مدخل إلى المعادلات التفاضلية الجزئية

An Introduction To The Partial Differential Equations

بعض المفاهيم العامة (Some General Concepts)

تعريف: نقول عن معادلة تفاضلية أنها معادلة تفاضلية جزئية إذا احتوت على تابع لأكثر من متحول و المشتقات الجزئية لهذا التابع بالنسبة لمتحولاته.

تعريف: مرتبة المعادلة التفاضلية هي أعلى مرتبة اشتقاق جزئي في المعادلة، فالمعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 2x - y$$

هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية.

تعريف: حل المعادلة التفاضلية الجزئية هو أي تابع يحقق هذه المعادلة (أي يحولها إلى مطابقة).

تعريف: الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية هو الحل الذي يحوي توابع اختيارية عددها يساوي مرتبة المعادلة.

تعريف: الحل الخاص لمعادلة تفاضلية جزئية هو كل حل ينتج عن عبارة الحل العام لها بعد تعيين قيم محددة للتوابع الاختيارية التي يحويها الحل العام توافق شروط المسألة. فالتابع

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + F(x) + G(y)$$

هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 2x - y$، وذلك لأن هذه المعادلة هي معادلة من المرتبة الثانية و التابع المذكور يحقق هذه المعادلة (تأكد من ذلك؟) ويحوي تابعين اختياريين هما $G(y)$ و $F(x)$.
و بالتالي فإن التابع

$$u(x,y) = x^2 y - \frac{1}{2} x y^2 + 2\sin x + 3y^4 + 15$$

هو حل خاص لهذه المعادلة (لماذا؟).

تعريف: تسمى المسألة المؤلفة من معادلة تفاضلية جزئية ومجموعة شروط إضافية تتعلق بحدود منطقة المتحولات التي تتم ضمنها دراسة المعادلة، مسألة حدية (boundary problem).

مثال: تأكد أن التابع $u(x,y) = f(y - 3x)$ هو الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

حيث أن f تابع كيفي قابل للاشتقاق، وعيِّن الحل الخاص الذي يحقق الشرط $u(0,y) = 4\sin y$.

الحل: إذا وضعنا $z = y - 3x$ يكون $u(x,y) = f(z)$، وبالتالي فإن:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$= \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$= -3\frac{df}{dz}$$
$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$
$$= \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$
$$= \frac{df}{dz}$$

نعوض في المعادلة فنحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = -3\frac{df}{dz} + 3\frac{df}{dz} \equiv 0 \quad , \quad \forall \ (x,y) \in R^2$$

هذا يعني أن التابع المعطى هو الحل العام للمعادلة. و لتعيين الحل الخاص المحقق للشرط المعطى، لدينا

$$u(0,y) = f(y) = 4\sin y$$
$$f(y) = 4\sin y$$
$$f(y-3x) = 4\sin(y-3x)$$

وبالتالي فإن الحل الخاص المطلوب هو التابع

$$u(x,y) = 4\sin(y-3x)$$

مثال: من أجل أي ثابتين اختياريين a و b، تأكد أن التوابع المعطاة فيما يلي هي حلول للمعادلات المرافقة لها

1. $u = ax^2 + by^2 \quad ; \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$
2. $u = ax^3 + by^3 \quad ; \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$
3. $u = ax^n + by^n \quad ; \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu \ : \ \forall n \geq 1$

الحل:

١) إذا كان $u = ax^2 + by^2$ فإن

$$u_x = 2ax \ , u_y = 2by$$

و بالتالي فإن

$$xu_x + yu_y - 2u = 2ax^2 + 2by^2 - 2(ax^2 + by^2) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$xu_x + yu_y = 2u \ , \ \forall (x,y) \in \boldsymbol{R}^2$$

وهذا يعني أن التابع $u = ax^2 + by^2$ هو حل للمعادلة التفاضلية الجزئية $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

۲) إذا كان $u=ax^3+by^3$ فإن

$$u_x=3ax^2\ ,\ u_y=3by^2$$

وبالتالي فإن

$$xu_x+yu_y-3u=ax^3+3by^3-3(ax^3+by^3)=0 \quad \Rightarrow$$

$$xu_x+yu_y=3u\ ,\ \forall (x,y)\in \boldsymbol{R}^2$$

وهذا يعني أن التابع $u=ax^3+by^3$ حل للمعادلة $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3u$.

۳) إذا كان $u=ax^n+by^n$ حيث أن $n\ge 1$ فإن

$$u_x=nax^{n-1}\ ,u_y=nby^{n-1}$$

وبالتالي فإن

$$xu_x+yu_y-nu=nax^n+nby^n-n(ax^n+by^n)=0 \quad \Rightarrow$$

$$xu_x+yu_y=nu\ ,\ \forall (x,y)\in \boldsymbol{R}^2$$

وهذا يعني أن التابع $u=ax^n+by^n$ حل للمعادلة $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=nu$.

مثال: تأكد أن التابع $u=f(ax+by)+g(ax-by)$ هو الحل العام للمعادلة

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

حيث أن a و b ثابتين كيفيين وأن f و g تابعين اختياريين قابلين للاشتقاق، ثم استنتج الحل العام للمعادلة $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ والحل العام للمعادلة $4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-25\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

الحل: إذا وضعنا $z=ax+by$ و $w=ax-by$، يكون $u=f(z)+g(w)$. وبالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{dg}{dw}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}=a\frac{df}{dz}+a\frac{dg}{dw}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d}{dz}\left(a\frac{df}{dz}+a\frac{dg}{dw}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{d}{dw}\left(a\frac{df}{dz}+a\frac{dg}{dw}\right)\frac{\partial w}{\partial x}=a^2\frac{d^2f}{dz^2}+a^2\frac{d^2g}{dw^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{dg}{dw}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}=b\frac{df}{dz}-b\frac{dg}{dw}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{d}{dz}\left(b\frac{df}{dz}-b\frac{dg}{dw}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{d}{dw}\left(b\frac{df}{dz}-b\frac{dg}{dw}\right)\frac{\partial w}{\partial y}=b^2\frac{d^2f}{dz^2}+b^2\frac{d^2g}{dw^2}$$

بالتعويض في المعادلة، نجد أن

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\left(b^2\frac{d^2f}{dz^2}+b^2\frac{d^2g}{dw^2}\right)-b^2\left(a^2\frac{d^2f}{dx^2}+a^2\frac{d^2g}{dw^2}\right)=0$$

وهذا يعني أن التابع المعطى هو حل عام للمعادلة التفاضلية المعطاة، لأنه يحقق المعادلة ويحتوي على تابعين اختياريين و المعادلة من المرتبة الثانية.

بمقارنة المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ مع المعادلة الأساسية المعطاة، نجد أن $a = 1$ و $b = 1$. وبالتالي فإن الحل العام لهذه المعادلة هو

$$u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$$

حيث أن f و g أي تابعين اختياريين قابلين للاشتقاق.

كما أنه بمقارنة المعادلة $25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ مع المعادلة الأساسية المعطاة، نجد أن $a = 2 , b = 5$.

وبالتالي فإن حلها العام هو

$$u(x, y) = f(2x + 5y) + g(2x - 5y)$$

مثال: تأكد أن التابع $u = e^{-8t} \sin 2x$ هو حل للمسألة الحدية التالية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u(0,t) = 0$$
$$u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = \sin 2x$$

الحل: إذا كان

$$u = e^{-8t} \sin 2x$$

فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -8e^{-8t} \sin 2x$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{-8t} \cos 2x$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4e^{-8t} \sin 2x$$

و بالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -8e^{-8t} \sin 2x - 2(-4e^{-8t} \sin 2x) = 0 \ , \ \forall (t, x) \in R^2$$

أي أن التابع يحقق المعادلة. كذلك نلاحظ أن

$$u(0,t) = e^{-8t} \sin(0) = 0$$
$$u(\pi,t) = e^{-8t} \sin(\pi) = 0$$
$$u(x,0) = e^{-0} \sin(2x) = \sin(2x)$$

أي أن الشروط الثلاثة محققة. و بالتالي فإن التابع هو حل للمسألة الحدية المعطاة.

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الأولى

(First order linear partial differential equation)

نقول أن المعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى خطية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y) \qquad (1)$$

يمكن النظر إلى الطرف الأيسر من هذه المعادلة على أنه الجداء السلمي للمتجه (P,Q) بتدرج التابع السلمي u، أي $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}(u)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$. هذا يعني أن التابع $u(x,y)$ (حل المعادلة) هو ذلك التابع الذي يكون المماس لمنحنيه البياني في كل نقطة من نقاطه موازياً للمتجه (P,Q).

يمكن التعبير عن المنحني الذي يكون المماس لمنحنيه في كل نقطة منه موازياً للشعاع (P,Q) وسيطياً بجملة المعادلتين

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y)\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,y)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل التالي

$$dt=\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)} \qquad (3)$$

و بفرض أن التابع $u=u\left(x(t),y(t)\right)$ هو حل للمعادلة (1)، عندئذٍ يكون

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\overset{(2)}{=}P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\overset{(1)}{=}R(x,y)$$

أي أن

$$dt=\frac{du}{R}$$

و بأخذ الجملة (3) بعين الاعتبار، نحصل على جملة المعادلات التفاضلية المتماثلة التالية

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R} \qquad (4)$$

التي تسمى جملة المعادلات المساعدة للمعادلة (1).

و هكذا نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة التالية

مبرهنة: الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (1) هو $F(z,w)=0$، حيث أن F هو تابع اختياري وأن $z(x,y,u)=c_1$ و $w(x,y,u)=c_2$ تكاملان أوليان مستقلان للجملة المساعدة (4).

ملاحظة: إذا كان الطرف الأيمن من المعادلة (1) مساوياً للصفر، فنقول أن المعادلة متجانسة، وتأخذ الشكل

$$P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad (5)$$

وتكون الجملة المساعدة لها هي

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{0} \qquad (6)$$

وبالتالي فإن

$$du=0 \quad \Rightarrow \quad u=c$$

أي أن $u=c$ هو تكامل أولي للمعادلة المتجانسة.

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2xy$$

الحل: نشكل جملة المعادلات المساعدة:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{2xy}$$

وبسهولة نعيِّن التكاملين الأوليين:

$$\frac{y}{x}=c_1$$

$$xy-u=c_2$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة هو

$$F\left(\frac{y}{x},xy-u\right)=0$$

حيث أن F تابع اختياري قابل للاشتقاق.

و هنا نلاحظ أنه يمكن كتابة الحل العام السابق بالشكل

$$u=xy+f\left(\frac{y}{x}\right)$$

حيث أن f هو تابع اختياري قابل للاشتقاق.

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

الحل: جملة المعادلات المساعدة هي

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{du}{0}$$

يمكن التأكد أن $u=c_1$ و $x^2+y^2=c_2$ هما تكاملين أوليين للجملة المساعدة. و بالتالي فإن الحل العام للمعادلة يعطى بالعلاقة

$$F(u,x^2+y^2)=0$$

حيث أن F تابع اختياري قابل للاشتقاق، أو بالشكل المكافئ

$$u=f(x^2+y^2)$$

حيث أن f تابع اختياري قابل للاشتقاق.

المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية

(Second order Linear partial differential equation)

إذا كان u تابعاً لمتحولين مستقلين x و y، فإن الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية هو

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \qquad (7)$$

حيث أن $A,B,...,G$ هي توابع للمتحولين المستقلين x و y فقط.

كما نقول أن المعادلة الخطية متجانسة إذا كان $G\equiv 0$، وفيما عدا ذلك فإننا نقول أن المعادلة غير متجانسة.

إذا كانت الأمثال $A,B,...,F$ أعداداً ثابتة، فإننا نقول أن المعادلة (7) هي معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.

إذا وضعنا $\Delta=B^2-4AC$، فإننا نقول أن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية هي معادلة

١- ناقصية (Elliptic)، إذا كان $\Delta<0$،

٢- زائدية (Hyperbolic)، إذا كان $\Delta>0$،

٣- مكافئية (Parabolic)، إذا كان $\Delta=0$.

طرائق حل المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من المرتبة الثانية

(Methods for solving linear p. d. e. of the second order)

أولاً – الطريقة المباشرة (Direct method)

يمكن تعيين الحل العام لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية بالمكاملة بالنسبة لأحد متحولاتها المستقلة بشكل مباشر، و نوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=xe^y$، ثم عين الحل الذي يحقق الشرطين التاليين

$$u(0,y)=y^2$$
$$u(1,y)=\sin y$$

الحل: بمكاملة طرفي المعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=xe^y$ بالنسبة لـ x نجد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}x^2e^y+g_1(y)$$

حيث أن $g_1(y)$ هو تابع اختياري للمتحول y فقط (لماذا؟). و بمكاملة طرفي المعادلة الناتجة مرة أخرى بالنسبة لـ x نجد أن

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3e^y+xg_1(y)+g_2(y)$$

حيث أن $g_2(y)$ تابع اختياري للمتحول y فقط.

و لتعيين الحل الخاص المحقق للشرطين الإضافيين، نعوض فنجد أن

$$u(0,y)=y^2=0+0+g_2(y)$$

وبالتالي فإن

$$g_2(y)=y^2$$

وبما أن

$$u(1,y)=\sin y=\frac{1}{6}e^y+g_1(y)+y^2$$

فإننا نجد أن

$$g_1(y)=\sin y-y^2-\frac{1}{6}e^y$$

وبالتالي فإن الحل الخاص الذي يحقق الشرطين هو

$$u(x,y)=\frac{1}{6}x^3e^y+x\sin y-xy^2-\frac{1}{6}xe^y+y^2$$

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}=2$، ثم عين الحل الخاص المحقق للشرطين

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=x^2 \quad , \quad u(0,y)=0$$

الحل: نكتب المعادلة المعطاة على الشكل

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-u\right)=2$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial y}-u=2x+g_1(y)$$

حيث أن $g_1(y)$ تابع اختياري. و المعادلة الناتجة يمكن حلها وكأنها معادلة تفاضلية خطية عادية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول y واعتبار x ثابت، لنجد أن

$$\begin{aligned}
u(x,y)&=e^y\left\{\int e^{-y}\left[2x+g_1(y)\right]dy+f_1(x)\right\}\\
&=e^y\left[-2xe^{-y}+\int e^{-y}g_1(y)dy+f_1(x)\right]\\
&=-2x+e^y\int e^{-y}g_1(y)dy+e^yf_1(x)
\end{aligned}$$

حيث أن f_1 هو تابع اختياري.

لتعيين الحل الخاص المحقق للشرطين الإضافيين، لدينا

$$u(0,y)=0=0+e^y\int e^{-y}g_1(y)dy+e^yf_1(0)$$

و بالتالي فإن

$$\int e^{-y}g_1(y)dy=-f_1(0)$$

و يصبح

$$u(x,y)=-2x-f_1(0)e^{y}+e^{y}f_1(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-2+e^{y}f_1'(x)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x}=-2+f_1'(x)=x^2$$

و بالتالي فإن

$$f_1(x)=\frac{1}{3}x^3+2x \quad , \quad f_1(0)=0$$

و يصبح الحل الخاص المحقق للشرطين الإضافيين بالشكل

$$u(x,y)=-2x+e^{y}\left(\frac{1}{3}x^3+2x\right)$$

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية $t\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}+2\frac{\partial u}{\partial x}=2xt$

الحل: نكتب المعادلة على الشكل التالي

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[t\frac{\partial u}{\partial t}+2u\right]=2xt$$

و بالمكاملة بالنسبة للمتحول x نجد أن

$$t\frac{\partial u}{\partial t}+2u=x^2t+f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{2}{t}u=x^2+\frac{f(t)}{t}$$

حيث أن f تابع اختياري.

المعادلة الناتجة تفاضلية خطية من المرتبة الأولى بالنسبة للمتحول t على اعتبار المتحول x ثابت، وبالتالي فإن حلها العام هو

$$u=e^{-\int\frac{2}{t}dt}\left[\int\left(x^2+\frac{f(t)}{t}\right)e^{\int\frac{2}{t}dt}dt+g(x)\right]=\frac{1}{t^2}\left[\int[x^2t^2+tf(t)]dt+g(x)\right]$$

و يكتب هذا التابع (الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المفروضة) بالشكل

$$t^2u=\frac{x^2t^3}{3}+\int tf(t)dt+g(x)=\frac{x^2t^3}{3}+F(t)+g(x)$$

حيث أن F و g تابعين اختياريين. كيف نعيِّن هذين التابعين؟.

ثانياً – طريقة فصل المتحولات (Separation of variables)

إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية خطية متجانسة وذات أمثال ثابتة (بغض النظر عن مرتبتها) فيمكن إيجاد حلها بطريقة فصل المتحولات ومبدأ التركيب الخطي الذي ينص على أن: **التركيب الخطي لعدد من حلول المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة هو أيضاً حل لها.** و تتلخص هذه الطريقة بالشكل التالي

١) نفرض أن متغير المعادلة (تابعها) مساوياً لحاصل ضرب عدد من التوابع كل منها تابع لمتحول واحد فقط من المتحولات المستقلة التي يتبع لها هذا المتغير، وبحيث لا يكونا تابعين لنفس المتحول.

٢) نعوض عبارة الحل المفترضة في المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة، فنحصل بعد إجراء الفصل بين المتحولات على تناسب، كل نسبة من نسبه عبارة عن تابع لمتحول مستقل واحد. وبالتالي فإن كل نسبة من هذه النسب يجب أن تساوي مقداراً ثابتاً (لماذا؟).

٣) من كل نسبة من النسب والثابت نحصل على معادلة تفاضلية عادية، أي أننا نحصل على عدد من المعادلات التفاضلية العادية يساوي عدد متحولات المعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة.

٤) نعيِّن الحل العام لكل معادلة من المعادلات التفاضلية العادية التي حصلنا عليها، ونعوض هذه الحلول في عبارة الحل المفترضة.

٥) إذا أرفقت المعادلة التفاضلية بشرط إضافي أو أكثر فيمكن استخدام هذه الشروط الإضافية في تعيين حل المسألة المؤلفة من المعادلة التفاضلية الجزئية والشروط الإضافية، أي تعيين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الجزئية المحقق للشروط الإضافية المفروضة.

مثال: حل بطريقة فصل المتحولات المسألة التالية

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad ; \quad u(0,y)=e^{2y}$$

الحل: بما أن متغير المعادلة u تابع للمتحولين المستقلين $y\ ,\ x$، أي أن $u=u(x,y)$ نضع

$$u=u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

حيث أن $X(x)$ و $Y(y)$ تابعين يطلب تعيينهما. و بملاحظة أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'(x)Y(y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=X(x)Y'(y)$$

و التعويض في المعادلة، نجد أن

$$X'Y-XY'=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{X'}{X}=\frac{Y'}{Y}$$

الطرف الأيسر في هذا التناسب تابع للمتحول x فقط والطرف الأيمن تابع للمتحول y فقط والمساواة لا تتحقق إلا إذا كان الطرفان مساويان لثابت ما وليكن λ، أي أنه يجب أن يكون

$$\frac{X'}{X}=\frac{Y'}{Y}=\lambda$$

من النسبة الأولى والثابت λ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$X'-\lambda X=0$$

و التي حلها العام

$$X=Ae^{\lambda x}$$

حيث أن A ثابت كيفي.

من النسبة الثانية والثابت λ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$Y'-\lambda Y=0$$

و التي حلها العام

$$Y = Be^{\lambda y}$$

حيث أن B ثابت كيفي.

و بالتالي يصبح الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = ABe^{\lambda(x+y)} = Ce^{\lambda(x+y)}$$

و بما أن

$$u(0,y) = e^{2y} = Ce^{\lambda y}$$

و بالمطابقة نجد أن $C = 1$ و $\lambda = 2$. ليصبح حل المسألة المعطاة

$$u(x,y) = e^{2(x+y)}$$

مثال: حل بطريقة فصل المتحولات المسألة التالية

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad ; \quad u(0,y) = 2e^{-y} + 3e^{-2y}$$

الحل: بما أن متغير المعادلة u تابع لكل من x و y، نضع

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y)$$

ثم نشتق ونعوض في المعادلة فنجد أن

$$X'Y + XY' = XY \quad \Rightarrow \quad X'Y + X(Y' - Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad X'Y = X(Y - Y') \quad \Rightarrow$$

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y - Y'}{Y} = const. = \lambda$$

من النسبة الأولى والثابت λ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$X' - \lambda X = 0$$

والتي حلها العام

$$X = Ae^{\lambda x}$$

ومن النسبة الثانية والثابت λ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$\lambda Y = Y - Y'$$

التي تكتب بالشكل:

$$Y' + (\lambda - 1)Y = 0$$

والتي حلها العام

$$Y = Be^{-(\lambda-1)y}$$

ينتج مما سبق أن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية بالشكل

$$u(x,y) = X(x)\cdot Y(y) = ABe^{\lambda x - (\lambda-1)y} = Ce^{\lambda x - (\lambda-1)y}$$

ينص الشرط الإضافي على أنه إذا عوضنا عن x بصفر يجب أن نحصل على تركيب خطي لتابعين أسيين، لكننا إذا عوضنا عن x بصفر في عبارة الحل، نحصل على تابع أسي واحد.

بما أنه من أجل كل قيمة للثابت λ ومن أجل كل قيمة للثابت C نحصل على حل للمعادلة التفاضلية، وبما أن التركيب الخطي لأي حلين للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو أيضاً حل لها، فيمكن أن نختار قيمتين للثابت C ولتكن C_1, C_2 وقيمتين للثابت λ ولتكن λ_1, λ_2 ونكتب حل المعادلة التفاضلية المفروضة على الشكل

$$u(x,y)=C_1e^{\lambda_1 x-(\lambda_1-1)y}+C_2e^{\lambda_2 x-(\lambda_2-1)y}$$

ومن الشرط الاضافي لدينا

$$u(0,y)=2e^{-y}+3e^{-2y}$$
$$=C_1e^{-(\lambda_1-1)y}+C_2e^{-(\lambda_2-1)y}$$

بالمطابقة نجد أن

$$C_1=2\ ,\ \lambda_1-1=1\ ,\ C_2=3\ ,\ \lambda_2-1=2$$

أي أن

$$C_1=2\ ,\ \lambda_1=2\ ,\ C_2=3\ ,\ \lambda_2=3$$

وبالتالي فإن حل المعادلة المحقق للشرط الإضافي المرفق هو

$$u(x,y)=2e^{2x-y}+3e^{3x-2y}$$

مثال: حل المسألة التالية

$$2\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$
$$u(0,t)=0$$
$$u(\pi,t)=0$$
$$u(x,0)=2\sin 3x-5\sin 4x$$

الحل: بما أن متحولي متغير المعادلة u هما x,t، نضع

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$$

ثم نشتق ونعوض في المعادلة فنحصل على

$$2XT'-X''T=0\quad\Rightarrow\quad\frac{2T'}{T}=\frac{X''}{X}=const.=\lambda$$

فإذا كانت $\lambda\geq 0$ ومن النسبة الأولى والثابت λ نجد المعادلة التفاضلية

$$2T'-\lambda T=0$$

والتي حلها العام

$$T=ce^{\left(\frac{\lambda}{2}\right)t}$$

ومن النسبة الثانية والثابت λ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$X''-\lambda X=0$$

والتي حلها العام

$$X(x)=Ae^{\sqrt{\lambda}\,x}+Be^{-\sqrt{\lambda}\,x}$$

وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاة يصبح بالشكل تقبل

$$u(x,t)=A_1e^{\sqrt{\lambda}\,x+\frac{\lambda}{2}t}+B_1e^{-\sqrt{\lambda}\,x+\frac{\lambda}{2}t}$$

ولتعيين حل المعادلة المحقق للشرط الإضافي الأول، نلاحظ أن

$$u(0,t)=0=A_1e^{\frac{\lambda}{2}t}+B_1e^{\frac{\lambda}{2}t} \quad\Rightarrow\quad (A_1+B_1)e^{\frac{\lambda}{2}t}=0 \quad\Rightarrow\quad A_1+B_1=0 \quad\Rightarrow$$
$$B_1=-A_1$$

أي أن الحل المحقق للشرط الإضافي الأول هو

$$u(x,t)=A_1\left(e^{\sqrt{\lambda}x+\frac{\lambda}{3}t}-e^{-\sqrt{\lambda}x+\frac{\lambda}{3}t}\right)$$

ولتعيين حل المعادلة المحقق للشرطين الإضافيين الأول والثاني لدينا

$$u(\pi,t)=0=A_1\left(e^{\sqrt{\lambda}\pi+\frac{\lambda}{3}t}-e^{-\sqrt{\lambda}\pi+\frac{\lambda}{3}t}\right)=A_1e^{\frac{\lambda}{3}t}\left(e^{\sqrt{\lambda}\pi}-e^{-\sqrt{\lambda}\pi t}\right)$$

وبالتالي فإن

$$A_1=0 \quad\Rightarrow\quad B_1=0$$

فيكون

$$u(x,t)\equiv 0$$

أي أننا حصلنا على حل صفري. و بما أننا نبحث عن حل غير صفري، فيجب أن نضع

$$\frac{2T'}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2$$

من النسبة الأولى والثابت $-\lambda^2$ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$2T'+\lambda^2T=0$$

التي حلها العام

$$T=ce^{-\frac{\lambda^2}{2}t}$$

و من النسبة الثانية والثابت $-\lambda^2$ نحصل على المعادلة التفاضلية التالية

$$X''+\lambda^2X=0$$

التي حلها العام

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$$

وبالتالي يصبح

$$u(x,t)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}(A_1\cos\lambda x+B_1\sin\lambda x)$$

ولتعيين حل المعادلة المحقق للشرط الإضافي الأول، نلاحظ أن

$$u(0,t)=0=A_1e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\Rightarrow A_1=0$$

أي أن الحل المحقق للشرط الإضافي الأول هو

$$u(x,t)=B_1e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\sin\lambda x$$

ولتعيين حل المعادلة المحقق للشرطين الإضافيين الأول والثاني، نلاحظ أن

$$u(\pi,t)=0=B_1e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}\sin\lambda\pi$$

وبما أن $B_1\neq 0$ (لماذا؟) فإن $\sin\lambda\pi=0$ أي أن $\lambda=n$ حيث أن $n=\pm1,\pm2,\ldots$.

وبالتالي فإن حل المعادلة المحقق للشرطين الإضافيين الأول والثاني هو

$$u(x,t)=B_1e^{-\frac{1}{2}n^2t}\sin nx \;;\; n=\pm1,\pm2,\ldots$$

و بما أن $u(x,0)$ مجموع حدين، فيمكن أن نكتب الحل السابق بالشكل

$$u(x,t)=\alpha_1e^{-\frac{1}{2}n_1^2t}\sin n_1x+\alpha_2e^{-\frac{1}{2}n_2^2t}\sin n_2x$$

وبالتالي يكون

$$u(x,0)=2\sin 3x-5\sin 4x=\alpha_1\sin n_1x+\alpha_2\sin n_2x$$

بالمطابقة بين الطرفين، نجد أن

$$\alpha_1=2,n_1=3,\alpha_2=-5,n_2=4$$

وبالتالي فإن الحل المحقق للمعادلة والشروط الإضافية المفروضة هو

$$u(x,t)=2e^{-\frac{9}{2}t}\sin 3x-5e^{-8t}\sin 4x$$

ملاحظة: من المسائل التطبيقية التي تؤول في حلها إلى معادلة تفاضلية جزئية خطية من المرتبة الثانية:

أ) مسألة الانتشار الحراري في قضيب أو في صفيحة،

ب) مسألة اهتزاز وتر أو صفيحة رقيقة (غشاء)،

وفي كلا الحالتين يجب أن ينتهي الحل إلى الصفر عندما ينتهي t إلى اللانهاية، وأن يكون محدوداً، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان الثابت λ سالباً، أي إذا كان الثابت مساوياً $-\lambda^2$.

مثال: حل بطريقة فصل المتحولات المسألة التالية

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0 \quad ; \quad \begin{cases}u(0,t)=0\\ u(10,t)=0\\ u_t(x,0)=0\\ u(x,0)=3\sin(2\pi x)-4\sin\left(\dfrac{5\pi}{2}x\right)\end{cases}$$

الحل: نضع $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ (لماذا؟) ثم نشتق ونعوض في المعادلة فنجد أن

$$XT''-4X''T=0 \;\Rightarrow\; \frac{T''}{T}=\frac{4X''}{X}=-\lambda^2=const. \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases}T''+\lambda^2T=0 \;\Rightarrow\; T(t)=A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)\\ 4X''+\lambda^2X=0 \;\Rightarrow\; X(x)=A_1\cos\left(\dfrac{\lambda}{2}x\right)+B_1\sin\left(\dfrac{\lambda}{2}x\right)\end{cases}$$

وبالتالي فإن

$$u(x,t)=\left[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)\right]\left[A_1\cos\left(\frac{\lambda}{2}x\right)+B_1\sin\left(\frac{\lambda}{2}x\right)\right]$$

لتعيين الحل الخاص المحقق للشروط الإضافية المعطاة، لدينا

$$u(0,t)=0=[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)]A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1=0 \quad \Rightarrow$$

$$u(x,t)=B_1\sin\left(\frac{\lambda}{2}x\right)[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)]$$

$$u(10,t)=0 \quad \Rightarrow \quad B_1\sin(5\lambda)\left[A\cos(\lambda t)+B\sin(\lambda t)\right]=0$$

وبما أن $B_1 \neq 0$ (لماذا ؟)، فإن $\sin(5\lambda)=0$، أي أن $5\lambda=n\pi$، حيث أن $n=\pm1,\pm2,\pm3,...$ وهذا يعني أن $\lambda=\frac{n\pi}{5}$، وبالتالي يصبح

$$u(x,t)=B_1\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\left[A\cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right)+B\sin\left(\frac{n\pi}{5}t\right)\right]$$

ويكون

$$\frac{\partial u}{\partial t}=B_1\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\left[-\frac{n\pi}{5}A\sin\left(\frac{n\pi}{5}t\right)+\frac{n\pi}{5}B\cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right)\right]$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0=B_1\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\left(0+\frac{n\pi}{5}B\right) \quad \Rightarrow \quad B=0 \quad \Rightarrow$$

$$u(x,t)=A_2\sin\left(\frac{n\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{5}t\right) \quad ; \quad A_2=AB_1$$

وبما أن $u(x,0)$ مجموع حدين، نضع

$$u(x,t)=B_2\sin\left(\frac{n_1\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n_1\pi}{5}t\right)+B_3\sin\left(\frac{n_2\pi}{10}x\right)\cos\left(\frac{n_2\pi}{5}t\right)$$

فيكون

$$u(x,0)=3\sin(2\pi x)-4\sin\left(\frac{5\pi}{2}x\right)=B_2\sin\left(\frac{n_1\pi}{10}x\right)+B_3\sin\left(\frac{n_2\pi}{10}x\right)$$

و بالمطابقة بين الطرفين، نجد أن

$$\begin{cases} B_2=3 \ , \ \frac{n_1}{10}=2 \ , \ B_3=-4 \ , \ \frac{n_2}{10}=\frac{5}{2} \\ B_2=3 \ , \ n_1=20 \ , \ B_3=-4 \ , \ n_2=25 \end{cases}$$

وبالتالي يصبح حل المسألة بالشكل

$$u(x,t)=3\sin(2\pi x)\cos(4\pi t)-4\sin(2.5\pi x)\cos(5\pi t)$$

ثالثاً – طريقة سلاسل فورييه (Method of Fourier series)

توجد بعض المسائل المؤلفة من معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة ذات أمثال ثابتة وبعض الشروط الإضافية التي لا نستطيع تعيين حلها المحقق لجميع الشروط الإضافية بالاعتماد على طريقة فصل المتحولات أو مبدأ التركيب الخطي، لذلك نحتاج في هذه الحالات لاستخدام سلاسل فورييه لتعيين الحل المطلوب. لذلك سنذكر الأن بتعريف وخواص سلاسل فورييه.

إذا كان $f(x)$ تابعاً حقيقياً دورياً دوره $2L$ ومعرفاً في المجال $(-L , L)$ و كان مستمراً أو مستمراً جزئياً ومحدوداً في المجال $(-L , L)$، عندئذٍ يمكن نشر التابع وفق متسلسلة فورييه التي لها الشكل التالي

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

حيث أن a_n , b_n أمثال متسلسلة فورييه للتابع $f(x)$ التي تتعين من التكاملين التاليين

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \\ b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \end{cases} ;\quad \forall n=1,2,3,...$$

ملاحظة: إذا كان $f(x)$ تابعاً زوجياً، فإن $b_n=0$ من أجل كل n، وتصبح متسلسلة فورييه للتابع بالشكل

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

وتسمى متسلسلة جيوب تمام فورييه، حيث أن

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad ;\quad \forall n=0,1,2,3,...$$

وإذا كان $f(x)$ تابعاً فردياً، فإن $a_n=0$ من أجل كل n، وتصبح متسلسلة فورييه للتابع بالشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

وتسمى متسلسلة جيوب فورييه، حيث أن

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \quad ;\quad \forall n=1,2,3,...$$

وبالعكس، إذا نتجت لدينا متسلسلة جيوب فورييه فإن مجموعها تابع فردي، وإذا نتجت لدينا متسلسلة جيوب تمام فورييه فإن مجموعها تابع زوجي.

مثال: حل المسألة التالية

$$2\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad ;\quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=10 \ ;\ 0\le x\le\pi \end{cases}$$

الحل: هذه المسألة هي نفس المسألة في مثال سابق باستثناء الشرط الثالث. وقد وجدنا أن الحل الذي يحقق المعادلة والشرطين الأول والثاني هو

$$u(x,t)=B_1e^{-\frac{1}{2}n^2t}\sin nx \quad ;\quad \forall n=\pm1,\pm2,... \tag{8}$$

أما الشرط الثالث فيؤدي إلى المعادلة التالية

$$10=u(x,0)=B_1\sin nx \quad ;\quad \forall n=1,2,...$$

وبما أن الطرف الأيسر ثابت والأيمن متحول فهذا الشرط مستحيل التحقق في حال بقي الحل على هذه الصورة. لذلك سنعتمد على مبدأ التركيب الخطي ونكتب الحل على شكل مجموع عدد لا نهائي (متسلسلة) من التوابع التي لكل منها شكل تابع الحل (8)، أي أن

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{1}{2}n^2 t}\sin nx$$

وبالتالي يصبح الشرط بالشكل

$$f(x)=u(x,0)=10=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

وهذه متسلسلة جيوب فورييه، أي أن التابع $u(x,0)=10$ فردي في المجال $(-\pi,\pi)$، ويكون

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\ dx=\frac{20}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\ dx=\frac{20}{\pi}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{20}{\pi}\left[\frac{-\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n}\right]$$

$$=\frac{20}{n\pi}(1-\cos n\pi)\quad\Rightarrow\quad b_n=\begin{cases}\dfrac{40}{(2m-1)\pi} & ;\ n=2m-1\\ 0 & ;\ n=2m\end{cases}$$

و بالتالي فإن

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx=\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}\sin(2m+1)x+\sum_{m=1}^{\infty} b_{2m}\sin 2mx$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{40}{(2m-1)\pi}\sin(2m+1)x+0=\frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

و بالتالي فإن الحل المطلوب هو

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40}{(2n-1)\pi}e^{-\frac{1}{2}(2n-1)^2 t}\sin(2n-1)x$$

وهذا الحل يحقق المعادلة وجميع الشروط الإضافية.

رابعاً – طريقة المعادلة المساعدة (The method of auxiliary equation)

إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية خطية ومتجانسة ذات أمثال ثابتة وجميع حدودها من نفس الدرجة، كالمعادلة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (9)$$

فإنها تقبل حلولاً من الشكل $u=e^{\alpha x+\beta y}$ حيث أن α و β ثابتان يطلب تعيينهما. ولتعيين قيم α و β التي لأجلها يكون التابع $u=e^{\alpha x+\beta y}$ حلاً للمعادلة (9)، نعوض هذا الحل في المعادلة فنحصل على المعادلة الجبرية التالية

$$\alpha^2+a\alpha\beta+b\beta^2=0 \qquad (10)$$

فإذا كان $\beta\neq 0$، نقسم طرفي المعادلة (10) على β^2 لنحصل على المعادلة المكافئة التالية

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)+b=0 \qquad (11)$$

تسمى المعادلة (11) المعادلة المساعدة للمعادلة (9).

<u>الحالة الأولى</u>: في حال كانت $a^2 - 4b \neq 0$، تملك المعادلة (11) حلين متباينين هما m_1 , m_2 ويكون

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = m_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = m_1\beta \quad \Rightarrow \quad u_1 = e^{m_1\beta x + \beta y} = e^{\beta(y + m_1 x)} \\ \dfrac{\alpha}{\beta} = m_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha = m_2\beta \quad \Rightarrow \quad u_2 = e^{m_2\beta x + \beta y} = e^{\beta(y + m_2 x)} \end{cases}$$

حيث أن β هو ثابت كيفي. وبما أن المعادلة خطية ومتجانسة فإن أي تركيب خطي لعدد من حلولها يكون حلاً لها أيضاً، أي أن $F(y + m_1 x)$ حل للمعادلة (9) و $G(y + m_2 x)$ حل لها أيضاً، حيث أن F و G تابعين اختياريان. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة (9) يصبح بالشكل

$$u = F(y + m_1 x) + G(y + m_2 x) \tag{12}$$

<u>الحالة الثانية</u>: في حال كان $a^2 - 4b = 0$، تملك المعادلة (11) حلاً حقيقياً مكرراً هو m_1 وفي هذه الحالة يكون الحل الأول للمعادلة (9) هو $F(y + m_1 x)$ والحل الثاني بالشكل $xG(y + m_1 x)$ أو بالشكل $yG(y + m_1 x)$، ويصبح الحل العام بأحد الشكلين التاليين

$$u(x, y) = F(y + m_1 x) + xG(y + m_1 x) \tag{13}$$

$$u(x, y) = F(y + m_1 x) + yG(y + m_1 x) \tag{14}$$

ملاحظة: إذا كانت المعادلة التفاضلية الجزئية خطية غير متجانسة وذات أمثال ثابتة من الشكل

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{15}$$

فحلها العام يكون بالشكل $u = v + w$، حيث أن v هو الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة لها، أي للمعادلة (9) ويتعين بالطريقة المذكورة آنفاً، أما w فهو حل خاص للمعادلة (15) ويتعين كما يلي

إذا وضعنا $D_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ و $D_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$ وعوضنا في المعادلة (15) نحصل على المعادلة

$$(D_1^2 + aD_1D_2 + bD_2^2)w = f(x, y)$$

وبالتالي فإن

$$w = \frac{1}{D_1^2 + aD_1D_2 + bD_2^2} f(x, y) = \left(\frac{1}{D_1 - m_1D_2} \cdot \frac{1}{D_1 - m_2D_2} \right) f(x, y) \quad \Rightarrow$$

$$w(x, y) = \frac{1}{D_1 - m_1D_2}\left[\frac{1}{D_1 - m_2D_2} f(x, y) \right] \tag{16}$$

لنضع

$$z(x, y) = \frac{1}{D_1 - mD_2} g(x, y)$$

بالتأثير على الطرفين بـ $(D_1 - mD_2)$ نحصل على:

$$(D_1 - mD_2)z(x, y) = g(x, y)$$

وهذا يعني أن

$$\frac{\partial z}{\partial x} - m\frac{\partial z}{\partial y} = g(x,y) \qquad (17)$$

هذه المعادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى، الجملة المساعدة لها هي

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{dz}{g(x,y)}$$

من النسبتين الأولى والثانية نحصل على التكامل الأولي

$$y + mx = c \qquad (18)$$

حيث أن c_1 ثابت كيفي. ومنه فإن

$$y = c - mx$$

بالتعويض عن y بعبارتها في النسبة الثالثة نحصل من النسبتين الأولى والثالثة على

$$dx = \frac{dz}{g(x, c-mx)}$$

وبالتالي فإن

$$z = \int g(x, c-mx)dx \qquad (19)$$

حيث أن c ثابت كيفي. وهذا يعني أن

$$\frac{1}{D_1 - mD_2} g(x,y) = \int g(x, c-mx)dx \qquad (20)$$

أي أننا نحصل على ناتج تأثير $\frac{1}{D_1 - mD_2}$ على التابع $g(x,y)$ بمكاملة $g(x,y)$ بالنسبة لـ x بعد تبديل كل y بـ $c-mx$ وبعد إنجاز المكاملة نجري التعويض المعاكس، أي نبدل كل c بـ $y+mx$. و بتطبيق هذه الطريقة مرتين متتاليتين على المعادلة (16) نحصل على الحل الخاص w.

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية بطريقة المعادلة المساعدة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

الحل: المعادلة المساعدة لهذه المعادلة هي

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + 1 = 0$$

وجذريها هما $\alpha/\beta = \pm i$، وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة المعطاة يصبح بالشكل

$$u = F(y + ix) + G(y - ix)$$

حيث أن F و G هما تابعان اختياريان.

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (y-1)e^x$$

الحل: نعيِّن بدايةً الحل العام للمعادلة المتجانسة الموافقة لهذه المعادلة، أي للمعادلة

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

المعادلة المساعدة لهذه المعادلة المتجانسة هي

$$m^2-m-2=0 \quad\Rightarrow\quad (m-2)(m+1)=0$$

وبالتالي فإن

$$\begin{cases} m_1=2 \quad\Rightarrow\quad u_1=F(y+2x) \\ m_2=-1 \quad\Rightarrow\quad u_2=G(y-x) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad v(x,y)=F(y+2x)+G(y-x)$$

و لتعيين حل خاص $w(x,y)$ للمعادلة غير المتجانسة، نكتبها بدلالة D_1 و D_2 بالشكل

$$(D_1^2-D_1D_2-2D_2^2)w\left(x,y\right)=(y-1)e^x$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} w(x,y)&=\frac{1}{(D_1-2D_2)(D_1+D_2)}(y-1)e^x=\frac{1}{D_1-2D_2}\left[\frac{1}{D_1+D_2}(y-1)e^x\right] \\ &=\frac{1}{D_1-2D_2}\int e^x(c+x-1)dx=\frac{1}{D_1-2D_2}\left(ce^x+xe^x-2e^x\right) \\ &=\frac{1}{D_1-2D_2}\left[(y-x)e^x+xe^x-2e^x\right]=\frac{1}{D_1-2D_2}(ye^x-2e^x) \\ &=\int e^x(c-2x-2)dx=ce^x-2xe^x=(y+2x)e^x-2xe^x=ye^x \end{aligned}$$

ويصبح الحل العام للمعادلة غير المتجانسة بالشكل

$$u(x,y)=F(y+2x)+G(y-x)+ye^x$$

مثال: عيِّن الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=3\sin(x-4y)+x^2$$

الحل: المعادلة المساعدة للمعادلة المتجانسة هي

$$m^2+2m+1=0$$

وحليها هما $m_1=m_2=-1$. وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة هو

$$v(x,y)=F(y-x)+xG(y-x)$$

لتعيين حل خاص $w(x,y)$ للمعادلة غير المتجانسة لدينا

$$\begin{aligned} w&=\frac{1}{(D_1+D_2)^2}\left[3\sin(x-4y)+x^2\right]=\frac{1}{D_1+D_2}\left[\frac{1}{D_1+D_2}\left(3\sin(x-4y)+x^2\right)\right] \\ &=\frac{1}{D_1+D_2}\int\left(3\sin[x-4(c+x)]+x^2\right)dx \\ &=\frac{1}{D_1+D_2}\int\left[-3\sin(3x+4c)+x^2\right]dx=\frac{1}{D_1+D_2}\left[\cos(3x+4c)+\frac{1}{3}x^3\right] \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{D_1+D_2}\left\{\cos[3x+4(y-x)]+\frac{1}{3}x^3\right\}=\frac{1}{D_1+D_2}\cos\left[(4y-x)+\frac{1}{3}x^3\right]$$
$$=\int\left\{\cos[4(c+x)-x]+\frac{1}{3}x^3\right\}dx=\frac{1}{3}\sin(3x+4c)+\frac{1}{12}x^4$$
$$=\frac{1}{3}\sin\left(3x+4(y-x)\right)+\frac{1}{12}x^4=\frac{1}{3}\sin(4y-x)+\frac{1}{12}x^4$$

والحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو

$$u(x,y)=F(y-x)+xG(y-x)+\frac{1}{3}\sin(4y-x)+\frac{1}{12}x^4$$

تمارين غير محلولة

١) تأكد أن التابع $u=ax^2+bxy+cy^2$ هو حل للمعادلة

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$$

حيث أن a,b,c هي ثوابت اختيارية.

٢) تأكد أن التابع $u=f(x-y)+xg(x-y)+x^2h(x-y)$ هو الحل العام للمعادلة

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$$

حيث أن $f\ ,\ g\ ,\ h$ هي توابع اختيارية قابلة للاشتقاق.

٣) تأكد أن التابعين $u=x+y$ و $u=\sqrt{x^2+y^2}\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ هي حلول للمعادلة التفاضلية الجزئية

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

ثم عين الحل العام لها وبيِّن أي من الحلين السابقين حل خاص لها.

٤) أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية

i. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z$

ii. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2z$

iii. $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y$

iv. $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$

v. $y\dfrac{\partial z}{\partial y}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2$

vi. $(z+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x+z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y+x$

vii. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y^2$

viii. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}-xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$

ix. $y^2z\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2y$

x. $(y-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x$

٥) حل المسائل التالية

i. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\cos y \quad ; \quad \begin{cases} u(x,0)=0 \\ u\left(x,\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

ii. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=4xy+e^x \quad ; \quad \begin{cases} u(x,0)=2 \\ u_y(0,y)=y \end{cases}$

iii. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-3\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y \quad ; \quad \begin{cases} u(x,0)=x+3e^{-x} \\ u_y(0,y)=y^2-2y \end{cases}$

٦) حل بطريقة فصل المتحولات المسائل التالية

i. $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0 \quad ; \quad u(x,0)=4e^{-3x}$

ii. $4\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\partial u}{\partial x}=3u \quad ; \quad u(x,0)=4e^{-x}-e^{-5x}$

iii. $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(\pi,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=2\sin x-3\sin 2x \end{cases}$

iv. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(10,t)=0 \\ u(x,0)=5\sin 2\pi x-\sin 4\pi x \end{cases}$

v. $$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(3,t)=0 \\ u(x,0)=5\sin 4\pi x-3\sin 8\pi x+2\sin 10\pi x \end{cases}$$

٧) أوجد بطريقة فصل المتحولات حل المسألة التالية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(5,t)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=3\sin 2\pi x-2\sin 5\pi x \end{cases}$$

٨) حل المسائل التالية

i. $$\frac{\partial u}{\partial t}=2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(4,t)=0 \\ u(x,0)=25x \end{cases}$$

ii. $$\frac{\partial u}{\partial t}-0.16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \ : \ 0<x<100 \ \& \ t>0 \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(100,t)=0 \\ u(x,0)=f(x)=\begin{cases} 60:0<x<50 \\ 40:50<x<100 \end{cases} \end{cases}$$

iii. $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad ; \quad \begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(2,t)=0 \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0 \\ u(x,0)=\begin{cases} x & :0<x<1 \\ 2-x & :1<x<2 \end{cases} \end{cases}$$

iv. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad \begin{cases} u(0,y)=0 \\ u(a,y)=0 \\ u(x,0)=0 \\ u(x,b)=100 \end{cases}$$

٩) عيِّن الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية

i. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

ii. $$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-6\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+12\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}=0$$

iii. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 0$$

iv. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

v. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

١٠) عيِّن الحل العام للمعادلات التفاضلية الجزئية التالية

i. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (y-1)e^{x}$$

ii. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 y^2$$

iii. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{x-y}$$

iv. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{2x+3y}$$