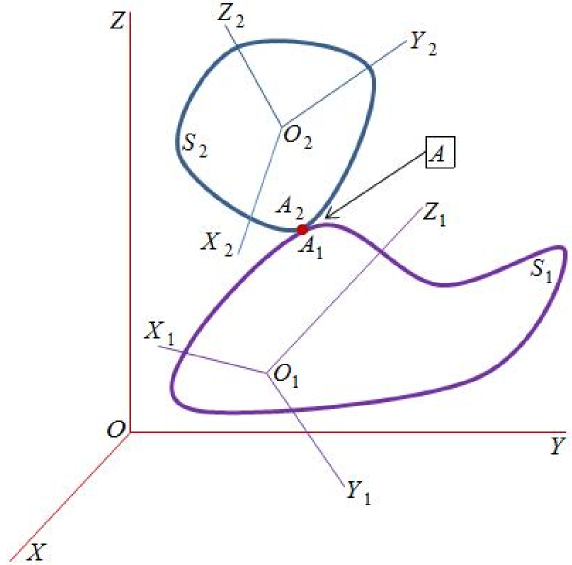
الانزلاق و التدحرج و الفتل

عند حركة جسمين S_1 و S_2 على بعضهما في فراغ منسوب إلى جملة إحداثية ثابتة $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ يتلامس سطحا هذين الجسمين أثناء الحركة في نقطة واحدة على الأقل، ويمكن تمييز ثلاث نقاط مختلفة في كل موضع من مواضع التماس هذه و هي

١. نقطة التماس الهندسية A من الفراغ التي تنطبق على نقطة التماس في تلك اللحظة، أي أن $A \notin S_1$ و $A \notin S_2$

٢. نقطة A_1 متماسكة مع الجسم الأول S_1 و تنطبق على نقطة التماس في تلك اللحظة، أي أن $A_1 \in S_1$

٣. نقطة A_2 متماسكة مع الجسم الثاني S_2 و تنطبق على نقطة التماس في تلك اللحظة، أي أن $A_2 \in S_2$.



فإذا اعتبرنا أثناء الحركة جملة إحداثية $R_1\left(O_1,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1}\right)$ متماسكة مع الجسم الأول S_1 و جملة إحداثية $R_2\left(O_2,\vec{i_2},\vec{j_2},\vec{k_2}\right)$ متماسكة مع الجسم الثاني S_2، فإن النقطة A_1 سترسم في الجملة R_1 منحنياً γ_1 على سطح الجسم S_1 و النقطة A_2 سترسم في الجملة R_2 منحنياً γ_1 على سطح الجسم S_2. و هكذا نستنتج أن المتجه $\vec{V}(A/R_1)$ هو متجه مماس للمنحني γ_1 و بالتالي لسطح الجسم S_1 كما أن المتجه $\vec{V}(A/R_2)$ هو متجه مماس للمنحني γ_2 و بالتالي لسطح الجسم S_2، و بالتالي فإننا نستنتج أن

$$\vec{V}(A/R)=\vec{V}(A/R_2)+\vec{V}(A/R)\Big|_{A\in S_2}=\vec{V}(A/R_2)+\vec{V}(A_2/R)$$

و بما أن

$$\vec{V}(A/R_2)=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A/R_2)\Big|_{A\in S_1}=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A_1/R_2)$$

يكون

$$\vec{V}(A/R)=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A_1/R_2)+\vec{V}(A_2/R)$$

و بما أن

$$\vec{V}(A/R)=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A/R)\Big|_{A\in S_1}=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A_1/R)$$

يكون

$$\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A_1/R_2)+\vec{V}(A_2/R)=\vec{V}(A/R_1)+\vec{V}(A_1/R)\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{V}(A_1/R_2)=\vec{V}(A_1/R)-\vec{V}(A_2/R)}$$

يمثل المقدار $\vec{V}(A_1/R_2)=\vec{V}(A/R_2)\Big|_{A\in S_1}$ سرعة انزلاق الجسم S_1 على الجسم S_2. بنفس الأسلوب تماماً يمكن أن نستنتج السرعة $\vec{V}(A_2/R_1)=\vec{V}(A/R_1)\Big|_{A\in S_2}$ التي تمثل سرعة انزلاق الجسم S_2 على الجسم S_1، و التي تعطى بالعلاقة

$$\boxed{\vec{V}(A_2/R_1)=\vec{V}(A_2/R)-\vec{V}(A_1/R)}$$

ملاحظة: إن سرعة انزلاق أيٍ من الجسمين على الآخر هي متجه موجود دائماً في المستوي المماس المشترك لسطحي الجسمين في نقطة التماس (أثبت ذلك؟).

تعريف: نقول عن حركة الجسمين S_1 و S_2 على بعضهما أنها بدون انزلاق إذا وفقط إذا كانت سرعة انزلاق أيٍ من الجسمين على الآخر معدومة، أي أن

$$\vec{V}(A_2/R_1)=\vec{V}(A_1/R_2)=\vec{0}$$

و بالتعويض في العلاقتين السابقتين، نجد أن شرط عدم الانزلاق يصبح بالشكل التالي

$$\vec V(A_1/R)=\vec V(A_2/R)$$

و الذي نكتبه بالشكل التالي

$$\boxed{\vec V(A/R)\big|_{A\in S_1}=\vec V(A/R)\big|_{A\in S_2}}$$

الحركة النسبية لأحد الجسمين بالنسبة للجسم الآخر:

سندرس في هذه الفقرة الحركة النسبية لجسم S_1 نعتبره المتحرك الذي يتحرك على جسمٍ آخر S نعتبره القاعدة. لذلك سنعتبر جملة إحداثيات $R\left(O,\vec i,\vec j,\vec k\right)$ متماسكة مع الجسم (القاعدة) S و جملة إحداثيات $R_1\left(O_1,\vec{i_1},\vec{j_1},\vec{k_1}\right)$ متماسكة مع الجسم المتدحرج S_1.

بفرض أن S_1 يتحرك بدون انزلاق على S و لنرمز لنقطة التماس بين الجسمين أثناء الحركة بالرمز I، عندئذٍ يصبح شرط الحركة بدون انزلاق بالشكل

$$\vec V(I/R)\big|_{I\in S_1}=0$$

باعتبار نقطة التماس I قطباً لحركة الجسم S_1 على الجسم S، و من أجل أي نقطة $M\in S_1$ يكون

$$\vec V(M/R)=\vec V(I/R)\big|_{I\in S_1}+\vec\omega\times\overrightarrow{IM}=\vec\omega\times\overrightarrow{IM}$$

حيث أن $\vec\omega$ هو متجه دوران الجسم S_1 حول القطب I. و العلاقة السابقة تبين أن القطب I هو مركز آني لدوران الجسم S_1 في حركته النسبية بالنسبة للجسم S. أي أن حركة الجسم S_1 بالنسبة للجسم S في حالة عدم الانزلاق هي حركة دورانية آنية في كل لحظة حول محور الدوران الآني الذي يمر من نقطة التماس I التي تدعى في هذه الحالة المركز الآني للدوران.

التدحرج و الفتل: يمكن دائماً تحليل متجه الدوران $\vec\omega$ إلى متجهين، متجه $\overrightarrow{\omega_\tau}$ يقع في المستوي المماس المشترك لسطحي الجسمين في نقطة التماس المشتركة و يدعى دوران التدحرج و متجه $\overrightarrow{\omega_n}$ ناظمي على سطحي الجسمين في نقطة التماس و يدعى دوران الفتل. و في هذه الحالة تصبح عبارة السرعة الأخيرة لنقطة من الجسم S_1 بالشكل

$$\vec V(M/R)=\overrightarrow{\omega_\tau}\times\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{\omega_n}\times\overrightarrow{IM}$$

أي أن الحركة الدورانية للجسم S_1 في حال عدم الانزلاق حول المركز الآني للدوران I تتركب من حركتين دورانيتين، حركة ناتجة عن دوران التدحرج $\overrightarrow{\omega_\tau}$ و حركة ناتجة عن دوران الفتل $\overrightarrow{\omega_n}$.

حالات خاصة: في حال كانت حركة الجسم على الجسم تتم بدون انزلاق فإننا نقول أن حركة الجسم على الجسم هي تدحرج و فتل بدون انزلاق. فإذا كان $\overrightarrow{\omega_n}=\vec 0$، انعدم دوران الفتل للجسم S_1 وقلنا أن حركة الجسم S_1 هي حركة تدحرج بدون انزلاق. وإذا كان $\overrightarrow{\omega_\tau}=\vec 0$، انعدم دوران التدحرج للجسم S_1 وقلنا أن حركة الجسم S_1 هي حركة فتل بدون انزلاق.

ملاحظة: وجدنا أن حركة الجسم S_1 في حال عدم الانزلاق هي حركة دورانية آنية حول نقطة التماس I التي تمثل مركز الدوران الآني للجسم و التي يمر منها محور الدوران الآني في كل لحظة. و بالتالي فإن المحل الهندسي لمحور الدوران الآني يتغير مع الزمن في كلا الجملتين R و R_1 و يرسم في كلا الجملتين سطحين مسطرين. نسمي السطح المسطر الذي يرسمه المحور الآني للدوران في الجملة R سطح القاعدة، ونسمي السطح المسطر الذي يرسمه المحور الآني للدوران في الجملة R_1 سطح المتدحرج.

الحالة العامة لحركة جسم على جسم آخر:

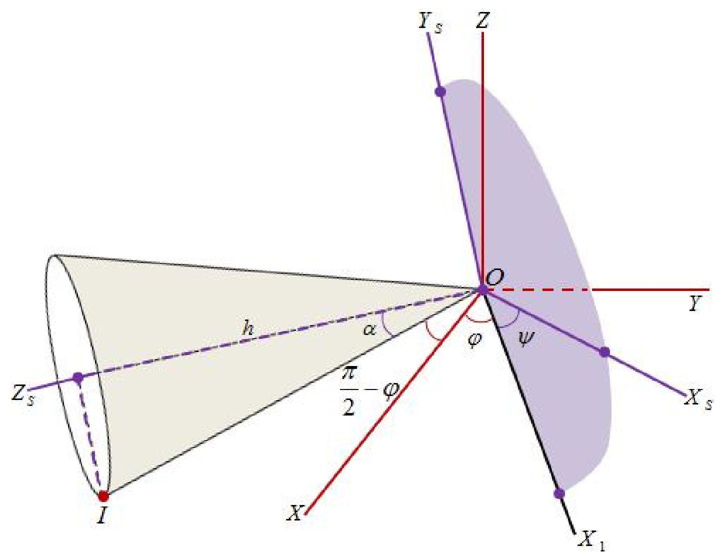
في الحالة العامة لحركة الجسم S_1 على الجسم S يكون الانزلاق موجوداً، أي أن $\vec V\left(I/R\right)\big|_{I\in S_1}\neq\vec 0$. و بالتالي تصبح العلاقة العامة لسرعة أي نقطة M من نقاط الجسم S_1 بالشكل

$$\vec V(M/R)=\vec V\left(I/R\right)\big|_{I\in S_1}+\overrightarrow{\omega_\tau}\times\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{\omega_n}\times\overrightarrow{IM}$$

و بالتالي نستنتج أن الحركة العامة لجسم على جسم آخر هي تركيب لثلاث حركات هي الانزلاق و التدحرج و الفتل.

ملاحظة: يمكن في بعض الأحيان أن يكون بين الجسمين المتحركين على بعضهما أكثر من نقطة تماس واحدة، حيث يبقى شرط الحركة بدون انزلاق هو أن تكون سرعة انزلاق كل نقاط التماس معدومة. و في هذه الحالة تكون حركة أحد الجسمين النسبية بالنسبة للجسم الآخر هي حركة دورانية آنية حول محور الدوران الآني الذي يمر من جميع نقاط التماس. و كمثال على هذه الحالة يمكن اعتبار حركة جسم مسطر على جسم مسطر آخر، حيث يشترك الجسمان في محور كامل هو المحور الآني للدوران في حال كانت حركة الجسمين على بعضهما بدون انزلاق، كحركة أسطوانة أو مخروط أو مستوٍ على أسطوانة أخرى أو مخروط أو مستوٍ.

مثال (١): مخروط دوراني نصف زاوية رأسه α و ارتفاعه h يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يستند دائماً على المستوي الأفقي الثابت OXY. بناءً على الدراسة السابقة لهذه المسألة التي تمت سابقاً، عين شرط التدحرج بدون انزلاق لهذا المخروط على المستوي الثابت OXY.



الحل: يعطى شرط التدحرج بدون انزلاق للمخروط (S) على المستوي XOY بالعلاقة

$$\vec{V}(I)\Big|_{I\in(S)}=\vec{V}(I)\Big|_{I\in(XOY)}$$

و بما أن المستوي XOY ثابت فإن $\vec{V}(I)\Big|_{I\in(XOY)}=\vec{0}$، ويصبح شرط التدحرج بدون انزلاق بالشكل

$$\vec{V}(I)\Big|_{I\in(S)}=\vec{0}\;\Rightarrow\;\vec{V}(O)+\vec{\omega}\times\vec{OI}=\vec{0}\;\Rightarrow\;\vec{0}+\vec{\omega}\times\vec{OI}=\vec{0}\;\Rightarrow\;\vec{\omega}\times\vec{OI}=\vec{0}$$

وبملاحظة أن

$$\vec{OI}=\left(\vec{OI}\cdot\vec{i}\right)\vec{i}+\left(\vec{OI}\cdot\vec{j}\right)\vec{j}+\left(\vec{OI}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}$$

$$=\left\|\vec{OI}\right\|Cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\vec{i}+\left\|\vec{OI}\right\|Cos\left(\pi-\varphi\right)\vec{j}+\left\|\vec{OI}\right\|Cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{k}\quad\Rightarrow$$

$$\vec{OI}=\frac{h}{Cos(\alpha)}\left[Sin(\varphi)\vec{i}-Cos(\varphi)\vec{j}\right]$$

كما أننا قد وجدنا سابقاً أن

$$\vec{\omega}=\psi^{\bullet}Sin(\varphi)Cos(\alpha)\vec{i}-\psi^{\bullet}Cos(\varphi)Cos(\alpha)\vec{j}+\left(\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Sin(\alpha)\right)\vec{k}$$

و بالتالي يصبح شرط التدحرج بدون انزلاق بالشكل

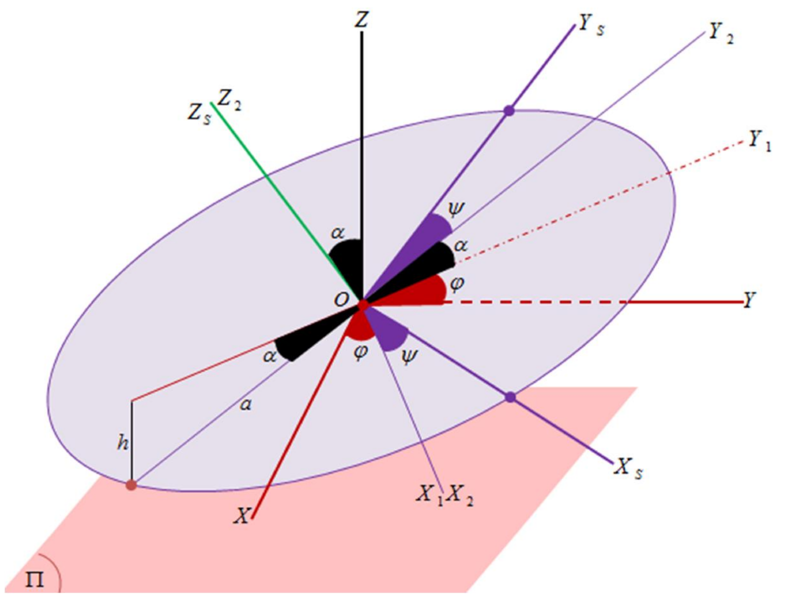
$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \psi^{\bullet}Sin(\varphi)Cos(\alpha) & -\psi^{\bullet}Cos(\varphi)Cos(\alpha) & \varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Sin(\alpha)\\ Sin(\varphi) & -Cos(\varphi) & 0\end{vmatrix}=\vec{0}\quad\Rightarrow$$

$$\left[\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Sin(\alpha)\right]Cos(\varphi)\vec{i}+\left[\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Sin(\alpha)\right]Sin(\varphi)\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi^{\bullet}+\psi^{\bullet}Sin(\alpha)=0}$$

و هو شرط التدحرج بدون انزلاق.

مثال (٢): قرص دائري نصف قطرة a يستطيع الحركة حول مركزه الثابت في مركز الإحداثيات O بحيث يستند محيط القرص دائماً على مستوٍ أفقي Π يوازي المستوي الثابت OXY و يبعد عنه مسافة مقدارها h بحيث أن $h<a$. بناءً على الدراسة السابقة لهذه المسألة التي تمت سابقاً، عين شرط التدحرج بدون انزلاق لهذا المخروط على المستوي الثابت OXY.



الحل: بنفس الأسلوب في المثال السابق نجد أن شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص (S) على المستوي Π هو

$$\vec{\omega}\times\vec{OI}=\vec{0}$$

وبملاحظة أن

$$\overrightarrow{OI} = a\,Cos(\alpha)Sin(\varphi)\vec{i} - a\,Cos(\alpha)Cos(\varphi)\vec{j} - a\,Sin(\alpha)\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OI} = a\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}Sin(\varphi)\vec{i} - a\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}Cos(\varphi)\vec{j} - a\frac{h}{a}\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OI} = \sqrt{a^2-h^2}\;Sin(\varphi)\vec{i} - \sqrt{a^2-h^2}\;Cos(\varphi)\vec{j} - h\,\vec{k}$$

كما أننا قد وجدنا سابقاً أن

$$\vec{\omega} = \frac{h}{a}\psi^\bullet\;Sin(\varphi)\;\vec{i} - \frac{h}{a}\psi^\bullet\;Cos(\varphi)\;\vec{j} + \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}\;\varphi^\bullet\;\vec{k}$$

و بالتالي يصبح شرط التدحرج بدون انزلاق بالشكل

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ h\;\psi^\bullet\;Sin(\varphi) & -h\;\psi^\bullet\;Cos(\varphi) & \sqrt{a^2-h^2}\;\varphi^\bullet \\ \sqrt{a^2-h^2}\;Sin(\varphi) & -\sqrt{a^2-h^2}\;Cos(\varphi) & -h \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left[h^2\;\psi^\bullet + \left(a^2-h^2\right)\varphi^\bullet\right]Cos(\varphi)\vec{i} + \left[\left(a^2-h^2\right)\varphi^\bullet + h^2\;\psi^\bullet\right]Sin(\varphi)\vec{j} + 0\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\left(h^2\;\psi^\bullet + \left(a^2-h^2\right)\varphi^\bullet\right)\left[Cos(\varphi)\vec{i} + Sin(\varphi)\vec{j}\right] = \vec{0} \Rightarrow \boxed{h^2\;\psi^\bullet + \left(a^2-h^2\right)\varphi^\bullet}$$

و هو شرط التدحرج بدون انزلاق.

مثال (٣): مجموعة مادية مؤلفة من قرص دائري مستوي S_1 مركزه O_1 ونصف قطره a_1 يتدحرج على المحور OX في المستوي الشاقولي الثابت XOY، كما و يتدحرج قرص دائري مستوي آخر S_2 مركزه O_2 ونصف قطره a_2 على محيط القرص S_1. والمطلوب

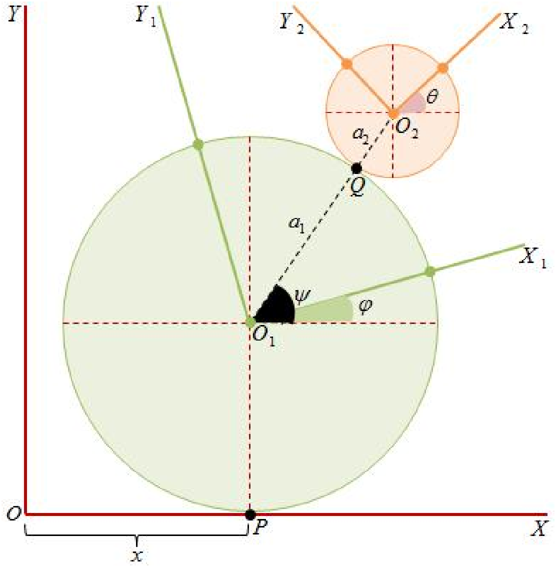
١. عين وسطاء حركة المجموعة و عدد درجات الحرية لحركتها في الحالة العامة (حركة S_2 على S_1 و حركة S_1 على OX تدحرج مع انزلاق ولا وجود للفتل لكون الحركة تتم في المستوي الثابت XOY).

٢. أكتب شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_1 على المحور OX

٣. أكتب شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_2 على القرص S_1

٤. ما هو عدد درجات الحرية و الوسطاء المستقلة لحركة المجموعة في حال كان تدحرج S_2 على S_1 و تدحرج S_1 على OX بدون انزلاق.

٥. عين القاعدة و المتدحرج لحركة S_2 على S_1 و القاعدة و المتدحرج لحركة S_1 على OX.



الحل: نختار أولاً المركز O_1 كقطب لحركة القرص S_1 ونعين جملة $O_1X_1Y_1$ متماسكة مع هذا القرص، نختار المركز O_2 كقطب لحركة القرص S_2 ونعين جملة $O_2X_2Y_2$ متماسكة مع هذا القرص.

لتعيين وسطاء حركة المجموعة نقوم بتعيين وسطاء الحركة لكل كتلة مادية في المجموعة على التتالي. لتعيين وسطاء حركة القرص الدائري S_1 نعين وسطاء لحركة القطب O_1 حيث نلاحظ أن هذا القطب يتعين من خلال الوسيط x الموضح في الشكل وأن

$$\overrightarrow{OO_1} = x\;\vec{i} + a_1\;\vec{j}$$

وبتثبيت القطب O_1 لا يتبقى للقرص S_1 إلا الدوران حول هذا القطب، حيث تتعين هذه الحركة الدورانية من خلال الزاوية φ الموضحة في الشكل. لاحظ أن ثبات الوسيطين x و φ يؤدي إلا ثبات القرص S_1.

الآن سنفرض أن القرص S_1 ثابت، و لنعين وسطاء حركة القرص S_2. يتعين القطب O_2 من خلال الزاوية ψ التي يصنعها خط المركزين للقرصين مع المحور OX والموضحة في الشكل، حيث نلاحظ أن

$$\overrightarrow{OO_2} = \left[x + (a_1+a_2)Cos(\psi)\right]\vec{i} + \left[a_1 + (a_1+a_2)Sin(\psi)\right]\vec{j}$$

وبتثبيت القطب O_2 لا يتبقى للقرص S_2 إلا الدوران حول هذا القطب، حيث تتعين هذه الحركة الدورانية من خلال الزاوية θ الموضحة في الشكل. لاحظ أن ثبات الوسيطين ψ و θ يؤدي إلا ثبات القرص S_2 و ذلك بفرض أن القرص S_1 ثابت.

و بالتالي نستنتج أن حركة المجموعة المعطاة تتحدد في الحالة العامة بأربع وسطاء مستقلة هي x,φ,ψ,θ، و نستنتج أن المجموعة المادية تملك في الحالة العامة أربع درجات من الحرية.

شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_1 على المحور الثابت OX:

$$\vec{V}(P)\big|_{P\in(S_1)}=\vec{V}(P)\big|_{P\in(OX)}$$

وبما أن المحور OX ثابت فإن $\vec{V}(P)\big|_{P\in(OX)}=\vec{0}$، و يصبح شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_1 على المحور OX بالشكل $\vec{V}(P)\big|_{P\in(S_1)}=\vec{0}$ و الذي يصبح بالشكل

$$\vec{V}(O_1)+\overrightarrow{\omega_1}\times\overrightarrow{O_1P}=\vec{0} \qquad (1)$$

حيث أن $\overrightarrow{\omega_1}=\varphi^{\bullet}\ \vec{k}$ هو متجه دوران القرص S_1. و بملاحظة أن

$$\overrightarrow{O_1P}=-a_1\ \vec{j} \quad \& \quad \vec{V}(O_1)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}=\frac{d}{dt}\left(x\ \vec{i}+a_1\ \vec{j}\right)=x^{\bullet}\ \vec{i}$$

و بالتعويض في العلاقة (1) يصبح شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_1 على المحور OX بالشكل التالي

$$x^{\bullet}\ \vec{i}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varphi^{\bullet}\\ 0 & -a_1 & 0\end{vmatrix}=\vec{0} \;\Rightarrow\; x^{\bullet}\ \vec{i}+a_1\ \varphi^{\bullet}\ \vec{i}=\vec{0} \;\Rightarrow\; \left(x^{\bullet}+a_1\ \varphi^{\bullet}\right)\vec{i}=\vec{0} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{x^{\bullet}+a_1\ \varphi^{\bullet}=0}$$

شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_2 على القرص S_1:

$$\vec{V}(Q)\big|_{Q\in(S_1)}=\vec{V}(Q)\big|_{Q\in(S_2)} \qquad (2)$$

حيث أن $\overrightarrow{\omega_2}=\theta^{\bullet}\ \vec{k}$ هو متجه دوران القرص S_2. و بملاحظة أن

$$\overrightarrow{O_1Q}=a_1\ Cos(\psi)\ \vec{i}+a_1\ Sin(\psi)\ \vec{j} \quad \& \quad \overrightarrow{O_2Q}=-a_2\ Cos(\psi)\ \vec{i}-a_2\ Sin(\psi)\ \vec{j}$$

$$\vec{V}(O_2)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_2}=\frac{d}{dt}\left\{\left[x+(a_1+a_2)Cos(\psi)\right]\vec{i}+\left[a_1+(a_1+a_2)Sin(\psi)\right]\vec{j}\right\} \;\Rightarrow$$

$$\vec{V}(O_2)=\left[x^{\bullet}-(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Sin(\psi)\right]\vec{i}+(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}$$

يكون

$$\vec{V}(Q)\big|_{Q\in(S_1)}=\vec{V}(O_1)+\overrightarrow{\omega_1}\times\overrightarrow{O_1Q}=x^{\bullet}\ \vec{i}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varphi^{\bullet}\\ a_1\ Cos(\psi) & a_1\ Sin(\psi) & 0\end{vmatrix}$$

$$=x^{\bullet}\ \vec{i}-a_1\ \varphi^{\bullet}\ Sin(\psi)\ \vec{i}+a_1\ \varphi^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}$$

$$=\left[x^{\bullet}-a_1\ \varphi^{\bullet}\ Sin(\psi)\right]\vec{i}+a_1\ \varphi^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}$$

$$=x^{\bullet}\ \vec{i}+a_1\ \varphi^{\bullet}\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]$$

$$\vec{V}(Q)\big|_{Q\in(S_2)}=\vec{V}(O_2)+\overrightarrow{\omega_2}\times\overrightarrow{O_2Q}=x^{\bullet}\ \vec{i}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \varphi^{\bullet}\\ a_1\ Cos(\psi) & a_1\ Sin(\psi) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left[x^{\bullet}-(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Sin(\psi)\right]\vec{i}+(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \theta^{\bullet}\\ -a_2\ Cos(\psi) & -a_2\ Sin(\psi) & 0\end{vmatrix}$$

$$=\left[x^{\bullet}-(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Sin(\psi)\right]\vec{i}+(a_1+a_2)\psi^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}+a_2\ \theta^{\bullet}\ Sin(\psi)\ \vec{i}-a_2\ \theta^{\bullet}\ Cos(\psi)\ \vec{j}$$

$$=x^{\bullet}\ \vec{i}+\left[-(a_1+a_2)\psi^{\bullet}+a_2\ \theta^{\bullet}\right]Sin(\psi)\ \vec{i}+\left[(a_1+a_2)\psi^{\bullet}-a_2\ \theta^{\bullet}\right]Cos(\psi)\ \vec{j}$$

$$=x^{\bullet}\ \vec{i}+\left[(a_1+a_2)\psi^{\bullet}-a_2\ \theta^{\bullet}\right]\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]$$

و بالتعويض في العلاقة (2) يصبح شرط التدحرج بدون انزلاق للقرص S_2 على القرص S_1 بالشكل التالي

$$x^{\bullet}\ \vec{i}+a_1\ \varphi^{\bullet}\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]=x^{\bullet}\ \vec{i}+\left[(a_1+a_2)\psi^{\bullet}-a_2\ \theta^{\bullet}\right]\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]\quad\Rightarrow$$

$$a_1\ \varphi^{\bullet}\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]=\left[(a_1+a_2)\psi^{\bullet}-a_2\ \theta^{\bullet}\right]\left[-Sin(\psi)\ \vec{i}+Cos(\psi)\ \vec{j}\right]\quad\Rightarrow$$

$$a_1\ \varphi^{\bullet}=(a_1+a_2)\psi^{\bullet}-a_2\ \theta^{\bullet}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{a_1\left(\varphi^{\bullet}-\psi^{\bullet}\right)=a_2\left(\psi^{\bullet}-\theta^{\bullet}\right)}$$

بالعودة إلى شرطي التدحرج بدون انزلاق و اللذين يفرضان قيدان حركيان على حركة المجموعة المادية المعطاة، نستنتج أن المجموعة تملك في حال كانت الحركات هي تدحرج بدون انزلاق درجتان من الحرية فقط.

القاعدة و المتدحرج في حركة القرص S_1 على المحور OX:

بملاحظة أن المركز الآني للدوران P يتحرك في الجملة XOY الثابتة على المحور OX، نستنتج أن منحني القاعدة هي المحور OX. وبملاحظة أن المركز الآني للدوران P يتحرك في الجملة $X_1O_1Y_1$ المتماسكة مع القرص S_1 بحيث يبقى بعده عن مركز الجملة O_1 ثابتاً و يساوي a_1، نستنتج أن منحني المتدحرج هو دائرة مركزها O_1 و نصف قطرها a_1.

القاعدة و المتدحرج في حركة القرص S_2 على القرص S_1:

بملاحظة أن المركز الآني للدوران Q يتحرك في الجملة $X_1O_1Y_1$ المتماسكة مع القرص S_1 تتم بحيث يبقى بعده عن مركز الجملة O_1 ثابتاً و يساوي a_1، نستنتج أن منحني القاعدة هو دائرة مركزها O_1 و نصف قطرها a_1. وبملاحظة أن المركز الآني للدوران Q يتحرك في الجملة $X_2O_2Y_2$ المتماسكة مع القرص S_2 بحيث يبقى بعده عن مركز الجملة O_2 ثابتاً و يساوي a_2، نستنتج أن منحني المتدحرج هو دائرة مركزها O_2 و نصف قطرها a_2.