $a \in T_i$  لكل  $i \in I$ .  
 بذلك فأن  $T_i = a + V_i$  لكل  $i \in I$   
 من هنا نلاحظ ان:

$$(b \in \bigcap_{i \in I} T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I, b \in T_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I, b \in a + V_i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall i \in I, b = a + v, v \in V_i) \Leftrightarrow (b \in a + \bigcap_{i \in I} V_i)$$

وبذلك فأن:

$$\bigcap_{i \in I} T_i = a + \bigcap_{i \in I} V_i$$

فأن:

$(\bigcap_{i \in I} T_i, \bigcap_{i \in I} V_i, \omega)$  هو فضاء ترابطي جزئي من الفضاء

الترابطي  $(T, V, \omega)$

(و.ه.م. ١٠٣)

### 3.6 التطبيقات الترابطية

#### 1.3.6 تعريف

ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1), (T_2, V_2, \omega_2)$  فضاءين ترابطيين

نسمي التطبيق  $f: T_1 \rightarrow T_2$  تطبيقاً ترابطياً إذا وجد

تطبيق خطي  $h: V_1 \rightarrow V_2$  بحيث:

$$f(a+v) = f(a) + h(v), \quad \forall a \in T_1, v \in V_1$$

ويسمى  $h$  في هذه الحالة بالتطبيق الخطي المرتبط بـ  $f$ .

#### 2.3.6 نظرية

كل تطبيق ترابطي يحدد بواسطة صورة نقطة والتطبيق

الخطي المرتبط به.

البرهان:

ليكن  $f$  تطبيقاً ترابطياً من  $T_1$  في  $T_2$ . وليكن

$a \in T_1$ , ولنفرض ان  $f(a) = b$  حيث  $b \in T_2$ .

وليكن  $h$  تطبيقاً خطياً مرتبطاً بـ  $f$  . لكل  $c \in T_1$  فإن

$$c = a + \omega(a, c)$$

$$f(c) = f(a) + h(\omega(a, c)) \quad \text{أيضاً :}$$

$$f(c) = b + h(\omega(a, c)) \quad \text{وبذلك فإن :}$$

فإن  $f$  محدد بواسطة النقطة  $b$  والتي هي صورة النقطة  $a$  والتطبيق الخطي المرتبط به  $h$  .

ليكن  $f$  تطبيقاً من  $T_1$  في  $T_2$  معرّفاً بالشكل التالي :

$$\forall c \in T_1, f(c) = b + h(\omega(a, c))$$

نبرهن أن  $f$  تطبيقاً تراخيصياً .

لكل  $c_1 \in T_1$  ولكل  $v \in T_1$  يوجد  $c_2 \in T_1$  ومحدد بحيث

$$c_1 + \omega(c_1, c_2) = c_2 \quad \text{فإن :} \quad \omega(c_1, c_2) = v$$

$$f(c_1) = b + h(\omega(a, c_1)) \quad \text{كذلك}$$

$$f(c_2) = b + h(\omega(a, c_2))$$

فإن :

$$f(c_2) - f(c_1) = h(\omega(a, c_2)) - h(\omega(a, c_1))$$

$$= h(\omega(a, c_2) - \omega(a, c_1))$$

$$= h(\omega(c_1, c_2))$$

فإن :

$$f(c_2) = f(c_1) + h(\omega(c_1, c_2))$$

$$f(c_1 + v) = f(c_1) + h(v) \quad \text{أيضاً :}$$

بهذا فإن  $f$  تطبيقاً تراخيصياً .

### 3.3.6 نظرية

ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1)$  ،  $(T_2, V_2, \omega_2)$  ،  $(T_3, V_3, \omega_3)$  ثلاث فضاءات ترابطية . وليكن  $f_1$  تطبيقاً ترابطياً من  $T_1$  في  $T_2$  و  $h_1$  تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ،  $f_2$  تطبيقاً ترابطياً من  $T_2$  في  $T_3$  و  $h_2$  تطبيقاً خطياً مرتبطاً به ، فأن  $f_2 \circ f_1$  هو تطبيق ترابطي من  $T_1$  في  $T_3$  ، والتطبيق الخطي المرتبط به هو  $h_2 \circ h_1$  .

البرهان :

مب النظرية ( 3 . 1 . 2 ) هو تطبيق خطي من الفضاء  $V_1$  في الفضاء  $V_3$  . لكل  $a \in T_1$  ولكل  $v \in V_1$  يوجد  $b \in T_1$  بحيث  $\omega(a, b) = v$  فأن  $b = a + v$  و

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(b) &= (f_2 \circ f_1)(a + v) \\ &= f_2 ( f_1 (a + v) ) \\ &= f_2 ( f_1(a) + h_1(v) ) \end{aligned}$$

لكن  $f_1(a) \in T_2$  ،  $h_1(v) \in V_2$  فأن :

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(b) &= f_2 ( f_1(a) ) + h_2 ( h_1(v) ) \\ &= (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v) \end{aligned}$$

بهذا فأن :  $(f_2 \circ f_1)(a + v) = (f_2 \circ f_1)(a) + (h_2 \circ h_1)(v)$  وبذلك فأن  $f_2 \circ f_1$  هو تطبيق ترابطي من  $T_1$  في  $T_3$  و  $h_2 \circ h_1$  هو التطبيق الخطي المرتبط به . (و.هـ.م. ٣٠)

4.3.6 نظرية

ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1)$  ،  $(T_2, V_2, \omega_2)$  فضاءين ترابطيين  
 وليكن  $f$  تطبيقاً ترابطياً من  $T_1$  في  $T_2$  ،  $h$  تطبيقاً خطياً  
 مرتبطاً به فأن :

$$(1) \quad f \text{ متباين} \Leftrightarrow h \text{ متباين}$$

$$(2) \quad f \text{ غامر} \Leftrightarrow h \text{ غامر}$$

البرهان :

(1) لنفرض ان  $h$  متباين ، لكل  $a, b \in T_1$  باذا كان  $f(a) = f(b)$   
 كذلك  $a = b + \omega_1(b, a)$  فأن :

$$f(a) = f(b) + h(\omega_1(b, a))$$

$$\text{وبذلك فأن : } h(\omega_1(b, a)) = 0$$

فأن :  $\omega_1(b, a) \in \text{Ker } h$  وحيث  $\omega_1(b, a) = \omega_r$  اي ان  
 $a = b$  بهذا فأن  $f$  متباين .

لنفرض ان  $h$  غير متباين ، فأنه يوجد شعاع غير صفري  
 $v \in V$  بحيث  $h(v) = 0$  ، وليكن  $a \in T_1$  فأنه يوجد

$$b \in T_1 \text{ و } a \neq b \text{ بحيث } b = a + v$$

$$f(b) = f(a + v) = f(a) + h(v) = f(a)$$

وفيه نستنتج ان  $f$  غير متباين .

(2) لنفرض ان  $f$  غامر ، وليكن  $v \in V_2$  فأنه كان  $b \in T_1$

فأن :  $f(b) + v \in T_2$  ، فأنه يوجد  $a \in T_1$  بحيث

$$f(b) + v = f(a) \quad \text{وفيه فأن : } h(\omega_1(a, b)) = v$$

بهذا فإن  $h$  عامر .

لنفرض الآن ان  $h$  عامر وليكن  $a \in T_2$  فأذا كان  $b \in T_1$

فإن  $\omega_2(f(b), a) \in V_2$  ، وبهذا فإنه يوجد  $v \in V_2$  ، بحيث

$$f(b) + h(v) = a \quad \text{فإن} \quad h(v) = \omega_2(f(b), a)$$

$$\text{ليكن} \quad a_1 = b + v$$

فإن :  $f(a_1) = f(b) + h(v)$  اي ان  $h(v) = \omega_2(f(b), f(a_1))$

فإن  $f(a_1) = a$  وبذلك فإن  $f$  عامر .

(و.ه.و. ١٣٠)

### 5.3.6 تعريف

ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1)$  ،  $(T_2, V_2, \omega_2)$  فضاءين ترابطيين ،

وليكن  $f$  تطبيقاً ترابطياً من  $T_1$  في  $T_2$  . نقول ان

$f$  هو ايزومورفيزم فضاءات ترابطية باذا وجد تطبيقاً

ترابطي  $g$  من  $T_2$  في  $T_1$  بحيث :

$$g \circ f = Id_{T_1} \quad , \quad f \circ g = Id_{T_2}$$

وهذا يعني ان  $f$  تقابل ، من هنا ومن النظرية (4.3.6)

فإن التطبيق  $h$  المرافقة ل  $f$  ايضاً يكون تقابلاً .

### 6.3.6 نظرية

ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1)$  ،  $(T_2, V_2, \omega_2)$  فضاءين ترابطيين ،

و  $f$  ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من  $T_1$  على  $T_2$  ، فإن

$f^{-1}$  هو ايضاً ايزومورفيزم فضاءات ترابطية من  $T_2$  على

$T_1$

البرهان :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_{T_1}, \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_{T_2}$$

واضح ان  $f^{-1}$  هو تطبيق ترابطي .

لكل  $a \in T_2$  ولكل  $v \in V_2$  ، فإنه يوجد  $a_1 \in T_1$  و  $v_1 \in V_1$

$$f(a_1) = a \quad , \quad h(v_1) = v$$

فإن :

$$f^{-1}(a+v) = f^{-1}(f(a_1) + h(v_1))$$

$$= f^{-1}(f(a_1 + v_1))$$

$$= (f^{-1} \circ f)(a_1 + v_1)$$

$$= a_1 + v_1 = f^{-1}(a) + h^{-1}(v)$$

بهذا فإن  $f^{-1}$  تطبيق ترابطي .

(و.ه.و.ع.)

## تبارين

(1) ليكن  $(T_1, V_1, \omega_1), \dots, (T_n, V_n, \omega_n)$  فضاءات تربيطة، لكل  $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in T_1 \times \dots \times T_n$  :  
$$\omega((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = (\omega_1(a_1, b_1), \dots, \omega_n(a_n, b_n))$$
 برهن ان:  $(T_1 \times \dots \times T_n, V_1 \times \dots \times V_n, \omega)$  هو فضاء تربيطة.

(2) ليكن  $(T, V, \omega)$  فضاءاً تربيطياً، لكل  $a, b, c \in T$  برهن ان:  $\omega(a, b) + \omega(b, c) + \omega(c, a) = 0$   
ثم برهن انه لكل  $a_1, \dots, a_n \in T$  فان:  
$$\omega(a_1, a_2) + \omega(a_2, a_3) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n) + \omega(a_n, a_1) = 0$$
 ونتجاً ان:

$$\omega(a_1, a_n) = \omega(a_1, a_2) + \dots + \omega(a_{n-1}, a_n)$$

(3) اوجد مركز ثقل مجموعة النقاط  $(1, 1, 1), (0, 1, 0)$  في الفضاء التربيطة  $\mathbb{R}^3$  ذي الأبعاد 1, -1, 2 على التوالي.

(4) برهن ان النقطة  $(0, 0, 0)$  هي مركز ثقل مجموعة النقاط  $(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$  التربيطة  $K^3$  حيث  $K$  حقل.



(5) ليكن  $\mathbb{R}^2$  فضاءً مترابطاً مرتبطاً بالفضاء السعاعي  $\mathbb{R}^2$  ، وليكن  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  تطبيقاً معرفاً كالآتي :  
 $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  ,  $g(x_1, x_2) = (-x_1 - 1, -x_2 + 1)$   
برهن ان  $g$  تطبيقاً مترابطاً .

(6) برهن ان التطبيق المترابط يحافظ على مركز الثقل .

(7) برهن ان صورة الفضاء المترابط الجزئي وفق التطبيق المترابط هو فضاء مترابط جزئي .

## فهرست الرموز

V	(a, b) زوج مرتب
V	$A \times B$ جداء ديكارتى
V	$R$ علاقة تكافؤ
VI	$f^{-1}$ التطبيق العكسى للتطبيق $f$
VI	$g \circ f$ ترتيب التطبيقين $f, g$
VI	$Id_A$ التطبيق المحايد للمجموعة $A$
VII	$\forall$ لكل
VII	$\exists$ يوجد
2	$\mathbb{C}$ الاعداد العقدية
2	$\mathbb{R}$ الاعداد الحقيقية
5	$\mathbb{Q}$ الشعاع الصغرى
7	$\bigcap_{i \in I} F_i$ تقاطع مجموعة من الفضاءات الشعاعية الجزئية
11	$V_1 + V_2$ جمع الفضاءات الشعاعية
13	$V_1 \oplus V_2$ الجمع المباشر للفضاءات الشعاعية الجزئية
18	$\dim V$ بعد الفضاء الشعاعى
36	$\mathbb{F}_0$ التطبيق الصغرى
39	$\text{Ker } f$ نواة التطبيق الخطى $f$
39	$\text{Im } f$ صورة التطبيق الخطى $f$
46	$K^n$ الجداء الديكارتي للحقل $K$ - $n$ مرة
49	$\text{rank}(f)$ رتبة التطبيق الخطى
49	$\text{nul}(f)$ صغرية $f$

- 54  $V/V_1$  فضاء حاصل قسمة الفضاء  $V$  على الفضاء الشعاعي الجزئي  $V_1$ .
- 58  $L(V_1, V_2)$  فضاء التطبيقات الخطية
- 61  $L(V_1, K)$  مجموعة الأشكال الخطية من  $V$  من  $K$
- 62  $V^*$  الفضاء الثنوي للفضاء  $V$
- 77  $A = (a_{ij}) = ( \quad )$  مصفوفة
- 78  $M_{m,n}(K)$  مجموعة المصفوفات ذات  $m$  سطراً ،  $n$  عموداً ذي العناصر من الحقل  $K$ .
- 80  $M(\mathcal{F})$  المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $\mathcal{F}$
- 85  $\text{rank}(A)$  مرتبة المصفوفة  $A$
- 92  $M_n(K)$  مجموعة المصفوفات المربعة من الدرجة  $n$  ذي العناصر من الحقل  $K$
- 93  $A^{-1}$  نظير المصفوفة (مقلوب المصفوفة)  $A$
- 96  $A^T$  منقول المصفوفة  $A$
- 96  $\text{Tr}(A)$  أثر المصفوفة  $A$
- 104  $A_{ij}$  المصفوفة الناتجة من المصفوفة  $A$  وذلك بحذف السطر  $i$  والعمود  $j$ .
- 105  $\det(A)$  محدد المصفوفة  $A$
- 122  $\text{adj}(A)$  المرافقة التقليدية
- 124  $\det(\mathcal{F})$  محدد المصفوفة المرافقة للتطبيق الخطي  $\mathcal{F}$
- 145  $v_1, v_2$  ضرب سلمي للشعاعين  $v_1, v_2$
- 147  $(E, \theta)$  فضاء اقليدي
- 147  $\|v\|$  طول الشعاع  $v$
- 147  $\lambda$  قيمة مطلقه للعدد السلمي  $\lambda$

150	الشعاع $v_1$ عمودي على الشعاع $v_2$	$v_1 \perp v_2$
150	البعدين الشعاعين $v_1, v_2$	$d(v_1, v_2)$
151	المجموعة العمودية للفضاء الاقليدي الجزئي $E_1$	$E_1^\perp$
151	فضاءان اقليديان متعامدان	$E_1 \perp E_2$
168	التطبيق التولي للتحقيق $f$	$f^*$
176	فضاء هيرميتي	$(H, \phi)$
180	ثنوية المصفوفة $A$	$A^*$
196	فضاء شعاعي جزئي مارك للقيمة الذاتية $\lambda$	$V_\lambda$
200	كثيرة الحدود المميز	$g(\lambda)$
212	كثيرة الحدود الدنيا	$h(\lambda)$
230	فضاء ترابطي مرتبط بالفضاء الشعاعي $V$	$(T, \tau, \omega)$
230	بعد الفضاء الترابطي	$\dim(T)$
238	الفضاء الترابطي $T_1$ يوازي الفضاء الترابطي $T_2$	$T_1 \parallel T_2$

## فهرست المواضيع

168	تطبيق السنوي	ارتباط خطي 11 ، 13
172	- نصف خطي	استقرار خطي 11 ، 13
180	- احادي	أقصى مجموعة متقلة خطياً 20
241	- ترابطي	اساس الفضاء الشعاعي 17
36	- خطي	- النظامي 18
36	- صفري	- السنوي 61 ، 66
38	- ترتيب	- متعامد 153
39	- صورة	- معياري متعامد 153
39	- نواة	ايزومورفزم الفضاءات الشعاعية 37
49	- رتبة	- الهيرميتية 185
54	- قانوني	- الترابطية 245
67	- متعدد الخطية	بعد بين شعاعين 150
162	- عمودي	بعد الفضاء الشعاعي 18
149	تعامد	- الفضاء الترابطي 230
151	تعامد فضاءات شعاعية	تطبيق V
202	تقطر مصفوفة	- عكسي V
V	مداء ديكارتية	- عامر V
743	جاكوبي	- متباين V
VII	حلقه	- تقابل V
VIII	حلقه تامة	- ترتيب V
VIII	حقل	- الحيادي V

5	فضاء شعاع هزلي	230	فريضة الفضاء الترابي
9 ، 8	- - جمع		زوج مرتب VII
11	- - الجمع المباشر		زوجة VII
11	- - مولد		كل قطبي 61
18	- - بعد		- متعدد الخطة 67
52	- - حاصل القيمة		- مزدوج الخطة 67
58	- - التطبيقات الخطة		- متناوب 68
62	- - السوي		- تربيعي 132 ، 137
88 ، 85	- - المصفوفات		- متماثل 132
219	- - متميز		- القطبي 137
230	- - فضاء ترابي		- نصف قطبي 172
235	- - هزلي		- ثلث انصاف الخطة 172
147 ، 132	- - اقليدي		- هيريتي 173
176 ، 172	- - هيريتي		- شعاع ذاتي 195
195	- - قيمة ذاتية		- ضرب سلمي 145
223	- - قالب جوردان		- علاقة تكافؤ VII
147	- - كوشي فائز		- عملية VI
155	- - كرام سميت		- دافلية VI
199	- - كثيرة الحدود المميز		- فارسية VI
210	- - كايدي-هاملتون		- صورة تطبيق VII
141	- - لا ترانك		- صيغة جوردان القانونية 239 ، 49
77	- - مصفوفة		فضاء شعاعي 1

محدد 77 ، 105	مصنوفة صفرية 78 ، 84
- التطبيق الخطي 124	- مثلثية 78
مكاملة عمودية 151	- قطرية 79
مجموعة نقل 235	- متماثلة 79 ، 138
مركز نقل 235	- مربعة 78
نظرية حول الهرمومورفيزم 55	- مرافقة للتطبيق الخطي 79
- - الأيزومورفيزم 57	- مرتبة 85 ، 92
- كايبيك-هاملتون 210	- جمع 86
- أفليديس 240	- ضرب بمقدار سلمي 87
	- جداء المصفوفة 89
	- عكوس 93
	- أثر 96
	- منقول 96
	- العبور 97
	- القوالب 108
	- مرافقة لكل 133
	- متعامدة 163
	- ثنوية 180
	- أفادية 180
	مجموعة V
	- هزئية V
	منح خطي 11

المصادر

- Lectures in abstract algebra : N. Jacobson [1]  
Algèbre : M. Queysanne [2]  
Algebra liniowa z geometrią : A. Białynicki - Birula [3]  
Algebra : Bolesław Gleichgewicht [4]  
ب. بن زاغو : المدخل الى الجبر الخطي [5]  
سيور ليبتز : الجبر الخطي [6]  
Repetitorium z algebry Liniowej: H. Guściora . M. Sadowski [7]  
Algebra liniowa : E. Stolarskiej [8]  
Wektory i macierze : Mieczysław Warmus [9]  
Algebra Liniowa : M. Stark . A. Mostowski [10]