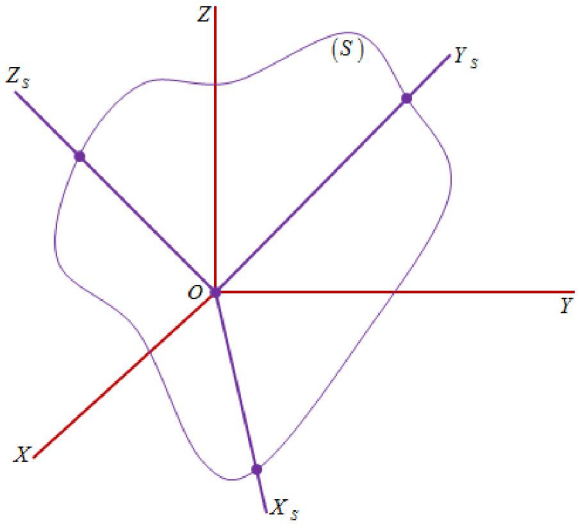
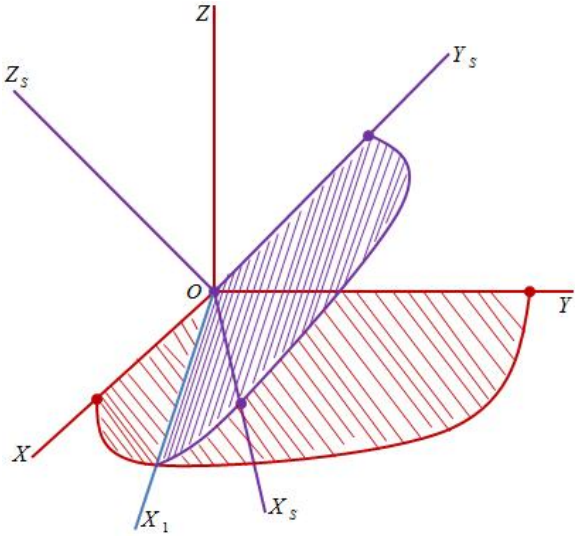
حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة

في حال ثبات نقطة واحدة O من جسم صلب S، عندئذٍ لا يمكن لهذا الجسم إلا التحرك حول هذه النقطة و الدوران حولها بشكل حر. و لدراسة حركة الجسم في هذه الحالة نعتبر جملة إحداثيات عطالية $R/OXYZ$ في الفراغ قاعدتها النظامية $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ كما نعتبر جملة إحداثيات متماسكة مع الجسم $R_S/OX_SY_SZ_S$ قاعدتها النظامية $\left(O,\vec{i_S},\vec{j_S},\vec{k_S}\right)$، عندئذٍ تؤول دراسة حركة الجسم إلى دراسة حركة الجملة المتماسكة R_S بالنسبة للجملة R.

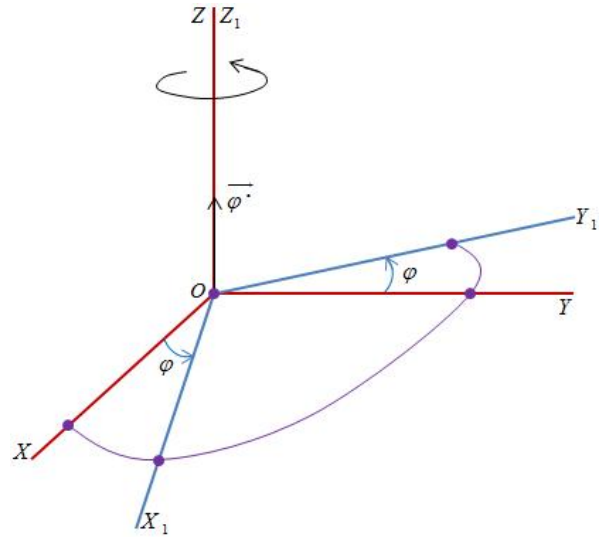


لقد وجدنا سابقاً أن الجسم الصلب في حركته حول نقطة ثابتة منه يملك ثلاث درجات من الحرية، و بالتالي يلزم لتعيينه تعيين ثلاث وسطاء مستقلة في الحالة العامة، و من البديهي التفكير في كون هذه الوسطاء الثلاثة عبارة عن ثلاث دورانات مركبة لهذا الجسم حول النقطة الثابتة. و لتعيين هذه الدورانات، سنعتبر أولاً المحور OX_1 الذي يمثل الفصل المشترك للمستويين OXY الثابت و OX_SY_S المتماسك مع الجسم الموضح في الشكل المجاور.



للانتقال من وضعية الجملة الثابتة R إلى وضعية الجملة المتماسكة R_S سنقوم بالدورانات الثلاث التالية

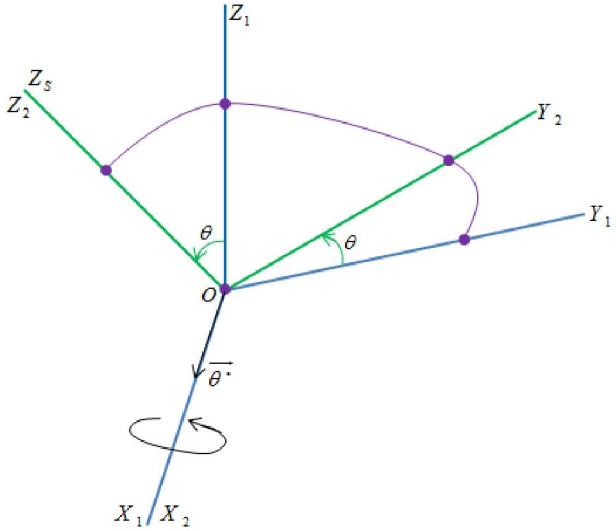
١. الدوران الأول للجملة الثابتة R حول المحور OZ بزاوية φ حتى ينطبق المحور OX على المحور OX_1، لنحصل على الجملة الجديدة $OX_1Y_1Z_1$ الموضحة في الشكل التالي



يتضح هنا أن متجه الدوران في هذه الحالة هو المتجه

$$\vec{\omega_1}=\vec{\varphi}=\varphi\cdot\vec{k}=\varphi\cdot\vec{k_1}$$

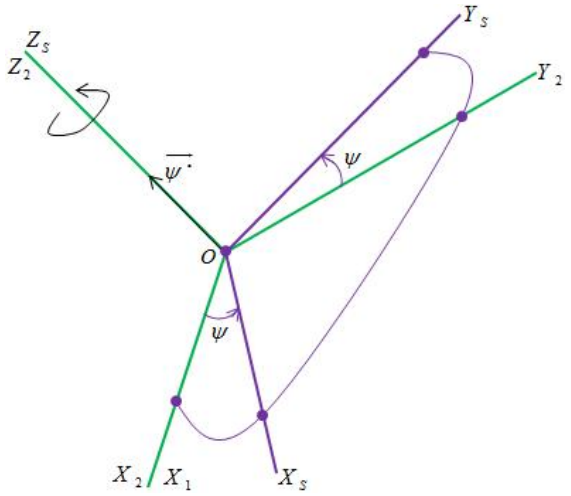
٢. الدوران الثاني هو للجملة R_1 حول المحور OX_1 بزاوية θ حتى ينطبق المحور OZ_1 على المحور OZ_S الذي هو المحور OZ_2 الجديد، لنحصل على الجملة الجديدة $R_2/OX_2Y_2Z_2$ الموضحة في الشكل التالي



من الواضح أن متجه الدوران في هذه الحالة هو المتجه

$$\overrightarrow{\omega_2} = \overrightarrow{\theta^{\cdot}} = \theta^{\cdot} \cdot \overrightarrow{i_1} = \theta^{\cdot} \cdot \overrightarrow{i_2}$$

٣. الدوران الثالث هو للجملة R_2 حول المحور OZ_2 الذي هو المحور OZ_S بزاوية ψ حتى ينطبق المحور OX_2 الذي هو المحور OX_1 على المحور OX_S و المحور OY_2 على المحور OY_S، لتنطبق محاور الجملة الأخيرة الناتجة على محاور الجملة المتماسكة R_S، كما هو موضح في الشكل التالي



يتضح لنا أن متجه الدوران في هذه الحالة هو المتجه

$$\overrightarrow{\omega_3} = \overrightarrow{\psi^{\cdot}} = \psi^{\cdot} \cdot \overrightarrow{k_S} = \psi^{\cdot} \cdot \overrightarrow{k_2}$$

نتيجة: بتركيب الدورانات الثلاثة السابقة معاً يمكننا دائماً تعيين الجسم من خلال تعيين الجملة R_S المتماسكة مع هذا الجسم. أي أن حركة أي جسم صلب حول نقطة منه هي تركيب لثلاث دورانات معاً تتعين من خلال زاوية الرنح أو الاستباق φ و زاوية التأرجح θ و زاوية الدوران الذاتي ψ التي تسمى زوايا أولر نسبة إلى العالم الذي قام بتعريف هذه الدورانات.

مصفوفات الانتقال بين الجمل الإحداثية:

لتكن M نقطة ما من الفراغ، و لنفرض مركبات متجه الموضع لهذه النقطة يعطى في الجمل الاحداثية R و R_1 و R_2 و R_S بالشكل التالي

$$\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k} \\ x\ \vec{i}_1 + y\ \vec{j}_1 + z\ \vec{k}_1 \\ x\ \vec{i}_2 + y\ \vec{j}_2 + z\ \vec{k}_2 \\ x\ \vec{i}_S + y\ \vec{j}_S + z\ \vec{k}_S \end{cases}$$

١. **مصفوفة الترنح أو الاستباق:** نسمي المصفوفة A_φ التي تحقق العلاقة

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

مصفوفة الترنح أو الاستباق و التي تمثل مصفوفة الانتقال من الجملة R إلى الجملة R_1. و لإيجاد هذه المصفوفة نلاحظ أن

$$x_1 = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i}_1 = \left(x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}\right) \cdot \vec{i}_1 = x\ \vec{i} \cdot \vec{i}_1 + y\ \vec{j} \cdot \vec{i}_1 + z\ \vec{k} \cdot \vec{i}_1$$

$$= x\ Cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{i}_1}\right) + y\ Cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{i}_1}\right) + z\ Cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{i}_1}\right)$$

$$= x\ Cos(\varphi) + y\ Cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + z\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = x\ Cos(\varphi) + y\ Sin(\varphi)$$

$$y_1 = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}_1 = \left(x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}\right) \cdot \vec{j}_1 = x\ \vec{i} \cdot \vec{j}_1 + y\ \vec{j} \cdot \vec{j}_1 + z\ \vec{k} \cdot \vec{j}_1$$

$$= x\ Cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{j}_1}\right) + y\ Cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{j}_1}\right) + z\ Cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{j}_1}\right)$$

$$= x\ Cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + y\ Cos(\varphi) + z\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -x\ Sin(\varphi) + y\ Cos(\varphi)$$

$$z_1 = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k}_1 = \left(x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}\right) \cdot \vec{k}_1 = x\ \vec{i} \cdot \vec{k}_1 + y\ \vec{j} \cdot \vec{k}_1 + z\ \vec{k} \cdot \vec{k}_1$$

$$= x\ Cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{k}_1}\right) + y\ Cos\left(\widehat{\vec{j},\vec{k}_1}\right) + z\ Cos\left(\widehat{\vec{k},\vec{k}_1}\right)$$

$$= x\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\ Cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + z\ Cos(0) = z$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\varphi) & Sin(\varphi) & 0 \\ -Sin(\varphi) & Cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

و تكون مصفوفة الترنح أو الاستباق بالشكل

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} Cos(\varphi) & Sin(\varphi) & 0 \\ -Sin(\varphi) & Cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة: يمكن بسهولة ملاحظة أن مصفوفة الترنح أو الاستباق A_φ هي مصفوفة عامودية، أي أن $A_\varphi^{-1} = A_\varphi^T$. و بالتالي نستنتج أن

$$A_\varphi^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\varphi^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\varphi^{-1} \cdot \left[A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \left[A_\varphi^{-1} \cdot A_\varphi \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

أي أن مصفوفة الترنح أو الاستباق تحقق العلاقتين التاليتين

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

٢. **مصفوفة التأرجح:** نسمي المصفوفة A_θ التي تحقق العلاقة

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_\theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة التأرجح و التي تمثل مصفوفة الانتقال من الجملة R_1 إلى الجملة R_2. و بنفس الأسلوب السابق يمكن بسهولة استنتاج أن هذه المصفوفة تعطى بالشكل

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\theta) & Sin(\theta) \\ 0 & -Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix}$$

وتحقق العلاقتين التاليتين

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_\theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\theta^T \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

٣. **مصفوفة الدوران الذاتي:** نسمي المصفوفة A_ψ التي تحقق العلاقة

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الدوران الذاتي و التي تمثل مصفوفة الانتقال من الجملة R_2 إلى الجملة R_S. و بنفس الأسلوب المتبع سابقاً يمكن بسهولة استنتاج أن هذه المصفوفة تعطى بالشكل

$$A_\psi = \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وأن هذه المصفوفة تحقق العلاقتين التاليتين

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_\psi^T \cdot \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix}$$

ملاحظة: باستخدام المصفوفات الثلاث السابقة يمكن بسهولة الانتقال بين أي جملتين احداثيتين من الجمل السابقة.

متجه دوران جسم حول نقطة منه:

لقد وجدنا أن حركة الجسم حول نقطة منه هي تركيب لثلاث دورانات آنية، و بالتالي يمكن أن نضع متجه الدوران الآني الكلي لهذا الجسم في كل لحظة بالشكل

$$\vec{\omega} = \vec{\omega_1} + \vec{\omega_2} + \vec{\omega_3} = \varphi^{\cdot} \vec{k} + \theta^{\cdot} \vec{i_1} + \psi^{\cdot} \vec{k_S}$$

لنرمز لمركبات متجه الدوران في الجملة R بالرموز p,q,r، أي أن

$$\vec{\omega} = p\ \vec{i} + q\ \vec{j} + r\ \vec{k}$$

و لنرمز لمركبات متجه الدوران في الجملة R_S بالرموز p_S, q_S, r_S ، أي أن

$$\vec{\omega} = p_S\ \vec{i_S} + q_S\ \vec{j_S} + r_S\ \vec{k_S}$$

و لإيجاد هذه المركبات لابد من إيجاد مركبات أشعة الواحدة $\vec{i_1}$ و $\vec{k_S}$ في الجملة R و مركبات أشعة الواحدة $\vec{i_1}$ و $\vec{k}$ في الجملة R_S و ذلك باستخدام مصفوفات الانتقال بين الجمل الإحداثية التي قمنا باستنتاجها سابقاً.

إيجاد مركبات $\vec{i_1}$ في الجملة R : بملاحظة أن $\vec{i_1} = 1\ \vec{i_1} + 0\ \vec{j_1} + 0\ \vec{k_1}$ ، نضع

$$x_1 = 1 \quad , \quad y_1 = 0 \quad , \quad z_1 = 0$$

كما نضع

$$\vec{i_1} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

فيكون حسب علاقات الانتقال بين الجمل الاحداثية

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\varphi^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\varphi) & -Sin(\varphi) & 0 \\ Sin(\varphi) & Cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\varphi) \\ Sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{\vec{i_1} = Cos(\varphi)\ \vec{i} + Sin(\varphi)\ \vec{j}}$$

إيجاد مركبات $\vec{i_1}$ في الجملة R_S : بنفس الأسلوب نجد أن

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \left[A_\theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \right] = A_\psi \cdot A_\theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\theta) & Sin(\theta) \\ 0 & -Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\psi) \\ -Sin(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{\vec{i_1} = Cos(\psi)\ \vec{i_S} - Sin(\psi)\ \vec{j_S}}$$

إيجاد مركبات $\vec{k}$ في الجملة R_S : بملاحظة أن $\vec{k} = 0\ \vec{i} + 0\ \vec{j} + 1\ \vec{k}$ ، نضع

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 1$$

كما نضع

$$\vec{k} = x_S\ \vec{i_S} + y_S\ \vec{j_S} + z_S\ \vec{k_S}$$

فيكون حسب علاقات الانتقال

$$\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{pmatrix} = A_\psi \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot A_\theta \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = A_\psi \cdot A_\theta \cdot A_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\theta) & Sin(\theta) \\ 0 & -Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Cos(\varphi) & Sin(\varphi) & 0 \\ -Sin(\varphi) & Cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\theta) & Sin(\theta) \\ 0 & -Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Cos(\psi) & Sin(\psi) & 0 \\ -Sin(\psi) & Cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ Sin(\theta) \\ Cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Sin(\psi)Sin(\theta) \\ Cos(\psi)Sin(\theta) \\ Cos(\theta) \end{pmatrix}$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{\vec{k} = Sin(\psi)Sin(\theta)\ \vec{i_S} + Cos(\psi)Sin(\theta)\ \vec{j_S} + Cos(\theta)\ \vec{k_S}}$$

إيجاد مركبات $\overrightarrow{k_S}$ في الجملة R: بملاحظة أن $\overrightarrow{k_S}=0\ \overrightarrow{i_S}+0\ \overrightarrow{j_S}+1\ \overrightarrow{k_S}$، نضع

$$x_S=0\quad,\quad y_S=0\quad,\quad z_S=1$$

كما نضع

$$\overrightarrow{k_S}=x\ \vec{i}+y\ \vec{j}+z\ \vec{k}$$

فيكون حسب علاقات الانتقال

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A_\varphi^T\cdot\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}=A_\varphi^T\cdot A_\theta^T\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}=A_\varphi^T\cdot A_\theta^T\cdot A_\psi^T\cdot\begin{pmatrix}x_S\\y_S\\z_S\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Cos(\varphi)&-Sin(\varphi)&0\\Sin(\varphi)&Cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&Cos(\theta)&-Sin(\theta)\\0&Sin(\theta)&Cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}Cos(\psi)&-Sin(\psi)&0\\Sin(\psi)&Cos(\psi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Cos(\varphi)&-Sin(\varphi)&0\\Sin(\varphi)&Cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&Cos(\theta)&-Sin(\theta)\\0&Sin(\theta)&Cos(\theta)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}Cos(\varphi)&-Sin(\varphi)&0\\Sin(\varphi)&Cos(\varphi)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-Sin(\theta)\\Cos(\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Sin(\varphi)Sin(\theta)\\-Cos(\varphi)Sin(\theta)\\Cos(\theta)\end{pmatrix}$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{\overrightarrow{k_S}=Sin(\varphi)Sin(\theta)\ \vec{i}-Cos(\varphi)Sin(\theta)\ \vec{j}+Cos(\theta)\ \vec{k}}$$

مركبات متجه الدوران و معادلات أولر الحركية:

باستخدام العلاقات التي تم استنتاجها أعلاه يمكن بسهولة استنتاج أن

$$\vec{\omega}=\varphi^{\bullet}\ \vec{k}+\theta^{\bullet}\left[Cos(\varphi)\ \vec{i}+Sin(\varphi)\ \vec{j}\right]+\psi^{\bullet}\left[Sin(\varphi)Sin(\theta)\ \vec{i}-Cos(\varphi)Sin(\theta)\ \vec{j}+Cos(\theta)\ \vec{k}\right]$$

$$=\left[\theta^{\bullet}Cos(\varphi)+\psi^{\bullet}Sin(\varphi)Sin(\theta)\right]\vec{i}+\left[\theta^{\bullet}Sin(\varphi)-\psi^{\bullet}Cos(\varphi)Sin(\theta)\right]\vec{j}+\left[\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Cos(\theta)\right]\vec{k}$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\begin{cases}p=\theta^{\bullet}Cos(\varphi)+\psi^{\bullet}Sin(\varphi)Sin(\theta)\\q=\theta^{\bullet}Sin(\varphi)-\psi^{\bullet}Cos(\varphi)Sin(\theta)\\r=\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Cos(\theta)\end{cases}$$

بنفس الأسلوب نستنتج أن

$$\begin{cases}p_S=\theta^{\bullet}Cos(\psi)+\varphi^{\bullet}Sin(\theta)Sin(\psi)\\q_S=-\theta^{\bullet}Sin(\psi)+\varphi^{\bullet}Sin(\theta)Cos(\psi)\\r_S=\psi^{\bullet}+\varphi^{\bullet}Cos(\theta)\end{cases}$$

تسمى مجموعتي المعادلات السابقة معادلات أولر الحركية (في الجملتين الثابتة و المتماسكة).

نتيجة: لنرمز للمستقيم المار من النقطة الثابتة O و الذي يوازي متجه الدوران $\vec{\omega}$ في كل لحظة بالرمز Δ، عندئذٍ من أجل أي نقطة M متماسكة مع الجسم و تقع على المستقيم Δ يكون

$$\vec{V}(M)=\vec{V}(O)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}$$

و بما أن $\vec{V}(O)=\vec{0}$ لكون النقطة O ثابتة و $\vec{\omega}\times\overrightarrow{OM}=\vec{0}$ لأن $\vec{\omega}\,//\,\overrightarrow{OM}$، فإننا نستنتج أن $\vec{V}(M)=\vec{0}$.

أي أن سرع جميع نقاط الجسم الواقعة على المستقيم Δ معدومة، لذلك نسمي المستقيم Δ المحور الآني للدوران. و هكذا نكون قد أثبتنا المبرهنة التالية

مبرهنة (أولر - دالامبير): إن حركة الجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه في كل لحظة هي حركة دورانية آنية حول محور آني للدوران يمر من النقطة الثابتة.

تعيين المحور الآني للدوران هندسياً: بفرض أن A و B نقطتان من جسم صلب يتحرك حول نقطة ثابتة منه O. و ليكن $\vec{V}(A)$ و $\vec{V}(B)$ متجها سرعتي هاتين النقطتين، عندئذٍ نميز الحالات التالية

١. إذا كان متجه سرعة إحدى النقطتين معدوماً، عندئذٍ يكون المحور الآني للدوران هو المستقيم المار من هذه النقطة و النقطة الثابتة O (لماذا؟).

٢. إذا كان $\vec{V}(A)\neq\vec{0}$ و $\vec{V}(B)\neq\vec{0}$، عندئذٍ نميز الحالتين التاليتين

(i) إذا كان $\vec{V}(A)$ و $\vec{V}(B)$ غير متوازيين، عندئذٍ نرسم المستوي المار من النقطة A و يعامد $\vec{V}(A)$ و المستوي المار من النقطة B و يعامد $\vec{V}(B)$، فيكون المحور الآني للدوران Δ هو الفصل المشترك لهذين المستويين (لماذا؟).

(ii) إذا كان $\vec{V}(A) // \vec{V}(B)$، عندئذٍ يكون $\vec{V}(A) = \lambda \vec{V}(B)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}$. في هذه الحالة نعين النقطة C بحيث يكون $\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OB}$، فيكون المحور الآني للدوران Δ هو المحور المار من النقطة O و الذي يوازي المتجه $\overrightarrow{AC}$ (لماذا؟).

نستنتج أنه يمكن دائماً تعيين المحور الآني للدوران هندسياً في حال معرفة متجهي سرعة نقطتين مختلفتين من الجسم غير النقطة الثابتة. و لتعيين المحور الآني للدوران تحليلياً نلاحظ أن معادلات هذا المحور هي معادلات مستقيم في الفراغ يمر من النقطة الثابتة و يوازي متجه دوران الجسم في كل لحظة، و يتعين في الجملة الثابتة بالمعادلات

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$$

أما في الجملة المتماسكة فيتعين المحور الآني للدوران بالمعادلات

$$\frac{x_S}{p_S} = \frac{y_S}{q_S} = \frac{z_S}{r_S}$$

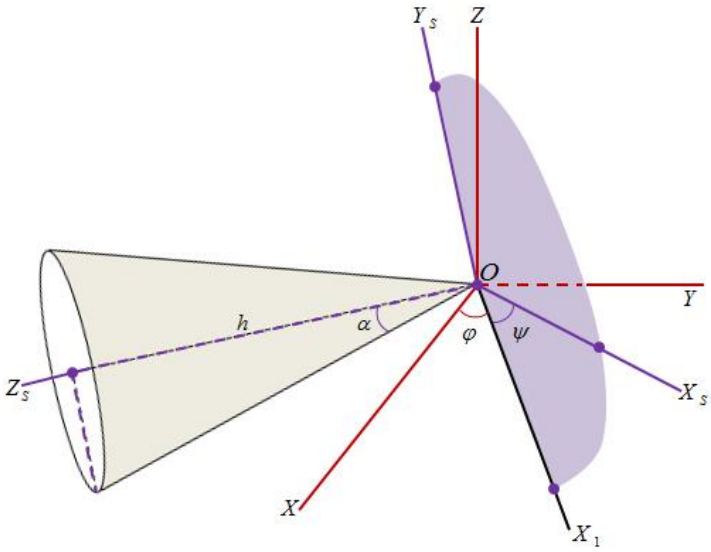
ملاحظة: يتغير المحل الهندسي للمحور الآني للدوران Δ مع الزمن في الجملتين الثابتة R و المتماسكة R_S، إلا أنه يمر دائماً من النقطة الثابتة O. و بالتالي سيرسم هذا المحور مع الزمن سطحين لمخروطين في هاتين الجملتين.

تعريف: نسمي المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة الثابتة مخروط القاعدة ونسمي المحل الهندسي للمحور الآني للدوران في الجملة المتماسكة مخروط المتدحرج. و بالتالي ستؤول حركة جسم حول نقطة ثابتة منه إلى حركة مخروط المتدحرج على مخروط القاعدة بحيث يشترك المخروطان في كل لحظة في المحور الآني للدوران.

مثال (١): مخروط دوراني نصف زاوية رأسه α و ارتفاعه h يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يستند دائماً على المستوي الأفقي الثابت OXY. و المطلوب

١. عين الوسطاء المستقلة لحركة المخروط و عدد درجات الحرية للمخروط
٢. عين متجه دوران المخروط ومعادلات أولر الحركية في الجملة الثابتة
٣. عين معادلات المحور الآني للدوران في الجملة الثابتة

الحل: إن حركة المخروط هي تركيب لحركتين دورانيتين فقط و هي دوران الترنح (الاستباق) و الدوران الذاتي و لا وجود لدوران التأرجح لكون المخروط لا يستطيع الانفكاك عن المستوي OXY، كما هو موضح في الشكل.



أي أن وسطاء حركة المخروط هما زاوية الترنح (الاستباق) φ و زاوية الدوران الذاتي ψ أما زاوية التأرجح فهي ثابتة و تساوي $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$، و بالتالي فإن للمخروط درجتان من الحرية.

وبالتالي فإن متجه دوران المخروط هو المتجه

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\ \vec{k} + \dot{\psi}\ \overrightarrow{k_S}$$

و بالتعويض في معادلات أولر الحركية في الجملة الثابتة نجد أن

$$\begin{cases} p = \dot{\theta} Cos(\varphi) + \dot{\psi} Sin(\varphi) Sin(\theta) \\ q = \dot{\theta} Sin(\varphi) - \dot{\psi} Cos(\varphi) Sin(\theta) \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} Cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \dot{\psi} Sin(\varphi) Sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ q = -\dot{\psi} Cos(\varphi) Sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} Cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} Sin(\varphi) Cos(\alpha) \\ q = -\dot{\psi} Cos(\varphi) Cos(\alpha) \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} Sin(\alpha) \end{cases}$$

وقد كان بالإمكان الحصول على هذه المعادلات بالإسقاط المباشر في الشكل للمتجه $\overrightarrow{k_S}$ على الجملة الثابتة.

تعطى معادلات المحور الآني للدوران في الجملة الثابتة بالشكل

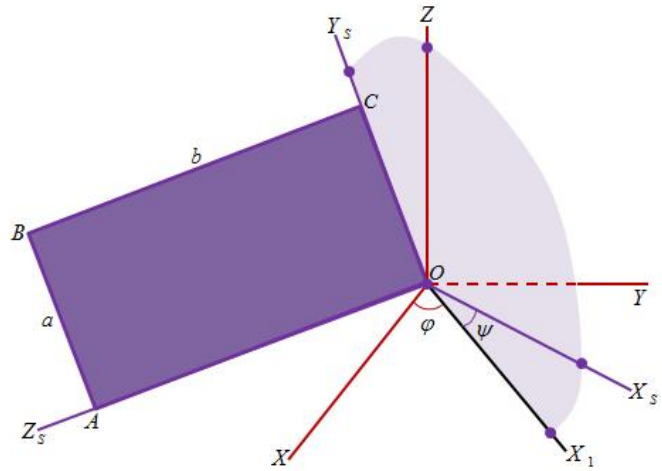
$$\frac{x}{\psi^{\cdot}Sin(\varphi)Cos(\alpha)}=\frac{y}{-\psi^{\cdot}Cos(\varphi)Cos(\alpha)}=\frac{z}{\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}Sin(\alpha)} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y+Cot(\varphi)x=0 \\ x=\left(\dfrac{\varphi^{\cdot}}{\psi^{\cdot}Sin(\varphi)Cos(\alpha)}+\dfrac{Tan(\alpha)}{Sin(\varphi)}\right)z \end{cases}$$

مثال (٢): صفيحة مستطيلة $OABC$ بعداها a و b تستطيع الحركة حول رأسها الثابت O بحيث يبقى الضلع ملاصق للمستوي الأفقي الثابت OXY. و المطلوب

١. عين الوسطاء المستقلة لحركة المخروط و عدد درجات الحرية للمخروط
٢. عين متجه دوران المخروط ومعادلات أولر الحركية في الجملة الثابتة
٣. عين معادلات المحور الآني للدوران في الجملة الثابتة

الحل: إن حركة الصفيحة هي تركيب لحركتين دورانيتين فقط و هي دوران الترنح (الاستباق) و الدوران الذاتي و لا وجود لدوران التأرجح لكون الضلع OA من الصفيحة لا يستطيع الانفكاك عن المستوي OXY، كما هو موضح في الشكل.



أي أن وسطاء حركة الصفيحة هما زاوية الترنح (الاستباق) φ و زاوية الدوران الذاتي ψ أما زاوية التأرجح فهي ثابتة و تساوي $\theta=\dfrac{\pi}{2}$، و بالتالي فإن للصفيحة درجتان من الحرية.

وبالتالي فإن متجه دوران الصفيحة هو المتجه

$$\vec{\omega}=\varphi^{\cdot}\ \vec{k}+\psi^{\cdot}\ \overrightarrow{k_S}$$

و بالتعويض في معادلات أولر الحركية في الجملة الثابتة نجد أن

$$\begin{cases} p=\theta^{\cdot}Cos(\varphi)+\psi^{\cdot}Sin(\varphi)Sin(\theta) \\ q=\theta^{\cdot}Sin(\varphi)-\psi^{\cdot}Cos(\varphi)Sin(\theta) \\ r=\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}Cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\psi^{\cdot}Sin(\varphi)Sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ q=-\psi^{\cdot}Cos(\varphi)Sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \\ r=\varphi^{\cdot}+\psi^{\cdot}Cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p=\psi^{\cdot}Sin(\varphi) \\ q=-\psi^{\cdot}Cos(\varphi) \\ r=\varphi^{\cdot} \end{cases}$$

وقد كان بالإمكان الحصول على هذه المعادلات بالإسقاط المباشر في الشكل للمتجه $\overrightarrow{k_S}$ على الجملة الثابتة.

تعطى معادلات المحور الآني للدوران في الجملة الثابتة بالشكل

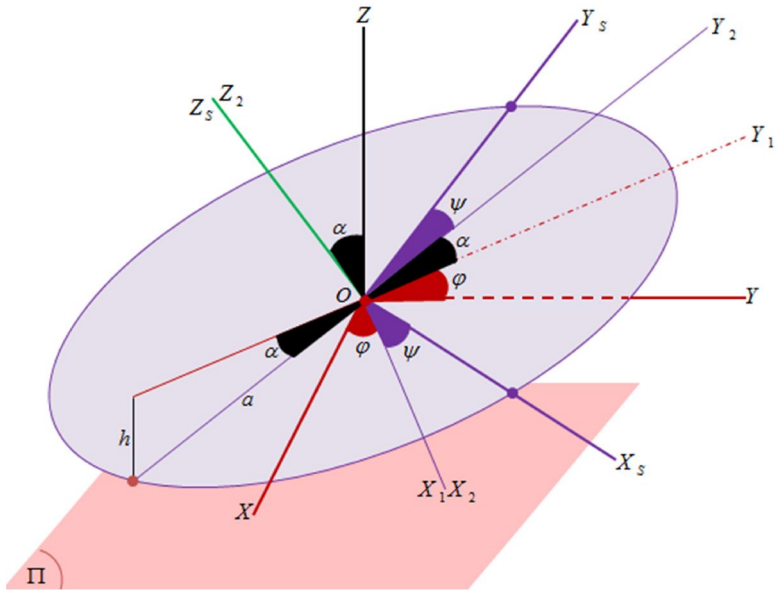
$$\frac{x}{\psi^{\cdot}Sin(\varphi)}=\frac{y}{-\psi^{\cdot}Cos(\varphi)}=\frac{z}{\varphi^{\cdot}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y+Cot(\varphi)\,x=0 \\ \dfrac{\varphi^{\cdot}}{\psi^{\cdot}}x-Sin(\varphi)\,z=0 \end{cases}$$

مثال (٣): قرص دائري نصف قطرة a يستطيع الحركة حول مركزه الثابت في مركز الإحداثيات O بحيث يستند محيط القرص دائماً على مستوٍ أفقي Π يوازي المستوي الثابت OXY و يبعد عنه مسافة مقدارها h بحيث أن $h<a$. و المطلوب

١. عين الوسطاء المستقلة لحركة القرص و عدد درجات الحرية لهذه الحركة
٢. عين متجه دوران القرص ومعادلات أولر الحركية في الجملتين الثابتة و المتماسكة مع القرص
٣. عين معادلات المحور الآني للدوران في الجملتين الثابتة و المتماسكة مع القرص

الحل: بفرض أن محاور الجملة المتماسكة R_S كانت في لحظة البدء منطبقة على محاور الجملة الثابتة R، و للوصول إلى الوضعية النهائية لمحاور الجملة المتماسكة نقوم أولاً بدوران الترنح (الاستباق) بزاوية φ حول المحور OZ ليصبح المحور OX_S منطبق على المحور OX_1. ثم نقوم بدوران التأرجح بزاوية ثابتة $\theta=\alpha$ حول

المحور OX_1 حتى يصبح القرص مستنداً على المستوي Π بشكل دائم، لاحظ أن $Sin(\alpha)=h/a=Const$. ثم نقوم بالدوران الذاتي بزاوية ψ حول المحور OZ_S لنصل إلى الوضعية النهائية للجملة المتماسكة R_S.



و بالتالي فإن حركة القرص و كما هو مبين في الشكل هي تركيب لحركتين دورانيتين فقط، دوران الترنح (الاستباق) و الدوران الذاتي، ولا وجود لدوران التأرجح لكون القرص يستند دائماً على المستوي الثابت Π ولا يستطيع الانفكاك عن هذا المستوي. ويصبح متجه دوران القرص هو المتجه

$$\vec{\omega}=\dot{\varphi}\ \vec{k}+\dot{\psi}\ \overrightarrow{k_S}$$

و بالتعويض في معادلات أولر الحركية في الجملة الثابتة نجد أن

$$\begin{cases} p=\dot{\theta}Cos(\varphi)+\dot{\psi}Sin(\varphi)Sin(\theta) \\ q=\dot{\theta}Sin(\varphi)-\dot{\psi}Cos(\varphi)Sin(\theta) \\ r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}Cos(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=\dot{\psi}Sin(\varphi)Sin(\alpha) \\ q=-\dot{\psi}Cos(\varphi)Sin(\alpha) \\ r=\dot{\varphi}+\dot{\psi}Cos(\alpha) \end{cases} \Rightarrow$$

$$p=\frac{h}{a}\dot{\psi}Sin(\varphi)\ ,\ q=-\frac{h}{a}\dot{\psi}Cos(\varphi)\ ,\ r=\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}\ \dot{\varphi}$$

وقد كان بالإمكان الحصول على هذه المعادلات بالإسقاط المباشر في الشكل للمتجه $\overrightarrow{k_S}$ على الجملة الثابتة.

تعطى معادلات المحور الآني للدوران في الجملة الثابتة بالشكل

$$\frac{x}{h\ \dot{\psi}Sin(\varphi)}=\frac{y}{-h\ \dot{\psi}Cos(\varphi)}=\frac{z}{\sqrt{a^2-h^2}\ \dot{\varphi}} \Rightarrow \begin{cases} y+Cot(\varphi)\ x=0 \\ \dfrac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\dfrac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}x-Sin(\varphi)\ z=0 \end{cases}$$

و باستخدام معادلات أولر الحركية في الجملة المتماسكة نوجد معادلات المحور الآني للدوران في الجملة المتماسكة.