الفصل الرابع
تطور النظام العددي والحساب

تمهيد :

إن الرياضيات علم متسلسل، يسير دائماً إلى الأمام، وحاضره مبني على ماضيه، ولايمكن والحالة هذه إهمال الماضي، لأن الحياة البشرية بالنسبة للفرد الواحد، بل بالنسبة للمجموعة الواحدة قصيرة جداً، بحيث لاتسمح ببحث كل شيء من بدئه، ووجب إذن أن نأخذ عن الأقدمين ثم نسعى من جهتنا في تحسين ما أخذناه، وترقيته والنهوض به، فالحقائق المعترف بها اليوم كانت بالأمس نظريات مشكوكاً في صحتها، وبعض الأمور ذات الأهمية الأولى اليوم، كانت بالأمس قليلة الأهمية وأهملت، والقدامى الذين تعثروا في الظلام، والذين ندهش من انحطاط المستوى العلمي عندهم لم يمنعهم هذا الظلام من التقدم إلى الأمام، بالصبر والمثابرة وإننا لنشعر بالإعجاب العظيم من عبقريتهم التي مكنتهم من التقدم على الرغم من انحطاط المستوى العلمي والأدوات أو الوسائل التي عالجوا بها تراثهم العلمي .

وليست دراسة الرياضيات قاصرة على معرفة ما قام به الأقدمون فقط، وإنما تعلمنا كيف نزيد من ذخيرتنا الرياضية، فنترسم تطور الأفكار فنفيد من الطرق الناجحة، ونستأصل الطرق المخفقة، ونوفر على الباحث مجهوده ووقته إذا ما حاول حل مشكلة سهلة حلت منذ زمن طويل أو حاول حل مشكلة لم تحل بعد، بطريقة القدامى وثبت استحالة الحل بها، كمشاكل تربيع الدائرة وتثليث الزاوية وتضعيف المكعب ونخشى التسرع في الاستنتاج الذي أودى بمجهودات الأولين، وعلينا أن ننتفع بتطور الأفكار في تدرج خطوات التدريس من جهة وبتشويق التلاميذ من جهة أخرى وحفزهم على اتباع ما قام به العظماء .

هذا ويحسن بناء أن نشير إلى أن معلوماتنا من تاريخ الرياضيات نسبية، أي بالنسبة لما وقع تحت أيدي العلماء من وثائق وبالنسبة لما ذهبوا إليه من تأويل وتفسير .

1- تطور النظام العددي

بدأت فكرة العد وكتابة الأعداد منذ أن شعر الإنسان بحاجة إلى عدّ الأشياء التي تحيط به وبدأ فعلاً بمحاولة العد ولم يظفر الإنسان بطريقة ملائمة للعد وكتابة الأعداد إلاّ بعد جهود كبيرة بذلتها الأجيال المتعاقبة على مر الأيام وتتابع الأعوام .

1-1 – جهود ما قبل التاريخ

ونقصد بها الجهود التي بذلها الإنسان في هذا المضمار قبل بزوغ فجر الحضارات القديمة، فالإنسان في أول الأمر لم يكن قادراً على التمييز بين مفردات مجموعة من الأشياء، فإذا أراد أن يقدر أغنامه قطيعه مثلاً كان يقتصر على فتح ذراعيه قليلاً أو كثيراً للدلالة على صغر القطيع أو كبره .

وعندما بدأ يميز مفردات المجموعة الواحدة بعضها عن بعض لجأ أثناء تقديرها إلى ذكر صفات هذه المفردات فعند تقدير الأغنام كان يذكر أن قطيعه يتألف من البيضاء والسوداء إلى غير ذلك .

ولكنه وجد فيما بعد أن هذه الطريقة في تقدير الكميات غير كافية ولاسيما عندما تعددت المفردات ذات الصفة الواحدة ، فلجأ عندئذ إلى موازنة هذه المفردات بنظائرها فقال مثلاً لدي من الأغنام البيضاء بقدر أصابع يدي ... أي أن الإنسان الابتدائي كان يفكر في مجموعات تمثل المقادير التي يعدها وعندما شعر بأن المجموعات التي كان يعتمد عليها صغيرة تعجز عن عد الكميات الكبيرة لجأ إلى مقارنة الأشياء المعدودة بالحصى فكان إذا أراد معرفة كمية قطيعه عمد إلى وضع حصاة نظير كل رأس من القطيع حتى تصبح كمية قطيعه مطابقة لكمية من الحصى، وبذلك نشأ ما يسمى العد بالحصى، وقد ترك استخدام الحصى في العد أثراً واضحاً في لغات الأمم. ففي العربية كلمة إحصاء مشتقة من كلمة حصى، وفي الفرنسية جاءت الكلمة Calcul من اللفظ اللاتيني ومعناه الحصى .

ثم عمد الإنسان فيما بعد إلى طريقة للعد أكثر رقياً اعتبر فيها كل إصبع من أصابع اليدين للوحدة وكل إصبع من أصابع اليد الأخرى للخمسة فاستطاع أن يعد بأصابع يديه حتى الثلاثين، وعمل مثل ذلك بالحصى والعيدان فاعتبر بعضها للدلالة على الوحدة واعتبر البعض الآخر للدلالة على عدة وحدات ومن هذه الاعتبارات وغيرها نشأت الطرق المختلفة في العد، الطريقة الثنائية، الطريقة الرباعية، الطريقة الخماسية، والطريقة العشرينية والطريقة العشرية وهي المعمول عليها في عملياتنا اليوم.

ولما شعر الإنسان الأول بالحاجة إلى تسجيل ما له وما عليه وضع رموزاً لتحديد المقادير المختلفة فرسم اليد للدلالة على الخمسة .

1-2 – النظام العددي في بلاد النيل

اتبع قدماء المصريين كنظام للعد ، نظام العد العشري، فاتخذوا لكل مرتبة من المراتب رمزاً مستقلاً ، فقد رمزوا بالعصا للدلالة على الواحد وبالقنطرة للدلالة على العشرة وبالحبل الملفوف للدلالة على المئة وبزهرة اللوتس للدلالة على الألف وباصبع ممدودة للدلالة على العشرة آلاف وبصغير الضفدع للمئة ألف وبالرجل ممدود اليدين للمليون كما أنهم اتخذوا مبدأ التكرار لتوضيح مختلف

الأعداد وفيما يلي بعض الرموز المستعملة في كتابة الأعداد عند قدماء المصريين :

C	∩	ǀǀǀ ǀǀǀ ǀǀǀ	ǀǀǀ ǀǀǀ	ǀǀǀǀǀ	ǀǀǀǀ	ǀǀǀ	ǀǀ	ǀ
100	10	9	6	5	4	3	2	1

فالعدد 365 يكتب بالرموز المصرية بالشكل :

C C C ∩∩∩∩∩∩ ǀǀǀǀǀ

نلاحظ لو بدّلنا ترتيب الرموز إلى الشكل :

ǀǀǀǀǀ∩∩∩∩∩∩ C C C

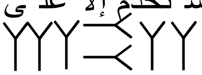
لوجدنا أن العدد لايتغير أو لم تتغير قيمته فقيمة الرموز لاتتغير سواء وضع على اليمين أو اليسار أو في الوسط أو كتب بترتيب أفقي أو شاقولي .

نلاحظ أن هذه الطريقة في تمثيل الأعداد سهلة وواضحة ولكنها تصبح غير صالحة عندما نحاول أن نمثل أعداداً ضخمة لأنها تحتاج إلى عدد كبير من الرموز فلكتابة العدد 999 نحتاج إلى 27 رمز بالإضافة إلى أننا سنحتاج إلى رموز إضافية إذا أردنا أن نمثل عدداً يتجاوز العشرة ملايين .

1-3 – النظام العددي في بلاد الرافدين

استخدم البابليون نظام العدد العشري والستيني ولكن اقتصروا في كتابتهم للأعداد على عدة رموز فاستخدموا الرمز التالي (وتد شاقولي) للدلالة على الواحد أو الستين والرمز للدلالة على العشرة ومضاعفات العشرة حتى الخمسين وبالرمز للدلالة على 600 فكتابة العدد 143 بطريقة البابليين هي بالشكل : أي $60 \times 2 + 10 \times 2 + 3 = 120 + 20 + 3$

ونلاحظ أن اختصار هذه الطريقة على عدد محدود من الرموز أدى إلى نشوء فكرة القيمة المكانية ، فالرمز عشرة يأتي مكانه بعد الواحدات وعلى يسار هذه الواحدات فكرة هامة ، فالرمز تختلف قيمته من واحد إلى ستين باختلاف وجوده على يمين العشرات أو عن يسارها فلو بدّلنا من وضع الرموز في المثال السابق إلى الشكل لأصبح العدد = $2 + 20 + 180 = 202$ أنه واضح من هذه الطريقة أن البابليين قد اهتدوا إلى فكرة المرتبة الخالية وقد وضع الرمز للدلالة على الصفر إلا أنه لم يستخدم إلا على نطاق ضيق جداً .



1-4 – النظام العددي الصيني

استخدم الصينيون نظام العد العشري كما استخدموا مبدأ التكرار في توضيح مختلف الأعداد فاستخدموا رمز الخط العمودي رمزاً للواحد في الآحاد ، والمئات ، وعشرات الألوف إلى مراتب الأعداد ذات القوى (, 10^2 , 10^4

أي بصورة عامة في المراتب 10^{2n} واستخدموا الخط الأفقي – رمزاً للواحد (10^0
في العشرات والألوف ومئات الألوف وهكذا أي في المراتب (10^1 , 10^3 , 10^5)
وبصورة عامة في المراتب 10^{1+2N}.

وفي كل الأنظمة التي تستخدم طريقة التكرار تجد أن العدد 3 يمثل بالرمز ||| والعدد 30 يمثل بالرمز ≡ والعدد 33 بالرمز ≡||| و 330 ≡||| و 333 ≡||| ونلاحظ من هذه الأمثلة نشوء فكرتين هامتين فكرة القيمة المكانية للرقم كما أدى إلى فكرة المرتبة الخالية فالرمز ||| قد يدل على 3 أو 300 والرمز ≡ قد يدل على 30 أو 3000 لذلك كان يفصل الحاسب بين المراتب بأعمدة ليظهر المرتبة الخالية والخلاصة. فإن أهم مميزات هذا النظام مساهمته بإنشاء فكرة القيمة المكانية للرقم كما ساعد على اكتشاف فكرة المرتبة الخالية ، علماً بأن رمز الصفر كما هو عليه لم يستخدم إلا في القرن الثامن .

1-5 – النظام العددي الإغريقي

استخدم اليونان نظام العد العشري فاتخذوا مذهباً آخر في كتابة الأعداد يختلف عما سبق فاستعملوا أبجديتهم وجعلوا لكل حرف دلالة عددية وقد اقتبس العرب عنهم هذه الطريقة ونلاحظ أن الإغريق بهذا المذهب يكونون أول من استخدم لكل عدد من الأعداد التسعة الأولى رمزاً خاصاً وسنوضح هذه الطريقة عندما نتكلم عن الحساب العربي.

1-6 – – النظام العددي الروماني

استخدم الرومان نظام العد العشري والخماسي فاعتمدوا على كتابة أعدادهم على ستة رموز هي :

M	C	L	X	V	I
1000	100	50	10	5	1

وتعتمد هذه الطريقة في استعمال رموزها على عمليات جمع وطرح لقيمها العددية. وفيما يلي بعض الرموز لتمثل مجموعات مختلفة من الأعداد :

XX	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I
20	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
				XC	LXXX	LXX	LX	L	XL	XXX
				90	80	70	60	50	40	30

فالعدد 1969 يمثل بالرموز الرومانية بالشكل :

M	CM	LXI	X
1000	900	60	9

1-7 – النظام العددي المایاني

شعوب المایا سكنت أمریكا الوسطى واستخدمت النظام العشریني فاتخذت تسعة عشَرَ رمزاً من الواحد حتى التسعة عشَر ورمزاً خاصاً للصفر فالعدد 20 یمثل بـ

والـ 400 بالرمز ولكن الجدیر بالملاحظة هو أنه عندئذ ویم الزمن في السنة الشمسیة استخدموا الرمز للدلالة على 360 والرمز لتمثیل 7200 وفیما یلي الرموز التي استخدمها المایا :

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11

1-8 – النظام العددي الهندي

بینما كان الإنسان یتخبط في كل مكان في كتابة الأعداد كان الحاسب الهندي ینعم بطریقة مثلى في تدوین أعداده وإجراء حساباته وكان یستعمل في كل هذا عشرة رموز وقد اقتبس العرب عن الهنود طریقتهم في كتابة الأعداد وقام العرب بتهذیب الأرقام الهندیة وكونوا منها سلسلتین عرفت إحداها بالأرقام الهندیة وفیما یلي الرموز التي استخدمها الهنود وظلت مستخدمة في العراق حتى 1000 بعد المیلاد .

C	6	9	ζ	ɣ	γ	ɮ	2	2	O
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

ومن بعدها استخدمت السلسلة الثانیة والتي لم تتغیر منذ ذلك الوقت .

1-9 – النظام العددي العربي

لم یكن للعرب في جاهلیتهم تراث علمي بكل ما تعنیه هذه العبارة من معنى. لما بعث فیهم النبي محمد (ﷺ) هادیاً ومعلماً یعلمهم الكتاب والحكمة ویعلمهم ما لم یكونوا یعلمون أحدث في حیاتهم انقلاباً جذریاً تناولها من الأعماق . فانطلقوا من شبه جزیرتهم واتصلوا خلال انطلاقهم هذا بالحضارات السائدة في بلاد الشام وعلى ضفاف الرافدین وفي وادي النیل فاقتبس العرب عن الیونان

طريقتهم في كتابة الأعداد فاستخدموا الحروف العربية في كتابة الأعداد ووضعوا لكل حرف من حروف أبجديتهم قيمة معينة كما رأينا سابقاً .

ونلاحظ أن الأحرف التسعة الأولى قد استعملت للدلالة على الآحاد كما جعلت الأحرف التسعة الأخيرة للدلالة على العشرات والتسعة التي تليها للدلالة على المئات وجعل الحرف الثامن والعشرون للدلالة على الألف ، أما بقية الألوف حتى التسعمئة ألف فقد عبّر عنها بالحروف نفسها تضاف إليها الغين. وماعدا ذلك فإن الأعداد تركب من الحروف بإضافة قيمتها العددية بعضها إلى بعض .

فالقيمة العددية لكلمة طفل هي : 9 + 80 + 30 = 119 ولما بلغ التوسع العربي شبه القارة الهندية اتصل أجدادنا بالهنود واطلعوا على طريقتهم في كتابة الأعداد وأدركوا الميزات الكثيرة التي تنطوي عليها هذه الطريقة فأعرضوا عن كتابة الأعداد بالحروف الأبجدية واقتبسوا من الهنود طريقتهم وقاموا بتهذيب الأرقام الهندية وكونوا منها سلسلتين عرفت إحداها بالأرقام الهندية وهي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 وهذه السلسلة تستعمل في الوطن العربي وفي أكثر الأقطار الإسلامية وعرفت الثانية بالأرقام الغبارية :

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 وطرأ على هذه السلسلة عدة تطورات حتى أخذت الشكل السابق حوالي 1400 بعد الميلاد ومن مميزات الأرقام الهندية العربية أنها مستعملة في أوروبا وتعرف باسم الأرقام العربية لأنها دخلت أوروبا عن طريق الأندلس أما الأولى فاقتبست من الهند عن طريق عرب بغداد .

1-10-الأنظمة العددية و طرائق العد

رأينا من دراسة تطور مختلف أنظمة العد عبر الحضارات القديمة هو أن النظام العشري هو النظام السائد .ورأينا أن الكثير من الحضارات استخدمت هذا النظام بالاستعانة بأنظمة عدّ أخرى كنظام العد الخماسي والعشريني والستيني ولكن الطريقة المثلى لكتابة الأعداد هي الطريقة العربية الهندية ولابدّ أن نذكر مميزات هذه الأرقام التي جعلت منها الطريقة العالمية الوحيدة التي يتداولها الناس في كتابة الأعداد .

1- اقتصرت هذه الطريقة على استعمال عشرة رموز بما فيها الصفر ولم يشعر الحاسب في أيامنا بالحاجة إلى رمز جديد غير هذه الرموز في كتابة الأعداد مهما كانت كبيرة أو صغيرة .

2- أشكال الأرقام في هذه الطريقة بسيطة وبعيدة عن الالتباس .

3- اعتمدت على مبدأ عظيم الأهمية في كتابة الأعداد وهو مبدأ القيمة المكانية للرقم ، الأمر الذي جعل للرقم الواحد قيماً متعددة يختلف بعضها عن بعض باختلاف المرتبة التي يشغلها الرقم في عدده فالرقم 9 له ثلاث قيم مختلفة في العدد 999 .

4- استعملت رمز الصفر للدلالة على المرتبة الخالية .

5- هذه الطريقة في كتابة الأعداد سهلت إجراء العمليات الحسابية التي لم تكن تتم بيسر بالاعتماد على الطرائق الأخرى .

ومن المفيد أن نبين سهولة النظام العشري فيما لو اتخذنا أساساً آخر للنظام غير 10 ولذلك سنبين أولاً كيفية كتابة عدد ما في نظام العد العشري ثم ننتقل لكتابة العدد في أي نظام آخر .

فالعدد $56 = 50 + 6 = 5 \times 10 + 6 = 10^1 \times 5 + 10^0 \times 6$

فلكتابة العدد 56 في نظام عد ثنائي مثلاً فإننا سنكتفي فقط بالرمزين 0 ، 1

فالعدد 2 في نظام العد الثنائي يكتب بالشكل 10، والعدد 4 يكتب بالشكل 100 والعدد 8 بالشكل 1000 .

وذلك لأن :

2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
					1	0
				1	0	0

والعدد 56 في نظام العد الثنائي يكتب بالشكل 1 1 1000

لأن :

$56 = 32 + 16 + 8 = 2^5 \times 1 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 0 + 2^1 \times 0 + 2 \times 0$

ويسهل إيجاد العدد 111000 المكتوب بالنظام الثنائي بتقسيم 56 على 2 والباقي الأول هو بمثابة رقم الآحاد في العدد الثنائي ثم نقسم خارج القسمة على 2 أيضاً وهكذا حتى نصل للباقي 1 في عملية التقسيم الأخيرة كما هو مبين :

$\frac{56}{2} = 28 +$ الباقي صفر وهو الآحاد ، $\frac{28}{2} = 14 +$ الباقي صفر وهو العشرات

$\frac{14}{2} = 7 +$ الباقي صفر وهو المئات ، $\frac{7}{2} = 3 +$ الباقي واحد وهو الألوف

$\frac{3}{2} = 1 +$ الباقي واحد وهو آحاد ألوف وخارج القسم الأخير واحد هو عشرات ألوف والعدد 316 في نظام العد الثنائي يكتب بالشكل 100111100 لأن :

$316 = 256 + 32 + 16 + 8 + 4 = 2^8 \times 1 + 2^7 \times 0 + 2^6 \times 0 + 2^5 \times 1 + 2^4 \times 1 + 2^3 \times 1 + 2^2 \times 1 + 2^1 \times 0 + 2^0 \times 0$

وفي نظام العد الخماسي يكتفى بالرموز الخمسة التالية وهي : 4 , 3 , 2 , 1 , 0 والعدد 5 يكتب بالشكل 10 و 25 بالشكل 100 و 125 بالشكل 1000 والعدد 56 يكتب بالشكل 211 لأن :

$56 = 2 \times 25 + 5 + 1 = 5^2 \times 2 + 5^1 \times 1 + 5^0 \times 1 = 56$

وبطريقة التقسيم على 5 يظهر الحل :

أما العدد 316 يكتب بالشكل 2231 ذلك لأن :

$$316 = 250+50 + 15 + 1 = 5^3 \times 2 + 5^2 \times 2 + 5^1 \times 3 + 5^0 \times 1 = 316$$

أما في نظام عد سباعي يكتفى بالرموز السبعة التالية هي : 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 والعدد 7 يكتب بالشكل 10 و 49 بالشكل 100 والعدد 56 يكتب في نظام العد السباعي بالشكل 110 لأن :

$$56 = 49 + 7 + 0 = 7^2 \times 1 + 7^1 \times 1 + 7^0 \times 0 = 56$$

أما العدد 316 فيكتب بنظام عد سباعي بالشكل 631 لأن :

$$7^2 \times 6 + 7^1 \times 3 + 7^0 \times 1 = 631$$

$$316 = 294 + 21 + 1 = 49 \times 6 + 7 \times 3 + 1$$

ومن الجدير بالملاحظة أن نبين أن نظام العد الثنائي كان يستعمل عند بعض القبائل البدائية حيث يعدون الأشياء أزواجاً ويستعمل الترقيم الثنائي اليوم في الآلات الحاسبة الإلكترونية، ولذا صار على جانب كبير من الأهمية وهذه الآلات تعمل بالكهرباء ونحن نعلم أن الدورة الكهربائية تكون في إحدى حالتين لاثالث لهما فهي إما متصلة أو منقطعة، ولذلك يستعمل في الآلات الحاسبة نظام يتفق مع هاتين الحالتين وهو النظام الثنائي .

2- تطور علم الحساب

2-1- علم الحساب عند العرب

قبل القرن التاسع كان العرب يرقمون الأعداد بوساطة العد أو الترقيم بالكلمات، على طريقة اليونانيين، أي بوساطة الأحرف الثمانية والعشرين من الأبجدية، والتي ترمز على التوالي إلى الوحدات وإلى العشرات وإلى المئات ثم عدد الألف.وفي مطلع القرن التاسع ، اعتمد علماء بغداد نظام الترقيم العشري ذا المواقع أو المراتب الذي كان قد دخل إلى الهند قبل ذلك بقليل.وكان نشر وإكمال الحساب العشري ، المرتكز على مبدأ الموقع، هما إحدى نجاحات العلم العربي وبما أن علماء الهند لم يقدموا عرضاً مكتوباً لحسابهم العددي. وأول كتاب حسابي مرتكز على مبدأ الموقع، ألفه الخوارزمي حوالي سنة 830، ولم يعثر على النص العربي لهذا الكتاب حتى الآن، ونحن لانعرفه إلا من خلال ترجمة لاتينية حصلت في القرن 12 (عرفت من خلال نسخة غير كاملة في القرن 13)، وكذلك من خلال كتب أخرى لاتينية من نفس الحقبة، استُقيت من الأولى، ومن بعض الكتب العربية لكوشيار بن اللبان (Kushyar ibn Labban) وللنسوي (Al-Nassawi) من حقبة أكثر تأخراً .

وكتاب الخ وارزمي، وم انزال نجهل عنوان ه، يب دأ بوص ف مفصل لنظ ام الترقيم الهندي بوساطة تسعة " صور" هي رموز للأعداد (1,2,3,…,9) ثم للدائرة الصغيرة "الصفر" تتيح التعبير بسهولة عن أعداد مهما كان كبرها. ثم ينتق ل بع د ذلك إلى العمليات الحسابية بما فيها التضعيف والقسمة على اثنين، وه ذه العملي ات مثبتة بسبب فائدتها في استخراج الجذر التربيعي. ويفترض إج راء ه ذه العملي ات على لوح أفقي مغط ى بالرم ل أو الغب ار. وبع د ك ل مرحل ة م ن مراح ل الحس اب تمحى الأرقام التي أصبحت غي ر مفيدة لتح ل محله ا أرق ام جدي دة. ه ذا الأس لوب الهندي الذي قلّما يلائم الحسابات الجارية على الورق ظلّ لمدة طويلة معمولاً به .

وعلى سبيل المثال نورد بالترقيم الحديث ، مختلف مراحل عملية ضرب 2326 × 214 = 497 764 ويتنقل الضارب خانة نحو اليمين بعد كل ضرب :

497 764	496 486	492 226	428 326	2326
	214	214	214	214

وتُتبع عمليات الإعداد الصحيحة بعمليات حول الكس ور الس تينية والعادي ة واس تخراج الج ذور التربيعية (وفي هذا القسم الأخير تحديداً نقص في نسخة الترجم ة اللاتينية التي سبقت الإشارة إليها) .

إن أشكال الأرقام العربية ف ي أي ام الخ وارزمي، مجهول ة وغي ر معروف ة. فمنذ القرن العاشر، استخدمت المخطوطات الرياض ية العربي ة ش كلين م ن الأرق ام مختلفين نوعاً ما، النوع الأول كان يستخدم في بلدان المشرق العربي، والثاني في بلاد المورنشبير على كلٍ إلى أن ترقيمات الأع داد بالكلم ات أو ب الأحرف بقي ت في كتب الحساب باللغة العربية حتى نهاية الحقبة الوسيطية .

وقد لعب كتاب الخوارزمي دوراً كبيراً في تط وير الحس اب ف ي أوروب ا الوسيطية دلّ الاسم الملتين (من لاتيني) للمؤلف –ألغوريسم أو الغ وريثم –عل ى ك ل نظ ام الحس اب العش ري المرتك ز عل ى مب دأ الموق ع. وم ع ليبن ز (Leibniz) ، اكتسب هذا الاسم معنىً أوسع بحيث شمل كل نظ ام من تظم ف ي الحس اب يت يح ح لّ طبقة معينة من المسائل بشكل ميكانيكي.

2-2- فكرة الكسور

لاتمتلك اللغة العربية كلمات خاصة، للتعبير ر ع ن كس ور الوح دة الأق ل م ن فك انوا يسمون ك ل الكس ور الأخ رى ذات الص ورة واح د : جزءاً م ن n 1/10 وتض عيفاته : أجزاء مثلاً من n . ه ذا الاس تعمال يتواف ق مع ه مفه وم الكس ر المحدد الصغير: جزء أو ع دة أج زاء م ن الوح دة مهم ا كان ت باعتباره ا مق داراً قابلاً للقسمة (الوحدة التجريدية تعتبر غير قابلة للقسمة)، ولكن يوجد أيض اً مفه وم

آخر للكسر، باعتباره علاقة بين عددين صحيحين مجردين، وهو مفهوم يعود إلى نظرية قديمة في النسب.

يلاحظ أن هذه النظرية الأكثر قابلية للاستخدام، استخدمت كأساس نظري للحساب العربي. ذلك أن ضرب عددين صحيحين، كان، في المقام، يعرف بأنه تكرار للجمع على كلٍ، إن مثل هذا التعريف لاينطبق على حالة كسرين، فقد ذللت هذه الصعوبة بواسطة تعريف آخر.

مثل هذا التحديد ينطبق أيضاً على الأعداد الصحيحة كما على الكسور. والقسمة تتحدد بشكل مماثل. لقد دحض أبو الوفا أمثال هذه التحديدات، فحدد هذه المفاهيم علمياً، يتأكد الميل العام في الرياضيات العربية إلى مطابقة مفاهيم العدد والنسبة.

كانت الكسور تدون على الطريقة الهندية أي بوضع المخرج (المقام) تحت الصورة (البسط)، مع إبقاء القسم الصحيح من العدد مكتوباً فوق الصورة. أما "خط" المسكور فلم يظهر إلاّ في حوالي السنة 1200.

وكان الموظفون، والمساحون، والتجار يستعملون، منذ زمن بعيد، نظاماً آخر في حساب الكسور، يشبه ذاك الذي كان مستعملاً عند الكتاب المصريين. كان الكسر يمثل بشكل مجموع كسورات من الوحدة بشكل 1/n مع $n \leq 10$، وعند اللزوم بشكل الكسر $\frac{2}{3}$، وكذلك حواصلها مثلاً $\frac{3}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ أو:

$$\left(9:10=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}\right)$$

وإذا استحال مثل هذا التمثيل الدقيق عندها يلجأ إلى التقريبات من نوع:

$$(1/6)+(1/6)\times(1/10)\approx 3/17$$

وقد حسّن العلماء هذا النظام الحسابي ووضعوا جملة من القواعد تتيح تمثيل كسر بوساطة "الكميات" (Quantiemes).

وأخيراً استخدم الفلكيون العرب بشكل حصري تقريباً الكسور الستينية وهو تراث يعود إلى بابل القديمة، عبر فلكيي الاسكندرية.

ويلاحظ أن هؤلاء طبقوا نظاماً مختلطاً نصف ستيني فكتبوا الأعداد الصحيحة وصور الكسور الستينية بحسب النظام العشري. وتبع العلماء العرب أولاً مثل سابقيهم لكنهم فيما بعد، عادوا فأقروا نظام الترقيم القديم نظام بابل، بعد تعميم المبدأ الستيني على الأعداد الصحيحة، فضلاً عن ذلك استخدموا بشكل منهجي رموز الصفر وكتبت الأعداد من 1 إلى 59 في الألفبائي خاص.

وكانت العمليات، في هذا النظام الستيني، المستخدم في الحسابات الفلكية، تجري كما في نظامنا الحالي الممتد ليشمل الأعداد الصحيحة والكسور العشرية.

وكان الحاسب يرجع إلى جدول ضرب ممتد حتى 59 × 59، وكان يطبق شفهياً القواعد المعبر عنها بالصيغ :

$$\left(60^{m}.60^{n}=60^{m+n} \text{ و } 60^{m}:60^{n}=60^{m-n}\right)$$

بشكل مخفف يجنب استعمال المثقلات (= الأسّات) (Exposants) السلبية) .

ووجد أول وصف مفصل لمثل هذا النظام في "مبادئ الحساب الهندي" لكوشيار بن اللبان (Kushyar ibn Labban) (والي السنة 1000م) ووصف آخر في "مفتاح الحساب" للكاشي (Al-Kashi) (1427م) . الطبقات الكسورية الستينية قد سميت دقائق، وثوانٍ وثُلاثٍ ، الخ . أما طبقة الوحدات (من 1 إلى 59) فسميت درجة والمراتب العليا أو الطبقات المرفوعة فسميت مرفوعات أولى والمرفوعات الثانية ، الخ .

2-3- الكسور العشرية

إن إدخال الكسور العشرية بواسطة الرياضي الكاشي، الذي ذكرناه إنجازاً ملحوظاً. وكان هدف هذا العالم أن يكون نظاماً كسرياً، كما في النظام الستيني ، تجري فيه العمليات ، بحسب القواعد ذاتها بشأن الأعداد الصحيحة، ولكنها، بحكم تأسيسها على القاعدة العشرية المعتادة ، تكون بالتالي مفهومة من أولئك الذين يجهلون "حساب الفلكيين" .وأعلن الكاشي القواعد الرئيسية للعمليات الجارية في الكسور العشرية، ووسائل تحويل الكسور الستينية إلى كسور عشرية وبالعكس . وفي أعماله عبّر عن العديد من القيم بواسطة الكسور العشرية.وكتب القسم العشري لعدد ما على نفس السطر مع قسمه الصحيح، إنما بعد فصله عن هذا الأخير بخط عمودي أو بعد كتابته بحبر ذي لون مختلف أو أيضاً ، بعد تدوين اسم المرتبة فوق الأرقام، باعتبار أن المرتبة الأدنى التي تحدد كل المراتب الأخرى بالنسبة إليها هي في أغلب الأحيان الملحوظة أو المؤشر عليها وحدها .

وجرت محاولات لإدخال الكسور العشرية من قبل في الصين، ولكن هذه "الكسور" مثّلت يومئذ صفة الوحدات لأرصاد الجوالية المتنازلة وفقاً لتصاعدية هندسية عشرية.واعتبر الكاشي، الذي كان مطلعاً على هذا ، حسب ما يظهر ، الكسور العشرية وكأنها من ابتكاره هو . فضلاً عن ذلك أنه من المؤكد أن تطبيقها المنهجي والوصف المفصل لعملياتها يعود الفضل فيهما إليه . وفيما بعد ذلك بقليل انتشرت الكسور العشرية نوعاً ما ، في تركيا وفي أوروبا، ظهرت بوادر "الأوليات" و"الثانيات" و"الثالثات" العشرية باقتراح من عمانوئيل (Emmanuel) بون فيس (Bon fils) من تاراسكون (Tarascon) من القرن 14 ، وأخيراً نحن مدينون للهولندي سيمون ستيفن (1585م) إدخال الكسور العشرية بشكل منهجي .

2-4- استخراج الجذور ومثنوي الطوسي

إذا كان الخوزامي لم يصف إلاّ أسلوب استخراج الجذور التربيعية، إلاّ أن العلماء العرب اهتدوا سريعاً إلى استخراج الجذور التكعيبية أيضاً . من ذلك أن الخيام، في كتابه " الجبر " عمم هذا الأسلوب المرتكز على القاعدة :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$$

عممه على الجذور ذات أي عشر صحيح مهما كان. ومن الممكن إذاً أن الخيام قد امتلك سابقاً القاعدة التي تمكن من رفع المثنوي (binome) إلى مطلق أسٍّ إيجابي وعلى كل حال ظلت موسوعته الحسابية ضائعة وأول وصف معروف لاستخراج الجذر ، ذي الأس المثقل (Exposant) من العدد الصحيح موجود في " مجموعة الحساب بواسطة التخت والغبار" لنصير الدين الطوسي (1265) .

وهذا الأسلوب موصوف فيها بالتفصيل حول المسألة $\sqrt[6]{244\ 140\ 626}$.

إن البحث عن القسم الصحيح من الجذر يتوافق مع الرسيمة المعروفة سابقاً عند الصينيين، وبالأساس ، إنه يتوافق مع الطريقة المقترحة في بداية القرن التاسع عشر من قبل و . ج. هونر (W.G.Horner) وب .روفيني (P.Ruffini). والقسم الكسري من الجذر $\sqrt[n]{a^n + r}$ حيث a وr همداندان صحيحان و $a^n + r < (a+1)^n$ يتحدد بشكل تقريبي $\dfrac{r}{(a+1)^n - a^n}$ بحيث أنه في المثل :

$$\sqrt[6]{244\ 140\ 626} = 25\ 1/\left(26^6 - 25^6\right) = 25\ \ 1/64\ 775\ 151$$

وأعلن نصير الدين الطوسي حرفياً قاعدة تشكل الفرق :

$$(a+b)^n - a^n = na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$$

وقدم "جدول عناصر المثقلات (Exposant) ، أي لائحة معاملات المثنوي حتى n 12 بشكل مثلث قريب جداً من المثلث الذي نسميه حالياً "مثلث باسكال الحسابي" والعلاقة بين عناصر الجدول :

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$$

كانت معروفة من الطوسي. مجمل هذه المسائل عُرضت بدقة فيما بعد من قبل الكاشي ولكن كل هذه النتائج ، ذات المدلول العام، لم تصل على ما يبدو

إلى أوروبا في الوقت المناسب حيث كان من الواجب اكتشافها [أو أنها وصلت وأنكرت ...] .

5-2-نظرية النسب والأعداد الحقيقية

يحتل الحساب المقارب الضروري لتشكيل الجداول التريغونومترية والفلكية، ولتحديد مختلف القيم الهندسية (محيط الدائرة، عناصر المتعدد الأضلاع والمتعددات الجوانب المنتظمة، الخ) مكانة مهمة جداً في الرياضيات بالرمز منذ مطلع نهضتها. التطور السريع للجبر العددي وتطبيقاته الهندسية التي سوف نعود إليها فيما بعد، أدى أيضاً إلى استعمال الأعداد اللاجذرية، بصورة متمادية، ومن جراء هذا ، لتصبح موضوع بحوث قام الخوارزمي بحل العمليات البسيطة ذات الجذور من نمط :

$$\sqrt{10}.\sqrt{5}=\sqrt{50} \quad \text{أو} \quad \sqrt{1/2}.\sqrt{1/3}=\sqrt{1/6}$$

وكذلك سرعان ما تم اكتشاف قواعد أعم بكثير بواسطة المعادلات :

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{b}=\sqrt[n,m]{a^m}.\sqrt[m,n]{b^n}=\sqrt[m,n]{a^m b^n}$$

وأدى التعامل الكثير باللاجذريات الجبرية، بأشكالها الحسابية إلى تمهيد الطريق لتوضيح مفهوم العدد اللاجذري، المزود بنفس الصفات التي هي لمفهوم العدد الجذري الصحيح أو الكسور. أصبح العدد اللاجذري في نظر الرياضيين العرب، كلاً أبسط من الخطوط التي لايمكن قياسها، التي كانت معروفة عند الأقدمين. والواقع ظهر، مثلاً، في العديد من الشروحات في القرن العاشر، **"الأصول"** لإقليدس، وخصص بنظرية المقادير اللاجذرية، الرباعية، حيث شرحت هذه المقادير وتحولاتها، بواسطة اللاجذريات الحسابية المطابقة لها .

وهكذا شرحت التحولات العامة للقيم المعبر عنها بالمعادلات :

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}} \text{ ou } \sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

حوالي سنة 1100 من قبل البغدادي على الأمثلة :

$$\sqrt{10}\pm\sqrt{8}=\sqrt{18\pm\sqrt{320}} \text{ et } \sqrt{6\pm\sqrt{20}}=\sqrt{5}\pm 1$$

وبصورة تدريجية، كان التمييز بين القياس الهندسي للمقادير التي لاتقبل القياس والمقادير اللاجذرية العددية قد زال، وأصبح اللاجذري عدداً لاجذرياً. فضلاً عن ذلك، كل نسبة بين المقادير أصبحت في التصور عدداً ومثل هذا التوسع في مفهوم العدد لايمكن أن يكون إلاّ نهاية بحوث نظرية عميقة .

وتولى الماهاني (Al-Mahani) النقد الدقيق لقديم نظرية النسب الأدوكسية – الاقليدية (Eudoxe-Euclide) ، وتابعها علماء عديدون .

وفي شروحات صعوبات المدخل إلى كتاب إقليدس "الذي كتبه الخيام حوالي 1077، اعتبر تحديد النسبة في الكتاب الخامس من "الأصول" صحيحاً، ولكن غير "واقعي" أي أنه لا يعبر عن ذات جوهر النسبة، وتبعاً لمثل العديد من سابقيه، أحلّ الخيام هذا التعريف بتعريف المساواة بين علاقتين (A/B et C/D) وركزها على المساواة بين كل الحواصل الجزئية المتوافقة في تطويرها المتتالي مع كسور مستمرة.

لقد بيّن الخيام المعادلة المنطقية بين النظرية الجديدة نظرية النسب، وبين النظرية الكلاسيكية. وفي الوقت ذاته حاول أن يبين مبدأ وجود النسبة الرابعة بين مقادير ثلاثة A,B,C أي الكلية D التي تشكل المقادير الثلاثة معها النسبة $A/B=C/D$ وفقاً للمبدأ المهم عدة مرات من قبل رياضيي العصور القديمة، إنما دونما تبيين بوجه عام، فضلاً عن ذلك، ومن وجهة نظرنا، أن تبيين الخيام مشوب بنقص، لأن الخيام يعتمد فيه على " مبدأ الاستمرارية"، غير الكافي على الإطلاق، وبواسطته كان همه فقط إمكانية القسمة اللامحدودة للقيم.

وطور الخيام فيما بعد نظرية العلاقات المركبة، أو كما نقول، نظرية ضرب النسب وقسمتها التي تلعب دوراً كبيراً في التطبيقات وفي الحسابات العملية.

والخلاصة أن الخيام واجه تعميم فكرة العدد في إطار مجمل الأعداد الحقيقية الإيجابية. والفكرة الوحدة القابلة للقسمة المجردة وفكرة الكمية المجردة، "العائدة للأعداد" والمتوافقة مع كل علاقة A/B، وهذا المفهوم الأخير يؤول كعدد بالمعنى العام للكلمة، أي كما يقال "كالعنصر مثالي" في المجال العددي الكلي. إن فكرة الخيام قد تمثلها وطورها الطوسي، ولكن مسألة تأثيرها الممكن على تطور فكرة العدد في الرياضيات الأوربية بقيت غير محلولة.

أما فكرة العدد السلبي، التي ظهرت في الصين والهند، فلم تجد أي تطبيق، مهما كان ملحوظاً، في العلم العربي، ولكننا نجدها على كل في مثل عند أبي الوفا.

2-6- مسائل في الحساب

تلقت نظرية النسب تطبيقات عملية عند حل العديد من المسائل الحسابية المتعلقة بالتجارة، وبتوزيع الضرائب، وبتقسيم المواريث، وفقاً للقواعد المقررة في الشريعة الإسلامية ...الخ. إن القاعدة الثلاثية، التي تكلم عنها الخوارزمي في كتابه الجبر، قد أخذت عن الهنود. ميز الرياضيون العرب القاعدة الثلاثية البسيطة عن القواعد ذات 5 و 7 و 9 ... كميات، التي يرتبط المجهول فيها بالعدد المعين، لا بنسبة أو علاقة وحيدة، بل باثنين أو عدة علاقات. من ذلك في قاعدة الكميات الخمس المطلوب العثور على الكمية x سنداً للشروط:

$$x / y = d / e \quad \text{و} \quad y / a = b / c$$

والجواب يعطى بشكل $x = \frac{abd}{ce}$ وخصص البيروني لهذه القواعد كتاباً خاصاً "حول الرشيقة الهندية Rasika". ويبرهن ابتداءً فيه على نظرية العلاقات المركبة.

وكانت قاعدة المركزين الكاذبين –ربما الآتية من الصين– المطبقة في الحل الميكانيكي الخالص للمسائل القابلة للتمثيل بالمعادلة الخطية ذات المجهول الواحد، أو بنظام معين من المعادلات الخطية ذات المجهولات المتعددة، ذات تطبيق شائع، مثلها مثل القاعدة الثلاثية .

وفي الحالة البسيطة العائدة للمسألة ذات المعادلة $ax = b$ تتحدد الكمية المجهولة كما يلي :

نفترض أن : $x = x_1$ وأن $ax_1 = b + d_1$ وأن $x = x_2$ مع :

$$ax_2 = b + d_2 \quad , \quad x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

لأننا لم ندخل "الأخطاء" السلبية d_1, d_2، فهو يوجب تمييز حالات عدة، بحسب ما إذا كان المركزان الخاطئان أدنى أو أعلى من المجهول، أو إذا كان المجهول واقعاً بينهما .

ويعرض كتاب تبيين العمليات عند حساب الخطأين لقسطا بن لوقا (912م) الأساس النظري لهذه القاعدة في إطار الجبر والهندسة عند اليونان. قاعدة الخطأين هذه، والتي أصبحت شعبية جداً وقد أدخلت في الرياضيات الأوروبية، ماتزال تطبق حالياً في الحسابات المتقاربة كوسيلة توليد خطية .

3- تطور العمليات الحسابية الأربع

لقد بيّنا في البحث السابق أنظمة العد والمحاولات التي بذلها الإنسان في البحث عن طريقة مناسبة لكتابة الأعداد .وسنرى في هذا الفصل تطور العمليات الأربعة الأصلية .

3-1 – العمليات الأربع في وادي النيل

إن المعلومات المتوفرة لدينا عن الحساب لدى قدماء المصريين تتيح لنا الفرصة لمعرفة الطريقة التي كان الحاسب المصري يتبعها في إجراء كل عملية أصلية .

عملية الجمع :

كانت عملية الجمع تتم بسهولة، فلجمع العددين 124 ، 615 مثلاً كان الحاسب المصري يكتب العددين |||||∩C ، |||||∩CCCCCC

وبمجرد ضم الرموز المتماثلة في العددين بعضها إلى بعض بالنظر يحصل على الجواب :

739 CCCCCCC∩∩∩|||||||||

وإذا زاد عدد الرموز المتماثلة في الأعداد المضافة إلى بعضها على 9 رموز كان لابدّ له من أن يستبدل كل عشرة رموز من الرموز المرتبة التي تليها. فمثلاً لجمع العددين 53 ، 68 يكتب الحاسب المصري العددين هكذا |||∩∩∩∩∩ 53 ، ||||||||∩∩∩∩∩∩ 68 .

ويلاحظ أثناء الإضافة بعض الرموز المتماثلة إلى بعضها أن هناك 11 رمزاً من رموز الواحدات فيترك رمزاً واحداً ويستبدل العشرة بالرمز ∩ يضيفه إلى بقية العشرات ويجد أن هناك 12 رمزاً من رموز العشرات مع الرمز المضاف يصبح المجموع 12 فيترك رمزين ويستبدل العشرة رموز بالرمز فيكون |∩∩C أي 121 واضح أن هذه الطريقة في جمع الأعداد هي التي نلجأ إليها لإيضاح عملية جمع الأعداد ذات الرقمين وبصورة خاصة لإيضاح معنى الجمع في هذه الطريقة .

عملية الطرح :

كانت معاكسة لعملية الجمع حيث كان يحذف منها من رموز المطروح منه مايعادل رموز المطروح فلطرح 15 من 38 يكتب :

38 ∩∩∩||||||||

15 ∩|||||

ويكون الجواب |||∩∩ 23

وفي حالة زيادة عدد نوع من الرموز في المطروح على عدد الرموز المماثلة في المطروح منه يؤخذ رمز من المرتبة التي تليها في المطروح منه ويستبدل بعشرة رموز من الرموز التي نحن بصددها ويتم الحذف ،فلطرح 18 من 42 يكتب الحاسب المصري الأعداد كما يلي :

42 ∩∩∩∩ ||

18 ∩ ||||||||

وبما أن رموز الواحدات في المطروح أكثر منها في المطروح منه فإنه يأخذ عشرة من المطروح منه ويحولها إلى واحدات ويكتب هكذا : |||||||||||| ∩∩∩

∩ |||||||| حيث أصبح الحذف ممكناً

|||| ∩∩ 24 ويكتب الجواب 24

ونلاحظ أيضاً أن هذه الطريقة في الط رح ه ي الت ي نلج أ إليه ا عن د تعل يم فكرة طرح الأعداد ذات الرقمين وبصورة خاصة عند إيضاح فك رةالاس تدانةف ي هذه العملية.

عملية الضرب :

كانت تتم بسهولة عملية الض رب بعش رة حي ث كان ت ت تمجب رد اس تبدال رم وز ك ل مرتب ة برم وز المرتب ة الت يأمتليهاعلمليه ة الض رب ف ي ع دد غي ر العشرة فقط كانت تعتمد على مضاعفة أحد المضروبين عدداً ن الم رات يس اوي قيمة المضروب الآخر ثم تجمع نواتج المضاعفة فين تج المطل وب ، وعن د ع رض مثال في عملية الض رب ل ن نس تخدم الرم وزمصالمرية ف ي كتاب ة الأع داد لم ا ف ي ذلك من تشويش للذهن وإضاعة للوقت وإنما سنكتفي بإيضاح فك رة الض رب عن د قدماء المصريين مستخدمين طريقتنا في كتابة الأعداد ولإيج اد قيم ة الج داء 13 × 15 مثلاً :

× 15 1 ×

30 2 نأخذ أحد المضروبين وليكن العدد 15 مرة واحدة

45 3 × ثم نضاعفه بالتدريج فيكون حاصل الضرب هو مجموع

105 7±

195 13

المضاعفات القابلة لعدد مرات المضاعفة التي مجموعها 13 وذلك كما هو مبين في جانبه .

عملية القسمة :

كانت ت تم أيض اً بس هولة عن د القس مة عل ى عش رة حي ث يكف ي أن نس تبدل رموز كل مرتبة برموز المرتبة التي تسبقها .أما عملية القسمة على غير العش رة فقد كانت معاكسة لعملي ة الض رب ، فك ان الحاس ب المص ري يأخ ذ المقس وم علي ه مرة ويضاعفه بالتدريج فيكون حاصل القسمة هو مجم وع ع دد م رات المض اعفة المقابلة للأعداد التي مجموعها يساوي المقسوم .

× 26 1 × فإيجاد حاصل القسمة لـ 442 على 26 ، نأخذ المقسوم

52 2

4 وهو العدد 26 مرة واحدة ونضاعفه بالتدريج فيكون حاصل 104

208 8

القس مة ه و مجم وع ع دد م رات المض اعفة المقابل ة للمض اعفات ×16

× 416

التي مجموعها 442 كما هو مبين في جانبه .
442

3-2 – العمليات الأربع في بلاد الرافدين

كان البابليون يعتمدون على المعداد لإجراء عملياتهم الحسابية وكانوا يضطرون حين إجراء عمليات الضرب والقسمة إلى الاستعانة بجداول خاصة، وقد وردت مثل هذه الجداول في مجموع الألواح التي كشف فيها هلبرشت عام 1889 ولاشك أن تعذر حفظ جدول الضرب الذي يجب أن يحوي حواصل الضرب حتى 59 × 59 هو الذي أدى في هذا المضمار إلى ضرورة استعمال جداول مكتوبة وعملية الضرب في النظام الستيني عملية شاقة إذا قيست بما تحتاجه هذه العملية في النظام العشري .

وقد استفاد البابليون من خواص النظام الستيني ومميزات العدد 60 الذي يقبل عوامل كثيرة هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 10 ، 12 ، 15 ، 20 ، 30 ، وتفننوا في وضع الجداول واستعمالها جداول مقلوب الأعداد التي تحوّل عمليات القسمة إلى عملية ضرب، كما وضع البابليون أيضاً جداول لمربعات الأعداد وتكعيبها وغير ذلك من الجداول التي يعتمدون عليها في إجراء حساباتهم بسرعة ودقة والتي لولاها لاضطروا إلى حساب كل نتيجة بمفردها فكانت هذه الجداول بالنسبة إلى الحاسب البابلي مثل بعض الجداول الرياضية (اللوغارتمية) التي توفر كثيراً من الوقت والجهد على الحاسب وقد كشفت الحفريات الأثرية الجارية في بلاد ما بين النهرين ما يقرب من مائتي لوح تحتوي على جداول رياضية غاية في الدقة والإتقان .

3-3 – العمليات الأربع عند الإغريق

من المعلوم أن الإغريق كانوا في طليعة الذين كتبوا أعدادهم بالحروف الأبجدية وتدل المعلومات التاريخية أنهم كانوا يجرون العمليات الأربع الأصلية على الأعداد الصحيحة بصعوبة مستعينين ببعض أنواع المعداد كما كانوا يستعملون جداول خاصة تعينهم على إجراء عملية الضرب حيث كانت طريقتهم في كتابة الأعداد عائقاً كبيراً في إجراء عمليات الضرب والقسمة وفيما يلي صورة مبسطة عن جزء من جدول الضرب مكتوب بالأرقام الحالية :

X	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	8	10	12	14
3	0	3	6	9	12	15	18	21

3-4 – العمليات الأربع عند الرومان

وفي خطوة أخرى على الطريق التي نتلمس فيه كيف كانت الصعوبة في كتابة الأعداد تنعكس على الأعمال الأربعة من جمع وطرح وضرب وقسمة، فتجعلها شاقة وعسيرة يمكننا أن نتأكد من هذه الحقيقة بدراسة العمليات الحسابية بالأرقام الرومانية.

فعند جمع العددين 1326م ع 637 كان الحاسب الروماني يكتبهما برموز كما يلي: MCCCXXVI و DCXXXVII على الترتيب ويحلل كل منهما ويرتب نتيجة التحليل كما يلي :

		M	C	X	I
	MCCCXXVI	I	III	II	VI
	DCXXXVII		VI	III	VII
1963	MCMLXIII	I	IX	VI	III

وعند ضرب 235 بـ 4 أي CCXXXV بـ IV كان يقوم بما يلي :

1- يحلل العدد الأول إلى أجزائه التي يتركب منها (مئات – عشرات – آحاد) لكي يتسنى له ضرب كل منها على حدة فيصبح العدد بعد التحليل (V و XXX و CC) .

2- يحسب أربعة أضعاف المئتين فيجد CC CC CC CC ويكتب الناتج DCCC .

3- يحسب أربع مرات العدد (30) فنجد XXX , XXX , XXX , XXX ويكتب الناتج CXX.

4- يكرر الخمسة أربع مرات فيجد V , V , V , V ويكتب الناتج XX .

5- يجمع النواتج الجزئية للضرب فيحصل على حاصل الضرب المطلوب وهو CMXL

ولهذا لم يكن الفرد العادي في تلك الأيام بقادر على إنجاز هذه العمليات والذين يستطيعون إنجازها هم أناس كانوا في مصف العلماء ولم يكن غريباً أن يعرف الحساب العربي الهندي أن ينصح الشخص الراغب في تعلم الحساب بالذهاب إلى الجامعات الألمانية إذا أراد أن يتعلم الجمع والطرح وإلى الجامعات الإيطالية إذا أراد أن يتعلم الضرب والقسمة .

3-5 – العمليات الأربع عند الهنود

إن معلوماتنا عن الرياضيات عند قدماء الهنود قليلة ولكن الوثائق المتوفرة تبين أن الهنود توصلوا للطريقة العشرية في العد وكتابتهم الأعداد باستعمال تسعة رموز ساعدهم على إجراء العمليات الحسابية المختلفة فاكتشفوا طريقة ميزان الضرب بطرح التسعات وذلك بجمع أرقام كل من المضروب

والمضروب فيه وضرب الناتجين وجمع أرقام حاصل الضرب وموازنة الجوابين .

تدل المؤلفات الهندية المكتشفة على تقدم الحساب عند الهنود مما دعا بعض العلماء إلى القول بأن الحساب علم هندي كما قالوا بأن الهندسة علم إغريقي .

وقد نقل العرب عن الهنود طرقهم في كتابة الأعداد وإجراء الحسابات وأطلقوا على الحساب اسم الغبار دلالة أصله الهندي حيث كان الهنود يكتبون أعدادهم ويجرون حساباتهم على ألواح بيضاء يسترونها بطبقة خفيفة من غبار أحمر ويخطون عليها بقلم من الغاب لمحو الغبار .

3-6 – العمليات الأربع عند العرب

أول مؤلَّف عربي في علم الحساب هو الذي كتبه العالم الرياضي أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي وذلك في القرن التاسع للميلاد ، غير أن هذا المؤلف مفقود ولم يبق له سوى ترجمة إلى اللاتينية قام بها أحد المستشرقين في القرن الثاني عشر وقد دخل اسم الخوارزمي في بلاد الغرب فكلمة Algorizm تعني بالإنكليزية "معنى حساب النظام العشري" .

سنعرض فيما يلي بعض الأمثلة عن الطرق المتبعة في إجراء العمليات الحسابية عند العرب مقتصرين في ذلك على العمليات الأربع الأصلية وسننقل عن مؤلفين عربيين هما كتاب التلخيص في الحساب لابن البنا وكتاب (كشف الأسرار في علم حروف الغبار) لأبي حسن بن شبل الشهير بالقلصادي الأندلسي ولايكاد يوجد اختلاف في إجراء العمليات بينهما رغم فارق عصريهما بنحو مئتي سنة .

1- الجمع

فلجمع الأعداد 3772 ، 54179 ، 105 مثلاً ، كانت تجري العملية على النحو التالي :

جمع الأعداد

3 7 7 2

5 4 1 7 9

1 0 5

1 1 1 المحفوظات

6 5 0 8 5 المجموع

يلاحظ أن هذه الطريقة تسهل إجراء عملية الجمع كثيراً والسهولة في الأعداد المحفوظة التي تنقل من مرتبة إلى أعلى منها .

2- الطرح

كانت تتبع عدة طرق ويعتنى بالصعوبات الخاصة بهذه العملية كصعوبة الاستدانة فيقول القلصادي في مثاله إذا قيل له اطرح 386 من 725 (ويضعها تحت بعضها) فاطرح الستة من الخمسة فلا تنطرح فاحمل عليها عشرة تكن خمس عشرة اطرح منها ستة فتبقى لك تسعة ضعها على رأس الخط ثم اجمع العشرة بصورة الواحد إلى الثمانية تكن تسعة اطرحها من الاثنين فلا تنطرح فاحمل عليها عشرة تكن (12) اطرح منها التسعة فيبقى لك ثلاثة ضعها على رأس الخط، اجمع المئة بصورة الواحد إلى الثلاثة تكن أربعة اطرحها من سبع فيبقى لك ثلاثة ضعها على رأس الخط فيكون الباقي تسع وثلاثين وثلاثمائة .

طرح الأعداد

339
725
386

3- الضرب

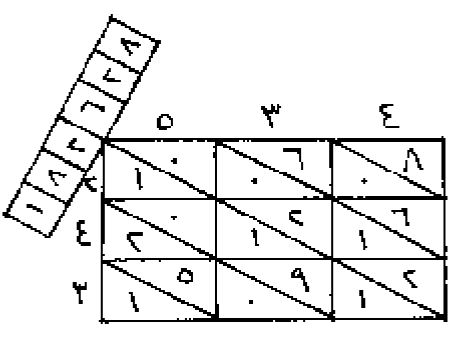
وجدت عدة طرق مختلفة لكل طريقة اسمها ومن هذه الطرق :

الضرب بالمجنح :ويشرحها القلصادي على ضرب العددين 52 × 73 وملخص طريقته أن يُكتب العددان المضروبان أحدهما تحت الآخر بحيث تكون أول منزلة من المضروب فيه تحت آخر منزلة من المضروب ثم نضرب تلك المنزلة في جميع منازل المضروب فيه ونضع النواتج في أماكنها ثم ننقل المضروب فيه بحيث تصبح أول منزلة من المضروب فيه تحت أول منزلة من المضروب كما في الشكل :

3796
146
35
15
52

ونضع النواتج في أماكنها 2 × 3 = 6 ، 2 × 7 = 14 ثم تجمع ليخرج حاصل الضرب في أعلى وهو 3796 .

ومن طرق الضرب أيضاً طريقة الضرب بالجدول ويمثل القلصادي هذه الطريقة بمثال أحدهما 534 × 342 كما في الشكل :



نرى في الشكل أن العدد 534 كتب أفقياً فوق المربع وخارجه وأن العدد 342 قد كتب شاقولياً ثم يضرب .

$2 \times 4 = 8$ و	$2 \times 3 = 6$ و	$2 \times 5 = 10$
$4 \times 4 = 16$ و	$4 \times 3 = 12$ و	$4 \times 5 = 20$
$3 \times 4 = 12$ و	$3 \times 3 = 9$ و	$3 \times 5 = 15$

ويضع كل حاصل ضرب في مكانه من الجدول ثم يجمع على طول الأقطار ويكتب حاصل الضرب الأخير 182628 ويكرر القلصادي نصحه بضرورة حفظ جدول الضرب حتى $13 \times 13 = 169$.

4- القسمة

وجدت عدة طرق تناولت جميع أنواع القسمة ونكتفي على سبيل المثال عملية القسمة $7365 \div 15$ التي أجراها القلصادي في كتابه .

فهو يقسم 73 على 15 ينتج 4 يضعها في أسفل <u>131 باقي القسمة</u>
ويبقى 13 يضعها في أعلى الخط ثم يقرب الخمس 7365 المقسوم
عشر مرتبة ويشطب الخمس عشر الأولى ويقسم 1555 المقسوم عليه
136 على 15 491

ينتج 9 يكتب على يمين الأربعة ويبقى (1) يكتب أعلى بجانب 13 ثم يقرب الخمس عشر رتبة ويشطب السابقة ويقسم 15 على 15 ينتج 1 يكتب على يمين التسعة ويصبح خارج القسمة 491 ولايوجد باق .

وبحث الحاسب العربي في موضوع قابلية القسمة وأوجد طرقاً لاختبار قابلية القسمة على تسعة أو ثمانية أو سبعة .