المقادير الحركية للمجموعات المادية المتماسكة

1. كمية حركة مجموعة مادية متماسكة:

إذا كانت S مجموعة مادية متماسكة مؤلفة من n نقطة مادية $\{M_i \ ; \ i=1,2,\ldots,n\}$ كتلة كلٍ منها m_i منسوبة لجملة مقارنة $\Re$, عندئذٍ نعرف كمية حركة هذه المجموعة المادية و التي نرمز لها بالرمز $\vec{P}(S)$ على أنها محصلة متجهات كميات حركة نقاط هذه المجموعة, أي أن

$$\vec{P}(S)=\sum_{i=1}^{n}\vec{P}(M_i)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ \vec{v}_i \quad ; \quad \vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$$

ملاحظة: في حال كانت المجموعة المادية S هي جسماً صلباً (وسطاً مستمراً), عندئذٍ يمكن بسهولة تعريف كمية حركة الجسم بالعلاقة

$$\vec{P}(S)=\int_{(S)}\vec{P}(dm)=\int_{(S)}\vec{v}\ dm$$

حيث أن dm هي كتلة عنصرية (ذات أبعاد لامتناهية في الصغر) من الجسم و $\vec{v}$ هو متجه سرعة هذه الكتلة العنصرية.

مبرهنة: إن كمية حركة مجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب) تساوي كمية حركة مركز كتلة المجموعة (أو الجسم) C على اعتباره نقطة مادية لها كتلة المجموعة (أو الجسم), أي أن

$$\vec{P}(S)=\vec{P}(C)$$

الإثبات: نعلم حسب تعريف مركز الكتلة أن $\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{OM_i}=m\ \overrightarrow{OC}$, حيث أن $m=\sum_{i=1}^{n}m_i$. و باشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن نجد أن

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{OM_i}\right]=\frac{d}{dt}\left[m\ \overrightarrow{OC}\right] \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}m_i\ \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM_i}=m\ \frac{d}{dt}\overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ \vec{v}(M_i) = m \ \vec{v}(C) \ \Rightarrow \ \sum_{i=1}^{n} \vec{P}(M_i) = \vec{P}(C) \ \Rightarrow \ \vec{P}(S) = \vec{P}(C)$$

مثال (1): قرص دائري متجانس S نصف قطره a و كتلته m, يتدحرج في مستوٍ شاقولي XOY على المحور الأفقي OX, و المطلوب تعيين كمية حركة هذا القرص بعد اختيار وسطاء الحركة المناسبة لحركة القرص.

مثال (2): قضيب نحيل متجانس (AB) طوله l و كتلته m, يتحرك في مستوٍ شاقولي XOY بحيث ينزلق طرفه A على المحور الأفقي OX و ينزلق طرفه B على المحور الشاقولي OY, و المطلوب تعيين كمية حركة هذا القضيب بعد اختيار وسطاء الحركة المناسبة لحركة القضيب.

2. العزم الحركي لمجموعة مادية متماسكة:

العزم الحركي بالنسبة لنقطة: إذا كانت S مجموعة مادية متماسكة مؤلفة من n نقطة مادية $\{M_i \ ; \ i = 1,2,\ldots,n\}$ كتلة كلٍ منها m_i منسوبة لجملة مقارنة $\Re$, عندئذٍ نعرف العزم الحركي لهذه المجموعة المادية بالنسبة للمركز O و الذي نرمز له بالرمز $\overrightarrow{\sigma_O}(S)$ على أنها محصلة متجهات العزوم الحركية لنقاط هذه المجموعة بالنسبة للمركز O, أي أن

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\sigma_O}(M_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \times \vec{P}(M_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM_i} \times m_i \ \vec{v}(M_i)$$

ملاحظة: في حال كانت المجموعة المادية S هي جسماً صلباً (وسطاً مستمراً), عندئذٍ يمكن بسهولة تعريف العزم الحركي للجسم بالعلاقة

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S) = \int_{(S)} \overrightarrow{\sigma_O}(dm) = \int_{(S)} \vec{r} \times \vec{v} \ dm$$

حيث أن dm هي كتلة عنصرية (ذات أبعاد لامتناهية في الصغر) من الجسم و $\vec{r}$ هو نصف القطر الشعاعي للكتلة العنصرية و $\vec{v}$ هو متجه سرعة هذه الكتلة العنصرية.

العزم الحركي بالنسبة لمحور: في حال كان Δ محوراً ماراً من النقطة O متجه واحدة توجيهه $\overrightarrow{e_\Delta}$, عندئذٍ نعرف العزم الحركي $\sigma_\Delta(S)$ بالنسبة للمحور Δ على أنه مسقط متجه العزم الحركي $\overrightarrow{\sigma_O}(S)$ بالنسبة للمركز O على هذا المحور, أي أن

$$\sigma_\Delta(S) = \overrightarrow{\sigma_O}(S) \cdot \overrightarrow{e_\Delta}$$

مبرهنة كونيغ الأولى: إن العزم الحركي $\overrightarrow{\sigma_O}(S)$ لمجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب) بالنسبة لمركز O تساوي العزم الحركي $\overrightarrow{\sigma_O}(C)$ لمركز كتلة المجموعة (أو الجسم) C بالنسبة للمركز O على اعتباره نقطة مادية لها كتلة المجموعة (أو الجسم) مضافاً له العزم الحركي $\overrightarrow{\sigma_C}(S)$ للمجموعة بالنسبة لمركز الكتلة C, أي أن

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\overrightarrow{\sigma_O}(C)+\overrightarrow{\sigma_C}(S)$$

الإثبات: لدينا

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{\sigma_O}(M_i)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\times\vec{P}(M_i)=\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{OM_i}\times m_i\ \vec{v}(M_i)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{OM_i}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM_i}\right)\times\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{OC}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{OC}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}+\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{CM_i}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{CM_i}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}$$

$$=\overrightarrow{OC}\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{CM_i}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{CM_i}\right)\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{CM_i}\times m_i\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}$$

و بما أن $\sum_{i=1}^{n}m_i\overrightarrow{CM_i}=0$ حسب تعريف مركز الكتلة C, يكون

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\overrightarrow{OC}\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{CM_i}\times m_i\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}$$

و بوضع

$$\overrightarrow{OC}\times\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\times m\ \vec{v}(C)=\overrightarrow{OC}\times\vec{P}(C)=\overrightarrow{\sigma_O}(C)\quad;\quad m=\sum_{i=1}^{n}m_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{CM_i}\times m_i\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}=\overrightarrow{\sigma_C}(S)$$

نجد أن

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\overrightarrow{\sigma_O}(C)+\overrightarrow{\sigma_C}(S)$$

نتيجة: في حال كان Δ محوراً ماراً من النقطة O متجه واحدة توجيهه $\overrightarrow{e_\Delta}$, عندئذٍ بضرب طرفي العلاقة السابقة داخلياً بمتجه الواحدة $\overrightarrow{e_\Delta}$, نجد أن

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}=\overrightarrow{\sigma_O}(C)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}+\overrightarrow{\sigma_C}(S)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}$$

لاحظ أن المقدار $\overrightarrow{\sigma_O}(S)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}$ يمثل العزم الحركي للمجموعة (أو الجسم) بالنسبة للمحور Δ, كما أن $\overrightarrow{\sigma_O}(C)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}$ يمثل العزم الحركي لمركز الكتلة C بالنسبة للمحور Δ باعتبار كتلة مركز الكتلة تساوي كتلة المجموعة (أو الجسم), أما المقدار $\overrightarrow{\sigma_C}(S)\cdot\overrightarrow{e_\Delta}$ فيمثل العزم الحركي للمجموعة (أو الجسم) بالنسبة لمحور Δ_C يمر من مركز الكتلة C و يوازي المحور Δ. و بالتالي نكون قد أثبتنا صحة العلاقة التالية

$$\sigma_\Delta(S)=\sigma_\Delta(C)+\sigma_{\Delta_C}(S)$$

العزم الحركي لجسم صلب في حركته الدورانية حول نقطة منه:

لدراسة العزم الحركي لجسم S في حركته الدورانية حول نقطة O منه, نعتبر جملة مقارنة ثابتة $OXYZ$ و جملة مقارنة $OX_SY_SZ_S$ متماسكة مع الجسم, ثم نختار كتلة عنصرية dm من الجسم موجودة في موضع M من الجسم متجه موضعه $\vec{r}$ و متجه سرعته $\vec{v}$. فإذا فرضنا أن $\vec{\omega}$ هو متجه دوران الجسم, يكون

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\int_{(S)}\vec{r}\times\vec{v}\,dm=\int_{(S)}\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\,dm=\int_{(S)}\left[r^2\,\vec{\omega}-\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)\vec{r}\right]\,dm$$

فإذا وضعنا

$$\vec{r}=x_s\,\vec{i_s}+y_s\,\vec{j_s}+z_s\,\vec{k_s}\quad,\quad\vec{\omega}=p_s\,\vec{i_s}+q_s\,\vec{j_s}+r_s\,\vec{k_s}$$

يكون

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\int_S\left[\left(x_s^2+y_s^2+z_s^2\right)\left(p_s\,\vec{i_s}+q_s\,\vec{j_s}+r_s\,\vec{k_s}\right)-\left(p_s\,x_s+q_s\,y_s+r_s\,z_s\right)\left(x_s\,\vec{i_s}+y_s\,\vec{j_s}+z_s\,\vec{k_s}\right)\right]\,dm$$

$$=\vec{i_s}\int_S\left[p_s\left(x_s^2+y_s^2+z_s^2\right)-x_s\left(p_s\,x_s+q_s\,y_s+r_s\,z_s\right)\right]dm$$

$$+\vec{j_s}\int_S\left[q_s\left(x_s^2+y_s^2+z_s^2\right)-y_s\left(p_s\,x_s+q_s\,y_s+r_s\,z_s\right)\right]dm$$

$$+\overrightarrow{k_s}\int_S\left[r_s\left(x_s^2+y_s^2+z_s^2\right)-z_s\left(p_s\,x_s+q_s\,y_s+r_s\,z_s\right)\right]dm$$

$$=\overrightarrow{i_s}\left[p_s\int_S\left(y_s^2+z_s^2\right)dm-q_s\int_S x_s\,y_s\,dm-r_s\int_S x_s\,z_s\,dm\right]$$

$$+\overrightarrow{j_s}\left[q_s\int_S\left(x_s^2+z_s^2\right)dm-p_s\int_S y_s\,x_s\,dm-r_s\int_S y_s\,z_s\,dm\right]$$

$$+\overrightarrow{k_s}\left[r_s\int_S\left(x_s^2+y_s^2\right)dm-p_s\int_S z_s\,x_s\,dm-q_s\int_S z_s\,y_s\,dm\right]$$

$$=\overrightarrow{i_s}\left[I_{X_S}\,p_s-J_{X_SY_S}\,q_s-J_{X_SZ_S}\,r_s\right]$$

$$+\overrightarrow{j_s}\left[I_{Y_S}\,q_s-J_{Y_SX_S}\,p_s-J_{Y_SZ_S}\,r_s\right]$$

$$+\overrightarrow{k_s}\left[I_{Z_S}\,r_s-J_{Z_SX_S}\,p_s-J_{Z_SY_S}\,q_s\right]$$

و بالتالي نستنتج أن

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_O}(S)=\sigma_{X_S}\,\overrightarrow{i_s}+\sigma_{Y_S}\,\overrightarrow{j_s}+\sigma_{Z_S}\,\overrightarrow{k_s}}$$

حيث أن

$$\boxed{\begin{pmatrix}\sigma_{X_S}\\ \sigma_{Y_S}\\ \sigma_{Z_S}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{X_s} & -J_{X_sY_s} & -J_{X_sZ_s}\\ -J_{Y_sX_s} & I_{Y_s} & -J_{Y_sZ_s}\\ -J_{Z_sX_s} & -J_{Z_sY_s} & I_{Z_s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_s\\ q_s\\ r_s\end{pmatrix}}$$

حالة خاصة: في حال كان الجسم يدور حول محور Δ متماسك مع الجسم, عندئذٍ و باعتبار محور الدوران هو المحور OZ_S و أن وسيط الدوران حول هذا المحور هو الزاوية θ, فيكون $p_s=0,\ q_s=0,\ r_s=\dot{\theta}$. و بالتعويض في العلاقات السابقة نجد أن

$$\overrightarrow{\sigma_O}(S)=-J_{X_sZ_s}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{i_s}-J_{Y_sZ_s}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{j_s}+I_{Z_s}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{k_s}$$

تبين العلاقة السابقة أنه عندما يدور جسم S حول محور Δ متماسك معه, فإن متجه العزم الحركي $\overrightarrow{\sigma_O}(S)$ للجسم بالنسبة لأي نقطة O من محور الدوران لا يكون محمولاً على محور الدوران في الحالة العامة إلا في حال كان محور الدوران هو محور أساسي لعطالة الجسم. أما العزم الحركي $\sigma_\Delta(S)$ للجسم بالنسبة لمحور الدوران Δ فيساوي حاصل جداء عزم عطالة الجسم بالنسبة لهذا المحور بالسرعة الدورانية ω لهذا الجسم حول هذا المحور, أي أن $\sigma_\Delta(S) = I_\Delta\ \omega$.

مثال (3): أحسب العزم الحركي بالنسبة لمركز الإحداثيات O للقرص و القضيب الموصوفين في المثالين (1) و (2) السابقين ؟

مثال (4): قضيب نحيل متجانس (AB) طوله l و كتلته m, يتحرك في الفراغ بحيث ينزلق طرفه A على المستوي الأفقي الثابت XOY و ينزلق طرفه B على المحور الشاقولي OZ, و المطلوب تعيين العزم الحركي لهذا القضيب بالنسبة لمركز الإحداثيات O.

3. الطاقة الحركية لمجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب):

إذا كانت S مجموعة مادية متماسكة مؤلفة من n نقطة مادية $\{M_i\ ;\ i=1,2,\ldots,n\}$ كتلة كلٍ منها m_i منسوبة لجملة مقارنة $\Re$, عندئذٍ نعرف الطاقة الحركية لهذه المجموعة و التي نرمز لها بالرمز $T(S)$ على أنها مجموع الطاقات الحركية لجميع النقاط المادية في هذه المجموعة, أي أن

$$T(S)=\sum_{i=1}^{n}T(M_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i\ v_i^2=\frac{1}{2}\ \sum_{i=1}^{n}m_i\ v_i^2\quad ;\quad \vec{v}_i=\vec{v}(M_i)$$

ملاحظة: في حال كانت المجموعة المادية S هي جسماً صلباً (وسطاً مستمراً), عندئذٍ يمكن بسهولة تعريف الطاقة الحركية للجسم بالعلاقة

$$T(S)=\int_{(S)}T(dm)=\int_{(S)}\frac{1}{2}v^2\ dm=\frac{1}{2}\int_{(S)}v^2\ dm$$

حيث أن dm هي كتلة عنصرية (ذات أبعاد لامتناهية في الصغر) من الجسم و $\vec{v}$ هو متجه سرعة هذه الكتلة العنصرية.

مبرهنة كونيغ الثانية: إن الطاقة الحركية لمجموعة مادية متماسكة (أو جسم صلب) تساوي الطاقة الحركية مركز كتلة المجموعة (أو الجسم) C على اعتباره نقطة مادية لها كتلة المجموعة (أو الجسم) مضافاً إليها الطاقة الحركية للمجموعة (أو الجسم) في حركته حول مركز كتلته, أي أن

$$T(S)=T(C)+T_C(S)$$

الإثبات: لدينا

$$T(S)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\ v_i^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM_i}\right]^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM_i}\right)\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}+\frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}\right]^2=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\vec{v}(C)+\overrightarrow{v_C}(M_i)\right]^2$$

حيث أن $\overrightarrow{v_C}(M_i)$ تمثل سرعة النقطة M_i بالنسبة لمركز الكتلة C (مع اعتبار مركز الكتلة C ثابتاً لا يتحرك), و هي سرعة ناتجة عن دوران المجموعة (أو الجسم) حول مركز كتلته. و بالتالي يكون

$$T(S)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left[v^2(C)+2\ \vec{v}(C)\cdot\overrightarrow{v_C}(M_i)+v_C^2(M_i)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\ v^2(C)+\sum_{i=1}^{n}m_i\ \vec{v}(C)\cdot\overrightarrow{v_C}(M_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\ v_C^2(M_i)$$

و بما أن

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\ \vec{v}(C)\cdot\overrightarrow{v_C}(M_i)=\vec{v}(C)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{v_C}(M_i)\right]=\vec{v}(C)\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\ \frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}\right]$$

$$=\vec{v}(C)\cdot\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}m_i\ \overrightarrow{CM_i}\right]=\vec{v}(C)\cdot\frac{d}{dt}\vec{0}=\vec{v}(C)\cdot\vec{0}=0$$

و بوضع

$$T(C)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\ v^2(C)\quad,\quad T_C(S)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\ v_C^2(M_i)$$

تصبح علاقة الطاقة الحركية الأخيرة بالشكل

$$T(S)=T(C)+T_C(S)$$

الطاقة الحركية لجسم صلب في حركته الدورانية حول نقطة منه:

لدراسة الطاقة الحركية لجسم S في حركته الدورانية حول نقطة O منه, نعتبر جملة مقارنة ثابتة $OXYZ$ و جملة مقارنة $OX_SY_SZ_S$ متماسكة مع الجسم, ثم نختار كتلة عنصرية dm من الجسم موجودة في موضع M من الجسم متجه موضعه $\vec{r}$ و متجه سرعته $\vec{v}$. فإذا فرضنا أن $\vec{\omega}$ هو متجه دوران الجسم, يكون

$$T_O(S)=\frac{1}{2}\int_{(S)} v^2\ dm=\frac{1}{2}\int_{(S)}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2\ dm$$

فإذا وضعنا

$$\vec{r}=x_s\ \vec{i_s}+y_s\ \vec{j_s}+z_s\ \vec{k_s}\quad,\quad \vec{\omega}=p_s\ \vec{i_s}+q_s\ \vec{j_s}+r_s\ \vec{k_s}$$

يكون

$$\vec{\omega}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ p_s & q_s & r_s\\ x_s & y_s & z_s\end{vmatrix}=\left(z_s\ q_s-y_s\ r_s\right)\vec{i}+\left(x_s\ r_s-z_s\ p_s\right)\vec{j}+\left(y_s\ p_s-x_s\ q_s\right)\vec{k}\ \Rightarrow$$

$$\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2=\left(z_s\ q_s-y_s\ r_s\right)^2+\left(x_s\ r_s-z_s\ p_s\right)^2+\left(y_s\ p_s-x_s\ q_s\right)^2$$

$$=\left(y_s^2+z_s^2\right)p_s^2+\left(z_s^2+x_s^2\right)q_s^2+\left(x_s^2+y_s^2\right)r_s^2-2x_s\ y_s\ p_s\ q_s-2y_s\ z_s\ q_s\ r_s-2z_s\ x_s\ r_s\ p_s$$

بالتعويض في عبارة الطاقة الحركية الأخيرة, نجد أن

$$\boxed{T_O(S)=\frac{1}{2}I_{X_s}\ p_s^2+\frac{1}{2}I_{Y_s}\ q_s^2+\frac{1}{2}I_{Z_s}\ r_s^2-J_{X_sY_s}\ p_s\ q_s-J_{Y_sZ_s}\ q_s\ r_s-J_{Z_sX_s}\ r_s\ p_s}$$

نتيجة: يمكن وضع العلاقة السابقة بالشكل المصفوفي التالي

$$2\ T_O(S)=\begin{pmatrix}p_s & q_s & r_s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_{X_s} & -J_{X_sY_s} & -J_{X_sZ_s}\\ -J_{Y_sX_s} & I_{Y_s} & -J_{Y_sZ_s}\\ -J_{Z_sX_s} & -J_{Z_sY_s} & I_{Z_s}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_s\\ q_s\\ r_s\end{pmatrix}=\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{\sigma_O}(S)\ \Rightarrow$$

$$\boxed{2\ T_O(S)=\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{\sigma_O}(S)}$$

و في هذه الحالة, يمكن اعتبار الجسم يدور حول محور آني للدوران Δ, و يكون

$$T_{\Delta}(S)=T_{O}(S)=\frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\overrightarrow{\sigma_{O}}(S)=\frac{1}{2}\,\left\|\vec{\omega}\right\|\,\left\|\overrightarrow{\sigma_{O}}(S)\right\|\,Cos\left(\widehat{\vec{\omega},\overrightarrow{\sigma_{O}}(S)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\,\omega\,\sigma_{\Delta}(S)=\frac{1}{2}\,\omega\,I_{\Delta}\,\omega=\frac{1}{2}\,I_{\Delta}\,\omega^{2}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{T_{\Delta}(S)=\frac{1}{2}\,I_{\Delta}\,\omega^{2}}$$

أي أن الطاقة الحركية $T(S)$ لجسم يدور حول محور آني للدوران Δ يساوي نصف حاصل جداء عزم عطالة I_{Δ} الجسم بالنسبة لهذا المحور في مربع السرعة الدورانية ω لهذا الجسم حول هذا المحور.

ملاحظة: تستخدم العلاقة السابقة أيضاً لحساب الطاقة الحركية في حال كان محور الدوران ثابتاً أيضاً, أي في حال كانت حركة الجسم دورانية حول محور ثابت للدوران.

مثال (5): أحسب الطاقة الحركية للأجسام الموصوفة في الأمثلة (1) و (2) و (4) السابقة ؟

نتيجة: