الاحتمالات

الفصل الأول

تعيين الفضاء الاحتمالي

(١-١) تمهيد :

إن نظرية الاحتمالات تختص بقياس احتمال حدث معين و تكوين نموذج رياضي يوضح سلوك الظاهرة التي تتصف بالعشوائية ، أي يجب دراسة ما يسمى بالفضاء الاحتمالي الذي يمثل الثلاثية (Ω , F , P) حيث إن : Ω تمثل فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية، وF يمثل جبر الأحداث فوق Ω، وأخيراً المركبة الثالثة P تمثل القياس الاحتمالي (الاحتمال). و سوف نتعرف هذه المفاهيم الثلاثة و أهم الخصائص المتعلقة بها.

(١-٢) : التجربة العشوائية و فضاء الأحداث الابتدائية :

من المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات مفهوم التجربة العشوائية و الأحداث الابتدائية .

- **<u>تعريف التجربة العشوائية :</u>**

  التجربة العشوائية هي أي اجراء أو محاولة نعلم مسبقاً جميع النتائج الممكنة لها و لكن لا نستطيع التنبؤ بأي نتيجة من هذه النتائج سيتحقق فعلاً، و النتيجة الواحدة تمثل حدث ابتدائي و لذلك سندعو مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة بفضاء الأحداث الابتدائية (فراغ العينة) والذي نرمز له بـ "Ω" ، هذا و يمكن أن نعرّف التجربة بشكل عام بأنها أي عملية تؤدي إلى قياس أو ملاحظة .

  - **ملاحظة (١) :** فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية Ω له ثلاثة أنواع و ذلك حسب عدد نتائج التجربة وهي :

١ً: فضاء أحداث ابتدائية محدود ، و هو الفضاء الذي يضم عدداً محدداً من النتائج .

٢ً: فضاء أحداث ابتدائية معدود ، و هو الفضاء الذي يضم عدداً لا نهائياً من النتائج لكنه قابل للعد بمعنى آخر يوجد تقابل بين عناصر Ω وعناصر مجموعة الأعداد الطبيعية .

٣ً: فضاء أحداث ابتدائية لا نهائي و هو الفضاء الذي يضم عدداً لا نهائياً من النتائج أي Ω تمثل مجموعة غير قابلة للعد و غير منتهية .

و يمكن توضيح ما تقدم بالأمثلة التالية :

مثال (١) :

إلقاء حجر نرد متوازن مرة واحدة يمثل تجربة عشوائية فضاء الأحداث الابتدائية لها:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

أي في هذه التجربة نستطيع معرفة كل النتائج سلفاً و لكن لا نستطيع التنبؤ بأي نتيجة من نتائج هذه التجربة السابقة لذلك دعيت هذه التجربة بالتجربة العشوائية .

مثال (٢) :

إلقاء قطعة نقد متجانسة (متوازنة) مرة واحدة يمثل تجربة عشوائية فضاء الأحداث الابتدائية لها:

$$\Omega = \{H, T\}$$

حيث H تدل على الصورة و T تدل على الكتابة ، و هنا واضح أنه في هذه التجربة نستطيع معرفة كل النتائج و لكن لا نستطيع التنبؤ بالنتيجة التي سوف تحصل ، أي لا نستطيع أن نجزم بأننا نحصل على H أو على Tو لذلك دعيت هذه التجربة بالتجربة العشوائية .

مثال (٣) :

إلقاء قطعة نقد متوازنة مرة بعد مرة حتى نحصل على T ، أي فضاء الأحداث الابتدائية لهذه التجربة له الشكل:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\dots, \omega_i, \dots\dots\}$$

حيث إن : $\omega_i = \underbrace{H\,H\,H \dots\dots\dots\dots\dots H}_{(i-1)}\,T$

يمثل حدث ابتدائي نحصل فيه لأول مرة على T بعد أن نحصل على H $(i\text{-}1)$ مرة حيث :

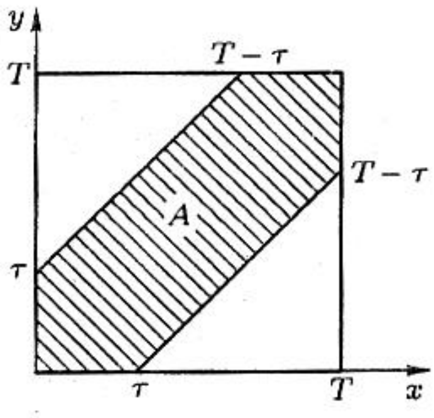
$$i = 1,2, \dots \dots$$

مثال(٤) :

مسألة التقاء شخصين : اتفق شخصان : l_1, l_2 أن يلتقيا في المجال الزمني $[0,T]$ في مكان ما بحيث كل منهما يختار لحظة الوصول إلى المكان المفروض عندئذ فضاء الابتدائية لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \{\omega = (x, y)\ ;\ \ 0 < x < T \quad , \quad 0 < y < T\}$$

حيث إن :$\omega = (x\,,y)$ تمثل حدثاً ابتدائياً ، علماً أن الشخص l_1 يصل على الموعد في اللحظة x ،والشخص l_2 يصل على الموعد في اللحظة y ، انظر الشكل (١- ١) :



الشكل (١-١)

ملاحظة (٢) :

إذا أمعنا النظر في الأمثلة الأربعة السابقة نجد أن Ω في المثال الأول و الثاني تمثل فضاء أحداث ابتدائية محدود (منتهٍ)، أما في المثال الثالث Ω فتمثل فضاء احداث ابتدائية معدود، و في المثال الرابع نلاحظ أن Ω تمثل فضاء احداث ابتدائية غير منته و غير قابل للعد .

- **(٣-١): الأحداث العشوائية :**

تعريف: إذا كان لدينا تجربة عشوائية فضاء الأحداث الابتدائية لها Ω يمثل مجموعة منتهية أو معدودة عندئذ ندعو أي مجموعة جزئية من Ω بأنها تمثل حدثاً ، و يرمز عادة للأحداث بأحد الأحرف الكبيرة مثل A أو B أو C..... إلخ .

- **ملاحظة (٣) :**

إذا كان فضاء الاحداثيات الابتدائية لتجربة عشوائية مفروضة يمثل مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد ، عندئذ في الحالة العامة ليس كل مجموعة جزئية من Ω تمثل حدثاً لأنه قد تكون هذه المجموعة الجزئية غير مقيسة ، و بالتالي لا يوجد احتمال لهذا الحدث .

- **ملاحظة (٤) :**

سوف نرمز لعدد عناصر فضاء الاحداثيات الابتدائية Ω بالرمز $N(\Omega)$: or $|\Omega|$.

- **<u>تعريف الحدث الذي يقع :</u>**

إذا كان A حدثاً متعلقاً بتجربة عشوائية مفروضة فضاء الأحداث الابتدائية لها : Ω ، عندئذ يقال عن الحدث A إنه حدث واقع إذا كانت نتيجة التجربة تنتمي إليه ، و يمكن أن نعبر عن ذلك بالقول :

A حدث يقع $\Leftarrow$ $\omega \in A$ علماً أن : ω تمثل نتيجة للتجربة العشوائية المفروضة .

أما إذا كانت التجربة العشوائيةωلا تنتمي للحدث A فنقول إن A حدث لم يقع ، و يمكن أن نعبر عن ذلك بالقول :

(A حدث لم يقع $\Leftarrow$ $\omega \notin A$) .

- **ملاحظة (٥) :**

اعتماداً على تعريف الحدث الذي يقع و الحدث الذي لا يقع نجد أن فضاء الأحداث الابتدائية Ω يمثل حدثاً أكيداً و ϕ يمثل حدثاً مستحيلاً و ذلك لأن Ω مؤلفة من جميع الأحداث الابتدائية للتجربة المفروضة و ϕ لا يوجد فيها أي حدث ابتدائي .

نتيجة (١) :

لقد ذكرنا أن الحدث الابتدائي هو الحدث الذي يتكون من نتيجة واحدة فقط من نتائج التجربة و لكن العكس غير صحيح ، أي لا نستطيع القول إن حدثاً عشوائياً يمثل حدثاً ابتدائياً .

مثال (٥) :

إذا عدنا إلى تجربة إلقاء حجر النرد المتوازن مرة واحدة في المثال (١) نجد أن المجموعات التالية :

$$A = \{1,2,3,4\} \ , \ B = \{2,4,6\}$$

$$C = \{5\} \qquad\qquad , \ D = \{3,6\}$$

تمثل أحداثاً متعلقة بالتجربة المفروضة ، و ذلك لأن كل من المجموعات السابقة يمثل مجموعة جزئية من فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة ، في حين المجموعة $H = \{3,10\}$ ليست حدثاً ، وضح ذلك .

مثال (٦) :

إذا كانت التجربة إلقاء حجري نرد متجانسين متمايزين عندئذ فإن فضاء الأحداث الابتدائية لهذه التجربة هو :

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (i,j) & ; & i = 1,2,\dots\dots,6 \\ & & j = 1,2,\dots\dots,6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad N(\Omega) = 36$$

و إذا فرضنا أن x تمثل عدد النقاط الظاهرة على وجه النرد الأول ، و تمثل y عدد النقاط الظاهرة على وجه النرد الثاني ، عندئذ فإن المجموعة :

$B = \{(x,y); 6 \leq x + y \leq 11\}$تمثل حدثاً معرفاً على Ω .

مثال (٧) :

عائلة عندها طفلان و المطلوب :

١- عين الحدث A الذي يقع إذا كان في العائلة الطفل الأول صبي .

٢- عين الحدث B الذي يقع إذا كان في العائلة الطفل الثاني صبي .

٣- عين الحدث C الذي يقع إذا كان في العائلة الجنس نفسه من الأطفال .

٤- عين الحدث D الذي يقع إذا كان في العائلة صبيواحد على الأقل .

٥- عين الحدث E الذي يقع إذا كان في العائلة صبي واحد على الأكثر .

٦- عين الحدث H الذي يقع إذا كان في العائلة ثلاثة صبيان .

الحل :

من الواضح أن فضاء الاحداثيات الابتدائية :

$$\Omega = \{bb , bg , gb, gg\} \ ; N(\Omega) = 4$$

b تدل على الصبي ، g تدل على البنت عندئذ :

$$A = \{ bb , bg \}$$
$$B = \{ bb , gb \}$$
$$C = \{ bb , gg \}$$
$$D = \{ bb , bg , gb \}$$
$$E = \{ bg , gb , gg \}$$
$$H = \phi$$

مثال (٨) :

إذا كانت التجربة إلقاء حجري نرد متجانسين متمايزين .

المطلوب :

١- اكتب فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة (فضاء العينة) .

٢- عين الحدث A الذي يقع إذا حصلنا على مجموع وجهين يساوي 8 .

٣- عين الحدث B الذي يقع إذا حصلنا على مجموع وجهين أصغر أو يساوي 12.

٤- عين الحدث C الذي يقع إذا حصلنا على وجهين متماثلين .

٥- عين الحدث D الذي يقع إذا حصلنا على مجموع وجهين يساوي 3.

٦- عين الحدث E الذي يقع إذا حصلنا على الرقم 2 على الحجر الأول .

٧- عين الحدث H الذي يقع إذا حصلنا على مجموع وجهين أقل من 2 .

<u>الحل :</u>

١- إذا عدنا إلى المثال رقم (٦) نجد أن :

$$\Omega = \{(1,1)\ ,\ (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ...(2,6), ..., \ (6,1), ..., (6,6)\}$$

٢- $A = \{4,4), \ (3,5), (5,3), (2,6), (6,2)\}$

٣- $B = \Omega$

٤- $C = \{(1,1)\ ,\ (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

٥- $D = \{(1,2)\ ,\ (2,1)\ \}$

٦- $E = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$

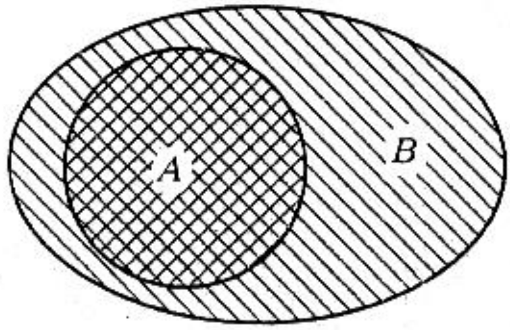
٧- $H = \phi$

- **(٤-١) العمليات على الأحداث :**

لاحظنا من تعريف الحدث العشوائي أنه يمثل مجموعة جزئية من فضاء الأحداث الابتدائية ، لذلك كل ما ينطبق من عمليات على المجموعات (اتحاد ، تقاطع ، فرق) ينسحب على الأحداث بعد أن نضع كلمة حدث بدلاً من كلمة مجموعة .

١": اتحاد حدثين (اجتماع حدثين) :

إذا كان A و B حدثين متعلقين بتجربة عشوائية مفروضة فإن فضاء الأحداث الابتدائية لها Ω يمثل مجموعة قابلة للعد غير منتهية عندئذ : اتحاد الحدثين A و B هو حدث جديد يقع إذا وقع الحدث A أو وقع الحدث B أو إذا وقع الحدثان A و B معاً و يرمز له بالرمز : $A \cup B$ انظر الشكل (١-٢) :



الشكل (١-٢)

❖ **تعميم : (اتحاد عدة أحداث) :**

اتحاد عدد n من الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ هو حدث جديد يقع إذا وقع أحد هذه الأحداث على الأقل و نرمز له بالرمز:

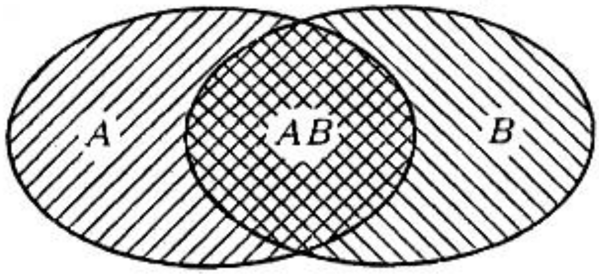
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$$

٢": تقاطع حدثين :

تقاطع حدثين A و B هو حدث جديد يقع إذا وقع الحدثان معاً ، و نرمز له بالرمز :

$A \cap B$

انظر الشكل (١-٣) :



الشكل (١-٣)

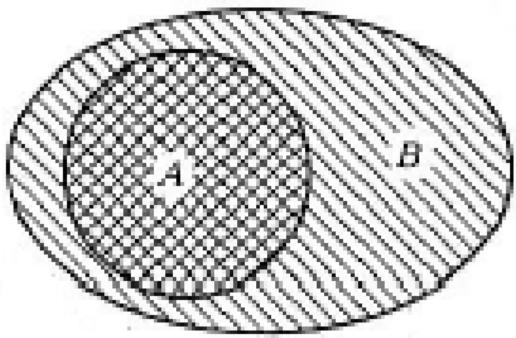
❖ **تعميم (تقاطع عدة أحداث) :**

تقاطع عدة أحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ هو حدث جديد يقع إذا وقعت هذه الأحداث معاً و نرمز له بالرمز :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap .... \cap A_n$$

٣": الفرق بين حدثين :

الفرق بين حدثين A و B و الذي نرمز له بالرمز (A-B) هو حدث جديد يقع إذا وقع الحدث A و لم يقع الحدث B ، أما (B-A) فهو حدث جديد يقع إذا وقع الحدث B و لم يقع الحدث A ، انظر الشكل (١-٤) :



الشكل (١-٤)

٤": متمم الحدث :

إذا كان A حدثاً متعلقاً بتجربة مفروضة ، عندئذ الحدث المتمم للحدث A و الذي نرمز له بالرمز $\overline{A}$ هو حدث يقع إذا لم يقع الحدث A ، أي :

$$\overline{A} = \Omega - A \quad , \quad A = \Omega - \overline{A}$$

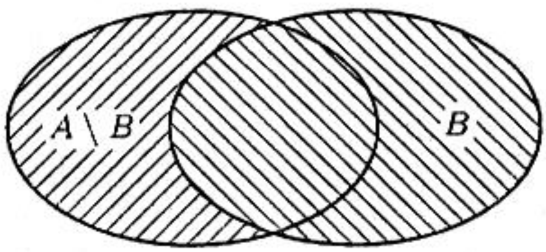
- **نتيجة :**

من ٣" و ٤" نجد أن : $A - B = A \cap \overline{B}$

٥": الحدثان المتنافيان (المنفصلان) :

نقول عن الحدثين A و B إنهما منفصلان إذا كان تقاطعهما حدث مستحيل ، أي $A \cap B = \phi$ ، أي لا يمكن للحدثين أن يقعا معاً .

٦": إذا كان A و B حدثين متعلقين بتجربة مفروضة ، و كان وقوع الحدث A يقتضي وقوع الحدث B قلنا إن: $A \subseteq B$ ، أي إذا وقع الحدث A فيجب أن يقع B ، أما العكس فغير صحيح في الحالة العامة ، انظر الشكل (١-٥) :



الشكل (١-٥)

نتائج :

استناداً إلى التعاريف السابقة نستنتج ما يلي :

١) من أجل أي حدث A متعلق بتجربة مفروضة يكون :

$$A \cap \Omega = A \ , A \cup A = A \ , A \cup \Omega = \Omega \ , A \cap \emptyset = \emptyset \ , A \cap A = A$$

٢) من أجل أي حدثين A و B متعلقين بتجربة مفروضة يكون :

$$A \cap B \subseteq A \ , \quad B \subseteq A \cup B \quad , \quad A \subseteq A \cup B \quad , \quad A \cap B \subseteq B$$

٣) إذا كان A و B و C ثلاثة أحداث متعلقة بتجربة مفروضة ، و كان $C \subseteq A \cap B$ عندئذ :

$$C \subseteq B \text{ و } C \subseteq A$$

٤) إذا كان $A \cap B = \phi$ فإن $A - B = A$ و $B - A = B$.

٥) واضح أن $\overline{\overline{A}} = A$ و $\overline{\phi} = \Omega$ و $\overline{\Omega} = \phi$.

٦) $\overline{A} = \overline{B}$ يكافئ القول إن $B = A$.

٧) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

- **(٥-١) : الأحداث التي تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω :**

تعريف :

يقال عن الأحداث $A_1, A_2, \ldots., A_n$ إنها تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω إذا تحقق الشرطان :

١- إذا كانت الأحداث متنافية مثنى، أي : $A_i \cap A_j = \phi \;,\; i \neq j$.

٢- اتحاد الأحداث يساوي الحدث الأكيد أي :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

مثال (٩) :

من الواضح أن الحدث A و متممه $\overline{A}$ يشكلان تجزئة لـ Ω.

مثال (١٠) :

إذا كانت التجربة إلقاء حجر نرد متجانس عندئذ :

١": الأحداث $A_1 = \{2, 4, 6\}$ و $A_2 = \{1, 3, 4\}$

تشكل تجزئة للحدث الأكيد $\Omega = \{1, 2, 3,4, 5, 6\}$

٢": الأحداث $B_1 = \{1, 3\}$ و $B_2 = \{2, 3, 4\}$ و $B_3 = \{5 , 6\}$ لا تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω لوجود عناصر مشتركة في بعض الأحداث .

٣":مجموعة الأحداث الابتدائية لهذه التجربة تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω، وضح ذلك ؟

مثال (١١) :

عائلة عندها طفلين و المطلوب :

١- شكل ثلاثة تجزئات لـ Ω يكون فيها عدد الأحداث التي تشكل التجزئة اثنين .

٢- شكل ثلاثة تجزئات لـ Ω يكون فيها عدد الأحداث التي تشكل التجزئة ثلاثة .

٣- شكل التجزئة التي يكون فيها عدد الأحداث التي تشكل تجزئة لـ Ω هو ٤ .

الحل :

لدينا فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة :

$$\Omega = \{ bb , bg , gb , gg \}$$

عندئذ يكون :

١":

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ bb \} , \quad A_2 = \{ bg , gb, gg \} \\ B_1 &= \{ b , g \} , \quad B_2 = \{ bb , gb, gg \} \\ C_1 &= \{ bb , gg \}, \quad C2 = \{ bg , gb \} \end{aligned}$$

٢":

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ bb \} , \quad A_2 = \{ gb \} , \quad A_3 = \{ b g , gg \} \\ B_1 &= \{ bb \} , \quad B_2 = \{ gg \} , \quad B_3 = \{ b g , gb \} \\ C_1 &= \{ gb \} , \quad C2 = \{ gg \} , \quad C_3 = \{ b g , bb \} \end{aligned}$$

٣": توجد تجزئة واحدة فقط و هي الأحداث الابتدائية للتجربة ، أي:

$$A_1 = \{ bb \} , \quad A_2 = \{ bg \} , \quad A_3 = \{ gb \} , \quad A_4 = \{ gg \}$$

- أهم القوانين و العلاقات اللازمة و الضرورية في نظرية الاحتمالات:

١) من أجل أي حدثين A و B متعلقين بتجربة مفروضة يكون:

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

٢) من أجل الأحداث A و B و C المتعلقة بتجربة مفروضة يكون :

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$

ونترك للقارئ التأكد من هذه العلاقات .

- **نتيجة :**

إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \dots\dots, A_n$ متنافية مثنى فإن العلاقة التالية محققة :

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = [A_1 \cap (A_2 \cap \bar{A}_1)] \cup [A_3 \cap (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_1)] \cup \dots\dots \cup A_n \cap [A_{n-1} \cap \dots \cap \bar{A}_1]$$

تأكد من ذلك ، خذ $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ و أثبت أن ω تنتمي إلى الطرف الأيمن و العكس ω تنتمي للطرف الأيمن وأثبت أن $\omega \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

من أجل فهم ما تقدم نعود إلى الأمثلة التي عرضت في فقرات سابقة و تعيين بعض الأحداث المتعلقة بالتجربة و تطبيق العمليات على هذه الأحداث .

١": إذا كانت التجربة إلقاء حجر نرد متجانس (متوازن) مرة واحدة (انظر المثال رقم ١) فنجد عندئذ :

- الحدث $A = \{w_2 , w_4 , w_6\}$ الذي يقع إذا حصلنا على عدد زوجي .
- الحدث $B = \{w_1 , w_3 , w_5\}$ الذي يقع إذا حصلنا على عدد فردي .
- الحدث $C = \{w_3 , w_6\}$ الذي يقع إذا حصلنا على عدد يقبل القسمة على ٣.
- الحدث $D = \{w_6\}$ الذي يقع إذا حصلنا على الرقم ٦.

و بالتالي نلاحظ أن :

1) $A \cup B = \Omega$, $A = \bar{B}$, $B = \bar{A}$, $\overline{A \cup B} = \emptyset = \bar{A} \cap \bar{B}$

2) $A \cap C = D$, $B \cap D = \emptyset$, $(B \cap C) \cup D = (B \cup D) \cap (C \cup D) = C$

$A \cap C \subseteq A$, $B \subseteq B \cup D$,

$D \subseteq B \cup D$

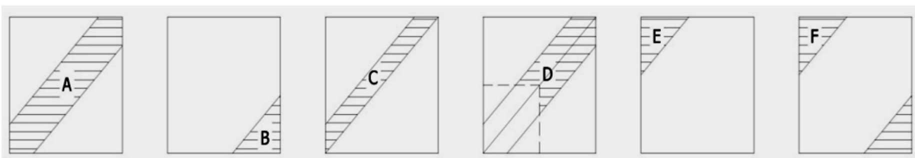
3) $(C - B) \cap B = (C \cap B) - (D \cap B) = \{w_3\} - \emptyset = \{w_3\}$

$$(B \cup D) \cap C = (B \cap C) \cup (D \cap C) = \{w_3\} \cup \{w_6\} = \{w_3, w_6\} = C$$

٢": إذا نظرنا إلى المثال رقم (٤) " مسألة التقاء شخصين" و أمعننا النظر في الأحداث التالية :

- الحدث A الذي يقع إذا تم اللقاء بين الشخصين l_1, l_2 .
- الحدث B الذي يقع إذا تأخر الشخص l_1 عن اللقاء .
- الحدث C الذي يقع إذا قدم الشخص l_1 قبل الشخص l_2 و اللقاء تم بين الشخصين .
- الحدث –{ المقابلة تمت بعد $\frac{T}{2}$ =D} .
- الحدث –{ الشخص l_2 تأخر عن اللقاء=E} .
- الحدث –{ اللقاء لم يتم =F} .

والأحداث الستة السابقة موضحة بالشكل (١-٦) :



الشكل (١-٦)

- **(٦-١) الجبر – الجبر التام :**

مما تقدم نجد أن كل حدث مثل A يمكن النظر إليه كمجموعة جزئية من فضاء الأحداث الابتدائية $A \subset \Omega$. لكن من أجل بناء النموذج العشوائي للظاهرة العشوائية لا يمكن أن ننظر لكل مجموعة كحدث في حال كون Ωمنتهية أو معدودة أو غير معدودة و غير منتهية يجب أن نعرف ما يسمى بصف المجموعات الجزئية فوق Ω.

- **تعريف الجبر:**

إذا كان لدينا صف المجموعات الجزئية فوق Ω و الذي نرمز له بالرمز $F=\{A\subset\Omega\}$ ،

عندئذ ندعو هذا الصف بأنه جبر إذا حقق الشروط التالية:

$$1)\ \forall A\in F \Rightarrow \overline{A}\in F$$

$$2)\ \forall A_i\in F\ (i=1,2,........,n)\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i\in F$$

وذلك من أجل n منتهية أو غير منتهية و سوف ندعو عناصر هذا الجبر بالأحداث العشوائية . و من أهم خصائص هذا الجبر ما يلي :

$$1)\ \forall A_1, A_2, ..., A_n\in F\Rightarrow A_1\cap A_2\cap...........\cap A_n\in F$$

وذلك لأن :

$$A_1\in F\ ,\ A_2\in F\ ,\ ....\ ,\ A_n\in F\Rightarrow \overline{A_1}\in F\ ,\ \overline{A_2}\in F\ ,\ ....\ ,\ \overline{A_n}\in F$$

$$\Rightarrow \overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ ....\ \cup\overline{A_n}\in F\Rightarrow(\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ ....\ \cup\overline{A_n})\in F$$

$$\Rightarrow A_1\cap A_2\cap ....\cap A_n\in F$$

$$2)\ \forall A, B\in F\Rightarrow A-B\in F$$

وذلك لأن : $A-B=A\cap\overline{B}$

$$3)\ \Omega=A\cup\overline{A}\in F\ ,\quad \phi=\overline{\Omega}\in F$$

و بهذا الشكل نجد أن الجبر F و الذي ندعوه جبر الأحداث مغلق بالنسبة لعمليات الاتحاد و التقاطع و الفرق بين الأحداث .

♦ **تعريف الجبر التام (σ - جبر) :**

إذا كان F جبراً فوق Ω وحقق الشرط التالي :

$$A_1, A_2, ..., A_n......\in F\Rightarrow\bigcup_{i\geq 1} A_i\in F$$

عندئذ نقول عن F بأنه جبر تام (σ - جبر فوق Ω) ، و يمكن التعبير عن الشرط السابق بالقول أن F مغلق بالنسبة للاتحاد المعدود .

○ **ملاحظة** :

في الحالة التي تكون فيها Ω مجموعة غير قابلة للعد و غير منتهية فإن الجبر F يتكون من المجموعات الجزئية المقيسة $A \subseteq \Omega$ ، أي من المجموعات الجزئية التي تملك طول و مساحة و حجم و من أجل الاطلاع أكثر يجب النظر إلى المراجع المتعلقة بالتحليل التابعي و القياس .

- **نتائج :**

١- كل جبر تام فوق Ω هو جبر فوق Ω و لكن العكس غير صحيح .

٢- في الحالة الخاصة عندما يكون فضاء الأحداث الابتدائية Ω منتهياً ، فإن كل جبر فوق Ω هو أيضاً جبر تام فوق Ω .

مثال (١٢) :

إذا كان فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية Ω يمثل مجموعة منتهية أو معدودة فإن :

- الصف $F = \{\phi, \Omega\}$ يمثل جبر و جبر تام على Ω .
- الصف $F = \{\phi, \Omega, A, \overline{A}\}$ يمثل جبر فوق Ω مهما $A \subseteq \Omega$ و هو الجبر المولد بالحدث A .
- الصف F الذي يمثل جماعة المجموعات الجزئية لـ Ω يمثل جبراً .

مثال (١٣) :

إذا كان فضاء الأحداث الابتدائية Ω لتجربة عشوائية منتهياً أو غير منته و لكن قابل للعد ، و كانت الأسرة من الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω ، عندئذ و بشكل وحيد يمكننا تشكيل جبراً F فوق Ω على الشكل التالي :

$F=\{\varphi,\bigcup_{i=1}^{n}A_i\,;\,n\in N$ و يدعى هذا الجبر بالجبر المولد من التجزئة المذكورة .

و إذا عدنا إلى المثال (١٢) السابق نجد أن :

١. إن الجبر $F=\{\phi,\Omega\}$ يمثل جبراً مولداً من التجزئة $\{\Omega\}$.

٢. إن الجبر $F=\{\varphi,\ \Omega,A,\overline{A}\}$ مولد من التجزئة $\{A,\overline{A}\}$.

٣. إذا كان فضاء الأحداث الابتدائية Ω لتجربة عشوائية يمثل مجموعة غير منتهية ، و لكنها قابلة للعد على الأكثر أي :

$$\Omega=\{w_1,w_2,........,\ w_n,....\}$$

فعندئذ الجبر F المشكل من جميع المجموعات الجزئية لـ Ω يولد من التجزئة :

$\{\{w_1\},\{w_2\},.......\{w_n\}\}$ و كل من الجبر المولد بالتجزئة المذكورة في ٣ و ٤ يدعى "بالجبر القوي".

مثال (١٤) :

إذا كانت تجربة إلقاء حجر نرد متجانس (متوازن) مرة واحدة ، عندئذ :

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

و بالتالي ندعو الصف : $F=\{\phi,\Omega,\{1,5\},\{2,3,4,6\}\}$ بالجبر فوق Ω.

لكن الصف :

$F_1=\{\phi,\Omega,\{1,5\},\{2,3,4,6\},\{1,6\}\}$ لا يمثل جبراً فوق Ω وذلك لأنه لا يحقق شرط الجبر .

- <u>**(٧-١) مفهوم الاحتمال :**</u>

إن مفهوم الاحتمال كثير الورود في الحياة العملية ، فالكلمات : حظ ، صدفة ، محتمل ، ممكن ورودها كثيراً في حياتنا اليومية و ترتبط جميعها بمفهوم الاحتمال .

فعندما نقول عن فلان ما إنه جيد ، نقصد بذلك أنه ناجح في أغلب محاولاته أو أن احتمال نجاحه كبير ، عندما نقول إن فلاناً ربح صدفة ، فإننا نعني بذلك أن احتمال خسارته كبير و لكنه مع ذلك ربح .... و هكذا .

لكن هذا المفهوم لم يقف عند هذا الحد بل أخذ يدخل مجالاً علمياً تطبيقياً واسعاً حتى أصبح يعد علماً قائماً بذاته، ليس ذلك فقط بل أصبح أساساًً يستند إليه في كثير من المجالات العلمية كالإحصاء و العلوم الاقتصادية و إلى غير ذلك .

إلا أن الميدان الرئيسي لعلم الاحتمالات هو الاحصاء بكل فروعه النظرية و التطبيقية .

١- التعريف التقليدي (الكلاسيكي) للاحتمال :

إذا كان فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة مفروضة، يمثل مجموعة منتهية عدد نتائجها n، أي :

$\Omega = \{w_1, w_2, \dots \dots, w_n, \dots\}$ و بحيث الأحداث الابتدائية متنافية مثنى أي :

$$\{w_i\} \cap \{w_j\} = \phi;\ i \neq j$$
$$i = 1,2,\dots\dots,n$$
$$j = 1,2,\dots\dots,n$$

و بحيث الأحداث الابتدائية متساوية الفرص في الوقوع ، و لكن A حدثاً متعلقاً بهذه التجربة المفروضة ، أي إن: $A \in F$.

عندئذ بالتعريف احتمال الحدث A و الذي نرمز له بالرمز P (A) يعطى بالعلاقة :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} \qquad (1)$$ حيث إن :

$|A| = N(A)$ عدد عناصر الحدث A (عدد إمكانات وقوع الحدث A)

$|\Omega| = N(\Omega) = n$ و إذا كان عدد عناصر الحدث A هو m عندئذ:

$$P(A) = \frac{m}{n} \qquad (2)$$

و يمكن التعبير عن العلاقة (١) أو العلاقة (٢) بالقول أن احتمال الحدث A هو :

$$P(A) = \frac{\text{عدد الإمكانات الملائمة لوقوع A}}{\text{عدد الامكانات الكلية للتجربة}}$$

و حساب الاحتمال وفق التعريف السابق يسمى بالتعريف الكلاسيكي (القديم) لحساب الاحتمال . و يحقق الشروط التالية :

١) $P(A) \geq 0\ ,\ \forall A \subseteq \Omega \ \ or \ \ A \in F$ (وضّح ذلك) .

٢) $P(\Omega) = \dfrac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$.

٣) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ متنافية مثنى ، فإن :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

و في الحالة الخاصة إذا كان A و B حدثين متعلقين بالتجربة المفروضة بحيث :

$A \cap B = \phi$ فإن :

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ وذلك لأن :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \frac{N(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1) + N(A_2) + ... + N(A_n)}{N(\Omega)} = \frac{N(A_1)}{N(\Omega)} + ... + \frac{N(A_n)}{N(\Omega)}$$
$$= P(A_1) + ... + P(A_n)$$

مثال(١٥) :

بفرض أن التجربة سحب ورقة واحدة بطريقة عشوائية من ورق اللعب الذي يتكون من (٥٢) ورقة ، والمطلوب :

١- ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة حمراء ؟

٢- ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة صورة ؟

٣- ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل الرقم ٨ ؟

<u>الحل :</u>

من الواضح أن فضاء الاحداثيات الابتدائية يمثل مجموعة منتهية ، و الأحداث الابتدائية متساوية الفرص في الوقوع، و بالتالي يمكن تطبيق التعريف التقليدي للاحتمال ، أي بفرض :

A حدث الحصول على ورقة حمراء .

B حدث الحصول على صورة .

C حدث الحصول على ورقة تحمل الرقم ٨ .

عندئذ:

$$1)\ P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

$$2)\ P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$3) P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

مثال (١٦) :

صندوق يحتوي على ٤٠ قرص من نوع CD ، من بينها ١٥ قرص غير صالحة ، و لنفرض أن التجربة سحب قرص واحد من الصندوق بشكل عشوائي ، و المطلوب :

١- ما احتمال الحصول على قرص صالح ؟

٢- ما احتمال الحصول على قرص غير صالح ؟

<u>الحل :</u>

١- نفرض A حدث الحصول على قرص صالح عندئذ :

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0.625 \approx 0.63$$

٢- نفرض B حدث الحصول على قرص غير صالح عندئذ:

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}=0.375\approx 0.38$$

مثال (١٧) :

صندوق يحتوي على ٢٠ ساعة متماثلة تختلف باللون بينها ٨ ساعات فضية و الباقي ذهبية ، و لتكن التجربة سحب ساعة واحدة فقط من الصندوق بشكل عشوائي ، و المطلوب :

١- ما احتمال أن تكون الساعة المسحوبة ذهبية ؟

٢- ما احتمال أن تكون الساعة المسحوبة فضية ؟

٣- ما احتمال أن تكون الساعة المسحوبة ذهبية أو فضية ؟

<u>الحل :</u>

١) نفرض أن A حدث الحصول على ساعة ذهبية ، عندئذ :

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

٢) نفرض أن B حدث الحصول على ساعة فضية ، عندئذ :

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

٣) الحدث المطلوب احتماله هو $A\cup B$ ، $A\cap B=\phi,$ أي :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

➢ **خصائص الاحتمال الكلاسيكي:**

بفرض أن فضاء الأحداث الابتدائية Ω لتجربة عشوائية مفروضة يمثل مجموعة منتهية ، و الأحداث الابتدائية متنافية مثنى و لها الفرصة نفسها في الوقوع ، و ليكن F جبر الأحداث فوق Ω(جماعة المجموعات الجزئية لـ Ω) عندئذ تتحقق الخصائص التالية :

- **الخاصة (١) :**

من أجل أي $A \in F$ يكون : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

وذلك لأن : $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \phi$ و بالتالي :

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

- **الخاصة (٢) :**

$P(\phi) = 0$ وذلك لأن :

$$P(\phi) = 1 - P(\overline{\phi}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

- **الخاصة (٣) :**

إذا كان $A \subseteq B$ فإن :

a) $P(A) \leq P(B)$

b) $P(B/A) = P(B) - P(A)$

وذلك لأن: $A \cup (B/A) = B$ أي أن :

$$P\big(A \cup (B/A)\big) = P(B) \Rightarrow P(A) + P(B/A) = P(B)$$

وهذا يعني أن :

$P(A) \leq P(B)$ حيث أن $P(B/A) \geq 0$ و هذا يعني أن (a) محققة . و لدينا أيضاً :

$$P(B/A) = P(B) - P(A)$$

وهذا يدل على تحقق الشرط (b) علماً أن الحدثين $B - A, A$ متنافيان .

- **نتيجة :**

من المعلوم أن $A \subseteq A \cup B$ و $A \cap B \subseteq B$ ، عندئذ :

$$P(A \cap B) \leq P(B)$$
$$P(A) \leq P(A \cup B)$$

- **الخاصة (٤) :**

من أجل أي حدث $A \in F$ يكون :

$0 \le P(A) \le 1$ و ذلك لأن : $\phi \subseteq A \subseteq \Omega$

عندئذ بالاستفادة من خاصة سابقة نجد أن :

$P(\phi) \le P(A) \le P(\Omega)$ ، و هذا يعني أن :

$$0 \le P(A) \le 1$$

- **الخاصة (٥) :**

بفرض أن الأحداث $A_1, A_2, \dots \dots \dots, A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω عندئذ:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

و ذلك لأن :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

و $A_i \cap A_i = \emptyset$ حيث إن : $i \ne j$

عندئذ :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(\Omega) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

و في الحالة الخاصة إذا كانت n=2 بحيث :

$$A_1 = A \;,\;\; A_2 = \overline{A}$$

عندئذ : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- **الخاصة (٦) :**

إذا كان $A \in F \;,\; B \in F$ حدثين اختياريين و لا يوجد حدث آخر في F عندئذ يكون:

١) $A \cup B \in F$

٢) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

الإثبات :

لدينا : $A\cup B\in F$ لأن F جبر الأحداث مغلق بالنسبة لعملية الاتحاد أي (١) صحيحة ، أما بالنسبة لـ (٢) فلدينا :

$$A\cup B=A\cup(B-A\cap B)$$

و لدينا : $A\cap(B-A\cap B)=\phi$ و $A\cap B\subseteq B$

عندئذ : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

- **عيوب التعريف الكلاسيكي للاحتمال :**

لاحظنا عند صياغة التعريف للاحتمال الكلاسيكي أن فضاء الأحداث الابتدائية Ω مجموعة منتهية و الأحداث الابتدائية متنافية مثنى و لها الفرصة نفسها في الوقوع ، و لكن هناك تجارب عشوائية لا تتحقق فيها الشروط التي ذكرناها في آن حيث هناك تجارب يكون فيها عدد عناصر فضاء الأحداث الابتدائية غير منته ، فعلى سبيل المثال في تجربة اختيار عدد طبيعي من مجموعة الأعداد الطبيعية : إذا طلب حساب احتمال أن يكون هذا العدد أكبر من ٤٠٠٠٠٠٠ لا يمكننا تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال لأن فضاء الأحداث الابتدائية مجموعة غير منتهية .

كذلك الأمر يوجد تجارب فيها فضاء الأحداث الابتدائية مجموعة منتهية لكنها غير متساوية الفرص في الوقوع ، كمثال على ذلك حساب احتمال ظهور الكتابة في تجربة إلقاء قطعة نقد غير متزنة مرة واحدة .

و بالإضافة إلى ما تقدم يوجد تجارب يكون فيها فضاء الأحداث الابتدائية مجموعة غير منتهية و الأحداث الابتدائية غير متساوية الفرص في الوقوع ، و ذلك مثل تجربة إلقاء قطعة نقد مرة بعد مرة حتى نحصل على الوجه T لأول مرة، نجد أن فضاء الأحداث الابتدائية :

$$\Omega=\{T,HT,HHT,........,\ \underbrace{HH.........T}_{n-i},\ ....$$

مماّ تقدّم يمكن القول إن التعريف الكلاسيكي للاحتمال لا يصلح لأن يكون الأساس النهائي لبناء نظرية الاحتمال ، و ذلك لأن هذا التعريف لا يصلح إلاّ ضمن شروط محددة تم ذكرها .

٢- التعريف الاحصائي للاحتمال :

إذا كان Ω فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة مدروسة و بفرض أن Fجبر الأحداث فوق Ω و A حدث من F و لنفرض أننا نكرر هذه التجربة n مرة ضمن الشروط نفسها في كل مرة نكرر فيها التجربة ، عندئذ يعرف احتمال الحدث A و الذي رمزنا له بالرمز $P(A)$ يعطى بالعلاقة :

$$P_n(A) = \frac{K_n(A)}{n} \quad \text{(التكرار النسبي)}$$

حيث يمثل $K_n(A)$ عدد المرات التي يظهر فيها الحدث A (n كبيرة بقدر كاف) .

وحسب خواص التكرار النسبي يحقق الاحتمال المعطى بالعلاقة السابقة المسلّمات التالية :

1) $P_n(A) \geq 0$

2) $P_n(\Omega) = 1$

3) $P_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P_n(A) \quad ; \quad A_i \cap A_j = \emptyset \;;\; i \neq j$

و قد تكون k منتهية او غير منتهية .

<u>**الإثبات :**</u>

١- $P_n(A) \geq 0$ لأن $K_n(A) \geq 0$

٢- $P_n(\Omega) = \frac{K_n(\Omega)}{n} = \frac{n}{n} = 1$

وذلك لأن الحدث الأكيد يقع دوماً بأي تجربة .

٣- إذا كان $i \neq j \;;\; A_i \cap A_j = \phi$ عندئذ :

و بالتالي يكون : $K_n(A_i \cup A_j) = K_n(A_i) + K_n(A_j)$

$$P_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \frac{K_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} K_n(A_i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{K_n(A_i)}{n} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} P_n(A_i)$$

في التجارب العشوائية المكررة ضمن ظروف ثابتة (مستقرة) عندما $n \to \infty$ فإن $P_n(A)$ يسعى إلى عدد ثابت مثل $P(A)$ يدعى احتمال الحدث A .

أي : $P(A) = \lim_{n\to\infty} P_n(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{k_n(A)}{n}$.

و الذي ندعوه بالتعريف الإحصائي للاحتمال و الذي يحقق الخواص التالية :

١) $0 \le P(A) \le 1$ من أجل أي حدث $A \ni F$.

٢) $P(\Omega) = 1$.

٣) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن :

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

٤) $P(\phi) = 0$.

٥) $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ علماً أن $\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A .

٦) إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

٧) إذا كان $A \subseteq B$ عندئذ يتحقق :

$a)\ P(A) \le P(B)$

$b)\ P(B - A) = P(B) - P(A)$

و يمكن استنتاج الخواص السابقة من كون التكرار النسبي يحقق الخواص السابقة كلها .

ملاحظة : لا يصلح التكرار النسبي لحدث تعريف الاحتمال، لأنه ليس هناك ما يضمن لنا حتمية تقارب متتالية التكرارات النسبية و المثال التالي يوضح ذلك .

- قام العالمان الرياضيان الفرنسي بيوفن و الانكليزي بيرسن برصد النهاية :

$$P\,(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} P_n(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{k_n(A)}{n}$$

من أجل الحدث A الدال على ظهور الصورة في تجربة إلقاء قطعة نقد متوازنة (متجانسة) حيث كانت النتائج لها كما هي مدونة في الجدول التالي :

نتائج	عدد الرميات n	التكرار النسبي لعدد مرات تعدد ظهور الصورة
بيوفن	٤٠٤٠	0.5070
دمورغان	4092	0.5005
جيفانس	20480	0.5068
رامافونسكي	80640	0.4929
بيرسون	24000	0.5005
فيولر	10000	0.4979

يبين الجدول عدم تقارب التكرارات النسبية من القيمة 0.5 (لإظهار أن قطعة النقود متزنة) لأنه لو كانت هذه المتتالية متقاربة من 0.5 لوجب بحسب تعريف المتتاليات العدية يحقق الشرط التالي :

$$n \;>\; n(\zeta) \;\Rightarrow\; \left|\, \frac{K_n(A)}{n} - 0.5 \,\right| < \zeta$$

وهذا الشرط غير محقق ، و ذلك لأنه من أجل $\zeta = 0.00051$ نجد بعد تبديل معطيات التجربة الأخيرة التي أجراها بيرسون :

$$\left| \frac{K_n(A)}{n} - 0.5 \right| < \zeta \Leftrightarrow \left| 0.5005 - 0.5 \right| < \zeta \Leftrightarrow$$

$$0.005 < \zeta \Leftrightarrow \frac{1}{\zeta} < \frac{1}{0.005} = 200$$

وهذا يدل على أن متتالية التكرارات النسبية متباعدة و هذا يدل أنه لا يجوز أخذ نهاية التكرار النسبي لحدث A كاحتمال للحدث A في المثال السابق .

و لكن يمكن القول بالرغم من ذلك نلاحظ أن التكرار النسبي لحدث A يعطينا قيمة تقريبية لاحتمال هذا الحدث.

٣ـ التعريف الهندسي للاحتمال :

من خلال تعريف الاحتمال الكلاسيكي (التقليدي) لاحظنا أنه قابل للتطبيق في حالات خاصة فقط ، لذلك حاول بعض الرياضيين إعطاء تعريف للاحتمال وفق عرض هندسي من خلال تمثيل الأحداث بأشكال هندسية مناسبة ، اعتقاداً منهم أنهم قد تجاوزوا السلبيات التي اعترضت التعريف التقليدي و التعريف الإحصائي للاحتمال . و من أجل وضع التعريف الهندسي للاحتمال نتصور أن نتيجة التجربة العشوائية يمكن أن تفسر على أنها اختيار نقطة عشوائية من مجموعة نتائج التجربة Ω (استناداً إلى أسس هندسية) ، و أن الحوادث التي لها القياس نفسه (الطول نفسه ، المساحة نفسها ، الحجم نفسه ...) يكون لها النصيب نفسه في الظهور ، و عليه يمكنن وضع التعريف التالي :

إذا كان A حدثاً متعلقاً بالتجربة العشوائية فإننا نعرف احتمال الحدث A بالعلاقة التالية :

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\text{قياس } A}{\text{قياس} \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

حيث $m(A)$ قياس الحدث A و $m(\Omega)$ قياس الحدث الأكيد Ω ، مع العلم أن هذا القياس قد يمثل طولاً أو مساحة أو حجماً...

مثال (١٨) :

نعود للمثال (٤) من الفقرة (٢-١) أي مسألة التقاء شخصين و طلب ما احتمال لقاء الشخصين A و B ، إذا كان قدوم كل من الشخصين خلال الفترة الزمنية $[0,T]$ يمكن أن يتم بشكل عشوائي و كانت لحظتي القدوم مستقلة .

<u>الحل :</u>

نرمز للحظة قدوم الشخص A بـ x و للحظة قدوم الشخص B بـ y عندئذ :

$$\Omega = \{ (x, y) , 0 < x < T , o < y < T\}$$

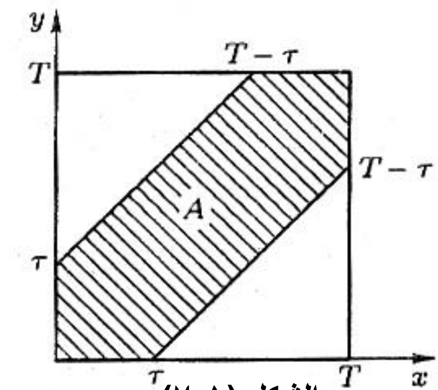
و بالتالي الشرط اللازم و الكافي لكي يلتقي الشخصان A و B هو أن يقع الحدث :

$$H = \{ (x, y) ; \left| x - y \right| \le \tau \}$$

الآن لنمثل x, y كإحداثيين ديكارتيين على المستوى و نختار الدقيقة بمنزلة وحدة القياس ، عندئذ جميع النتائج الممكنة للتجربة تتمثل بنقاط المربع :

$$[0,T]\times[0,T]$$

و تقع النتائج التي تلائم اللقاء للشخصين في المنطقة المخططة ... انظر الشكل (١-٧):



الشكل (١-٧)

عندئذ يكون لدينا :

$$m (H) = T^2 - (T - \tau)^2 \quad , \quad m(\Omega) = T^2$$

و بالتالي :

$$P(H) = \frac{m (H)}{m (\Omega)} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - (1 - \frac{\tau}{T})^2$$

و في الحالة الخاصة : إذا كانت $T = 60$, $\tau = 20$ فإن :

$$P(H) = 1-(1-\frac{20}{60})^2 = 1-(\frac{40}{60})^2 = 1-\frac{1600}{3600}$$
$$=1-\frac{16}{36} = 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

⊕ **ملاحظة :**

إن صعوبة العمليات الحسابية باستخدام الهندسة في الحالة العامة و صعوبة إيجاد ضوابط لمفهوم العشوائية في مجال الهندسة تمثل العيوب التي تؤخذ على التعريف الهندسي للاحتمال .

٤- المدخل الرياضي للاحتمال (تعريف كولموغوروف)- مسلمات الاحتمال :

فيما يلي سنضع تعريفاً رياضياً لدالة الاحتمال مبنياً على شروط كولموغوروف، ندعو الدالة العددية $P(A)$ المعرفة على جبر الأحداث F $(\forall A \in F)$ بأنها تمثل احتمال أو دالة احتمالية إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية (شروط كولموغوروف) :

١": $P(A) \geq 0 \quad \forall \quad A \in F$ أي أن $P(A)$ دالة غير سالبة .

٢": $P(\Omega) = 1$.

٣": إذا كان $A_i \in F$ ، حيث $i \neq j \; ; \; A_i \cap A_j = \phi$.

عندئذ :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

وذلك من أجل n محدودة أو غير محدود ة: $n=\infty$ ، مما تقدم نكون قد توصلنا إلى الفضاء الاحتمالي الذي كما ذكرنا يمثل ثلاثية (Ω, F, P) ، حيث Ω فضاء الأحداث الابتدائية ، و F جبر الأحداث، $P(A)$ الدالة الاحتمالية المعرفة من أجل أي حدث $A \in F$.

○ **خصائص التعريف الرياضي للاحتمال :**

سوف نعرض خصائص التعريف الرياضي للاحتمال من خلال :

١) $P(\phi)=0 \quad \forall \quad \phi\in F$

وذلك لأن :
$$P(\phi \cup \Omega) = P(\phi) + P(\Omega) \Rightarrow$$
$$P(\Omega) = P(\phi) + P(\Omega) \Rightarrow P(\phi) = 0$$

⊕ ***ملاحظة*** : إذا كان $P(A)=0$ فهذا لا يعني أن $A = \phi$ ، و إذا كان لدينا A , B حدثين متنافيين فإن : $P(A\cap B)=0$

٢) إذا تحقق الشرط $A\subset B$ فإن :

a) $P(A) \leq P(B)$

b) $P(B/A) = P(B) - P(A)$

و ذلك لأن :

$$A \cap (B/A) = \emptyset \quad , \quad B = A \cup (B/A)$$

و بالتالي تتحقق العلاقة :

$$P(B) = P(A) + P(B/A)$$

و هذا يؤدي إلى تحقق (a) و (b) و هما :

a) $P(A) \leq P(B)$

b) $P(B/A) = P(B) - P(A)$

<u>نتيجة</u> :

إذا كان $A=B$ فإن $P(A) = P(B)$ و بالتالي :

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subseteq C \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} P(A) \leq P(B) \\ P(B) \leq P(A) \end{matrix}$$

وهذا يعني أن $P(A)=P(B)$. و نترك للقارئ اثبات أن العكس غير صحيح .

٣- $P(A)\leq 1 \ \forall A \ni F$

و ذلك لأن $A \subseteq \Omega \Leftarrow P(A) \leq P(\Omega)$ و هذا يعني أن $P(A)\leq 1$.

و بهذا الشكل نجد من الشرط رقم (١) من شروط كولموغوروف أنه من أجل أي حدث $A \ni F$ يكون لدينا : $0 \le P(A) \le 1$.

٤- بفرض أن الأحداث $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, A_n$ تشكل تجزئة للحدث الأكبر Ω عندئذ :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1$$

وذلك لأن :

$A_i \cap A_j = \emptyset$ و $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

و $i \neq j$ عندئذ :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

في الحالة التي تكون فيها $n=2$ بحيث $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$

عندئذ : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

٥- إذا كان $A \ni F$ و $B \ni F$ حدثين اختياريين عندئذ يكون :

1) $A \cup B \in F$

2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

وذلك لأن $A \cup B \in F$.

لأن جبر الأحداث مغلق بالنسبة للاتحاد و هذا بالنسبة لـ (١) ، أما بالنسبة لـ (٢) لدينا :

$$A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$$

$A \cap (B - A \cap B) = \phi$ عندئذ :

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B - A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

حيث : $A \cap B \subseteq B$

تعميم:

بطريقة الاستقراء الرياضي يمكن تعميم الخاصة (٢) من أجل n حدث أي :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) + \cdots \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

<u>الإثبات :</u>

من أجل $n=2$ العلاقة صحيحة ، نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ عندئذ :

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + P(A_n) - P(A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_{n-1}) + P(A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)) \end{aligned}$$

و لدينا أيضاً :

$$P\left(A_n \cap \left(\cup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\right) = P\left(\cup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right)$$

و من هنا نجد أن :

$$P\left(A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_n) - \sum P(A_i \cap A_j \cap A_n) + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n)$$

و بهذا الشكل يتم المطلوب .

٦- <u>متباينة بول :</u>

إذا كانت $A_i \ni F$ و $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n$ فإن :

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

<u>الإثبات:</u>

لدينا :

$$\cup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \cap \bar{A}_1) \cup (A_3 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_1) \cup \ldots \cup A_n \cap (A_{n-1} \cap \ldots \cap \bar{A}_1)$$

حيث الأحداث المتمثلة في حدود العلاقة السابقة متنافية مثنى و لدينا :

$$A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1} \subseteq A_3 \quad , \ldots\ldots\ldots\ldots , \; A_n \cap \overline{A_{n-1}} \cap \ldots\ldots \cap \overline{A_1} \subseteq A_n$$

عندئذ نجد :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) + P(A_2 \cap \overline{A}_1) + \ldots\ldots + P(A_n \cap A_{n-1} \cap \overline{A}_1) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$$

٧- إذا كانت الأحداث A_i و F_n حيث $i = 1,2,3, \ldots \ldots, n$ ، فإن :

$$P(\cap_{i=1}^{n} A_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(1 - P(A_i)\right)$$

الإثبات :

باستخدام قانون دومورغان نجد :

$$\begin{aligned} P(\cap_{i=1}^{n} A_i) &= 1 - P(\cap_{i=1}^{n} \bar{A}_i) \\ &= 1 - P(\cap_{i=1}^{n} \bar{A}_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n}\left(1 - P(A_i)\right) \end{aligned}$$

٨- إذا كان B, A حدثيين اختياريين من F فإن :

$$(1) \quad P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$(2) \quad P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})$$

و يمكن كتابة العلاقات (١) و (٢) على الشكل :

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$

الإثبات :

لدينا :

$$\begin{aligned} A = A \cap \Omega &= A \cap (B \cup \overline{B}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

حيث إن: $(A\cap B)\cap(A\cap\overline{B})=\phi$ و بأخذ احتمال الطرفين نجد المطلوب بالنسبة لـ (١)، و بالأسلوب نفسه يمكن الحصول على العلاقة (٢) .

٩- إذا كانت متتالية الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ المعدودة و المتزايدة من جبر الأحداث F ، أي :

$$A_1\subseteq A_2\subseteq \dots\subseteq A_n\subseteq\dots$$

و كان $A=\bigcup_{k\geq 1}A_k$ عندئذ :

$$P(\bigcup_{k\geq 1}A_k) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

<u>الإثبات:</u>

في الواقع يمكننا أن نكتب :

$$A=\bigcup_{k\geq 1}A_k = A_1\cup(A_2-A_1)\cup\dots\dots\cup(A_n-A_{n-1})\cup\dots\dots$$
$$A_n = A_1\cup(A_2-A_1)\cup\dots\dots\cup(A_n-A_{n-1})$$

و بملاحظة أن الأحداث A_k-A_{k-1} متنافية مثنى $k\geq 1$ ، عندئذ بأخذ احتمال الطرفين في العلاقتين الأخيرتين نجد أن :

$$P(A)=P(\bigcup_{k\geq 1}A_k)=P(A_1)+P(A_2-A_1)+\dots+P(A_n-A_{n-1})+\dots$$
$$P(A_n)=P(A_1)+P(A_2-A_1)+\dots+P(A_n-A_{n-1})$$

و منه نجد :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty}\left[\,P(A_1)+P(A_2-A_1)+\dots+P(A_n-A_{n-1})\,\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

١٠- إذا كانت $A_1 , A_2, \quad ...., A_n, ...$ متتالية أحداث معدودة و متناقصة من جبر الأحداث F ، أي:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq ..... \supseteq A_n \supseteq ......$$

و كان $A = \bigcap_{k\geq 1} A_k$ عندئذ :

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

<u>الإثبات :</u>

لدينا متتالية الأحداث معدودة و متناقصة عندئذ متمماتها تشكل متتالية معدودة و متزايدة في الأحداث من جبر الأحداث F ، أي :

$$\overline{A_1} \subseteq \overline{A_2} \subseteq .... \subseteq \overline{A_n} \subseteq ...$$

عندئذ :

$$P(\overline{A}) = P(\bigcup_{k\geq 1} \overline{A}_k) = \lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) \Rightarrow$$

$$1 - P(A) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - P(A_n)\right)$$

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

و هو المطلوب .

ملاحظة : تدعى الخاصتان (٩) و (١٠) بخاصيتي الاستمرار في الاحتمالات .

- **ملاحظة :** لقد تعرفنا في الفقرات السابقة إلى المركبات الثلاثة للفضاء الاحتمالي وهو (Ω, F, P) ، والآن لنتعرف إلى أهم الفضاءات الاحتمالية في بعض الحالات الخاصة.

١) الفضاء الاحتمالي المنقطع :

بفرض أن $\Omega = \{\omega\}$ فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة عشوائية (Ω منتهية أو قابلة للعد) ، و بفرض أن F جبر الأحداث فوق Ω و من أجل كل $\omega \in \Omega$ يوجد العدد $P(\omega)$ ، أي فوق Ω تعرف الدالة $P(\omega)$ التي تحقق الشروط التالية :

١": $P(\omega)$ دالة غير سالبة ($P(\omega) \geq 0$ مهما $\omega \in \Omega$) .

٢": $\sum\limits_{w \in A} P(\omega)$.

٣": من أجل أي $A \subseteq \Omega$ نكتب :

$$P(A) = \sum_{w \in A} P(\omega) \qquad (*)$$

عندئذ ندعو الثلاثية (Ω, F, P) بالفضاء الاحتمالي المنقطع .

من أجل التحقق من ذلك يكفي التأكد من الخاصة الجمعية للاحتمال :

إذا كانت الأحداث الاختيارية $A_1, A_2, \ldots\ldots$ بحيث $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ مع $i \neq j$ عندئذ بالاعتماد على العلاقة (*) يجب أن يتحقق :

$$P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{w ;\, w \in \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i} P(\omega) \qquad (**)$$

من أجل إثبات ذلك لدينا:

$$P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} \sum_{w \in A_i} P(\omega) = \sum_{i \geq 1} P(A_i)$$

- **ملاحظة:** إذا كانت $n < \infty$ عندئذ الخاصة الجمعيّة للاحتمال في العلاقة (*) محققة، أما إذا كانت $n = \infty$ فإن المجموع $\sum\limits_{i \geq 1} P(A_i)$ يمثّل مجموع حدود موجبة علماً أنه مهما تكن k فإن :

$$\sum_{i\geq 1}^{k} P(A_i) \leq P(\Omega) = 1$$

و بالتالي المجموع متقارب ، أي يمكننا القول إن الخاصة الجمعيّة للاحتمال محققة .

من أجل فهم فكرة الفضاء الاحتمالي المنقطع لندرس الحالة الخاصة التالية :

بفرض أن :

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \;;\; \omega \in \Omega$$

علماً أن $|\Omega|$ تمثل عدد عناصر Ω، عندئذ :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A_i} P(\omega) = \sum_{\omega \in A_i} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (***)$$

أي احتمال الحدث $A[P(A)]$ يمثل عدد عناصر الحدث A مقسوماً على عدد عناصر فضاء الأحداث الابتدائية Ω ، و الفضاء الاحتمالي في هذه الحالة يدعى بالفضاء الاحتمالي الكلاسيكي . أي أن الفضاء الاحتمالي المنقطع في الحالة الخاصة المذكورة يدعى بالفضاء الاحتمالي المنقطع إذاً فضاء الأحداث الابتدائية Ω يمثل مجموعة منتهية أو قابلة للعد و بحيث يكون للأحداث الابتدائية الحظ نفسه في الوقوع .

مثال (١٩):

إذا كانت التجربة العشوائية إلقاء قطعة نقد متوازنة مرة بعد مرة حتى نحصل لأول مرة على صورة H، عندئذ فضاء الأحداث الابتدائية يكون له الشكل :

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots.., \omega_i, \ldots...\}$$

علماً أن :

$$\{\omega_i\} = \{\underbrace{TT, \ldots \ldots, T}_{i-1}H\}$$

الآن لنضع :

$$P(\omega_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

و هنا واضح أن : $P(\omega_i) \geq 0$ و إن :

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

و ذلك لأن المجموع يمثل متسلسلة هندسية غير منتهية حدها الأول $\frac{1}{2}$ و أساسها $\frac{1}{2}$.

و بهذا الشكل نكون قد بيّنّا أن العلاقة :

$$P(\omega) = (\frac{1}{2})^i \quad ; \quad i = 1, 2, ...$$

تمثل توزيع احتمالي، و بالتالي نكون قد شكلنا فضاءً احتمالياً منقطعاً .

و الآن إذا كان لدينا الحدث :

$$A = \{\omega_2 , \omega_4, ... , \omega_{2i}, ...\}$$

الذي يقع إذا حصلنا على H في الحالات الزوجية ، عندئذ حسب العلاقة (*) يمكن حساب احتمال الحدث A على الشكل التالي :

$$P(A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + ...$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ...\right] = \frac{1}{4} . \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

و إذا أردنا حساب احتمال الحدث المتمم لـ A نجد أن :

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

أي احتمال وقوع الحدث $\overline{A}$ يساوي ضعف احتمال الحدث A.

مثال (٢٠) :

افرض أن التجربة القاء حجر نرد متوازن مرة واحدة فقط ، و ليكن A الحدث الذي يقع إذا حصلنا على عدد يقبل القسمة على ٣ عندئذ احسب احتمال الحدث A .

الحل: لدينا :

$$\Omega = \{\omega_1 , \omega_2, ... , \omega_6\}$$

حيث إن : $\omega_i = i \quad , \quad i = 1, 2, 3, ...6$

عندئذ : $A_1 = \{3, 6\}$ و منه حسب التعريف يكون :

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

مثال (٢١):

افرض أن التجربة العشوائية إلقاء قطعة نقد متوازنة مرة بعد مرة حتى نحصل على H مرتين متتاليتين ، عندئذ المطلوب :

١- تعيين الفضاء الاحتمالي لهذه التجربة .

٢- احسب احتمال الحدث الذي يقع إذا كان عدد مرات الوقوع أقل من ٥.

الحل :

١- واضح أن فضاء الأحداث الابتدائية له الشكل :

$$\Omega = \{HH, THH, TTHH, HTHH, TTTHH, HTTHH, THTHH, \dots \dots\}$$

أي فضاء الأحداث الابتدائية لهذه التجربة يمثل مجموعة قابلة للعد ، لذلك جبر الأحداث F يتكون من جميع المجموعات الجزئية المشكلة من Ω عندئذ :

$$P(\omega_1) = \frac{1}{2^2} \quad , \quad P(\omega_2) = \frac{1}{2^3} \quad , \quad P(\omega_3) = \frac{1}{2^4}$$

$$P(\omega_4) = \frac{1}{2^4} \, , \quad P(\omega_5) = \frac{1}{2^5} \, , \quad P(\omega_6) = \frac{1}{2^6}$$

$$P(\omega_7) = \frac{1}{2^7} \, , \; ....$$

و بالتالي نستطيع أن نكتب:

$$\sum_{w\in\Omega} P(\omega) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} + \frac{5}{2^6} + \frac{6}{2^7} + \cdots = 1$$

٢- من أجل حساب احتمال أن يكون عدد مرات الوقوع أقل تماماً من ٥ نعتمد على العلاقة (*) أي :

$$P(A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \frac{3}{2^5} = \frac{19}{32}$$

٢) الفضاء الاحتمالي المستمر:

بفرض أن $\Omega = \{\omega\}$ فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة العشوائية (Ω يمثل مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد) ، عندئذ جبر الأحداث F مولد من المناطق المقيسة فوق Ω أي المناطق التي لها مساحة . عند ذلك من أجل كل $\omega \in \Omega$ يوجد العدد $P(\omega)$ أي نعرف على Ω دالة عددية تحقق الشروط التالية :

١": $\forall\, \omega \in \Omega \,; P(\omega) \geq 0$

٢": $\int P(\omega)\, d\omega = 1$ عندئذ من أجل كل $A \in F$ نضع :

$$P(A) = \int_{w\in A} P(\omega)\, d\omega \qquad (*,1)$$

عندئذ الثلاثية (Ω, F, P) تمثل فضاءً احتمالياً مستمراً ، حيث إن :

$$P(\bigcup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} \int_{w\in A_i} P(w)\, dw = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

علماً أن :

$$P(A_i) = \int_{w\in A_i} P(w)\, dw$$

ملاحظة : بفرض أن $w = \{x, y\}$ عندئذ :

$$\int P(w)\, dw = \iint P(x, y)\, dx\, dy$$

و عادة الفضاء الاحتمالي المستمر يكتب على الشكل : $(\Omega,\ F, P(\omega))$.

بحيث نعلم أنّ F يمثل جميع المناطق المقيسة فوق Ω و $P(\omega)$ في هذه الحالة تدعى كثافة التوزيع الاحتمالي أو بشكل مبسط "كثافة التوزيع".

و من أجل التوضيح أكثر نأخذ Ω مكونة من k منطقة مقيسة لكل منها مساحة محددة و نرمز لها بـ $|\Omega|$ و $\infty > |\Omega| > 0$ ، و بالإضافة لذلك كل الأحداث الابتدائية لها الحظ نفسه في الوقوع ، لنضع :

$$P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \ ; \quad \omega \in \Omega$$

عندئذ بما أن $P(\omega)$ تمثل كثافة التوزيع الاحتمالي فإن العلاقة $(1, *)$ تكتب على الشكل التالي :

$$P(A) = \int_{A_i} P(\omega)\, d\omega = \int_{A_i} \frac{d\omega}{|\Omega|}$$

و في هذه الحالة الفضاء الاحتمالي المستمر يدعى بالفضاء الاحتمالي الهندسي .

مثال (٢٢):

إذا عدنا إلى المثال (١٨) " مسألة التقاء شخصين" نجد أنه :

$$P(A) = \int_{\omega \in A_i} \frac{d\omega}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2}$$

$$= 1 - (1 - \frac{\tau}{T})^2$$

علماً أن:

$$|A| = T^2 - 2\left(\frac{1}{2}(T - \tau)^2\right) = T^2 - (T - \tau)^2$$

مثال (٢٣) :

بفرض أن :

$$\Omega=\{(x,y)\ ;\ 0\le x\le 1\ \ ,0\le y\le 1\ \}$$

حيث إن x,y عددان ، عندئذ احسب احتمال أن يكون مجموع هذين العددين لا يزيد عن الواحد و جداؤهما لا يزيد عن $\frac{2}{9}$.

<u>الحل :</u> لدينا :

$$x-y\le\frac{2}{9},\ \ x+y\le 1$$

و بتحويل المتراجحات لمساويات نجد :

1) $x.y=\frac{2}{9}$

2) $x+y=1$

و من (٢) نجد أن :

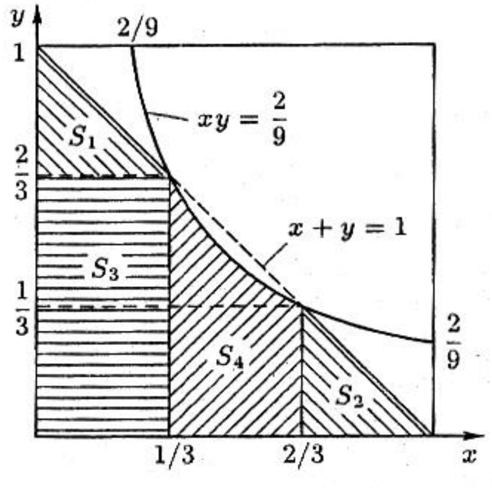
3) $y=1-x$

نعوّض في (١) نجد: $x^2-x-\frac{2}{9}=0$

و بالتالي : $x_1=\frac{1}{3}$ أو $x_2=\frac{2}{3}$

و لدينا : $|A|=S_1+S_2+S_3+S_4$

انظر الشكل (١-٨) وبالتالي :



الشكل (١-٨)

$$S_1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

$$S_4 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{2}{9x} dx = \frac{2}{9}[\ln x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{9}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}\ln\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}\ln(2)$$

و منه :

$$\left|A\right| = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 2$$

و بالتالي احتمال الحدث المطلوب هو:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln 2}{1} = 0.487$$

(٨-١): التحليل التوافقي و تطبيقاته في حساب الاحتمال :

بعد أن درسنا الفضاء الاحتمالي التقليدي (الكلاسيكي) تبين لنا أننا بحاجة لمعرفة عدد عناصر فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة العشوائية ، لهذا لأمر سوف نذكر بعض المبادئ الأساسية في الحساب التوافقي لمساعدتنا في معرفة عدد عناصر فضاء الأحداث الابتدائية و عدد عناصر الحدث الذي يقع و بالتالي احتمال الحدث المطلوب .

١) قاعدة الضرب :

إذا حدثت التجربة E_1بـ n_1 طريقة ، و من أجل كل طريقة من الطرق السابقة حدثت التجربة E_2بـ n_2 طريقة، و لكل طريقة من الطرق السابقة حدثت التجربة E_3بـ n_3 طريقة و هكذا حتى التجربة E_k التي تحدث في بـ n_k طريقة فإن التجارب E_1و E_2 و.... E_k تحدث معاً بعدد من الطرق قدره :

$$n_1.n_2\,.....n_k$$

٢) التراتيب:

إذا افترضنا أن لدينا n شيئاَ و نريد ترتيب r شيئاً منها في متبادلة ، فمن الضروري معرفة عدد الطرق المختلفة التي نستطيع بواستطها تنفيذ العمل المذكور .

و يرمز عادة لعدد الطرق هذا بـ A_n^r و يقرأ عدد تراتيب n شيئاَ مأخوذاً r شيئاً منها في كل مرة .

مبرهنة:

إن عدد طرق ترتيب r شيئاً من أصل n شيئاَ ($r \le n$) يساوي :

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

الإثبات :

يمكن التعامل مع هذه المسألة و كأننا نوزع r كرة في n صندوق .

فيوجد n طريقة لوضع الكرة الأولى من الصندوق الأول، و بعد ذلك توجد $(n-1)$طريقة لوضع الكرة الثانية في الصندوق الثاني.... و هكذا .

و نستطيع وضع الكرة الأخيرة بـ $n-(r-1)=n-r+1$ طريقة ، أي أننا نستطيع تنفيذ العمل المذكور بعدد من الطرق :

$$A_r^n = n(n-1)\ ....(n-r+1)$$

و إذا ضربنا و قسمنا الطرف الأيمن بالعلاقة الأخيرة على المقدار $(n-r)!$ نجد أن :

$$A_r^n = \frac{n(n-1)\ ....\ (n-r+1)\ \ ....1}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}\ ;\quad 0 \leq r \leq n$$

و في الحالة التي يكون فيها $r = n$ نجد أن :

$$A_r^n = \frac{n!}{0!} = n!\ ;\ 0!=1$$

ملاحظة ١:

لدينا : $n!=n(n-1)!$

و إذا وضعنا في هذه العلاقة $n=1$ فنجد أن : $1!=1.0!$ ، و من أجل أن تنسجم هذه المساواة يجب أن نقبل منطقياً أن $0!=1$.

و بذلك نكون قد أزلنا الشك حول صحة العلاقة المذكورة من أجل $n=1$.

ملاحظة ٢:

من أجل $r>n$ أو $r<1$ أو $n<1$ فإن : $A_r^n=0$.

٣) المتوافقات :

إذا كان لدينا مجموعة $N=\{1,2,....,n\}$ ، عندئذ اختيارنا مجموعة جزئية قوامها r شيئاً $(r \leq n)$ يدعى متوافقة.

و كثيراً ما يطلب إحصاء عدد الطرق التي يمكن بها تنفيذ العمل السابق. إن هذا العدد من الطرق يدعى عدد متوافقات n شيئاً مأخوذاً منها r شيئاً بآن و يرمز له بـ $\binom{n}{r}$ أو C_r^n.

و هنا نشير إلى أن المتوافقة هي مجموعة جزئية ، و المتوافقات هي عدد المجموعات الجزئية المشكلة و التي لا أهمية للترتيب فيها .

مبرهنة(٢):

إن عدد متوافقات n شيئاً مأخوذ منها r شيئاً بآن هو :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

الإثبات :

إذا اخترنا من المجموعة N مجموعة جزئية تتألف من r شيئاً نستطيع ترقيمها بعدد من الطرق $r!$ وفق الأرقام : $1,2,...,r$ و العدد المتبقي من الأشياء هو : $(n-r)$ يرقم بالأعداد $r+1,\ r+2,\ ....,n$ بعدد من الطرق قدره $(n-r)!$، و بالتالي المجموعة المؤلفة من n عنصر ترقّم بعدد من الطرق :

$$r!(n-r)!$$

و لكن اختيار المجموعة الجزئية ذات الـ r عنصراً نستطيع تنفيذه بعدد من الطرق C_r^n طريقة ، و نستنتج من ذلك أن عدد طرق ترقيم مجموعة مؤلفة من n عنصر هو :

$$C_r^n\ r!(n-r)! = n!$$

و منه فإن :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}\ ;0 \le r \le n$$

ملاحظة ٣ :

بالتعريف نضع $C_r^n = 0$ عندما $r > n$ أو $n < 1$ أو $r < 1$.

أهم الخصائص المتعلقة بـ C_r^n بدون برهان نترك ذلك للقارئ .

١): $C_r^n = C_{n-r}^n$

٢) $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$

٣) $C_1^n = C_{n-1}^n = n \ , \ C_n^n = C_0^n = 1$

و هنا لا بد من ذكر بعض العلاقة المرتبطة بمنشور ثنائي نيوتن (ذات الحدين) :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

و يبرهن على صحة هذه العلاقات بطريقة الاستقراء الرياضي ، نفرض أن : $n = 2$ ، عندئذ :

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = \sum_{i=0}^{2} C_i^2 \, x^i$$

الآن نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ أي :

$$(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{n-1} x^i$$

عندئذ :

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1}.(1+x)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{n-1} x^i.(1+x)$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} C_i^{n-1} x^i + \sum_{i=1}^{n-1} C_i^{n-1} x^{i+1}$$

و إذا وضعنا في المجموع الأول : الحد الأول : $C_0^{n-1} = C_0^n = 1$ ، و في المجموع الثاني الحد الأخير : $C_{n-1}^{n-1} x^n = C_n^n \, x^n = x^n$ ، عندئذ :

$$(1+x)^n = C_0^n \, x^o + \sum_{i=1}^{n-1} C_i^{n-1} x^i + \sum_{i=0}^{n-2} C_i^{n-1} x^{i+1} + C_n^n \, x^n$$

و سوف ندخل في المجموع الأول دليل جديد و هو : $j = i - 1$ عندئذ :

$$(1+x)^n = C_0^n\ x^o + \sum_{j=1}^{n-2} C_{j+1}^{n-1} x^{j+1} + \sum_{i=0}^{n-2} C_i^{n-1} x^{i+1} + C_n^n\ x^n$$

$$= C_0^n\ x^o + \sum_{i=0}^{n-2} (C_{i+1}^{n-1} + C_i^{n-1})\ x^{i+1} + C_n^n\ x^n$$

$$= C_0^n\ x^o + \sum_{i=0}^{n-2} C_{i+1}^n\ x^{i+1} + C_n^n\ x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

و هو المطلوب .

- **ملاحظة (٤)** : لدينا :

$$(a+b)^n = a^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n \sum_{i=0}^{n} C_i^n \frac{b^i}{a^i} = \sum_{i=0}^{n} C_i^n b^i a^{n-i}$$

مماّ تقدم نجد ما يلي :

1) $\sum_{i=0}^{n} C_i^n = 2^n$

و التي نحصل عليها من العلاقة : $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n\ x^i$ و ذلك بأخذ $x=1$.

2) $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\ C_i^n = 0$

و التي نحصل عليها من العلاقة : $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n\ x^i$ و ذلك بأخذ $x=-1$.

3) $(1+x)^n\,(1+x)^r = (1+x)^{n+r}$

و بالتالي نجد أن :

$$C_k^{n+r} = \sum_{i=0}^{k} C_{k-i}^{r} . C_i^n$$

4) $\sum_{r=0}^{k} C_r^{n+r} = C_k^{\;n+k+1}$

بالواقع :

$$C_0^{n+0} + C_1^{n+1} = C_0^{n+1} + C_1^{n+1} = C_1^{n+2}$$

عندئذ :

$$\sum_{r=0}^{r} C_r^{n+r} = C_1^{n+2} + \sum_{r=2}^{k} C_r^{n+r}$$

$$= .... = C_{k-1}^{n+k} + C_k^{n+k} = C_k^{n+k+1}$$

و في الحالة التي يكون فيها $r = n = k$ نجد أن :

$$C_n^{2n} = \sum_{i=0}^{n} C_{n-i}^{n} \; C_i^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (C_i^n)^2$$

5) $\sum_{i=0}^{n} i \, C_i^n x^{i-1} = n\,(1+x)^{n-1}$

و ذلك من خلال اشتقاق العلاقة :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n \; x^i$$

و في الحالة الخاصة إذا كانت $x=1$ فنجد أن :

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^n = n \ 2^{n-1}$$

أمّا إذا كانت $x=-1$ فنجد أن :

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{i-1}.i \ C_i^n = 0$$

مثال (٢٤) :

إذا تألّف رقم الهاتف من سبعة أرقام ، أولها من اليسار ٢ أو ٣ أو ٧ ، عندئذ كم خط هاتف يمكن تركيبها في مدينة ما ؟

<u>الحل :</u>

بما أن كل خط هاتف يتألف من ٧ خانات ، الأولى من اليسار يوجد فيها ثلاث طرق فقط (لأنها تضم العدد ٢ أو ٣ أو ٧)، أمّا باقي الخانات فتملأ كل منها بعشر طرق هي الأرقام 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

وحسب قاعدة الضرب يمكن تركيب خطوط هاتف عددها:

$$3\times10\times10\times10\times10\times10\times10=3000,000.$$

مثال (٢٥) :

إذا كانت لدينا الأحرف: أ، ب، ح، د، هـ فكم كلمة ذات ثلاثة أحرف مختلفة يمكن صياغتها من الحروف السابقة حتى و لو لم يكن للكلمة معنى لغوي ؟

<u>الحل :</u>

واضح أن المطلوب هو بكم طريقة يمكنك ترتيب خمسة حروف مميزة مأخوذة ثلاثة في كل مرة ، أي ترتيب خمسة حروف مأخوذة ثلاثة في كل مرة و هذا يساوي :

$$A_3^5 = \frac{5\ !}{(5-3)\,!} = \frac{5\ !}{2\ !} = \frac{5\,.\,4\,.\,3.\,2.1}{2\,!} = 60$$

مثال (٢٦) :

بكم طريقة يمكن أن تختار لجنة مؤلفة من ثلاثة طلاب من صف فيه ١٠ طلاب و ذلك دون وجود مناصب لأعضاء اللجنة ؟

<u>الحل :</u>

إن عدد الطرق المطلوبة يعطى حسب قاعدة التوافيق أي :

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!(7)!} = \frac{10.9.8.7\,!}{3!(7)!} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

مثال (٢٧) :

حقيبة دوائية فيها سبعة ظروف سيتامول و ٥ ظروف دوبران ، و المطلوب :

١) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ ظروف من الحقيبة ؟

٢) بكم طريقة يمكن اختيار ٤ ظروف بحيث يكون ظرف دوبران و ٣ ظروف سيتامول ؟

٣) ما احتمال حصولنا على ظرف دوبران و ٣ ظروف سيتامول عند اختيار ٤ ظروف من الحقيبة؟

<u>الحل:</u>

١": إن مجموع الظروف الموجود في الحقيبة هو ١٢ ظرفاً و نريد اختيار ٤ ظروف منها فيكون عدد الطرق اللازمة للاختيار هي :

$$C_4^{12} = \frac{12\,!}{4\,!\,(12-4)\,!} = \frac{12\,!}{4\,!\;8\,!} = \frac{12.\,11\,.\,10.\,9}{4.\,3.\,2.1} = 495$$

٢": إن عدد طرق اختيار ظرف دوبران هو: $C_1^5 = 5$، و عدد طرق اختيار ٣ ظروف سيتامول هو : $C_3^7 = 35$. و اعتماداً على قاعدة الضرب فإن عدد طرق اختيار ظرف دوبران و ٣ ظروف سيتامول هو :

$$C_3^7 . C_1^5 = 175$$

٣": من الطلب الأول وجدنا أن عدد عناصر Ω هو ٤٩٥ و من الطلب الثاني وجدنا أن عدد عناصر الحدث A، وهو اختيار ظرف دوبران واحد و ثلاث ظروف سيتامول عندئذ:

$$P(A) = \frac{C_3^7 \cdot C_1^5}{C_3^{12}} = \frac{175}{495}$$

مثال (٢٨) :

ورق لعب مؤلف من ٥٢ ورقة يخلط بشكل جيد و يقسم إلى مجموعتين متساويتين تضم كل مجموعة ٢٦ ورقة، و المطلوب:

١) حساب احتمال الحدث Aالذي يقع إذا ظهر أس في كل مجموعة .

٢) حساب احتمال الحدث Bالذي يقع إذا اختفت جميع أوراق الآس من إحدى المجموعتين و ظهورها جميعاً في المجموعة الثانية ؟

٣) حساب احتمال الحدث C الذي يقع إذا كان في إحدى المجموعتين يوجد أس واحد و في الثانية يوجد ثلاثة آس ؟

<u>الحل :</u>

١": إن عدد الطرق التي نقسم فيها ورق اللعب إلى مجموعتين متساويتين يساوي : C_{26}^{52}، و هذا العدد يمثل عدد عناصر فضاء الأحداث الابتدائية Ω . و لكن عدد عناصر الحدث Aهو : $C_2^4 . C_{26}^{52}$، عندئذ يكون :

$$P(A) = \frac{C_2^4 \cdot C_{26}^{52}}{C_{26}^{52}} \approx 0.13$$

٢": إن عدد الحالات الموافقة للحدث B أو عدد عناصر الحدث Bهي : $2.C_2^4.C_{26}^{52}$ و ذلك لأن :

الحدث B يقع في حالتين : يوجد ٤ أس في احدى المجموعتين و اختفاء هذه الأوراق في المجموعة الثانية أو بالعكس، أي إن :

$$P(B)=\frac{2.C_4^4.C_{22}^{48}}{C_{26}^{52}}\approx 0.11$$

٣": إن عدد عناصر الحدث C هي $2.C_3^4.C_{23}^{48}$ ، عندئذ فإن :

$$P(C)=\frac{2.C_3^4.C_{23}^{48}}{C_{26}^{52}}\approx 0.46$$

مثال (٢٩) :

صندوق يحتوي على n كرة مرقمة بـ $1,2,3,\ldots,\ n$ بشكل عشوائي، و على التتالي نسحب r كرة بحيث إن $r\le n$ ، و المطلوب :

١) احسب احتمال الحدث H الذي يقع إذا حصلنا على أرقام مختلفة لتلك الكرات .

٢) احسب احتمال الحدث B الذي يقع إذا كان الرقمان المتطرفان متساويين أي إن الأحداث الابتدائية للحدث B لها الشكل :

$$\omega=\{\, i\ a_2\ a_3\ ....\ a_{r-2}\ i\,\}\ ;\ i=1,2,3,....,n$$

الحل:

١": لدينا $N(\Omega)=n^r$ و ذلك لأن السحب مع الإعادة ، و $N(H)=A_r^n$ عندئذ:

$$P(H)=\frac{N(H)}{N(\Omega)}=\frac{A_r^n}{n^r}=\frac{n!}{(n-r)!n^r}$$

٢": لدينا $N(B)=n\,A_n^{r-2}=n.n^{r-2}=n^{r-1}$

حيث إن : $A_n^{r-2}=n^{r-2}$ و بالتالي :

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{n^{r-1}}{n^r}=\frac{1}{n}$$

مثال (٣٠):

طاولة مستديرة بشكل عشوائي يجلس n رجل و n امرأة و المطلوب :

١) احسب احتمال الحدث H الذي يقع إذا جلس على الطاولة رجل – امرأة و رجل – امرأة على التتالي .

٢) احسب احتمال الحدث G الذي يقع إذا جلس الرجل جانب زوجته أو العكس .

<u>الحل :</u>

١": لدينا $N(\Omega)=(2n)!$, $N(H)=2(n!)^2$ ، عندئذ :

$$P(H)=\frac{N(H)}{N(\Omega)}=\frac{2(n!)^2}{(2n)!}$$

٢": لدينا $N(G)=n!2^n$ و عليه :

$$P(G)=\frac{N(G)}{N(\Omega)}=\frac{n!2^n}{(2n)!}$$

- **(٩-١): الاحتمالات الشرطية – استقلال الأحداث :**

(١) الاحتمالات الشرطية :

بفرض (Ω,F,P) فضاء احتمالي منقطع و $B,A \ni F$ عندئذ يمكن حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B)$ وذلك من خلال ما يلي :

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}\,,\ P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}\,,\ \ P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}$$

الآن لنفرض أنه جاء نبأ بأن الحدث B قد وقع ، أي فضاء الأحداث الابتدائية Ω اختصر إلى عدد عناصر الحدث B ، و أصبح الاحتمال الشرطي للحدث A علماً أن B قد وقع و الذي نرمز له بالرمز : $P(A/B)$ والذي يعطى حسب تعريف الاحتمال في الفضاء الاحتمالي الكلاسيكي على الشكل :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{N(B)}=\frac{N(A\cap B)/N(\Omega)}{N(B)/N(\Omega)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

و هذه العلاقة الأخيرة $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ تمثل احتمال الحدث A علماً أن الحدث B قد وقع و هو الاحتمال الشرطي للحدث A علماً بأن B قد وقع .

- و بشكل عام إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً اختيارياً، و $A,B\ni F$ حيث $P(B)>0$ ،عندئذ الاحتمال الشرطي للحدث A بشرط وقوع الحدث B يعطى بالعلاقة :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (*)$$

و هذا التعريف الكلاسيكي للاحتمال الشرطي المعطى بالعلاقة: (*) و يحقق ما يلي :

١) إذا كان $A\cap B=\phi$ و $P(B)>0$ فإن : $P(A/B)=\dfrac{P(\phi)}{P(B)}=0$

٢) إذا كان $A\supset B$ و $P(B)>0$ فإن : $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=1$

و نلاحظ أيضاً أنّ التعريف السابق للاحتمال الشرطي يحقق مسلمات التعريف الرياضي المجرّد للاحتمال (شروط كولموغوروف) :

1) $P(A/B)\geq 0$ ، (الاحتمال الشرطي غير سالب)

2) $P(\Omega/B)=\dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$

3) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n\in f \quad ; \quad (A_i\cap A_j)=\phi \quad , \quad i\neq j$

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i/B\right)=\frac{P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap B)}{P(B)}=\sum_{i=1}^{n}P(A_i/B)$$

و المسلّمة رقم (٣) يمكن أن تتحقق أيضاً من أجل $n=\infty$، و بهذا الشكل ينتج أنه إذا أخذنا بمنزلة فضاء أحداث ابتدائية F_B يعطى بالشكل :

$$F_B = \{ C / C = B \cap D ,\ \forall\ D \in F$$

و من أجل كل $C \ni F_B$ يمكن أن نضع الاحتمال الشرطي $P(C / B)$ ، عندئذ نحصل على فضاء احتمالي شرطي .

أخيراً يمكن أن نقول بما أن الاحتمال الشرطي يحقق شروط كولموغوروف ، عندئذ تتحقق كل الخواص التي حققها تعريف الاحتمال حسب كولموغوروف .

لو أمعننا النظر في العلاقة التي تعطينا الاحتمال الشرطي للحدث A علماً أن B يمكن أن نحصل على العلاقة التالية :

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B / A) \quad (\blacklozenge)$$

التي ندعوها بقاعدة الضرب بالاحتمالات و يمكن تعميم هذه القاعدة على n حدث ، أي :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n) = P(A_1) \,.\, P(A_2 / A_1) \,.\, \ ......\ . P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... \cap A_n) \quad (\blacklozenge \blacklozenge)$$

و يمكن البرهان على ذلك بطريقة الاستقراء الرياضي .

لدينا في الحالة $n = 2$ العلاقة $(\blacklozenge)$ صحيحة .

و لنفرض أن العلاقة $(\blacklozenge \blacklozenge)$ محققة من أجل $n-1$ حدث عندئذ :

$$\begin{aligned} P(\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .... A_{n-1}}_{B} \cap A_n) &= P(B \cap A_n) \\ &= P(B).P(A_n / B) \\ &= P(A_1).P(A_2 / A_1).P(A_3 / A_1 \cap A_2).....P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ....\cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

مثال (٣١) :

عائلة عندها طفلان، و المطلوب :

١) ما احتمال أن يكون في العائلة صبيان علماً أن الطفل الأول صبي .

٢) ما احتمال أن يكون في العائلة صبيان علماً أن في العائلة صبي واحد على الأقل .

الحل:

١": لدينا فضاء الاحداثيات الابتدائية :

$$\Omega = \{ b\,b \ , \ b\,g \,, g\,b \,, g\,g \}$$

عندئذ:
$$P(b\,b) = P(b\,g) = P(g\,b) = P(gg) = \frac{1}{4}$$

لنفرض الآن :

A الحدث الذي يقع إذا كان في العائلة صبيان فقط و احتماله $\frac{1}{4}$.

B الحدث الذي يقع إذا كان الطفل الأول صبياً و احتماله $\frac{1}{2}$.

C الحدث الذي يقع إذا كان في العائلة صبي واحد على الأقل و احتماله $\frac{3}{4}$.

عندئذ :

$$A = \{ b\,b \}$$
$$B = \{ b\,b \ , \ bg \}$$
$$C = \{ b\,b \ , \ b\,g \ , \ g\,b \}$$

و منه :

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A / C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$$

(٢) صيغة الاحتمال التام :

بفرض $A_1 , A_2 , \; ...., A_n$ أحداث تشكل تجزئة لـ Ω و ليكن الحدث B متعلّقاً بالتجربة نفسها بحيث :

$$P(A_n) > 0 \ , ..., \ P(A_2) > 0 \ , P(A_1) > 0$$

و الاحتمالات الشرطية هي :

$$P(B/A_n) \ , \ ..... \ , \ P(B/A_2), P(B/A_1)$$

عندئذ تتحقق العلاقة :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

و التي ندعوها بصيغة " الاحتمال التام"

<u>الإثبات:</u> الأحداث $A_1, A_2, ..., A_n$ متنافية مثنى و إن : $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ عندئذ الأحداث $A_i \cap B$ متنافية مثنى حيث: $i = 1, 2, ..., n$ ، عندئذ :

$$B = B \cap \Omega = B \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$$

عندئذ يحصل :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) . P(B / A_i)$$

مثال (٣٢) :

ثلاثة مصانع تنتج النوع نفسه من إنتاج معين بحيث ينتج المصنع الأول ٢٠% من الإنتاج، و المصنع الثاني ينتج ٣٠% ، و المصنع الثالث ينتج ٥٠%، و بحيث تكون نسبة الإنتاج المعيب في كل مصنع هي على الترتيب: ٥%، ٢%، ١% .

عندئذ لنفرض أن التجربة هي سحب إنتاج ما من أحد المصانع الثلاثة ، فما احتمال أن يكون هذا الإنتاج غير صالح (معيب) ؟

<u>الحل:</u>

A_1 الحدث تم سحب الانتاج من المصنع الأول .

A_2 الحدث تم سحب الانتاج من المصنع الثاني .

A_3 الحدث تم سحب الانتاج من المصنع الثالث .

B الحدث سحب انتاج معيب .

عندئذ نجد الأحداث A_1 , A_2 , A_3 تشكل تجزئة للحدث Ω و B حدث متعلق بالتجربة نفسها ، عندئذ حسب صيغة الاحتمال نجد أن :

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \,.\, P(B / A_i) \\
&= P(A_1) \,.\, P(B / A_1) + P(A_2) \,.\, P(B / A_2) + P(A_3) \,.\, P(B / A_3) \\
&= (0.2)\,(0.05) + (0.3)\,(0.02) + (0.5)\,(0.1) = 0.021
\end{aligned}
$$

(٣) صيغة بايز:

بفرض $A_1 , A_2 , \ldots , A_n$ أحداث تشكل تجزئة لـ Ω و ليكن الحدث B متعلّقاً بالتجربة نفسها بحيث احتماله موجب تماماً $P(B) > 0$ عندئذ :

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j).P(B/A_j)}$$

حيث $i = 1,2, \ldots \ldots , n$ ، $j = 1,2, \ldots \ldots , n$ و تدعى بصيغة بايز .

مثال (٣٣) :

لو عدنا للمثال السابق و قلنا بفرض أن الانتاج الذي سحب من أحدالمصانع الثلاثة (غير صالح) ، عندئذ احسب احتمال أن يكون سحب من المصنع الأول أو الثاني أو الثالث ؟

الحل:

من صيغة بايز نجد:

$$P(A_1 / B) = \frac{(0.2)\ (0.05)}{0.021} = 0.476$$

$$P(A_2 / B) = \frac{(0.3)\ (0.02)}{0.021} = 0.286$$

$$P(A_3 / B) = \frac{(0.5)\ (0.01)}{0.021} = 0.238$$

و من الواقع إن مجموع الإجابات الثلاث = ١ أي :

$$P(A_1/B) + P(A_2/B) + P(A_3/B) = 0.476 + 0.286 + 0.238 = 1$$

(٤) الأحداث المستقلة :

ليكن (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ما ، و ليكن الحدثان B, A فوق هذا الفضاء أي $B, A \in F$ ،

عندئذ الحدثان B, A يكونا مستقلين إذا تحقق الشرط :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

و أيضاً نقول أن الحدث A مستقل عن الحدث B إذا تحقق الشرط :

$$P(A/B) = P(A)$$

و أخيراً نقول إن الحدث B مستقل عن الحدث A إذا تحقق الشرط :

$$P(B/A) = P(B)$$

- **مبرهنة (١)** :

إذا كانت $P(A) > 0$ و $P(B) > 0$ عندئذ العلاقات الثلاث السابقة للاستقلال متكافئة .

الإثبات :

التكافؤ يعني إذا كانت أي من العلاقات السابقة محققة فإن العلاقتين الباقيتين تكونان صحيحتين .

لنفرض على سبيل المثال أن : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ عندئذ :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A).P(B)}{P(B)}=P(A)$$

أي إن الحدث A مستقل عن الحدث B .

الآن لو فرضنا أن $P(A/B)=(A)$ محقق عندئذ :

$$P(A\cap B)=P(A).P(A/B)=P(A).P(B)$$

هذايعني أن العلاقات التالية متكافئة و هي :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$
$$P(A/B)=P(B)$$

و بالتالي تكون العلاقات التالية أيضاً متكافئة و هي :

$$P(A/B)=P(A)$$
$$P(B/A)=P(B)$$

لنعرض بعض الأمثلة على الأحداث غير المستقلة :

١) إذا كان الحدثان B,A منفصلين أي $A\cap B=\phi$ و $0<P(A)<1$ و $0<P(B)<1$

عندئذ يكون الحدثان غير مستقلين .

نفرض جدلاً أن B,A مستقلان عندئذ :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)\neq o$$

أي B,A غير منفصلين و هذا مناقض للفرض .

و هذا يدل على أن الأحداث غير المستقلة يمكن أن تكون منفصلة . لكن الأحداث غير المنفصلة تكون غير مستقلة و قد تكون مستقلة .

٢) الحدث الأكيد Ω و الحدث المستحيل ϕ هي أحداث مستقلة عن نفسها و مستقلة عن أي حدث اختياري A و ذلك لأن العلاقتين التاليتين محققتان :

$$P(A\cap\Omega)=P(A).P(\Omega)$$
$$P(A\cap\phi)=P(A).P(\phi)$$

٣) إذا كان B,A حدثين بحيث $B \supseteq A$ و $0 < P(A) < 1$ و $0 < P(B) < 1$ عندئذ الحدثان B,A غير مستقلين و ذلك لأن :

$$P(A \cap B) = P(B) \neq P(A).P(B)$$

◆ **مبرهنة (٢):**

إذا كانت الأحداث B,A مستقلة ، عندئذ الأحداث :

١| $\overline{B},A$ مستقلة .

٢| $B,\overline{A}$ مستقلة .

٣| $\overline{B},\overline{A}$ مستقلة .

<u>**الإثبات:**</u> سوف نبرهن على استقلال $\overline{B},A$ و بالطريقة نفسها نبرهن على استقلال $B,\overline{A}$ و $\overline{B},\overline{A}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap B) &= P(B - A \cap B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) . P(B) \\ &= P(B) (1 - P(A)) = P(B) . P(\overline{A}) \end{aligned}$$

و هذا يعني أن $B,\overline{A}$ حدثان مستقلان .

◆ **مبرهنة (٣):**

إذا كان B,A حدثين بحيث $0 < P(B) < 1$ عندئذ الحدثان B,A مستقلان فقط و إذا كانا محققي الشرط :

$$P(A/B) = P(A/\overline{B})$$

<u>**الإثبات :**</u>

أولاً: بفرض أن B,A حدثان مستقلان أي :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

عندئذ يكون $P(A/B)=P(A)$ ، و بالتالي و بحسب المبرهنات (١) و (٢) يكون :

$$P(A/\overline{B})=P(A)=P(A/B)$$

ثانياً: نفرض أن $P(A/\overline{B})=P(A/B)$ و $0<P(B)<1$ عندئذ :

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)-P(B).P(A\cap B)=P(A).P(B)-P(B).P(A\cap B)$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

و هذا يعني أن B,A حدثان مستقلان .

مثال (٣٤):

يخلط ورق لعب مؤلف من ٥٢ ورقة و يسحب منه ورقة بشكل عشوائي و ليكن الحدث A الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة بنت و الحدث B الذي يقع إذا كانت الورقة المسحوبة من نوع بستوني . هل B,A حدثان مستقلان ؟

<u>الحل</u> :

لدينا $P(A)=\frac{4}{52}\ ,\ P(B)=\frac{13}{52}$ ، كما لدينا :

$$P(A\cap B)=\frac{1}{52}=\frac{4}{52}.\frac{13}{52}=P(A).P(B)$$

أي B,A حدثان مستقلان .

مثال (٣٥):

صندوق يحوي على M كرة بيضاء و N-M كرة سوداء ، و لتكن التجربة سحب كرتين على التتالي ، والمطلوب :

١| بفرض أن السحب مع الإعادة و ليكن A حدث سحب كرة بيضاء في المرة الأولى و B حدث سحب كرة بيضاء في المرة الثانية . عندئذ احسب :

$$P(B/A)\ ,P(A/B),\ P(A\cap B),\ P(B)\ ,\ P(A)$$

ثم بيّن هل الحدثين مستقلين ؟ و هل $A \cap B = \phi$ ؟

٢| بفرض أن السحب بدون إعادة، و ليكن A حدث سحب كرة بيضاء في المرة الأولى و B حدث سحب كرة بيضاء في المرة الثانية ، عندئذ أوجد الاحتمالات السابقة في الطلب الأول و بيّن هل الحدثان B, A مستقلين و متقاطعين .

<u>الحل :</u>

١) السحب مع الإعادة:

لدينا : $P(B/A) = P(A) = P(B) = \dfrac{M}{N}$

الأمر الذي يؤدي للقول إن الحدثين B, A مستقلان حسب مبرهنة (١) . و بالتالي بما أن الحدثين مستقلان فإن:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = (\frac{M}{N})^2$$

و لدينا أيضاً أن : $P(A / B) = P(A) = \dfrac{M}{N}$

بالإضافة لذلك فإن الحدثين يكونان منفصلين $A \cap B = \phi$ مهما تكن N-M .

٢) السحب بدون الإعادة : عندئذ :

$$P(A) = \frac{M}{N} \ , \ P(B/A) = \frac{M-1}{N-1}$$

عندئذ حسب تعريف الاحتمال الشرطي نجد :

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = \frac{M}{N}.\frac{(M-1)}{(N-1)}$$

و لكن من الواضح أنّ :

$$P(\bar{A}) - \frac{N-M}{N} \ , P(B/\bar{A}) = \frac{M}{N-1}$$

عندئذ حسب صيغة الاحتمال التام يكون :

$$P(B) = P(A)\,.\,P(B\,/\,A) + P(\overline{A})\,.P(B\,/\,\overline{A})$$
$$= \frac{M}{N}\,.\,\frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N}\,.\,\frac{M}{N-1}$$
$$= \frac{M^2 - M + N.M - M^2}{N\,(N-1)} = \frac{M\,(N-1)}{N\,(N-1)} = \frac{M}{N}$$

و بالإضافة لذلك نجد أن :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{M\,(M-1)}{N\,(N-1)} / \frac{M}{N} = \frac{M-1}{N-1}$$

و بالعودة إلى النظريات الثلاث (١) و (٢) و (٣) المتعلقة باستقلال الحدثين نجد أن :

$$P(A \cap B) = \frac{M\,(M-1)}{N\,(N-1)} \neq P(A)\,.\,P(B) = \frac{M}{N}\,.\,\frac{M}{N}$$

$$P(B\,/\,A) = \frac{M-1}{N-1} \neq \frac{M}{N} = P(B)$$

$$P(A/B) = \frac{M-1}{N-1} \neq \frac{M}{N} = P(A)$$

$$P(B/A) = \frac{M-1}{N-1} \neq \frac{M}{N-1} = P(B/\overline{A})$$

و بالتالي فإن الأحداث B, A غير مستقلة . أماّ بالنسبة للتقاطع فنجد أن $M \geq 2$ فإن $A \cap B \neq 0$.لكن عندما : $M = 1$ فإن : $A \cap B = \phi$.

(٥) الاستقلال بالإجمال (الاستقلال بالتبادل) :

بفرض أن (Ω, F, P) فضاء احتمالي اختياري و إن $A_1, A_2, \ldots, A_n \in F$ و يمكن أن تكون (n=∞) عندئذ نقول عن هذه الأحداث أنها مستقلة بالإجمال (مستقلة بالتبادل). إذا كان من أجل k حدث ($2 \leq k \leq n$) محققة العلاقة :

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots P(A_{i1})$$

ملاحظة ١:

إذا تحققت العلاقة السابقة من أجل $k = 2$ عندئذ الأحداث $A_1 , A_2, \ \ ...., A_n$ تكون مستقلة مثنى .

ملاحظة ٢:

إذا كانت الأحداث مستقلة مثنى فليس بالضرورة أن تكون مستقلة بالإجمال .

ملاحظة ٣:

إذا كانت الأحداث مستقلة بالإجمال فهي مستقلة مثنى .

مثال (٣٦):

افرض أن تجربة إلقاء حجر نرد متجانسين متمايزين ، عندئذ :

$$\Omega = \left\{ (i, j) \ ; \ \begin{matrix} i = 1, 2, ..., 6 \\ j = 1, 2, ..., 6 \end{matrix} \right\} , \ N(\Omega) = 36$$

و ليكن :

$$\begin{aligned} A &= \{ (i, j) \in \Omega \ ; \ \ j = 1, 2 \ \ or \ \ 5 \ \} \\ B &= \{ (i, j) \in \Omega \ ; \ \ j = 4, 5 \ \ or \ \ 6 \ \} \\ C &= \{ (i, j) \in \Omega \ ; \ \ i + j = 9 \ \} \end{aligned}$$

عندئذ نجد أن:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \ , \quad P(C) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = P(A).P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = P(A).P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = P(B).P(C)$$

أي أن الأحداث C, B, A غير مستقلة مثنى لكن :

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} = P(A).P(B).P(C)$$

(٦) خصائص الاستقلال بالإجمال:

<u>١</u>) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة بالإجمال عندئذ كل حدث k تكون مستقلة بالإجمال لما $(1 \leq k \leq n)$.

<u>**الإثبات :**</u>

في الواقع لو فرضنا أن $A_1', A_2', \ldots, A_n'$ أحداث اختيارية مؤلفة من k حدث ، عندئذ من أجل أي من الأدلة $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ فإن :

$$P(A_{i1}' \cap A_{i2}' \cap \ldots \cap A_{in}') = P(A_{i1}') \ldots P(A_{in}')$$

أي بحسب تعريف الاسقلال فإن الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة .

<u>٢</u>) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة بالإجمال عندئذ مهما يكن k بحيث $1 \leq k \leq n$ فإن الأحداث $A_{k-1} \ldots, A_n$ و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ تكون مستقلة أيضاً .

<u>**الإثبات :**</u>

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) \cap P(A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$$
$$= P(A_1).P(A_2). \ldots P(A_k).P(A_{k+1}) \ldots P(A_n)$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k).\ P(A_{k+1} \cap \ldots \cap A_n)$$

<u>٣</u>) إذا كانت الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة بالإجمال عندئذ تكون الأحداث :

$A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$ مستقلة بالإجمال (مستقلة بالتبادل) .

الإثبات :

نجعل $i=1$ و لنبرهن أن الأحداث $\overline{A}_1, A_2, ..., A_n$ مستقلة بالإجمال ، و لتكن المجموعات الاختيارية والجزئية من الأحداث : $A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}$ حيث $1 \leq k < n$ و بالتالي من التعريف نجد المطلوب .

٤) إذا كانت الأحداث C , B , A مستقلة فإن الأحداث التالية تكون مستقلة أيضاً :

1) $A,\ B \cap C$

2) $A,\ B \cup C$

3) $\overline{A},\ B \cap \overline{C}$

4) $\overline{A},\ B,\ \overline{C}$

الإثبات :

بما أن C , B مستقلان فإن :

$$P(A) . P(B \cap C) = P(A) . P(B) . P(C)$$

و ذلك لأن C , B , A مستقلة بالإجمال ، و بهذا الشكل يكون :

$$P(A) . P(B \cap C) = P(A \cap (B \cap C))$$

و هذا يعني أن الحدثين $A , B \cap C$ مستقلان .

٥) لنثبت أن الحدثين $A, B \cup C$ مستقلان :

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A) . P(B) + P(A) . P(C) - P(A) . P(B) . P(C) \\ &= P(A) \left[P(B) + P(C) - P(B) . P(C) \right] \\ &= P(A) . P(B \cup C) \end{aligned}$$

أي الحدثان A و $B \cap C$ مستقلان ، و ترك البقية للقارئ للإثبات بالطريقة نفسها .

<u>٦</u>) إذا كانت الأحداث $A_1 , A_2 , \quad .... , A_n$ مستقلة بالأجمال وكان: $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ عندئذ :

$$P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

<u>الإثبات</u> : لدينا :

$$P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

مثال (٣٧):

ورق لعب مؤلف من ٥٢ ورقة بشكل عشوائي تسحب ورقتان بدون إعادة ، فما احتمال أن تكون الورقة الثانية من نوع بستوني بشرط أن تكون الورقة الأولى المسحوبة من نوع بستوني .

هل هذان الحدثان مستقلان ؟

<u>الحل :</u>

بفرض أن : A_1 حدث سحب ورقة بستوني في المرة الأولى .

A_2 حدث سحب ورقة بستوني في المرة الثانية .

عندئذ :

$$P(A_2 / A_1) = \frac{12}{51} \ , \ P(A_1) = \frac{13}{52}$$

و لدينا أيضاً :

$$P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{13}{51} \ , \ P(\overline{A}_1) = \frac{39}{52}$$

و منه نجد :

$$P(\overline{A}_1 \cap A_2) = P(\overline{A}_1).P(A_2 / \overline{A}_1) = \frac{39}{52}.\frac{13}{51}$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1).P(A_2 / A_1) = \frac{13}{52}.\frac{12}{51}$$

و لكن $\overline{A_1}\, A_2$ و $A_1\, A_2$ أحداث متنافية عندئذ :

$$\overline{A_1}\, A_2 \cup A_1 \;\cup A_2 \;=\; A_2 \quad \Rightarrow\; P(A_2) = \;P(\;A_1\;).\,P(A_2\; /\; A_1) \;+\; P(\overline{A_1}\;)\;.\,P(A_2\; /\; \overline{A_1}\;)$$

$$= \;\frac{13}{52}\;.\,\frac{12}{51} + \frac{39}{52}\;.\,\frac{13}{51} \;= 0.249$$

و بما أنّ : $P(A_2) \neq P(A_2 / A_1)$ فإن $A_2 \,, A_1$ غير مستقلة .

و يمكن التأكد أن $P(A_2 / A_1) \neq P(A_2 / \overline{A_1})$

مثال (٣٨) :

بفرض لدينا المجموعة $\{\; 1, 2, ... , N \;\}$ و من هذه المجموعة نختار ثلاثة أعداد $a_1 \,, a_2 \,, a_3$ بدون إعادة والمطلوب :

حساب احتمال الحدث $B = \{ a_1 \,, a_2 \,, a_3 \}$ علماً أن الحدث $A = \{ a_1 < a_2 \}$.

الحل :

لدينا $B \subset A$ عندئذ :

$$P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)}$$

و لكن $N(A) = C_2^N$ و $N(B) = C_3^N$ عندئذ :

$$P(B \;/\; A) = \;\frac{\dfrac{N(B)}{A_3^N}}{\dfrac{N(A)}{A_2^N}} \;=\; \frac{\dfrac{C_3^N}{A_3^N}}{\dfrac{C_2^N}{A_2^N}} = \frac{C_3^N \;.\, A_2^N}{C_2^N \;.\, A_3^N}$$

$$= \frac{\dfrac{N\,!}{3\,!\,(N\,-\,3)\,!}\,.\,\dfrac{N\,!}{(N\,-\,2)\,!}}{\dfrac{N\,!}{2\,!\,(N\,-\,2)\,!}\,.\,\dfrac{N\,!}{(N\,-\,3)\,!}} \;=\; \frac{1}{3}$$

○ **ملاحظة** :

إذا كانت C, B, A ثلاثة أحداث، عندئذ يعطى الاحتمال $P(A\cap(B\cup C))$ بدلالة الاحتمال الشرطي وذلك حسب كل حالة من الحالات التالية :

١) C, B, A غير مستقلة و غير منفصلة .

٢) B, A مستقلة .

٣) C, B, A ثلاثة أحداث مستقلة بالإجمال .

٤) $A\cap B=\phi$.

٥) $A\cap B\cap C=\phi$.

٦) الحدثان C, A منفصلان و B, A مستقلان .

٧) الحدثان $A\cap\mathbf{B}$ و C منفصلان .

٨) الحدثان $A\cap\mathbf{B}$ و C منفصلان و B, A مستقلان .

✓ لدينا :

١) من الواضح أن: $P\big((A\cap B)\cup C\big) = P(A\cap B)+P(C)-P(A\cap B\cap C)$ $= P(A).P(B/A)+P(C)-P(A).P(B/A).P(C/A\cap B)$
٢) لدينا : $P\big((A\cap B)\cup C\big) = P(A).P(B)+P(C)-P(A).P(B).P(C/A\cap B)$
٣) $P\big(A\cap B\cup C\big) = P(A).P(B).+P(C).P(A).P(B).P(C)$
٤) $P\big((A\cap B)\cup C\big)=P(C)$
٥) $P\big((A\cap B)\cup C\big) = P(A\cap B)+P(C)$ $= P(A).P(B/A)+P(C)$
٦) $P\big((A\cap B)\cup C\big)=P(A).P(B)+P(C)$

$$P\big((A \cap B) \cup C\big) = P(A \cap B) + P(C)$$ $$= P(A) . P(B / A) + P(C)$$	(٧
$$P\big((A \cap B) \cup C\big) = P(A \cap B) + P(C)$$ $$= P(A) . P(B) + P(C)$$	(٨

تمارين غير محلولة

١) إذا كان $A\cap B=\phi$ و $P(A\cup B)\neq 0$ عندئذ :

$$P(A/A\cup B)=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

٢) إذا كان $P(A/B)>P(A)$ عندئذ $P(B/A)>P(B)$

٣) إذا كان $P(B)\neq 0$ فإن $P(A/B)=\dfrac{P(A)+P(B)-1}{P(B)}$

٤) بفرض أن التجربة إلقاء ثلاثة أحجار نرد متمايزة عندئذ :

١. عيّن الأحداث :

A الحدث الذي يقع إذا كانت المركبة الأولى و الثانية متساويتين .

B الحدث الذي يقع إذا كانت المركبة الثانية والثالثة متساويتين .

C الحدث الذي يقع إذا كانت المركبة الأولى والثالثة متساويتين .

٢. هل الأحداث C,B,A مستقلة مثنى ؟

٣. هل الأحداث C,B,A مستقلة بالإجمال ؟

٥) احتمال أن يعيش طفل حتى خمس سنوات هو $\frac{2}{3}$ و احتمال أن يعيش حتى ٥٠ سنة هو $\frac{1}{2}$، والمطلوب: احسب احتمال الحدث الذي يقع إذا عاش الطفل خمس سنوات فإنه سوف يعيش حتى ٥٠ سنة ؟

" الجواب: $\frac{3}{4}$"

٦) بفرض أن التجربة إلقاء حجري نرد متجانسين متمايزين ، ما احتمال الحدث الذي يقع إذا حصلنا على (٣،٣) علماً أن :

١. مجموع الوجهين الظاهرين يقبل القسمة على ٣ .

٢. جداء الوجهين الظاهرين يساوي ٩ .

٣. الحصول على وجهين مختلفين .

٧) صندوق يحوي ٣ ظروف سيتامول و ٥ ظروف باندول ، و لنفرض أن التجربة هي سحب ظرفين على التتالي بدون إعادة . و المطلوب :

١. ما هو احتمال الحصول على ظرفين من نوع سيتامول .

٢. ما هو احتمال الحصول على ظرفين من نوع باندول .

٣. احسب الطلبين السابقين إذا كان السحب مع الإعادة .

٨) صندوق يحوي ثلاث كرات ، بشكل عشوائي سحبت كرة من الصندوق و كانت بيضاء، فما احتمال أن تكون الكرات الثلاث بيضاء .

٩) صندوق يحوي عشر بطاقات مرقّمة على الشكل (10-.....-3-2-1) بشكل عشوائي سحبت ٦ بطاقات ، و المطلوب احسب :

١. احتمال أن يكون بين البطاقات الست البطاقة ذات الرقم ١.

٢. احتمال أن يكون بين البطاقات الست البطاقات ذات الرقم ١ و ٢ .

١٠) لدى عائلة ثلاثة أطفال ، و المطلوب :

١. ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة ذكور إذا علمت أن أحدهم على الأقل ذكر .

٢. ما احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة ذكور إذا علمت أن أصغر الأطفال ذكر .

١١) صندوق يحوي a كرة بيضاء و b كرة حمراء و c كرة زرقاء . و لتكن التجربة سحب ثلاث كرات بشكل عشوائي من الصندوق على التتالي و بدون إعادة . احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء . $a \geq 3, b \geq 1, c = 2$

تطبيق : بفرض $a = 4, b = 3, c = 2$ عندئذ احسب الاحتمال السابق .

١٢) لدى عائلة طفلان ، و ليكن الحدث A الدال على أن الطفل الأول أنثى و الحدث B الدال على أن الطفل الثاني أنثى ، و الحدث C الدال على أنه يوجد في العائلة أنثى واحدة فقط . والمطلوب :

١. هل الأحداث C, B, A مستقلة مثنى ؟

٢. هل الأحداث C, B, A مستقلة بالإجمال ؟

١٣) افرض أن الأحداث $A_1 , A_2, \; ...., A_n \ni F$ مستقلة عشوائياً ، و افرض أن :

$$P(A_i) = 1 - (\frac{1}{2})^i \;\; ; \; i = 1, 2, ... n$$

عندئذ أثبت صحة العلاقة التالية :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - (\frac{1}{2})^{\frac{n\,(n+1)}{2}}$$

١٤) أربع طائرات قامت سوية بالإغارة على هدف ، و أطلقت كل طائرة قذيفة واحدة على الهدف ، و ذلك بشكل مستقل كل منهما عن الآخر . فإذا علمت أن احتمال الإصابة لكل من هذه الطائرات على الترتيب :

0.78 , 0.88 , 0.90 , 0.75

عندئذ :

١. احسب احتمال إصابة الهدف بقذيفة واحدة فقط .

٢. احسب احتمال إصابة الهدف .

٣. عين احتمال عدم إصابة الهدف .

٤. إذا علمت أن الهدف أصيب بقذيفة واحدة فما احتمال أن تكون القذيفة من الطائرة الثالثة ؟

١٥) ثلاث حقائب متشابهة تماماً ، تحوي الحقيبة الأولى على ٣ ظروف سيتامول منبينها ظرف غير صالح ، و تحوي الحقيبة الثانية ٤ ظروف سيتامول من بينها ظرفان غير صالحين، و تحوي الحقيبة الثالثة ٥ ظروف سيتامول من بينها ظرف غير صالح. اخترنا بشكل عشوائي حقيبة من هذه الحقائب الثلاثة وسحبنا منه ظرفاً ، و المطلوب :

١. احسب احتمال أن يكون الظرف المسحوب صالحاً .

٢. بفرض أن الظرف المسحوب صالح ، فما احتمال أن يكون قد سحب من الحقيبة الثالثة .

١٦) $A_1, A_2, \ ...., A_n$ أحداث تشكل تجزئة لـ Ω ، عندئذ احسب :

$$P(A) = p_1 \ \ , \ \ P(B) = p_2 \ \ , \ \ P(C) = p_3$$

إذا كان : $p_3 = p_1^2 \ \ , \ \ p_2 = 3\,p_1$

١٧) أثبت صحة العلاقة التالية :

1) $P(A) + P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{A \cup B}) = 1$

2) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) + P(B) - 2\,P(A \cap B)$

3) $P(A \cap B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) \ \ ; \ \ P(A) = P(B) = \dfrac{1}{2}$

4) $P(A) + P(B) - P(C) \le 1 \ ; \ \ A \cap B \subseteq C$

١٨) بفرض C, B, A أحداث متعلقة بتجربة مفروضة عندئذ أي من العلاقات التالية محقق .

1) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$

2) $\overline{A} \cup (A \cap B) = \overline{A} \cup B$

3) $\overline{A} \cup (A \cap \overline{B}) = A \cup \overline{B}$

4) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C)$

١٩) بيّن أن الشرط اللازم و الكافي من أجل أن تكون الأحداث B, A غير متنافية هوأن تكون الأحداث :

$A \cup B$ و $\overline{A} \cup B$ و $A \cup \overline{B}$ غير متنافية .

٢٠) أثبت صحة ما يلي:

1) $P(A \cap \overline{B}) + P(B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap C) \leq 1$

2) $P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) \geq P(A) + P(B) + P(C) - 1$

3) $P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(B \cap C) \leq P(A)$

٢١) يشترك في مسابقة أربعة متسابقين ، إذا علمت أن نتيجة المسابقة هي (s) النجاح أو (f) الفشل ، عندئذ المطلوب :

١. اكتب فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة .
٢. احسب احتمال أن ينجح المتسابق الثاني .
٣. احسب احتمال أن يفشل المتسابق الثالث .
٤. احسب احتمال أن ينجح المتسابق الثاني و يفشل الثالث .

٢٢) بفرض أن التجربة سحب ورقة من ورق اللعب (شدّة) عدد أوراقها (٥٢) ، احسب احتمال أن تكون الورقة من نوع ختيارة (ملل) أو ورقة دينارية .

٢٣) إذا كان احتمال إصابة نعيم لهدف معين هو $\frac{1}{3}$ و احتمال اصابة نوّار هو $\frac{3}{4}$ ، المطلوب :

١. حساب احتمال أن يصيب نعيم الهدف .
٢. حساب احتمال أن يصيب الهدف نعيم و نوّار .
٣. حساب احتمال أن يصيب أحدهما الهدف على الأقل .
٤. حساب احتمال أن لا يصيبا الهدف في آن .
٥. حساب احتمال أن يصيب نعيم الهدف و لا يصيبه نوّار .

٢٤) افرض أن توزيع العاملين في مصنع ما تبعاً للجنس و الحالة الوظيفية معطى بالشكل:

العمل / الجنس	إداري	عامل	المجموع
ذكر	٢٢	٧٨	١٠٠
أنثى	٣٤	٤٦	٨٠
المجموع	٥٦	١٢٤	١٨٠

اختير شخص بشكل عشوائي من هذا المصنع ، المطلوب :

١- ما احتمال أن يكون رجلاً علماً أنه إداري .

٢- ما احتمال أن يكون الشخص أنثى من الإداريين .

٢٥) بفرض أن التجربة سحب ظرفين سيتامول بشكل عشوائي من صندوق يحوي ٦ ظروف من بينها ٣ ظروف غير صالحة . المطلوب :

١. إذا كانت عملية السحب على التتالي (دون إعادة) ، احسب احتمال أن يكون الظرفان المسحوبان غير صالحين .

٢. إذا كانت عملية السحب مع الإعادة ، عندئذ احسب احتمال أن يكون الظرفان المسحوبان غير صالحين.

٢٦) لدى عائلة غسالة عالية الحساسية تحتاج إلى منظّم . فإذا علمت أن احتمال شراء العائلة للمنظم هو 0.80 ، و احتمال أن تتعطل الغسالة إذا تم وصلها على المنظم هو 0.30 ، و إن احتمال أن تتعطل الغسالة في حال عدم وصلها بمنظم هو 0.90 ، عندئذ احسب احتمال أن تتعطل هذه الغسالة هذا العام .

٢٧) ثلاثة مصانع لإنتاج المصابيح الكهربائية بحيث ينتج المصنع الأول I ٢٥% ، و ينتج المصنع الثاني II ٣٠% ، و ينتج المصنع الثالث III ٤٥% ، علماً أن نسبة العطب في إنتاج المصنع الأول 0.02، ونسبة العطب في إنتاج المصنع الثاني

0.04، و أخيراً نسبة العطب في إنتاج المصنع الثالث هي 0.03. ولتكن التجربة هي سحب مصباح كهربائي بشكل عشوائي . احسب احتمال أن يكون هذا المصباح غير صالح للاستعمال ؟

٢٨) شركة أدوية تحوي ٣ مصانع للأدوية بحيث المصنع الأول I ينتج ٢٥% من إنتاج الشركة ، والمصنع الثاني II ينتج ٣٥% من الإنتاج ، والمصنع الثالث III ينتج ٤٠% من الإنتاج بحيث إن نسبة الإنتاج الرديء للمصنع الأول هي ٥% ، و للمصنع الثاني هي ٤% ، و للمصنع الثالث هي ٢% . تم سحب إنتاج من هذه الشركة فكان رديئاً ، فما هو احتمال أن يكون من إنتاج المصنع الثاني ؟

٢٩) تانيا طالبة في السنة الأخيرة في كلية الفنون الجميلة ، احتمال أن تتخرج هذا العام هو 0.80 ، واحتمال أن تتزوج في صيف هذا العام إذا تخرجت هو 0.90 . أما إذا لم تتخرج فاحتمال زواجها في ذلك الوقت هو 0.30 ، فما احتمال زواج تانيا صيف هذا العام ؟

٣٠) قرع الجرس في مدرسة ابتدائية فهرع تلاميذ الصف الثالث ابتدائي الذي يشمل على ٣٠ تلميذاً إلى الانتظام على شكل رتل أحادي ، فإذا علمت أن نعيماً و تانيا متجاوران في الرتل

و المطلوب :

١. ما احتمال أم يكون نعيم و تانيا متجاورين في الرتل ؟
٢. إذا علمت أنهما متجاوران فما احتمال أن يكون نعيم في أول الرتل الأحادي ؟

٣١) ثلاثة صناديق متماثلة ، يحوي الصندوق الأول على ١٥ ساعة ذهبية و ١٠ ساعات فضية ، و يحوي الصندوق الثاني ١٢ ساعة ذهبية و ١٠ ساعات فضية ، أمّا الصندوق الثالث فيحوي ٥ ساعات ذهبية و ٢٠ ساعة فضية ، و لتكن التجربة سحب صندوق بشكل عشوائي و من ثم سحب ساعة منه . المطلوب :

١. ما احتمال أن تكون الساعة المسحوبة ذهبية ؟

٢. بفرض أن الساعة التي سحبت ذهبية فما احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الثاني ؟

٣٢) يوجد ٣ مناطق سياحية H_1, H_2, H_3 ، و بفرض أن شخصاً يختار بشكل عشوائي إحدى المناطق الثلاث لزيارتها بحيث احتمال هطول المطر في المنطقة H_1 يساوي $\frac{1}{4}$، و احتمال هطول المطر في المنطقة H_2 يساوي $\frac{1}{3}$، و احتمال هطول المطر في المنطقة H_3 يساوي $\frac{1}{6}$. و لنفرض أن هذا الشخص زار منطقة واحدة من المناطق الثلاث و عاد من زيارته علماً أن الأمطار قد هطلت في منطقة الزيارة. و المطلوب : ما احتمال أن تكون منطقة الزيارة هي المنطقة H_3 ؟

٣٣) أظهر تصنيف لطلاب الجامعة أن ١٠% من الطلاب يدخنون ، و إن ٣٠% من الطلاب يشربون القهوة ، و إن ٥ % من الطلاب يدخنون و يشربون القهوة . المطلوب :

١. حساب النسبة المئوية للطلاب الذين لا يدخنون و لا يشربون القهوة .

٢. حساب النسبة المئوية للطلاب الذين يشربون القهوة من بين الطلاب المدخنين ؟

٣٤) إذا كان ٣٠% من الطلبة المتقدمين لامتحان مقرر مدخل احتمال و إحصاء (٢) ذكوراً و كان الباقون إناثاً ، و إذا كانت نسبة النجاح في هذا المقرر عند الذكور هي ٦٠% في حين كانت ٨٠% عند الاناث ، المطلوب :

١. اختيرت ورقة اجابة بشكل عشوائي و تم تصحيحها فما احتمال أن تستحق هذه الورقة علامة النجاح؟

٢. إذا علمت أن الورقة التي صححت واستحقت علامة النجاح، فما احتمال أن تكون ورقة الاجابة لطالبة ؟

٣٥) مصنع للقمصان الداخلية يحوي ثلاث آلات H_1, H_2, H_3 تسهم كل منها في الإنتاج الكلي للمصنع وهي على الترتيب : ٢٠%و ٣٥% و ٤٥% . فإذا علمنا أن

النسبة المئوية للإنتاج المعيب لكل من تلك الآلات الثلاث هي على الترتيب : ٥% - ٢% - ٣% و المطلوب :

١. إذا اختير قميص بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع فما احتمال أن يكون معيباً ؟

٢. إذا كان القميص المختار معيباً فما احتمال أن يكون من إنتاج الآلة الثالثة ؟

٣٦) شخص مصاب بداء النسيان ، فهو ينسى مظلته في أي مكان يزوره باحتمال $\frac{1}{4}$. و لنفرض أن هذا الشخص زار ٤ أماكن .

و المطلوب :

١. ما احتمال أن يعود بدون مظلة ؟

٢. ما احتمال أن ينسى المظلة في المكان الرابع ؟

٣٧) صندوق يحوي ٤ ظروف سيتامول و ٤ ظروف دوبران و٦ ظروف رانيدين، ولتكن التجربة سحب ظرف واحد بشكل عشوائي من الصندوق ثم أعدناه إلى الصندوق بالإضافة إلى ١٠ ظروف من نفس النوع. ثم سحبنا ظرفاً آخر والمطلوب: حساب احتمال أن يكون الظرف المسحوب الأخير من نوع رانيدين.

٣٨) ترسل الإشارة اللاسلكية على شكل (نقاط) و(خطوط) بنسبة ٤٠% نقاط و٦٠% خطوط، ولكن بسبب الأخطاء تصبح النقطة (خطاً) باحتمال قدره $\frac{2}{3}$ والخط يصبح (نقطة) باحتمال قدره $\frac{1}{4}$. المطلوب :

١. ما احتمال إشارة (نقطة) ؟

٢. إذا استلمت إشارة (نقطة) فما احتمال أن تكون أرسلت نقطة ؟

٣٩) صندوق أول يحوي a ظرف سيتامول صالح و b ظرف غير صالح، و صندوق ثاني يحوي c ظرف سيتامول صالح و d ظرف غير صالح . ولتكن التجربة سحب

ظرف من الصندوق الأول و وضعه في الثاني ، ثم نسحب من الصندوق الثاني ظرفاً، فما احتمال أن يكون الظرف المسحوب صالحاً ؟

٤٠) مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية يحوي ٣ خطوط للإنتاج :

الخط الأول I ينتج ٥٠ قطعة في اليوم بحيث نسبة المصابيح المعطوبة فيها 0.01 .

الخط الثانيII ينتج ١٠٠ قطعة في اليوم بحيث نسبة المصابيح المعطوبة فيها 0.02.

الخط الثالث III ينتج ١٥٠ قطعة في اليوم بحيث نسبة المصابيح المعطوبة فيها 0.05 .

و لتكن التجربة سحب مصباح واحد من الانتاج اليومي لهذا المصنع

و المطلوب:

١- ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً ؟

٢ - إذا علمت أن المصباح المسحوب كان معطوباً فما احتمال أن يكون من إنتاج الخط الثالث ؟

٤١) بفرض أن A و B حدثان متعلقان بتجربة مفروضة بحيث إن :

$$P(A \cup B) = \frac{1}{4} \ , P(B) = þ \ , \ \mathrm{P(A)} = \frac{1}{12}$$

و المطلوب :

١- احسب قيمة þ إذا علمت أن A و B متنافيان .

٢- احسب قيمة þ إذا علمت أن $A \not\subset B$.

٣- احسب قيمة þ إذا علمت أن A و Bمستقلان .

٤٢) بفرض أن A و B حدثان متعلقان بتجربة مفروضة بحيث :

$$P(B / A) = \frac{1}{4} \ , P(B / A) = \frac{1}{3} \ , \ \mathrm{P(A)} = \frac{1}{2}$$

المطلوب حساب :

$$P(A \cap \overline{B}) , \ P(A / B) , P(A \cup B) \ , P(B) , \ \mathrm{P(A/\overline{B})}$$

٤٣) بفرض أن A و B حدثان متعلقان بتجربة مفروضة ، و بفرض أن $0 < P(B) < 1$ و تحققت العلاقة: $P(A/B) = P(A/\overline{B})$

عندئذ بيّن أن A و B حدثان مستقلان .

٤٤) ورقة أسئلة امتحانية تحوي أسئلة ذات الأجوبة المتعددة و لنفرض أن طالباً يتقدم لذلك الامتحان بحيث إنه يعرف الإجابة على السؤال باحتمال þ ، أو أنه يخمن الإجابة باحتمال قدره 1-þ=q، و لنفرض أن احتمال أن يكون تخمين الطالب صحيحاً هو $\frac{1}{K}$ حيث K عدد بدائل الإجابة لكل سؤال ، عندئذ ما احتمال أن يكون الطالب قد عرف الاجابة الصحيحة إذا كان قد أجاب إجابة صحيحة .

٤٥) بفرض أن شخصاً ما تقدم إلى اختبار الكشف عن ورم ما بحيث احتمال أن يكشف الاختبار أن الشخص عنده ورم بالفعل هو 0.90 ، و احتمال أن لا يكشف الاختبار أن الشخص عنده ورم بالفعل هو 0.10 . إذا افترضنا أن احتمال أن يكشف الاختبار أن الشخص عنده ورم هو 0.003

المطلوب :

ما احتمال أن يكشف الاختبار أن الشخص عنده ورم إذا كان بالفعل عنده ورم معين ؟

٤٦) بفرض أن A و B حدثان متعلقان بتجربة مفروضة ، و A و B حدثان متعلقان بهذه التجربة ، بحيث $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0, P(A \cap B) = 0$ عندئذ هل A و B مستقلان؟ اعط مثالاً توضح فيه ذلك .

****

الفصل الثاني

دراسة المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية لها

(١-١) تمهيد :

تناولنا في الفصل السابق كيفية تعيين الفضاء الاحتمالي و خصائص الاحتمال وأنواع الفضاءات الاحتمالية ، و في هذا الفصل سوف نعرف المتغير العشوائي و من ثم نعرض المفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتغيرات العشوائية .

يُعد مفهوم المتغيرات العشوائية واحداً من المفاهيم الأساسية في نظرية الاحتمالات ، في ميادين البحث العلمي (الفلك – الفيزياء – الكيمياء – البيولوجيا – الطب - ....) . كثيراً ما يتعامل الباحث مع قياس بعض الثوابت و يلاحظ على الرغم من تكراره للتجربة ضمن ظروف واحدة حصوله على قيم متقاربة للثابت المدروس ، و لكن يختلف بعضها عن بعض و الطبيعة من حولنا ممتلئة بالظواهر التي تحدث بفضل عوامل لا يمكن حصرها وخارجة عن إرادة الإنسان .

نورد فيما يلي بعض الأمثلة التوضيحية :

مثال (١) :

عائلة لديها طفل واحد ، إذا خصصنا العدد/١/ لنتيجة التجربة إذا كانت صبياص (b) ، و أن نخصص العدد /٠/ نتيجة التجربة إذا كانت بنتاً (g) .

إذا رمزنا بـ X لنتيجة التجربة ، فإن $X = 1$ إذا كانت نتيجة التجربة صبي (b) ، و أن يكون $X = 0$ إذا كانت نتيجة التجربة بنت (g) . و يكون احتمال أن يأخذ X القيمة /١/ مساوياً لاحتمال أن تكون التجربة صبياً (b) ، و كذلك الأمر يكون احتمال أن يأخذ X القيمة /٠/ مساوياً لاحتمال أن تكون نتيجة التجربة بنتاً (g) .

و هذا يعني بأن X تأخذ قيمة واحدة من المجموعة $\{0, 1\}$ ، و لكن هذه المعرفة تتم بعد إجراء التجربة ، و لذلك نقول بأن X متغير عشوائي و إن مجموعة القيم له و التي سوف نرمز لها بالرمز R_X أي إن : $R_X = \{0, 1\}$

مثال (٢) :

إذا كانت التجربة هي الكشف عن عدد الوحدات الصالحة من بين n وحدة من إنتاج مصنع معين ، و رمزنا بـ X لعدد الوحدات الصالحة ، و فرضنا أن :

A_0 حدث عدم وجود وحدة صالحة بين الوحدات الكليةn .

A_1 حدث وجود وحدة واحدة فقط صالحة بين الوحدات الكليةn .

A_2 حدث وجود وحدتين صالحتين فقط بين الوحدات الكليةn .

B حدث وجود وحدة انتاج واحدة على الأقل صالحة بين الوحدات الكليةn .

C حدث وجود وحدتين صالحتين على الأكثر بين الوحدات الكليةn .

عندئذ من الواضح أن ($X = i$) يمثل حدث وقوع الحدث A_i حيث $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ ، لكن إذا وقع الحدث B فإن X تأخذ قيمة محدودة بنتيجة التجربة . مع ملاحظة أنه لا يمكن معرفة قيمة X قبل إجراءالتجربة . لكن نعرف أن X تأخذ قيمة واحدة فقط من المجموعة {0, 1, 2, …. , n} ، عندئذ يمكن القول إن X متغير عشوائي ، و مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير هي : $R_X = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

مثال (٣):

من المعلوم أن فضاء الأحداث الابتدائية لعائلة عندها /٣/ أطفال هو :

$$\Omega = \{bbb\ ,\ bbg, bgb, gbb, ggb, gbg, bgg, ggg\}$$

و إذا كان X يدل على عدد الصبيان في هذه العائلة فإننا نجد لقيم X قيم عشوائية ، و أن مجموعة قيم X هي: $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ ، مع ملاحظة أنه عندما (X=٠) فيقع الحدث { ggg } ، و لمّا (X=٢) فالحدث الذي يقع هو : $A = \{bbg, bgb, gbb\}$ ، أمّا عندما (X=١) فيقع الحدث $B = \{ggb, gbg, bgg\}$

يُلاحظ من الأمثلة السابقة أن لكل نتيجة من نتائج التجربة ω هنالك عدداً حقيقياً $X(\omega)$ معرّفاً في فضاء الأحداث الابتدائية لتجربة Ω . مماّ تقدّم يمكن صياغة التعريف التالي للمتغير العشوائي :

(٢-١) تعريف المتغير العشوائي :

إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً ما ، عندئذ بالتعريف " المتغير العشوائي X" هو دالة حقيقية معرفة على فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة (Ω) أي :

$$X: \begin{array}{c} \Omega \to R \\ \omega \to X(\omega) \end{array}$$

بحيث تكون الصورة العكسية لأي مجموعة حقيقية B من R تمثل حدثاً عشوائياً من Ω أي أن : $X^{-1}(B) \subseteq \Omega$ ، و ذلك من أجل أي مجموعة حقيقية B من R ، عندئذ يقال عن المتغير العشوائي X بأنه معرّف على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) .

يُرمّز بالعادة للمتغيرات العشوائية بأحرف كبيرة مثل ... ,X, Y, Z ، و قيم هذه المتغيرات بأحرف صغيرة: $x, y, z, ...$.

- **ملاحظة (١)** :

من التعريف السابق للمتغير العشوائي إذا رمزنا بـ : $B =]-\infty, x[\subseteq R$ ، عندئذ فإن وقوع الحدث :

$$\{ X \in \,]-\infty, x[\, \} = \{ x^{-1}(B) \}$$

يكافئ وقوع الحدث $A = \{ w ; w \in \Omega \wedge X(\omega) < x \}$ ، أي إن الحدث A ليس إلاّ الصورة العكسية للمجموعة الحقيقية B وفقاً للدالة X .

و أخيراً يمكن القول إنه إذا كان X متغيراً عشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) ، فإن :

$$\{ X < x \} \in F \;, x \in R$$

اختصاراً عندئذ كل من المجموعات التالية تمثل حدثاً :

$$
\left.
\begin{array}{l}
1)\ \{X \geq x\} \in F \\
2)\ \{X = x\} \in F \\
3)\ \{X \leq x\} \in F \\
4)\ \{X > x\} \in F
\end{array}
\right. , \ x \in R
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
5)\ \{a < X \leq b\} \in F \\
6)\ \{a \leq X < b\} \in F \\
7)\ \{a < X < b\} \in F \\
8)\ \{a \leq X \leq b\} \in F
\end{array}
\right. ; -\infty < a < b < +\infty
$$

و بالتالي فيما بعد يمكن حساب الاحتمالات التالية :

$$
\begin{array}{l}
1)\ P\{X < x\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge X(\omega) < x\} \\
2)\ P\{X \geq x\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge X(\omega) \geq x\} \\
3)\ P\{X = x\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge X(\omega) = x\} \\
4)\ P\{X \leq x\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge X(\omega) \leq x\} \\
5)\ P\{X > x\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge X(\omega) > x\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
6)\ P\{a < X \leq b\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ a < X(\omega) \leq b\} \\
7)\ P\{a \leq X < b\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ a \leq X(\omega) < b\} \\
8)\ P\{a < X < b\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ a < X(\omega) < b\} \\
9)\ P\{a \leq X \leq b\} = P\{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ a \leq X(\omega) \leq b\}
\end{array}
$$

و لفهم الأفكار السابقة و تثبيتها لنعود إلى مثال العائلة التي عندها /٣/ أطفال و كان X يدل على عدد الصبيان في العائلة ، عندئذ $R_x = \{0,1,2,3\}$.

و بالتالي فإن وقوع الحدث {X=٠} يكافئ وقوع الحدث :

$$A = X^{-1}(0) = \{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ X(\omega) = 0\} = \{g\ g\ g\}$$

أي إن احتمال الحدث A يعطى بالشكل :

$$P(A) = P\{X = 0\} = P\{g\ g\ g\} = \frac{1}{8}$$

و إن وقوع الحدث $\{X=1\}$ يكافئ وقوع الحدث :

$$B = X^{-1}(1) = \{\omega ; \omega \in \Omega \ \wedge \ X(\omega) = 1\} = \{ g\,g\,b , g\,b\,g , b\,g\,g \}$$

أي أن احتمال الحدث B يعطى بالشكل :

$$P(B) = \frac{3}{8}$$

أمّا وقوع الحدث $\{X=2\}$ فيكافئ وقوع الحدث :

$$C = \{ b\,b\,g , b\,g\,b , g\,b\,b \}$$

و يكون احتمال C معطى بالشكل : $P(C) = \frac{3}{8}$.

أخيراً ، وقوع الحدث $\{X=3\}$ يكافئ وقوع الحدث : $D=\{b\,b\,b\}$ و يكون احتماله معطى بالشكل :

$$P(D) = P\{X=3\} = P\{b\,b\,b\} = \frac{1}{8}$$

مع ملاحظة أن الأحداث $\{X=0\}$ و $\{X=1\}$ و $\{X=2\}$ و $\{X=3\}$ تشكل تجزئة للحدث الأكيد Ω (فسّر ذلك) .

و ملاحظة أن وقوع الحدث $\{X \le 1\}$ يكافئ وقوع الحدث :

$$H = \{ g\,g\,b , g\,b\,g , b\,g\,g , g\,g\,g \}$$

أي أن احتمال الحدث H يعطى بالشكل :

$$P(H) = \frac{4}{8}$$

و أخيراً وقوع الحدث $\{X=4\}$ هو حدث مستحيل (فسّر ذلك) .

و نجد أنّ : $P(4 < X < 7) = P(\phi) = 0$

○ **ملاحظة (٢):**

من خلال سياق ما تقدّم يتبين أن المتغير العشوائي حسب تعريفه يمثل دالة و ليس كما يفهم في التحليل الرياضي كمتغير مستقل ، حيث من أجل كل $\omega \in \Omega$ تكون القيم $X(\omega)$ وحيدة التعيين ، و بما أن $X(\omega)$ تتغير حسب نتيجة التجربة فهذا ما أعطى صفة العشوائية لـ X .

♦ **مبرهنة (١)** : بدون برهان

بفرض Y, X متغيران عشوائيان على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) عند ذلك :

$$1)\ \{ X(\omega) < Y(\omega) \} \in F$$
$$2)\ \{ X(\omega) > Y(\omega) \} \in F$$
$$3)\ \{ X(\omega) \le Y(\omega) \} \in F$$
$$4)\ \{ X(\omega) \ge Y(\omega) \} \in F$$

♦ **مبرهنة (٢)** : بدون برهان

بفرض Y, X متغيرين عشوائيين على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) عند ذلك كل من :

$$\left[\begin{array}{l}
1)\quad Y \mp X \\
2)\ X + C \ ,\quad C\ \text{ثابت} \\
3)\ C\,X \qquad ,\quad C\ \text{ثابت} \\
4)\ X\,Y \\
5)\ \dfrac{X}{Y} \quad ,\quad Y \neq 0 \\
6)\ Max\{ X , Y \} \\
7)\ Min\{ X , Y \}
\end{array}\right]$$

تمثّل متغيراًعشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) .

◆ **مبرهنة (٣)** : بدون برهان

إذا كان X متغيراً عشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P)، عند ذلك :

١-) أية دالة مستمرة بدلالة المتغير X هي أيضاً متغير عشوائي .

٢-) أية دالة متزايدة بدلالة المتغير X هي أيضاً متغير عشوائي .

◆ **مبرهنة (٤)**: بدون برهان

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) ، و لتكن $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ دالة معرفة على R^n ، عندئذ نقول بأن :

$$Z = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$

يمثّل متغيراً عشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) .

(٣-١) الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي :

إذا كان X متغيراً عشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) ، عندئذ ندعو الدالة الحقيقية $F_X(x)$ على R المعرفة على الشكل :

$$F : R \to R \; ; \; x \to F_X(x) = P(X < x)$$

بالدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X .

(٤-١) خصائص الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي :

بفرض X متغيراً عشوائياً على فضاء احتمالي (Ω, F, P) دالته التوزيعية $F_X(x)$ عندئذ يتحقق ما يلي :

١- الدالة التوزيعية $F_X(x)$ معرّفة من أجل أي عدد حقيقي .

٢- $0 \le F_X(x) \le 1$ مهما يكن $x \ni R$ وذلك لأنها تمثّل احتمال حدث .

٣- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ و $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ (فسّر ذلك) .

٤- إذا كان $a < b$ فإن $F_X(a) \le F_X(b)$ ، أي أن الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي غير متناقصة .

٥- $P(a \le X < b) = F_X(b) - F_X(a)$ علماً $-\infty < a < b < +\infty$

٦- الدالة التوزيعية $F_X(x)$ مستمرة من اليسار ، أي :

$$\lim_{h \to +0} F_X(x - h) = F_X(x)$$

من أجل جميع قيم x من R .

٧- الدالة التوزيعية $F_X(x)$ المعرّفة من خلال العلاقة :

$$F_X(x) = P(X \le x) \ , \ x \in R$$

تكون مستمرة من اليمين أي :

$$\lim_{h \to 0} F_X(x + h) = F_X(x)$$

٨- $P(X = x) = \lim_{x \to 0} F(x+h) - \lim_{h \to +0} F(x-h)$

٩- كل دالة $F_X(x)$ تحقق الخصائص السابقة تصلح لأن تكون دالة توزيعية لمتغير عشوائي .

- **مبرهنة (٥)**:

الشرط اللازم و الكافي من أجل أن تكون الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي X مستمرة هو تحقق الشرط :

$$P(X = x) = 0 \ , \ \forall x \in R$$

- **ملاحظة (٢) :**

إذا كانت الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي X معرّفة بالشكل :

$$F_X(x) = P(X \le x) \ , \ x \in R$$

عندئذ يمكن أن نكتب :

$$1)\quad P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F_X(x) \ , \ k\ x \in R$$

$$2)\quad P(X \ge x) = 1 - P(X < x) = 1 - F_X(X \le x) + P(X + x)$$

$$3)\quad P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$4)\quad P(a < X < b) = P(X \le b) - P(X \le a) - P(X = b)$$
$$= F_X(b) - F_X(a) - P(X = b)$$

$$5)\quad P(a \le X < b) = P(X \le b) - P(X \le a) + P(X = a) - P(X = b)$$
$$= F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) - P(X = b)$$

$$6)\quad P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) + P(X = a)$$
$$= F_X(b) - F_X(a) + P(X = a)$$

(٥-١): أصناف المتغيرات العشوائية :

في الاحتمالات و الإحصاء نصادف نوعين مهمين من المتغيرات العشوائية هما : المتغيرات العشوائية المنقطعة و المتغيرات العشوائية المستمرة .

١'': المتغيرات العشوائية المنقطعة :

نقول عن متغير عشوائي X على فضاء احتمالي (Ω, F, P) أنه من النوع المنقطع إذا كان مولداً بفضاء أحداث ابتدائية Ω يمثّل مجموعة قابلة للعد قد تكون منتهية و قد تكون غير منتهية ، أي مجموع القيم التي يأخذها المتغير X تمثّل مجموعة قابلة للعد قد تكون منتهية و قد تكون غير منتهية.

مثال (٤) :

في تجربة إلقاء حجر نرد متوازن بحيث X يدل على عدد نقاط الوجه الظاهر بعد الاستقرار عندئذ يكون X متغيراً عشوائياً منقطعاً و ذلك لأن مجموعة القيم الممكنة

للتجربة $\Omega = \{1, 2, 3 4, 5, 6\}$ هي مجموعة قابلة للعد (منتهية) ، أي $R_X = \{1, 2, 3 ,4, 5, 6\}$.

مثال (٥) :

إذا كان X يدل على عدد البطاريات المعيبة في دفعة انتاج مؤلفة من عدد كبير من البطاريات ، عندئذ :

$$R_X = \{1, 2, \ ....\}$$

تمثّل مجموعة غير منتهية قابلة للعد . أي X متغير عشوائي منقطع .

مثال (٦) :

إذا كان X يدل على عدد مرات إلقاء قطعة نقد متجانسة حتى نحصل على صورة H ،

$$R_X = \{1, 2, \ ....\}$$

نجد أن مجموعة قيم X هي :

و هي مجموعة قابلة للعد غير منتهية . أي X متغير عشوائي منقطع .

٢'٣: المتغيرات العشوائية المستمرة :

نقول عن متغير عشوائي X إنه من النوع المستمر إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير تمثل مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد .

مثال (٧):

إذا كان X يدل على حجم الغازات المنبعثة من انفجار بركاني محتمل الوقوع ، عندئذ $\Omega = \{x ; \ x \geq 0\}$ تمثل مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد ، أي X يمثل متغير عشوائي مستمر .

مثال (٨) :

إذا كان X يدل على العدد المختار بشكل عشوائي من المجال $[0,1]$ فمن الواضح أن $\Omega = \{x ; \ 1 \geq x \geq 0\}$ تمثل مجموعة غير قابلة للعد و غير منتهية ، أي X متغير عشوائي مستمر .

٢) التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع (دالة الكتلة الاحتمالية) :

افرض أن X متغير عشوائي منقطع ، أي مجموعة القيم التي يأخذها هذا المتغير تمثل مجموعة غير منتهية و غير قابلة للعد ، مثل :

$$R_X = \{x_1 , x_2 ,....., \ x_n ,.....\}$$

عندئذ بالتعريف ندعو الاحتمال :

$$P_X (x) = P(X = x) \ , \ x \in R_X$$

بأنه يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير X (دالة الكتلة الاحتمالية لـ X)إذا تحققت الشروط التالية:

١-) $P_X (x)$ دالة وحيدة القيمة ، أي لكل قيمة من قيم المتغير X هنالك قيمة وحيدة للدالة $P_X (x)$ التي تعبر عن احتمال الحدث $(X(\omega) = x)$ أي $P \{ X(\omega) = x \}$.

٢-) إن $P_x(x)$ دالة غير سالبة كونها تعبّر عن قيمة احتمالية تقترن بالعنصر x و بالتالي مخطط هذه الدالة يكون في الجانب الأعلى من المحور X .

٣-) إن مجموع الكتل الاحتمالية المقترنة بعناصر X المعرّفة على Ω يجب أن تساوي الواحد لأنه يمثّل احتمال حدث أكيد أي :

$$\sum_x P_X (x) = P(\Omega) = 1$$

هذا و يمكن أن نصف التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X منقطع بجدول يدعى جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير على الشكل :

X	$x_1 x_2$ ……… x_n ………………………	$\sum$
$P_x(x)$	$P(x_1)$ $P(x_2)$ …… $P(x_n)$ ………………………	1

و هذا الجدول يحقق الشروط نفسها التي يحققها التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، مع ملاحظة أن الأحداث :

$$(X = x_1) \ ,(X = x_2) \ ,..........,(X = x_n) \ ,.......$$

تشكّل تجزئة للحدث الأكيد Ω و هذه التجربة تولد جبر الأحداث F و الذي كل عنصر من عناصره هو اتحاد لعناصر التجزئة المذكورة و يعطى بالشكل :

$$B \subseteq R \;:\; (\omega ;\; X(\omega) \;\in B\,) = (X \;\in B\,)$$

و يمكن القول أنّ التجزئة لـ Ω و F مولدان بالمتغير العشوائي X ، و احتمال الحدث $(X \in B)$ يعطى بالعلاقة :

$$P(X \;\in B\,) \;=\; \sum_{x \,\in\, B \,\subseteq\, R} P_X(x)$$

أي أن معرفتنا المسبقة بالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع X تسمح لنا بحساب احتمال وقوع أية حادثة معرفة في R مثل $B \subseteq \Omega = R$.

مثال (٩) :

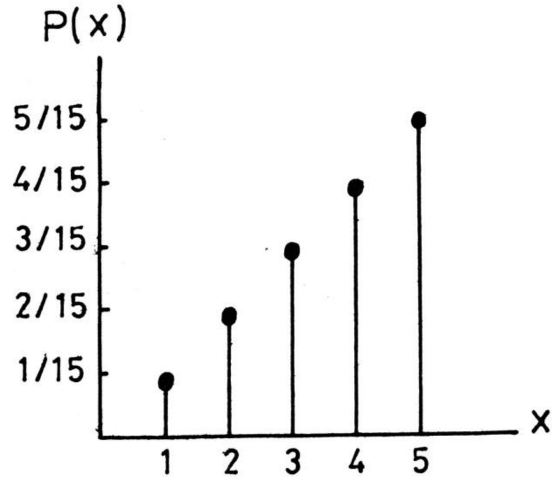
بفرض أن X متغير عشوائي يسلك وفق الدالة التالية :

$$P_X(x) \;=\; \frac{x}{21} \quad ; \quad x = 1\,,\,2\,,\,3,\,4,\,5,\,6$$

عندئذ من الواضح أن $P_X(x)$ تمثل توزيع احتمالي للمتغير العشوائي المنقطع X كون $P_X(x)$ وحيدة القيمة وغير سالبة ، و إن مجموع الكتل الاحتمالية المقترنة بقيم X مساوية للواحد ، و يوضح ذلك بجدول التوزيع الاحتمالي و X الذي يأخذ الشكل :

<table>
<tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>$\sum$</td></tr>
<tr><td>$P_x(x)$</td><td colspan="5">$\frac{1}{15}\frac{2}{15}\frac{3}{15}\frac{4}{15}\frac{5}{15}$</td><td>1</td></tr>
</table>

و مخطط هذه الدالة موضح في الشكل (٢-١) :



$P_X(x)$

مثال (٠

بفرض أن X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي :

X	٢	٤	٧	٩
$P_X(x)$	λ	3λ	3λ	4λ

عيّن قيمة λ ؟

الحل :

بما أن $\sum_x P_X(x) = 1$ عندئذ :

$$\lambda + 3\lambda + 2\lambda + 4\lambda \Rightarrow 10\lambda = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

و منه : جدول التوزيع الاحتمالي لـ X يأخذ الشكل التالي :

X	٢	٤	٧	٩
$P_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$

مثال (١١) :

افرض أن التجربة إلقاء حجري نرد متجانسين متمايزين ، و ليكن X يدل على مجموع نقاط الوجهين الظاهرين بعد الاستقرار ، و Y يدل على القيمة العظمى لعدد النقاط على الوجهين الظاهرين ، و Z يدل على الفرق بالقيمة المطلقة لعدد النقاط على الوجهين الظاهرين ، و المطلوب :

١- عيّن فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة العشوائية .

٢- عين جدول التوزيع الاحتمالي لكل من المتغيرات العشوائية Xو Y و Z.

<u>الحل :</u>

١- فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة العشوائية هو :

$$\Omega = \{ (i , j) ; \quad i = 1, 2, \dots , 6 \quad , \quad j = 1, 2, \dots , 6 \}$$

أي فضاء الأحداث الابتدائية Ω مؤلف من ٣٦ ثنائية .

٢- من الواضح أن مجموعة القيم للمتغير العشوائي X هي :

$$R_X = \{ 2, 3 , 4 , ... , 12 \}$$

و بالتالي :

X	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$P_x(x)$	$\frac{1}{36}\ \frac{2}{36}\ \frac{3}{36}\ \frac{4}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{6}{36}\ \frac{5}{36}\ \frac{4}{36}\ \frac{3}{36}\ \frac{2}{36}\ \frac{1}{36}$									1

علماً أن:

$$P(X=2)=P\{(1,1)\}=\frac{1}{36}$$
$$P(X=3)=P\{(1,2),(2,1)\}=\frac{2}{36}$$
$$P(X=4)=P\{(2,2),(1,3),(3,1)\}=\frac{3}{36}$$
$$P(X=5)=P\{(2,3),(3,2),(1,4),(4,1)\}=\frac{4}{36}$$
$$P(X=6)=P\{(3,3),(1,5),(5,1),(4,2),(2,4)\}=\frac{5}{36}$$
$$P(X=7)=P\{(4,3),(3,4),(1,6),(6,1),(2,5),(5,2)\}=\frac{6}{36}$$
$$P(X=8)=P\{(2,6),(6,2),(4,4),(3,5),(5,3)\}=\frac{5}{36}$$
$$P(X=9)=P\{(6,3),(3,6),(5,4),(4,5)\}=\frac{4}{36}$$
$$P(X=10)=P\{(5,5),(6,4),(4,6)\}=\frac{3}{36}$$
$$P(X=11)=P\{(5,6),(6,5)\}=\frac{2}{36}$$
$$P(X=12)=P\{(6,6)\}=\frac{1}{36}$$

أما بالنسبة للمتغير العشوائي Yفواضح أن مجموعة القيم هي :
$R_Y=\{1,2,3,4,5,6\}$ و بالتالي جدول التوزيع الاحتمالي لـ Y هو :

Y	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P_y(y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

و ذلك لأن :

$$P(Y=1)=P\{(1,1)\}=\frac{1}{36}$$
$$P(Y=2)=P\{(1,2),(2,1),(2,2)\}=\frac{3}{36}$$
$$P(Y=3)=P\{(3,3),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}=\frac{5}{36}$$
$$P(Y=4)=\{(1,4),(4,1),(2,4),(4,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}=\frac{7}{36}$$
$$P(Y=5)=P\{(1,5),(5,1),(2,5),(5,2),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4),(5,5)\}=\frac{9}{36}$$
$$P(Y=6)=P\{(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}=\frac{11}{36}$$

و أخيراً بالنسبة للمتغير العشوائي Z واضح أن مجموعة القيم هي :

$$R_Z=\{0,1,2,3,4,5\}$$

و بالتالي جدول التوزيع الاحتمالي لـ Z هو:

Z	0	1	2	3	4	5	$\sum$
$P_Z(z)$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

و ذلك لأن:

$$P(Z=0)=P\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}=\frac{6}{36}$$
$$P(Z=1)=P\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5)\}=\frac{10}{36}$$
$$P(Z=2)=P\{(1,3),(3,1),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}=\frac{8}{36}$$
$$P(Z=3)=P\{(2,5),(5,2),(3,6),(6,3),(1,4),(4,1)\}=\frac{6}{36}$$
$$P(Z=4)=P\{(1,5),(5,1),(2,6)\}=\frac{4}{36}$$
$$P(Z=5)=P\{(1,6),(6,1),(6,6)\}=\frac{2}{36}$$

ملاحظة:

إذا كان X متغيراً عشوائياً مولداً بفضاء أحداث ابتدائية Ω يمثل مجموعة منتهية، أي مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X تمثل مجموعة منتهية مثل $R_X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ، جدول التوزيع الاحتمالي لـ X له الشكل :

X	x_1	x_2	....	x_n
$P_X(x)$	$P_X(x_1)$	$P_X(x_2)$	....	$P_X(x_n)$

عند ذلك يمكن تمثيل جدول التوزيع الاحتمالي بيانياً على شكل مدرج نسميه مدرج جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، و يمكن تمثيل جدول التوزيع الاحتمالي لـ X بطريقة الأعمدة حيث نمثل الجدول بيانياً على شكل مستطيلات متلاصقة إلى جانب بعضها البعض ، ارتفاعاتها متناسبة مع قيم الاحتمالات التي يأخذها المتغير العشوائي X ، والقاعدة السفلى لكل مستطيل منطبقة على المحور $0X$ ، وطولها يساوي وحدة الأطوال،

ونضع أسفل كل مستطيل القيمة الموافقة للمتغير العشوائي X ، و يكون مجموع المساحات التي تحصرها هذه المستطيلات تساوي الواحد .

أمّا تمثيل الجدول بيانياً بطريقة الأعمدة فنصل الأطراف العلوية للأعمدة ، كل عمودين متتاليين بقطعة مستقيمة نحصل على ما يسمى بالمضلع البياني للجدول المعطى .

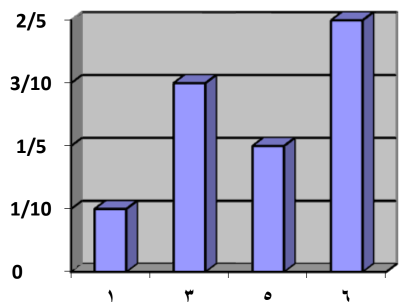
و سوف نوضح ذلك بالمثال التالي :

مثال (١٢):

افرض أن X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي:

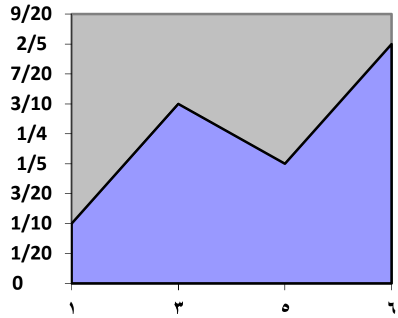
X	١	٣	٥	٦
$P_X(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$

و المطلوب تمثيل الجدول المعطى بيانياً على شكل مدرج و على شكل مضلع :



شكل المدرج لجدول التوزيع المعطى

ثانياً : تمثيل الجدول المعطى على شكل مضلّع ، لدينا :



المضلع البياني لجدول التوزيع المعطى

❖ **الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منقطع :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = P(X = x) \;;\; x = x_1, x_2, \;...............$$

عندئذ بالتعريف الدالة التوزيعية للمغير العشوائي X تعطى بالعلاقة :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} P_x(K)$$

$$= \sum_{k=x_1}^{x} P_x(K)$$

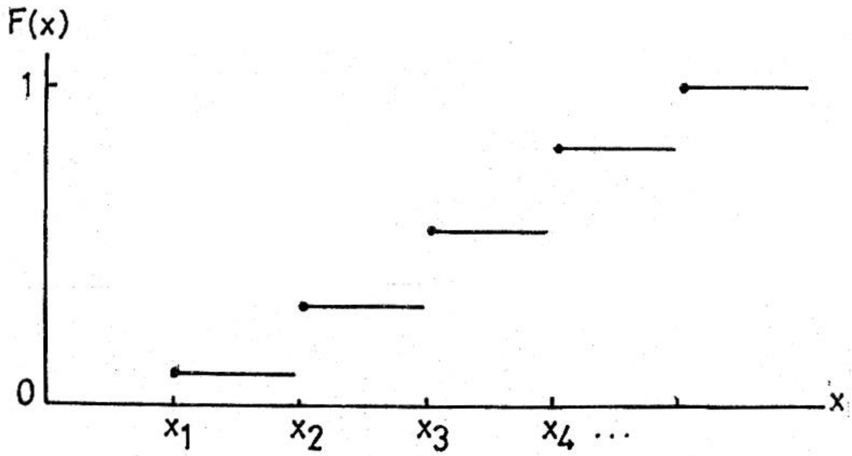
و إذا كانت $F_X(x)$ معلومة، عندئذ يمكن حساب $P_X(x)$ بالشكل :

$$P_X(x) = P(X = x) = P(X \le x) - P(X \le x-1)$$

$$= F_X(x) - F_X(x-1)$$

و هذا ما يدل على وجود علاقة بين التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X و الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي المنقطع .

و إذا رسمنا مخطط الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي المنقطع لوجدنا أن له شكلاً متدرجاً وصولاً إلى قيمة $F_X(x)$ المساوية للواحد، انظر الشكل (٢-٢) :



مثال (١٣) :

افرض X متغيراً عشوائياً منقطعاً توزيعه الاحتمالي معرّف من خلال العلاقة :

$$P_X(x) = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^x \quad ; \quad x = 0, 1, 2, ...$$

و المطلوب تعيين الدالة التوزيعية لهذا المتغير .

<u>الحل :</u>

حسب تعريف الدالة التوزيعية لمتغير منقطع نستطيع أن نكتب :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^k$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{x} (\frac{2}{3})^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^{x+1}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 1 - (\frac{2}{3})^{x+1} \quad , \quad x = 0, 1, 2, ...$$

و ذلك لأن المجموع $\sum_{k=0}^{x}(\frac{2}{3})^k$ يعبّر عن متسلسلة هندسية منتهية حدها الأول واحد و أساسها $\frac{2}{3}$.

- **ملاحظة (٢) :**

من خلال الدالة التوزيعية في المثال السابق يمكن حساب الاحتمال التراكمي لغاية أية قيمة من قيم X المعرّفة في Ω ، و ذلك بمجرد التعويض عن تلك القيمة في الدالة التوزيعية $F_X(x)$. وعلى سبيل المثال لو طلب حساب الاحتمالات التالية :

$$1)\ P(X \le 2) \quad , \quad 2)\ P(X \le 3)$$

واضح أن :

$$1)\ P(X \le 2) = F_x(2) = 1-(\frac{2}{3})^3 = 1-\frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

$$2)\ P(X \le 3) = F_x(3) = 1-(\frac{2}{3})^4 = 1-\frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

هذا و يمكن الحصول على $P(X = 3)$ بالشكل :

$$\begin{aligned} P_x(3) = P(X=3) &= F_x(3) - F_x(2) \\ &= 1-(\frac{2}{3})^4 - \left(1-(\frac{2}{3})^3\right) \\ &= (\frac{2}{3})^3 - (\frac{2}{3})^4 = \frac{8}{27} - \frac{16}{81} = \frac{8}{81} \end{aligned}$$

- **ملاحظة (٣) :**

يمكن حساب الاحتمالات $P(X \le 3)$, $P(X \le 2)$ عن طريق التوزيع الاحتمالي المعطى و ذلك بالشكل:

$$1)\ \ P(X \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2 = \frac{19}{27}$$

$$2)\ \ P(X \le 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} = \frac{65}{81}$$

أمّا إذا طلب منّا حساب احتمالات من الشكل التالي : $P(X \ge 3)$, $P(X > 3)$

يمكن أن نطبّق خصائص الاحتمال :

$$1)\ \ P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F_x(3) = 1 - \left(1 - (\frac{2}{3})^4\right) = (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$$

$$2)\ \ P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F_x(2) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$$

و أخيراً لا بد لنا من أن نذكر الدور الكبير و المهم الذي تلعبه الدالة التوزيعية في حساب القيم الجدولية بالإضافة للفائدة التي تقدمها في حساب ما يلي :

$$\begin{aligned} P(1 < X \le 4) &= P(X \le 4) - P(X \le 1) \\ &= F_X(4) - F_X(1) \\ &= 1 - (\frac{2}{3})^5 - \left(1 - (\frac{2}{3})^2\right) \\ &= (\frac{2}{3})^2 - (\frac{2}{3})^5 = \frac{4}{9} - \frac{32}{243} = \frac{76}{243} \end{aligned}$$

- **ملاحظة (٤) :**

إذا كانت الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي X معطاة بالعلاقة :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=x} P_X(k)$$

عندئذ إذا كان هذا المتغير يأخذ القيم : $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ فإن الدالة التوزيعية لـ X يمكن التعبير عنها بالشكل :

$$F(x) = \begin{cases} P(\phi) = 0 & ; \quad x < x_1 \\ P(x_1) & ; \quad x_1 \le x < x_2 \\ P(x_1) + P(x_2) & ; \quad x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \\ \sum_{k=x_1}^{x_{n-1}} P_X(k) & ; \quad x_{n-1} \le x < x_n \\ \sum_{k=x_1}^{x_{n-1}} P_X(k) = 1 & ; \quad x \ge x_n \end{cases}$$

مثال (١٤) :

افرض أن X متغيرعشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

$$P_X(x) = a\,(\frac{1}{2})^x \;, \;\; x = 0, 1, 3, 4$$

حيث a ثابت موجب، و المطلوب :

١- احسب قيمة الثابت a.

٢- اكتب جدول التوزيع الاحتمالي لـ X .

٣- عين الدالة التوزيعية التراكمية لـ X.

٤- احسب $F_X(3.5)$.

<u>الحل :</u>

١": بما أن $P_X(x)$ يمثل توزيعاً احتمالياً للمتغير العشوائي X عند ذلك :

$$\sum_{x=0}^{4} a\,(\frac{1}{2})^x = 1 \Rightarrow a\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}) = 1$$

$$\Rightarrow a\,(\frac{31}{16}) = 1 \Rightarrow a = \frac{16}{31}$$

أي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنقطع المعطى يأخذ الشكل التالي :

$$P_X(x) = \frac{16}{31}\,(\frac{1}{2})^x \; ; \quad x = 0, 1, 3, 4$$

٢": جدول التوزيع الاحتمالي لـ X هو :

X	0 1 2 3 4	Σ
$P_x(x)$	$\frac{16}{31}\ \frac{8}{31}\ \frac{4}{31}\ \frac{2}{31}\ \frac{1}{31}$	1

٣": الدالة التوزيعية للمتغير X يعبر عنها بالشكل:

$$F(x) = \begin{cases} P(\phi) = 0 & ; \quad x < 0 \\ P_x(0) = \dfrac{16}{31} & ; \ 0 \le x < 1 \\ P_x(0) + P_x(1) = \dfrac{24}{31} & ; \ 1 \le x < 2 \\ P_x(0) + P_x(1) + P_x(2) = \dfrac{28}{31} & ; \ 2 \le x < 3 \\ P_x(0) + P_x(1) + P_x(2) + P_x(3) = \dfrac{30}{31} & \\ \sum_{k=0}^{4} P_X(k) = 1 & ; \ x \ge 4 \end{cases}$$

٤": لحساب $F_X(3.5)$ نكتب :

$$F_X(3.5) = P(X \le 3.5) = P(X \le 3)$$
$$= \sum_{x=0}^{3} \frac{16}{31}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{30}{31}$$

- **ملاحظة (٥) :**

نقاط انقطاع دالة التوزيع للمتغير العشوائي المنقطع هي : $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ ، و عند كل نقطة انقطاع $x_i \ ; \quad i = 1, 2, ...$ فإن الدالة تقفز بمقدار $P_X(x_i)$ ، لذلك نسمي القيم $x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_n$ بمواضع القفزات و احتمالات هذه القيم بارتفاع القفزات .

❖ **التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي مستمر (دوال الكثافة الاحتمالية) :**

لقد عرفنا المتغير العشوائي المستمر X بأنه المتغير الذي يأخذ قيمه على مجال حقيقي ، و يمكن أن ندعو X متغيراً عشوائياً مستمراً ، إذا وجدت دالة غير سالبة $f_X(x)$ تحقق الشرط التالي :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \;\; ; \quad x \in R$$

حيث $F_X(x)$ تمثل دالة التوزيع للمتغير العشوائي X .

و نسمى $f_X(x)$ بدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X أو بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر إذا تحقق :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

- **ملاحظة (٦) :**

واضح أن الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي X هي دالة أصلية لدالة الكثافة الاحتمالية ، أي إن $F_X(x)$ تمثل المساحة المحصورة بين منحني دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ و المحور $o\,x$ على امتداد المجال $]-\infty, x[$ ، و عندها يمكن تطبيق مبرهنة أساسية في الحساب التفاضلي و التكاملي لنحصل على :

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$$

الأمر الذي يؤدي للقول بأن الاحتمال $P(a \le X < b)$ يمثل المساحة المحصورة بين منحني دالة الكثافة الاحتمالية و المحور $0x$ و المستقيمين : $x = a$ و $x = b$.

- **ملاحظة (٧) :**

الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي X تحقق كل الخصائص التي تم ذكرها ، عندما عرفنا الدالة التوزيعية بالحالة العامة ، و بالإضافة إلى ذلك تكون هذه الدالة مستمرة . أي إن :

$$F(x+0) = F(x-0) = F(x)$$

أو :

$$\lim_{x \to x+0} F(x) = \lim_{x \to x-0} F(x) = F_X(x)$$

الأمر الذي يؤدي للقول أنه إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً عندئذ تنعدم الاحتمالات من الشكل $P(x = a)$ بالرغم من أن الأحداث من النموذج $x = a$ ليست مستحيلة . و عندها نخلص للقول بأنه يمكن أن يكون احتمال حدث معدوماً دون أن يكون حدثاً مستحيلاً ، و يوجد حدث احتماله يساوي الواحد دون أن يكون هذا الحدث هو الحدث الأكيد .

- **ملاحظة (٨) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمراً له دالة كثافة احتمالية مستمرة $f_X(x)$ و له دالة توزيع احتمالية $F_X(x)$ مستمرة أيضاً ، عندئذ يتحقق دوماً ما يلي :

$$1)\ P(X \le x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = F_X(x)$$

$$2)\ P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b)$$

$$= \int_{a}^{b} f(x)\, dx = F_X(b) - F_X(a)$$

- **ملاحظة (٩) :**

إذا كانت $f_X(x)$ دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي X و كانت $F_X(x)$ الدالة التوزيعية له عندئذ :

$$\frac{d\, F_X(x)}{dx} = f_X(x)$$

مثال (١٥) :

افرض أن X متغيرعشوائي له دالة كثافة احتمالية معطاة بالشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & ; \ x > 1 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- عين قيمة الثابت a .

٢- عين الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X.

٣- احسب الاحتمالات التالية :

$$P(X > 2) \quad , \quad P(2 < X < 4) \ , \ P(1 < X < 3) \ , \ P(X < \frac{-1}{2})$$

الحل :

١": لدينا :

$$\int_1^{\infty} f_x(x) = 1 \Rightarrow a\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow a\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 1 \Rightarrow a = 1$$

و تكون دالة الكثافة الاحتمالية للمتغيرالعشوائي المعطى X بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & ; \ x > 1 \\ 0 & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

٢": من أجل $x > 1$ نجد أن :

$$F_X(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

من أجل : $\infty \geq x$ نجد أنّ :

$$F_X(x) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

و بالتالي :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad t < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x} & ; \; 1 < x < \infty \\ 1 & ; \quad x \geq \infty \end{cases}$$

٣": لحساب الاحتمالات :

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(2 < X < 4) = F_X(4) - F_X(2) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$P(1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(1) = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - (1 - 1) = \frac{2}{3}$$

$$P(X < \frac{-1}{2}) = F(-\frac{1}{2}) = 0$$

مثال (١٦) :

بفرض أن X متغيرعشوائي له دالة كثافة احتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 \; ; \; 0 < x < 1 \\ \quad 0 \; ; \text{ خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب حساب الاحتمالات التالية :

$$P(0 \leq X \leq \frac{1}{4}) \;,\; P(\frac{1}{4} < X \leq \frac{1}{3}) \;,\; P(\frac{1}{3} < X \leq \frac{3}{4}) \;,\; P(\frac{3}{4} < X \leq 1)$$

الحل :

$$P(0 \le X \le \frac{1}{4}) = \int_{0}^{\frac{1}{4}} 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{64}$$

$$P(\frac{1}{4} < X \le \frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27} - \frac{1}{64} = \frac{27}{1728}$$

$$P(\frac{1}{3} < X \le \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}} 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{4}} = \frac{665}{1728}$$

$$P(\frac{3}{4} < X \le 1) = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 3x^2\, dx = \left[x^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1} = \frac{37}{64}$$

لاحظ أن :

$$P(0 \le X \le \frac{1}{4}) + P(\frac{1}{4} < X \le \frac{1}{3}) + P(\frac{1}{3} < X \le \frac{3}{4}) + P(\frac{3}{4} < X \le 1) = 1$$

$$\frac{1}{64} + \frac{37}{1728} + \frac{665}{1728} + \frac{37}{64} = \frac{1728}{1728} = 1$$

أي إنّ الأحداث الأربعة التي تم حساب احتمالاتها تمثل تجزئة للحدث الأكيد Ω .

- **ملاحظة (١٠) :**

إذا كانت $F_X(x)$ دالة توزيع للمتغير العشوائي المستمر X عندئذ :

$$1)\ \ F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 0$$

$$2)\ \ F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = P(\Omega) = 1$$

مع العلم أن :

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

حيث إن $f_X(x)$ دالة الكثافة للمتغير العشوائي المستمر X.

مثال (١٧) :

بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \frac{a}{4 + x^2} \quad ; -\infty < x < +\infty$$

و المطلوب :

١- عين قيمة الثابت a .

٢- عين الدالة التوزيعية لـ X.

٣- احسب الاحتمالات التالية :

$$P(X > 2) \quad , \quad P(-2 < X < 2)$$

الحل:

١": من أجل تعيين الثابت a لدينا:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Rightarrow a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{4 + x^2}$$

$$\Rightarrow a\left[\frac{1}{2} arctg\, \frac{x}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2}\left[arctg(\infty) - arctg(-\infty) \right] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

و بالتالي :

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4 + x^2} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

و سوف نتعرض إلى مثل هذه الدالة مستقبلاً و هي تمثل دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي

"كوشي" بوسيطين الأول : $a = 2$ و $b = 0$.

٢": لنعيّن الدالة التوزيعية $F_X(x)$ لدينا :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{4+t^2} = \frac{2}{\pi}\lim_{A\to-\infty}\left[\frac{1}{2}\,arctg\,\frac{t}{2}\right]_A^x$$

$$= \frac{1}{\pi}\,arctg\,\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\lim_{A\to-\infty} arctg\,\frac{A}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\,arctg\,\frac{x}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\cdot arctg\,\frac{x}{2} \quad ; \quad x \in R$$

و هي الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي المستمر X .

٣":

$$P(-2 < X < 2) = F_X(2) - F_X(-2)$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,arctg\,(1)\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,arctg\,(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{1}{2}$$

$$P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}arc\tan 1\right) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

مثال (١٨):

بفرض أن X متغير عشوائي يسلك وفق الدالة :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - x & ; \; 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & ; \; 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- تحقق أن $f_X(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي X .

٢- احسب الاحتمالات الآتية :

$$P(X > 4) \quad , \quad P(X < \frac{3}{4}) \quad , \quad P(-2 < X < -1)$$

$$P(X > \frac{1}{2}) \quad , \quad P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$$

<u>الحل :</u>

١": من الواضح أنّ $f(x) \geq 0$ من أجل قيم x الموافقة. و نلاحظ من جهة أخرى أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

و هذا يدل أن $f_X(x)$ تمثّل دالة كثافة احتمالية للمتغير X لأنها حققت الشروط لدالة الكثافة الاحتمالية .

٢":

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \int_0^1 (1-x)\,dx - \int_1^2 (x-1)\,dx = 1 - 1 = 0$$

$$P(X < \frac{3}{4}) = F_X(\frac{3}{4}) = \int_0^{\frac{3}{4}} (1-x)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4} - \frac{9}{32} = \frac{15}{32}$$

$$P(-2 < X < -1) = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} 0\,dx = 0$$

$$P(X > \frac{1}{2}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{2}) = 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)\,dx$$

$$= 1 - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right] = \frac{5}{8}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1 - x)\,dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} (x - 1)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left((1 - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{8})\right) = \frac{1}{4} \quad + \left[\left(\frac{9}{8} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

1

❖ التوزيع الاحتمالي لدالة بمتغير عشوائي معلوم توزيعه الاحتمالي :

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي معلوم إمّا منقطع أو مستمر ، و لتكن $Y = g(x)$ عندئذ لنوجد التوزيع الاحتمالي لـ Y علماً أن لـ $Y = g(X)$ دالة عكسية هي $X = \Psi(y)$.

من أجل ذلك سوف نميز حالتين :

١") إذا كان التوزيع الاحتمالي لـ X منقطعاً .

٢") إذا كان التوزيع الاحتمالي لـ X مستمراً .

أولاً : لندرس الحالة الأولى :

بفرض أن X متغير عشوائي منقطع له توزيع احتمالي:

$$P_X(x) = P(X = x) \ ; \ x = x_1 , x_2 , ... , x_n , ...$$

و لتكن لدينا الدالة $Y = g(X)$ و لنوجد التوزيع الاحتمالي لـ Y ، لدينا :

$$P_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X = \Psi(y)) \quad , \quad y \in \Omega$$

أماّ في الحالة التي يعطى فيها التوزيع الاحتمالي على شكل جدول توزيع احتمالي عندها نميز حالتين :

أ) إذا كانت قيم المتغير X مختلفة و كانت القيم الموافقة لـ Y مختلفة أيضاً ، عندئذ الاحتمالات المقابلة لقيم X هي الاحتمالات المقابلة لقيم Y نفسها ويكون :

Y	Y_1	Y_2	……	Y_n
$P_Y(y)$	$P(y_1)$	$P(y_2)$	……	$P(y_n)$

ب) إذا حصل و كانت بعض قيم Y المقابلة لـ X متساوية، عندها نأخذ قيمة واحدة و الاحتمال المقابل لهذه القيمة يساوي مجموع الاحتمالين المقابلين لقيم X التي من أجلها حصلنا على قيمة واحدة لـ Y.

مثال (١٩) :

بفرض أن X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	١	٢	٣	٤
$P_X(x)$	0.23	0.27	0.20	0.30

و المطلوب إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = 2X$.

<u>الحل :</u>

لدينا مجموعة القيم الممكنة لـ Y هي:

Y	٢	٤	٦	٨
$P_X(x)$	0.23	0.27	0.20	0.30

و ذلك لأن القيم المقابلة لقيم المتغير X مختلفة .

مثال (٢٠):

بفرض أن X متغير عشوائي منقطع جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.1	0.15	0.20	0.1	0.2	0.15	0.1

و المطلوب إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = X^2$.

<u>الحل :</u>

لدينا مجموعة القيم الممكنة لـ Y هي $R_Y = \{0, 1, 4, 9\}$

عندئذ جدول التوزيع الاحتمالي لـ Y هو :

Y	0	1	4	9
$P_Y(y)$	0.1	0.4	0.3	0.2

○ **ملاحظة (١١) :**

بعد إيجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = g(X)$ يمكن ايجاد الدالة التوزيعية للمتغير Y حسب القاعدة المطبقة من أجل جدول توزيع احتمالي لمتغير .

ثانياً : لندرس الحالة الثانية :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ و دالة التوزيع الاحتمالية له $F_X(x)$. وبفرض أن $Y = g(X)$ دالة بدلالة X بحيث إن $g(X)$ دالة وحيدة القيمة و لنبحث عن دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y.

من أجل ذلك سوف نميز حالتين :

أ) بفرض أن $Y = g(X)$ دالة متزايدة و لها دالة عكسية $X = g^{-1}(y) = \Psi(X)$ ، عندئذ لإيجاد دالة الكثافة للمتغير Y نوجد الدالة التوزيعية للمتغير Y ، و من ثم نشتق الدالة التوزيعية فنحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y، و ذلك على الشكل :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(g(x) < y) = P(X < g^{-1}(y)) \\ &= P(X < \Psi(y)) = F_X(\Psi(y)) \end{aligned}$$

و هي الدالة التوزيعية لـ X. و بالتالي :

$$\begin{aligned} f_Y(y) = F_Y'(y) &= \frac{dF_x\left(\Psi(y)\right)}{dy} \\ &= f_Y\Psi(y) \,.\, \frac{d\,\Psi(y)}{dy} \quad , \quad x = \Psi(y) \\ &= f_X(x) \,.\, \frac{dx}{dy}\Big| \; ; x = \Psi(y) \end{aligned}$$

ب) إذا كانت $Y = g(Y)$ دالة متناقصة عندئذ :

$$F_Y(y) = P(Y > y) = P(g(x) < y) = P(x > g^{-1}(y))$$
$$= P(X > \Psi(y)) = 1 - P(X \le \Psi(y))$$
$$= 1 - F_x(\Psi(y))$$

و هي الدالة التوزيعية لـ Y. و بالتالي :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{dF_x(\Psi(y))}{dy} = -f_x(x) \cdot \frac{dx}{dy} \Big| \; ; x = \Psi(y)$$

و بشكل عام و لآية دالة $g(x)$ مستمرة كانت متزايدة أو متناقصة فإن :

$$f_Y(y) = f_x(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| x = \Psi(y)$$

حيث $\left| \frac{dx}{dy} \right|$ يدعى معامل التحويل لجاكوبيان أو معامل تحويل الدالة $Y = g(x)$.

مثال (٢١):

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f_x(x) = \frac{1}{x^2} \quad , \quad x \ge 1$$

و المطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = e^{-x}$.

<u>الحل :</u>

لدينا $x = -\ln y$ و بالتالي $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}$ و $\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{y}$ و منه :

$$f_Y(y) = F_X(x) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| x = -\ln y = \frac{1}{(-\ln y)^2} \cdot \frac{1}{y} \quad ; \quad 0 < y < e^{-1}$$

وبطريقة أخرى :

$$F_Y(y) = P(Y > y) = P(e^{-X} < y) = P(-X < Ln\, y)$$

$$= P(X > -Ln\, y) = \int_{-Ln\, y}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-Ln\, y}^{\infty} = \frac{1}{\ln \frac{1}{y}}$$

و منه :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}}}{(-\ln y)^2} = \frac{1}{y(\ln y)^2} \quad ; \quad 0 < y < e^{-1}$$

و هي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها بالطريقة السابقة أي يمكن إيجاد الدالة التوزيعية لـ Y و من ثم نشتقها فنحصل على دالة الكثافة المطلوبة .

مثال (٢٢) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية $f_x(x)\,;\, x \in R$ و لتكن $Y = X^2$ دالة بالمتغير العشوائي X . عندئذ عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y.

<u>الحل :</u>

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$$

$$= P(X < \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

و منه :

$$f_Y(y) = \frac{d\,F_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\; f_x(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}\; f_x(-\sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\, f_x(\sqrt{y}) + f_x(-\sqrt{y})\,\right]$$

و في الحالة الخاصة إذا كان منحني دالة الكثافة للمتغير العشوائي X متناظراً بالنسبة للمحور العمودي oy عند ذلك :

$$F_x(\sqrt{y}) + F_x(-\sqrt{y}) = 1 \Rightarrow F_x(\sqrt{y}) = 1 - F_x(-\sqrt{y})$$

عندئذ :

$$F_Y(y) = 2\,F_x(\sqrt{y}) - 1$$

و بالتالي :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = 2\,\frac{1}{2\sqrt{y}}\; f_X\,(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{y}}\; f_X\,(\sqrt{y})$$

و عملياً لو فرضنا أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \;, -\infty < x < +\infty$$

عندئذ دالة الكثافة للمتغير العشوائي $y = X^2$ هي :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{y}{2}} \;,\; x > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \;,\; y > 0$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-\frac{y}{2}} \;, y > 0$$

و هي دالة كثافة احتمالية لمتغير عشوائي غماوي بوسيطين الأول $\lambda = \frac{1}{2}$ و الثاني

$\alpha = \frac{1}{2}$ و سوف تتم دراسته لاحقاً .

و أخيراً يمكن أن نكتب :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, y^{\frac{-1}{2}} \, e^{-\frac{y}{2}} & ; \quad y > 0 \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

مثال (٢٣):

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 \; ; & 0 < x < 1 \\ 0 \; ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $Y = -2 \ln X$.

<u>الحل</u> : لدينا :

$$F_Y(y) = P\,(Y < y)$$

$$= P\,(-2 \ln X < y) = P\,(\ln X > -\frac{y}{2})$$

$$= P\,(X > e^{-\frac{y}{2}}) = 1 - P \leq (Xe^{-\frac{y}{2}})$$

$$= 1 - \int_o^{e^{-\frac{y}{2}}} dx = 1 - \Big[X\Big]_0^{e^{-\frac{y}{2}}} = 1 - e^{-\frac{y}{2}}$$

بالتالي :

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{y}{2}} \quad ; \; y > 0$$

و بالتالي فإن دالة الكثافة الاحتمالية لـ Y هي :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} & ; \quad y > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

■ طريقة ثانية للحل : لدينا $x = e^{-\frac{y}{2}}$ أي :

$$\left|\frac{dx}{dx}\right| = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dx} = -\frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}}$$

و بالتالي :

$$f_Y(y) = f_X(x).\left|\frac{dx}{dx}\right| x = e^{-\frac{y}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} \; ; \; y > 0$$

و هي النتيجة السابقة نفسها حيث $f_Y(y) = 0$ لما$0 > y$.

مثال (٢٤) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_x(x) = 2e^{-2x}, \; x > 0$$

المطلوب:

١- عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = \frac{1}{X}$.

٢- عين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = \sqrt{X}$.

<u>الحل :</u>

١": لدينا $X = \frac{1}{Y}$ أي $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y^2}$ و منه $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y^2}$

و بالتالي :

$$f_Y(y) = f_X(x).\left|\frac{dx}{dx}\right| x = \frac{1}{y}$$

$$= 2\, e^{-2\frac{1}{y}} . \frac{1}{y^2} \quad ; y > 0$$

و منه نلاحظ ما يلي :

$$2\int_o^\infty \frac{1}{y^2} . e^{-\frac{2}{y}}\, dy = \int_o^\infty e^{-z}\, dz = (-e^{-z})^\infty = 1$$

$\left|\frac{dx}{dx}\right| = 2y$ و $\frac{dx}{dx} = 2y$ أي $x = y^2$ لدينا :"٢

عندئذ حسب القاعدة :

$$f_Y(y) = f_X(x).\left|\frac{dx}{dx}\right| x = y^2$$

$$= 2 \quad e^{-2\,y^2} . 2\, y \quad ; \quad y > 0$$

$$= 4\, y\, e^{-2\,y^2} \quad ; \quad y > 0$$

مع ملاحظة أنَ :

$$\int_o^\infty 4y.\, e^{-2\,y^2}\, dy = \int_o^\infty e^{-z}\, dz = -e^{-z}\Big|_0^\infty = 1$$

تم حساب التكامل بإجراء تحويل $z = 2\,y^2$.

تمارين غير محلولة على الفصل الثاني

١) بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = a\, x\, e^{-x} \quad ; x > 0$$

و المطلوب إيجاد قيمة الثابت a .

٢) بفرض X متغير عشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = a \frac{2^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, ...$$

و المطلوب إيجاد :

١- جدول التوزيع الاحتمالي لـ X .

٢- احسب : $P(X \le 2)$, $P(x > 3)$, $P(1 < X \le 4)$.

٣) بفرض X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$P_X(x)$	λ	2λ	2λ	3λ	$3\lambda^2$	$4\lambda^2$	$5\lambda^2$	2λ	λ

المطلوب :

١- أوجد قيمة λ .

٢- أوجد الدالة التوزيعية لـ X .

٣- أحسب $P(X \le 1)$, $P(-2 < X \le 2)$.

٤) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad x > 0$$

و بفرض $Y = F(x)$، عندئذ أثبت أن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Y هي :

$$f_Y(y) = 1 \ , \ \ 0 < y < 1$$

٥) بفرض X متغير عشوائي يتوزع وفق الدالة :

$$f(x) = \sin x \ , \ 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

المطلوب :

١- بّين أن $f(x)$ تمثل كثافة احتمالية لـ X .

٢- عيّن الدالة التوزيعية لـ X .

٣- احسب $P(X > \frac{\pi}{6})$ و $P(X < \frac{\pi}{4})$ و $P(\frac{\pi}{5} < X < \frac{\pi}{3})$.

٦) في مدرج أحد المطارات تبين أن عدد الدقائق التي تنتظرها طائرة لحين مجيئ دورها للإقلاع هو متغير عشوائي دالة توزيعه الاحتمالية :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.3x} & ; \ x \geq 0 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب:

١- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لـ X .

٢- عيّن احتمال أن تنتظر طائرة معينة أكثر من ١٠ دقائق .

٧) بفرض X متغير عشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي بالشكل :

$$P_X(x) = \frac{x+2}{a} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

و المطلوب :

١- عين قيمة الثابت a .

٢- عيّن الدالة التوزيعية لـ X .

٣- احسب $P(1 < X \le 4)$, $P(X > 3)$.

٨) بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} x & ; 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- عيّن الدالة التوزيعية لـ X .

٢- احسب $P(0.8 < X < 1.2)$.

٩) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{5} & ; 2 < x < 7 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- عيّن الدالة التوزيعية لـ X .

٢- أحسب $P(3 < X < 5)$.

١٠) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} a(4x - 2x^2) & ; 0 < x < 2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- عيّن قيمة الثابت a .

٢- عيّن دالة التوزيع للمغير العشوائي X .

٣- احسب $P(X > 1)$.

١١) بفرض X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	-1	1	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$

المطلوب :

١- عيّن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X .

٢- إذا كان $Y = 2X$ عندئذ عيّن جدول التوزيع الاحتمالي لـ Y.

٣- عيّن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي Y.

٤- إذا كان $Z = X^2$ عندئذ عيّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير Z ، ثم عيّن جدول التوزيع الاحتمالي لـ Z.

١٢) بفرض X متغير عشوائي دالة التوزيع الاحتمالية له هي $F_X(x)$ و ليكن $Y = -X$ عندئذ عيّن دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير Y عندما يكون X منقطعاً و عندما يكون X مستمراً .

١٣) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad x > 0$$

المطلوب :

١- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = \sqrt{X}$.

٢- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = \frac{1}{X}$.

١٤) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^{-3} & ; \quad x > 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب :

١- عيّن قيمة الثابت a .

٢- عيّن دالة التوزيع للمغير العشوائي X .

٣- احسب $P(X > 2)$.

١٥) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل:

$$f(x) = \frac{a}{e^{x} + e^{-x}} \quad , \quad x \in R$$

المطلوب :

١- عيّن قيمة الثابت a .

٢- عيّن دالة التوزيع للمغير العشوائي X .

٣- احسب $P(X > 0)$.

١٦) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب تعيين دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير $Y = X^{3}$.

١٧) بفرض X متغير عشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

$$P_X(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^{x} & ; \quad x = 1, 2, ... \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب التأكد من $P_X(x)$ يمثّل توزيعاً احتمالياً لـ X .

١٨) بفرض X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي بالشكل :

X	-3	-1	0	1	2	٥
$P_X(x)$	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1

المطلوب :

١- احسب $P(-2 < X \leq 2)$ و $P(0 \leq X < 6)$.

٢- احسب $P(0 \leq X \leq 2)$.

١٩) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(3x^2 - 2x + 1) & ; \ 1 < x < 2 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- حساب $P(1 < X < 1.5)$ و $P(1.2 < X < 3)$.

٢- حساب $P(1.2 < X < 1.5)$.

٣- حساب$P(-2 < X \leq 2)$.

٤- حساب $P(1.2 < X < 1.8)$ و $P(X < \frac{3}{2})$.

٢٠) بفرض X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى كما في التمرين (١٩) عندئذ أوجد :

١- أوجد الدالة التوزيعية للمتغيرالعشوائي X .

٢- احسب $P(X < 0)$ و $P(-1 < X \leq 2)$ باستخدام الدالة التوزيعية و باستخدام التوزيع الاحتمالي المنقطع .

٢١) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب حساب : $P\left(X \geq \frac{1}{2}\right)$, $P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$

٢٢) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x}{2} & ; \ 0 < x < 2 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- احسب ما يلي :

$P(1 < X < 4)$ و $P(X < 2)$ و $P(X > 8)$

٢- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $Y = X^2$.

٣- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $Y = \ln X$.

****

الفصل الثالث

الصفات العددية للمتغيرات العشوائية

"التوقع الرياضي و تطبيقاته"

سنعرض في هذا الفصل مفهوم الصفات العددية للمتغيرات العشوائية ، و من أهم الصفات العددية التوقع الرياضي و تطبيقات هذا التوقع . و نظراً لأهمية التوقع الرياضي و تطبيقاته فقد تم تخصيص هذا الفصل لدراسته بشكل مفصّل نظراً لاعتماد كثير من المواضيع في الاحصاء و الاحتمالات عليه .

- **(٣-١) : التوقع الرياضي لدالة في متغير عشوائي :**

تعريف :

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي "منقطع أو مستمر" ، و لتكن $Y=$ $g(X)$ دالة عددية بالمتغير X عندئذ يعرف التوقع الرياضي لـ$g(X)$ و الذي نرمز له بالرمز $E\left(g(X)\right)$ بالعلاقات التالية :

$$E\left(g(X)\right)=\begin{cases}\sum_{x} g(x)\,P_X(x) & ;\ \text{منقطع} \quad X\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & ;\ \text{مستمر} \quad X\end{cases}$$

و يكون هذا التوقع موجوداً إذا كان كل من المجموع و التكامل متقاربين بشكل مطلق أي :

$$\sum_{x}\left|\,g(x)\,P_X(x)\,\right| = \sum_{x}\left|\,g(x)\,\right| P_X(x) < +\infty$$

أو:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\,g(x)\,f(x)\,\right| dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\,g(x)\,\right| f(x)\,dx < +\infty$$

الأمر الذي يؤدي للقول إن التوقع موجود ، و لكن إذا كان كل من المجموع و التكامل متباعدين عندئذ لا يوجد توقع رياضي للدالة $g(X)$ أي يقال إن التوقع الرياضي لـ $g(X)$ غير معرف .

- **حالة خاصة :**

إذا كان $g(x) = X$ عندئذ نحصل على التوقع الرياضي للمتغير X و الذي يعطى بالعلاقات الآتية :

$$EX = \begin{cases} \sum_{x} x \ \ P_X(x) & ; \text{منقطع} \quad x \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ f(x)\ dx & ; \text{مستمر} \quad x \end{cases}$$

مع ملاحظة أن التوقع لـ X موجود إذا كان كل من المجموع و التكامل متقارب بشكل مطلق أي :

$$E\left|X\right| < +\infty$$

أما إذا كان المجموع متباعداً و التكامل متباعداً ، عندئذ لا يوجد توقع لـ X ، أي يقال إن التوقع لـ X غير معروف .

مثال (١) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي : $P_X(x) = \frac{e^{-1}}{x!}, \ x = 0, 1, 2, ...$

عندئذ ، هل يوجد توقع رياضي للدالة $g(X) = X!$ أم لا ؟

الحل :

$$E(X!) = \sum_{i=1}^{\infty} x!\, P_X(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x!\, \frac{e^{-1}}{x!}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} e^{-1} = e^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} 1$$

من الواضح أن $\sum_{x=1}^{\infty} 1$ متباعد، الأمر الذي يؤدي للقول إن $E(X!)$ غير معرّف ، و بالتالي لا يوجد توقع رياضي للدالة $g\,(X) = X\,!$.

مثال (٢) :

إذا كان لدينا التوزيع الاحتمالي المعطى بالمثال السابق للمتغير X ، عندئذ أوجد التوقع الرياضي للمتغير $g(X) = X\,(X-1)$.

<u>الحل :</u>

$$P_X(x) = \frac{e^{-1}}{x\,!}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, ...$$

$$E\left(g(x)\right) = E\left[X\,(X-1)\right] = \sum_{x=0}^{\infty} x\,(x-1)\,\frac{e^{-1}}{x\,!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(x-2)\,!} = e^{-1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{(x-2)\,!}$$

$$= e^{-1}.e = 1$$

و ذلك لأن :

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{(x-2)!} = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{y!} = e^{-1} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y!} = e^{-1}.\,e$$

حيث أجرينا تحويل $x - 2 = y$ و $\sum_{y=0}^{\infty} \frac{1}{y\,!} = e$

مثال (٣) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = (\frac{2}{3})\,(\frac{1}{3})^{x}\ ,\ \ x = 0, 1, 2, ...$$

المطلوب : هل التوقع للدالة $g(X) = 4^{X}$ موجود ؟

الحل:

$$E\,(4^x) = \sum_{x=0}^{\infty} 4^x \,(\frac{2}{3})\,(\frac{1}{3})^x = \frac{2}{3}\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x$$

نلاحظ أن المجموع $\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x$ متباعد ، و هذا يعني أن $E\,(4^X)$ غير معرّف أي لا يوجد توقّع للدالة $g(X) = 4^X$ ، و لكن إذا كانت $g(X) = 2^X$ فإن :

$$E(2^X) = \sum_{x=0}^{\infty} 2^x \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)\sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

و نلاحظ أن : $3 = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \sum_{x=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^x$ و ذلك لأن المجموع يمثل متسلسلة هندسية متقاربة حدها الأول ١ و أساسها $\frac{2}{3}$ و بالتالي فإن :

$$E\,(2^X) = (\frac{2}{3})\,(3) = 2$$

و هذا يدل على ان التوقع للدالة $g(X) = 2^X$ موجود و قيمته تساوي ٢.

- **ملاحظة (١) :**

واضح من الأمثلة السابقة أن مشكلة عدم إمكانية إيجاد التوقع الرياضي للدالة $g(X)$ في بعض الأحيان يعود إلى أن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X تمثل مجموعة غير منتهية . في حين إذا كانت مجموعة القيم التي يأخذها المتغير X تمثل مجموعة منتهية فإن $E\,g(X)$ يكون موجوداً عادة .

- **ملاحظة (٢) :**

إذا كان لدينا بيان إحصائي حجمه n معطى بالجدول التالي :

القيم X_i	x_1	x_2	....	x_n
التكرار	n_1	n_2	....	n_n

أي إن البيان الاحصائي يحوي n قيمة مختلفة و إن تكرار القيمة X_i هو n_i حيث ($i = 1, 2, 3, \ldots$) ، وإذا أمعنا النظر بالعلاقة التي تربط بين التكرار النسبي و الاحتمال نتوصل إلى المعنى التطبيقي للتوقع الرياضي و هو أن التوقع الرياضي لمتغير عشوائي ما هو إلا متوسط القيم التي يأخذها المتغير العشوائي .

مثال (٤) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & ; \quad x > 0 \\ 0 \;; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عندئذ هل يوجد توقع للدالة $g(X) = e^{2X}$ ؟

<u>الحل</u> : لدينا :

$$E\,(e^{2x}) = \int_0^\infty e^{2x}\,.\,e^{-2x}\,dx = 2\int_0^\infty dx$$
$$= 2\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

أي إن التكامل $\int_0^\infty dx$ متباعد و هذا يدل على أن $E\,(e^{2X})$ غير معرّف، الأمر الذي يؤدي للقول إنه لا يوجد توقع رياضي للدالة $g(X) = e^{2X}$.

لكن إذا كانت $g\,(X) = 4X$ فإن :

$$E(4X) = \int_0^{\infty} (4x) \,.\, 2e^{-2x}\, dx = 8\int_0^{\infty} x \,.\, 2e^{-2x}\, dx$$

و بإنجاز التكامل بطريقة التجزئة نجد أن التكامل متقارب و مساوٍ لـ $\frac{1}{4}$. عند ذلك فإن

$E(4X)$ موجود و يساوي $8.(\frac{1}{4}) = 2$.

مثال (٥) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & ; \quad x > 1 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

عند ذلك هل التوقع الرياضي للدالة $g(X) = X^3$ موجود ؟

<u>الحل:</u>

$$E(X^3) = \int_1^{\infty} x^3 f(x)dx = 2\int_1^{\infty} x^3 \frac{dx}{x^3}$$

$$= 2\int_1^{\infty} dx = 2[\lim_{x\to\infty} x - 1]$$

و هذا يدل على أن $\int_1^{\infty} dx$ متباعد و بالتالي لا يوجد توقع للدالة $g(X) = X^3$، و هذا

يوضح أن التوقع الرياضي للدالة $g(X) = aX^3$ غير موجود .

و أخيراً إذا كانت $g(X) = \sqrt{X}$ عند ذلك :

$$E\sqrt{X} = E(X^{\frac{1}{2}}) = 2\int_1^{\infty} x^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{x^3}\, dx = 2\int_1^{\infty} x^{-\frac{5}{2}} dx$$

$$= 2\left[-\frac{2}{3}\; x^{-\frac{3}{2}}\right] = +\frac{4}{3}$$

و هذا يعني أن التكامل متقارب و هذا يدل على أن التوقع الرياضي للدالة $g(X) = \sqrt{X}$

موجود و مساوي لـ $\frac{4}{3}$.

➢ **(٢-٣) : خصائص التوقع الرياضي :**

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي قد يكون منقطعاً أو مستمراً $f_X(X)$, $P_X(x)$ ، و بفرض أن $g(X)$ دالة بالمتغير X لها توقع رياضي موجود ، عند ذلك :

١- إذا كانت $g(X) = K$ حيث K ثابت عندئذ $E(K) = K$.

<u>**البرهان :**</u>

$$E(K) = \sum_x K\, P_x(x) = K \sum_x P_x(x) = K(1) = K$$

حيث $\sum_x P_X(x) = 1$.

٢- $E(K\, g(X)) = K\, Eg(X)$ حيث K ثابت .

<u>**البرهان :**</u>

$$\begin{aligned} E(K\; g(X)) &= \sum_x K\; g(x)\; P_X(x) \\ &= K \sum_x \; g(x)\; P_X(x) = K\; Eg(X) \end{aligned}$$

أي التوقع الرياضي لثابت في متغيرعشوائي يساوي الثابت في التوقع الرياضي للمتغير العشوائي .

٣- إذا كان a و b ثابتين حقيقيين عندئذ :

$$E\left(a\; g(x) + b\right) = a\; E\; g(X) + b$$

البرهان :

$$E\left(a\ g(X)+b\right)=\sum_{x}\left[a\ g\ (x)+b\ \right]P_X\,(x)$$
$$=\sum_{x} a\ g\ (x)\ P_X\,(x)+\sum_{x} b\ P_X\,(x)$$
$$=a\sum_{x}\ g\ (x)\ P_X\,(x)+b\sum_{x}\ P_X\,(x)$$
$$=a\ E\ g(X)+b$$

٤- إذا كانت $K_1\,,K_2\,,......,K_n$ ثوابت حقيقية و كانت الدوال $g_1(X)+g_2(X)+.....+g_n(X)$ بحيث لكل منها توقع رياضي عند ذلك فإن :

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}K_i\ g_i\ (X)\right)=\sum_{i=1}^{n}K_i\ Eg_i\ (X)\ =\ K_1\ Eg_1(X)+.....+K_n\ Eg_n(X)$$

٥- بشكل عام يكون لدينا :

1) $E\ g(X)\ \neq\ g\ (E(X))$

2) $E\ \dfrac{1}{g\ (X)}\ \neq \dfrac{1}{E\left[g(X)\right]}$

3) $E\ \sqrt{g\ (X)}\ \neq\ \sqrt{E\left[g(X)\right]}$

4) $E\ \ln\ g(X)\ \neq \ln\ E\left[g(X)\right]$

5) $E\ (g(X))^K\ \neq\ \left(E\left[g(X)\right]\right)^K$

حيث إن K عدد ثابت .

* في الحالة الخاصة إذا كانت $g(X)\ =\ X$ فإن :

$$E\left(\frac{1}{X}\right)\neq\frac{1}{E(X)}$$

$$E\sqrt{X}\neq\sqrt{E(X)}$$

$E(\ln X) \neq \ln[E(X)]$

○ **ملاحظة (٣) :**

تم برهان الخصائص من ١ حتى ٤ في حالة X متغير عشوائي منقطع معلوم توزيعه الاحتمالي $P_X(x)$ و أيضاً يبرهن على الخصائص المذكورة في حالة X متغير عشوائي مستمر له دالة كثافة احتمالية بالطريقة نفسها . لكن نضع مكان رمز المجموع رمز التكامل .

أما الخاصة رقم (٥) فتقبل بدون برهان .

♦ **(٣-٣) : تطبيقات التوقع الرياضي :**

سنعرض فيما يلي أهم تطبيقات التوقع الرياضي و التي سنحتاجها في الكثير من الفقرات اللاحقة . و هي :

أولاً : العزوم :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي (منقطع أو مستمر) $P_X(x)\ ,\ f_X(X)$

عند ذلك بالتعريف العزوم لمتغير عشوائي X أو للتوزيع الاحتمالي المعطى هي القيم المتوقعة لدوال بمتغير عشوائي X معلوم توزيعه الاحتمالي ، و هذه العزوم على أنواع عديدة نذكر منها :

١ً- العزوم اللامركزية :

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي $P_X(x)\ ,\ f_X(X)$ و بفرض أن $EX \neq b$ حيث b ثابت اختياري ، عندئذ بالتعريف العزم اللامركزي للمتغير العشوائي X من المرتبة r حول النقطة الثابتة b يعطى بالصيغة :

$$E(X-b)^r = \begin{cases} \sum_x (x-b)^r\ P_x(x)\ ;\ X & \text{منقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^r\ f_x(x)\,dx\ ;\ X & \text{مستمر} \end{cases}$$

علماً أن r صحيح موجب : $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$.

وفي الحالتين يكون هذا العزم اللامركزي موجوداً إذا كان كل من المجموع و التكامل متقارب بشكل مطلق.

مثال (٦) :

بفرض ان X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 \ ; & 0 < x < 1 \\ 0 \ ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب : ايجاد العزم اللامركزي ذو المرتبة الثالثة حول النقطة $x = -1$

الحل :

$$E(X+1)^3 = \int_0^1 (x+1)^3 \, . \, 3x^2 \, dx$$

$$= 3\int_0^1 (x+1)^3 \, . \, x^2 \, dx$$

$$= 3\int_0^1 x^2 \left[x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \right] dx$$

$$= 3\int_0^1 \left[x^5 + 3x^4 - 3x^3 + x^2 \right] dx$$

$$= 3\left[\frac{x^6}{6} + \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{21}{20}$$

مثال (٧) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$P_X(x) = \frac{x}{15} \ ; \quad x = 1, 2, 3, 4, 5$$

المطلوب : ايجاد العزم اللامركزي ذي المرتبة الثانية حول النقطة x=2 .

الحل :

$$E(X-2)^2 = \sum_{x=1}^{4}(x-2)^2 \cdot \frac{x}{15}$$

$$= \frac{1}{15}\sum_{x=1}^{4} x\,(x-2)^2$$

$$= \frac{1}{15}\left[1\,(1-2)^2 + 2\,(2-2)^2 + 3\,(3-2)^2 + 4\,(4-2)^2 + 5\,(5-2)^2\right] = \frac{13}{3}$$

$$= \frac{1+3+16+45}{15} = \frac{65}{15}$$

ً٢- العزوم الابتدائية (العزوم حول الصفر) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي معلوم ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) ، عندئذ بالتعريف العزم الابتدائي من المرتبة r (r عدد صحيح موجب) يعرف بالصيغة :

$$\alpha_r = \begin{cases} \sum_{x} x^r \; P_X(x) & ; \text{منقطع} \quad x \qquad X \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r \quad f(x)\, dx & ; \text{مستمر} \quad x \qquad X \end{cases}$$

حيث : $r = 1, 2, 3, ...$

- **ملاحظة (١) :**

من تعريف العزم الابتدائي من المرتبة r (r عدد صحيح موجب) واضح أنه حالة خاصة من العزم اللامركزي للمتغير X من المرتبة r حول النقطة $x = 0$ أي $b = 0$.

- **ملاحظة (٢) :**

إذا بدلنا في صيغة العزم الابتدائي من المرتبة r كل r=1 نحصل على عزم ابتدائي من المرتبة الأولى و يدعى هذا العزم الابتدائي بالتوقع الرياضي لـ X .

أماّ إذا كانت r=2 فنحصل على عزم ابتدائي من المرتبة الثانية .

مثال (٨) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = \frac{x}{6} \quad ; \quad x = 1, 2, 3$$

المطلوب : إيجاد العزوم الابتدائية من المرتبة الأولى و الثانية و الثالثة لـ X .

<u>الحل:</u>

$$\alpha_1 = EX = \sum_{x=1}^{3} (x)\,.\frac{x}{6} = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{2}{6} + 3.\frac{3}{6}$$

$$= \frac{1+4+9}{6} = \frac{14}{6}$$

$$\alpha_2 = EX^2 = \sum_{x=1}^{3} (x^2).\frac{x}{6} = (1)^2.\frac{1}{6} + (2)^2.\frac{2}{6} + (3)^2.\frac{3}{6}$$

$$= \frac{1+8+27}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\alpha_3 = EX^3 = \sum_{x=1}^{3} (x^3).\frac{x}{6} = (1)^3.\frac{1}{6} + (2)^3.\frac{2}{6} + (3)^3.\frac{3}{6}$$

$$= \frac{1+16+81}{6} = \frac{98}{6} = \frac{49}{3}$$

مثال (٩) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 \; ; & 0 < x < 1 \\ 0 \; ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب : إيجاد العزوم الابتدائية من المرتبة الأولى و الثانية و الثالثة .

الحل:

$$EX = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x \,.\, 3x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$EX^2 = \int_0^1 x^2 \, f(x)\, dx = \int_0^1 x^2 \,.\, 3x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$$

$$EX^3 = \int_0^1 x^3 \, f(x)\, dx = \int_0^1 x^3 \,.\, 3x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 3x^5 dx = \frac{3}{6}$$

٣- العزوم المركزية :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) ، و بفرض أن له توقعاً رياضياً $EX = \mu$ ، عندئذ يعرف العزم المركزي من المرتبة r لـ X بالصيغة :

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^r \, P_X(x) \quad ; \quad X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r \, f_X(x)\, dx \quad ; \quad X \text{ صحيح} \end{cases}$$

حيث r عدد صحيح موجب $(r = 1, 2, 3, ...)$.

- **ملاحظة (١) :**

من الواضح أن العزم المركزي من المرتبة r لمتغير عشوائي X هو حالة خاصة من العزم اللامركزي من المرتبة r حول النقطة$b = E(X)$.

- **ملاحظة (٢) :**

من الواضح أنه إذا كانت $r = 1$ فإن العزم المركزي من المرتبة الأولى لـ X معدوم ، و ذلك لأنه :

$$\mu_1 = E(X - \mu) = EX - \mu = \mu - \mu = 0$$

و إذا كانت $r = 2$ نحصل على العزم المركزي من المرتبة الثانية لـ X و هو :

$$\mu_2 = E(X - \mu)^2$$

و يدعى بالتباين للمتغير العشوائي X ، سوف نأتي على ذكر ذلك فيما بعد .

- **ملاحظة(٣) :**

نلاحظ أن إذا علمت العزوم الابتدائية لـ X من المرتبة r فسوف نحصل على العزم المركزي لـ X من المرتبة r، وذلك لأن :

$$E(X - EX)^r = E\left[\sum_{k=0}^{r} C_K^r \; X^K \; (-EX)^{r-k}\right]$$

$$= E\left[(-EX)^r + r(x)\,(-EX)^{r-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + X^r\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{r} C_K^r \; (-EX)^{r-k} \,.\, EX^K \quad ; \quad EX^0 = 1$$

و يلاحظ من هذه الصيغة الأخيرة أنه أمكن التعبير عن العزم المركزي من المرتبة rبدلالة العزوم الابتدائية من المرتبة نفسها و أقل. على سبيل المثال :

$$E(X - EX)^3 = E\left[X^3 - 3X^2 EX + 3X(EX)^2 - (EX)^3\right]$$

$$= EX^3 - 3E(X^2)EX + 3(EX)^3 - (EX)^3$$

$$= EX^3 - 3E(X^2)EX + 2(EX)^3$$

مثال (١٠) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = \frac{1}{7}, \quad x = 1, 2, ..., 6, 7$$

و المطلوب إيجاد العزم المركزي من المرتبة الثالثة لـ X .

<u>**الحل :**</u>

لدينا :

$$EX = \sum_{x=1}^{7} x\, P_X(x) = \sum_{x=1}^{7} x \,.\, \frac{1}{7}$$

$$= 1.\frac{1}{7} + 2.\frac{1}{7} + 3.\frac{1}{7} + 4.\frac{1}{7} + 5.\frac{1}{7} + 6.\frac{1}{7} + 7.\frac{1}{7} = 4$$

$$EX^2 = \sum_{x=1}^{7} x^2\, \frac{1}{7} = \frac{48}{12}$$

$$EX^3 = \sum_{x=1}^{7} x^3\, \frac{1}{7} = 112$$

عندئذ :

$$E(X - EX)^3 = EX^3 - 3EX\ EX^2 + 2(EX)^3$$

$$= 112 - 3(4)(4) + 2(4)^3$$

$$= 112 - 48 + 128 = 192$$

مثال (١١) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x \; ; & 0 < x < 1 \\ 0 \; ; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب : حساب العزم المركزي من المرتبة الثالثة لـ X .

<u>الحل</u> : لدينا :

$$EX = \int_0^1 x\,(2x)\,dx = \int_0^1 (2x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

$$EX^2 = \int_0^1 x^2\,(2x)\,dx = \int_0^1 (2x^3)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$EX^3 = \int_0^1 x^3\,(2x)\,dx = \int_0^1 (2x^4)\,dx = \frac{2}{5}$$

و بالتالي العزم المركزي من المرتبة الثالثة لـ X :

$$\begin{aligned} E(X - EX)^3 &= EX^3 - 3\,(EX)\,(EX^2) + 2\,(EX)^2 \\ &= \frac{2}{5} - 3\,(\frac{2}{3})\,(\frac{1}{2}) + 2\,(\frac{2}{3})^3 = -\frac{1}{135} \cong -0.007 \end{aligned}$$

<u>٤- العزوم العاملية :</u>

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) ، عندئذ بالتعريف :

"العزم العاملي" من المرتبة r لـ X يعطى بالصيغة :

$$E\left[\prod_{i=1}^{r}(X - i + 1)\right] = \begin{cases} \sum_x \left[\prod_{i=1}^{r}(x - i + 1)\, P_X(x)\right] ; & X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\prod_{i=1}^{r}(x - i + 1)\, f_X(x)\, dx\right] ; & X \text{ مستمر} \end{cases}$$

حيث إن r صحيح موجب . $r = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$

و بالتالي يمكن أن نحصل على العزم العاملي من المرتبة الأولى إذا عوضنا كل $r = 1$ و

هو EX ، وعندما $r = 2$ نحصل على العزم العاملي من المرتبة الثانية و هو :

$.EX(X-1) = EX^2 - EX$

- **ملاحظة :**

يمكن حساب قيمة العزوم العاملية لمتغير عشوائي X إذا علمت عزومه الابتدائية ، فعلى سبيل المثال قيمة العزم العاملي من المرتبة الثالثة يعطى بدلالة العزوم الابتدائية أي :

$$E\left[\prod_{i=1}^{3}(X-i+1)\right] = EX(X-1)(X-2)$$

$$= EX^3 - 3E(X^2) + 2E(X) \qquad (\ )$$

مثال (١٢) :

إذا عدنا إلى معطيات المثالين السابقين لنوجد العزم العاملي الثالث.

<u>الحل:</u>

$$E(X)(X-1)(X-2) = EX^3 - 3EX^2 + 2EX$$
$$= 112 - 3(4) + 2(4) = 112 - 12 + 8 = 108$$

هذا بالنسبة لمعطيات المثال (١٠) .

أما بالنسبة لمعطيات المثال (١١) فنجد :

$$E(X)(X-1)(X-2) = EX^3 - 3EX^2 + 2EX$$
$$= \frac{2}{5} - 3\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{30}$$

ثانياً: التباين:

لقد تعرفنا إلى التوقع الرياضي لمتغير عشوائي و لنتعرف الآن إلى التباين لمتغير عشوائي X الذي يعبّر عن مقياس لدرجة التشتت قيم هذا المتغير الذي يخضع لتوزيع احتمالي مفروض .

- **تعريف التباين :**

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي مفروض ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) ، و بحيث العزوم الابتدائية لـ X من المرتبة الأولى و الثانية موجودة ، عندئذ بالتعريف التباين للمتغير العشوائي X والذي نرمز له بالرمز $V(X)$ يعطى بالعلاقة :

$$V(X) = E(X - EX)^2$$

و يرمز له أيضاً بالرمز σ_X^2 أو σ^2 للاختصار .

من الواضح أن التباين لمتغير عشوائي X يمثل العزم المركزي من المرتبة الثانية لـ X ، أي :

$$\begin{aligned}\mu_2 = \sigma^2 = E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2X\ EX + (EX)^2) \\ &= EX^2 - 2\,(EX)^2 + (EX)^2 \\ &= EX^2 - (EX)^2\end{aligned}$$

وهي صيغة التباين المختزلة لمتغير عشوائي X أي :

التباين يساوي العزم الابتدائي من المرتبة الثانية مطروحاً منه مربع العزم الابتدائي من المرتبة الأولى أي : $\mu_2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$

*** ملاحظة (١) :**

واضح من التعريف أن التباين لمتغير عشوائي X إذا وجد يمثل قيمة حقيقية غير سالبة ($V(X) \geq 0$) .

*** ملاحظة (٢) :**

إذا كان أحد العزمين الابتدائيين للمتغير X غير موجود، فهذا يعني أن التباين لـ X غير موجود .

*** تعريف الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X :**

بفرض أن X متغير عشوائي له تباين $(\sigma^2 = V(X))$ عندئذ بالتعريف للانحراف المعياري لـ X والذي نرمز له بالرمز σ_x يمثل الجذر التربيعي الموجب للتباين أي :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{EX^2 - (EX)^2}$$

مثال (١٣) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, ...$$

و المطلوب :

١- أوجد العزوم الابتدائية من المرتبة الأولى و الثانية لـ X .

٢- أوجد التباين لـ X ثم أوجد الانحراف المعياري له .

الحل:

١":

$$\alpha_1 = EX = \sum_{x=0}^{\infty} x\,P_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x\,e^{-3}\frac{3^x}{x!}$$

$$= e^{-3}\sum_{x=0}^{\infty} x\,\frac{3^x}{x!} = e^{-3}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{3^x}{(x-1)!}$$

$$= e^{-3}.3\sum_{x=1}^{\infty}\frac{3^{x-1}}{(x-1)!} = e^{-3}.3\,e^{3} = 3$$

حيث إن المجموع $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{3^{x-1}}{(x-1)!}$ يساوي e^{3} $(x-1=y)$.

$$\alpha_2 = EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty}(x^2)P_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-3} \frac{3^x}{x!}$$

$$= e^{-3}\sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{3^x}{x!} = e^{-3}\sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{3^x}{x!} + e^{-3}\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{3^x}{x!}$$

حيث إن : $(X^2 = X(X-1) + X)$ و بالتالي :

$$\alpha_2 = EX^2 = e^{-3}(\sum_{x=2}^{\infty})\frac{3^x}{(x-2)!} + EX$$

$$= e^{-3}\, 3^2 \sum_{x=2}^{\infty}\frac{3^{x-2}}{(x-2)!} + EX$$

$$= e^{-3}\, 3^2\, e^3 + 3 = 9 + 3 = 12$$

٢": $\mu_2 = \sigma^2 = V(X) = \alpha_2 - (\alpha_1)^2 = 12 - 9 = 3$

و بالتالي الانحراف المعياري لـ X هو $\sigma = \sqrt{3}$.

مثال (١٤):

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = \frac{1}{8} \;;\quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

و المطلوب :

١- أوجد كل من التوقع و التباين لـ X .

٢- عين الانحراف المعياري لـ X .

الحل:

"١":

$$EX = \sum_{x=1}^{8} (x) P_X(x) = \sum_{x=1}^{8} x \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \sum_{x=1}^{8} x = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$EX^2 = \sum_{x=1}^{8} (x)^2 P_X(x) = \sum_{x=1}^{8} x^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \sum_{x=1}^{8} x^2 = \frac{153}{6}$$

و بالتالي :

$$\sigma^2 = V(X) = EX^2 - (E(X))^2 = \frac{153}{6} - (\frac{9}{2})^2 = \frac{63}{12}$$

"٢":

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{63}{12}}$$

- **"ملاحظة" :**

من المثالين السابقين يتضح أن التوقع الرياضي في المثال الأول هو قيمة من قيم المتغير X ، أما في المثال الثاني واضح أن التوقع الرياضي لـ X لا يمثل قيمة من قيم المتغير X.

مثال (١٥) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} , \; x > 0$$

عندئذ عين التباين لـ X ثم عيّن الانحراف المعياري له .

الحل :

أولاً : نحسب التوقع الرياضي لـ X (العزم الابتدائي α_1)

$$\alpha_1 = EX = \int_0^\infty x\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty x\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx$$

و بإنجاز التكامل

بالتجزئة نجد أن : $EX = \frac{1}{2}(4) = 2$

( )

ثانياً :

نحسب EX^2

$$EX^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^2\,e^{-\frac{x}{2}}\,dx = \frac{1}{2}(16) = 8$$

و بالتالي فإن :

$$V(X) = EX^2 - (E(X))^2 = 8 - 4 = 4$$

و هو التباين لـ X ، أمّا الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي الموجب للتباين أي :

$$\sigma_X = \sqrt{4} = 2$$

♦ **خصائص التباين لمتغير عشوائي :**

بفرض أن X متغير عشوائي له تباين $V(X) = \sigma^2$ عندئذ :

"١": من أجل أي ثابت حقيقي K يكون : $V(K) = 0$ و ذلك لأن :

$$V(X) = EK^2 - (E(K))^2 = K^2 - K^2 = 0$$

"٢": من أجل أي ثابت حقيقي K يكون :

$$V(K\,X) = K^2 . V(X)$$

$$V(K\,X) = E\,(KX)^2 - (\,E\,(K\,X)\,)^2$$

$$= K^2\,EX^2 - K^2 (EX)^2 = K^2\,(E\,X^2 - (EX)^2\,)$$

$$= K^2 V(X)$$

و هذا يدل على أن تباين ثابت حقيقي في متغير X يساوي مربع الثابت مضروباً في تباين المتغير . أما الانحراف المعياري للمتغير (KX) فيعطى :

$$\sigma_{(K\,X)} = |K|\,\sigma_X$$

أما الانحراف المعياري للمتغير (KX) يساوي إلى الانحراف المعياري لـ X مضروباً بالقيمة المطلقة للثابت (K).

٣": من أجل أي ثابتين حقيقيين $(a\,,b)$ يكون :

$$V\,(a\,X + b) = a^2 V(X)$$

وذلك لأن :

$$V\,(a\,X + b) = E\,(a\,X + b)^2 - (E\,(a\,X + B)\,)^2$$

$$= E\,(a^2 X^2 + 2\,a\,b\,x + b^2) - \left[a\,E\,(a\,X) - b\right]^2$$

$$= a^2 E\,X^2 + 2\,(a\,b)EX + b^2 - (a^2\,(EX)^2 + 2\,a\,b\,EX - b^2\,)$$

$$= a^2 E\,X^2 - a^2 (EX)^2 = a^2\left[\,EX^2 - (EX)^2\,\right] = a^2\,V(X)$$

تعريف :

إذا كان X متغيراً عشوائياً(له)توقع رياضي $EX = \mu$ ، و له تباين $\sigma^2 = V(X)$ عندئذ ندعو المتغير :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

متغيراً معيارياً و باستخدام خصائص التوقعو التباين نجد أن :

$$EZ = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma^2} V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

- و نخلص للقول بأننا ندعو المتغير Z معيارياً إذا تحقق ما يلي :

$$V(Z) = 1 \quad , \quad EZ = 0$$

مثال (١٦) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = \frac{x}{10} \quad , x = 1, 2, 3, 4$$

عندئذ أوجد التباين للمتغير العشوائي X و من ثم تباين المتغير $Y = 3X$.

<u>الحل :</u>

لدينا :

$$EX = \sum_{x=1}^{4} x \, P_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{4} x \, . \frac{x}{10} = (1)\frac{1}{10} + (2)\frac{2}{10} + (3)\frac{3}{10} + (4)\frac{4}{10}$$

$$= \frac{1 + 4 + 9 + 16}{10} = \frac{30}{10} = 3$$

$$EX^2 = \sum_{x=1}^{4} x^2 \; P_X(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{4} x^2 \, . \, \frac{x}{10} = (1)^2 \; \frac{1}{10} + (2)^2 \; \frac{2}{10} + (3)^3 \; \frac{3}{10} + (4)^3 \; \frac{4}{10}$$

$$= \frac{1 + 8 + 27 + 64}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

و منه :

$$V(X) = EX^2 - (E(X))^2 = 10 - 9 = 1$$

و لإيجاد التباين للمتغير $Y = 3X$ نطبّق خاصة من خصائص التباين لنجد أن :

$$V(Y) = V(3X) = 9\,V(X) = 9\,(1) = 9$$

و إذا طلب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y فنجد أنه :

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{9} = 3$$

مثال (١٧) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = 2\,e^{-2x} \; ; \; x > 0$$

و المطلوب :

١- عيّن التباين للمتغير العشوائي X .

٢- عيّن الكمية المعيارية لـ X .

٣- عيّن تباين المتغير $Y = 4 - 2X$.

<u>الحل :</u>

١":

$$EX = \int_0^{\infty} x \; f(x) \; dx = 2 \int_0^{\infty} x \, e^{-2x} \; dx = \frac{1}{2}$$

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 \; f(x)\,dx = 2\int_0^\infty x^2\, e^{-2x}\; dx = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

"٢":

$$Z = \frac{X - EX}{\sigma_X} = \frac{X - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

و هي الكمية المعيارية لـ X .

"٣":

$$V(Y) = V(4-2X) = 4\,V(x) = 4\,(\frac{1}{4}) = 1$$

◆ **الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي :**

لقد استعرضنا في الفقرات السابقة مفهوم التوقع الرياضي و خصائصه و أهم تطبيقاته لكن في هذه الفقرة سوف نركز اهتمامنا على دوال من شأنها توليد عزوم توزيع احتمالي ، و سوف نعرض هذا التعريف بالحالة العامة :

تعريف:

بفرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي إما منقطع أو مستمر ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) ، و لتكن $g(x)$ دالة بدلالة المتغير X عندئذ الدالة المولدة لعزوم $g(x)$ و التي نرمز لها بالرمز $M_{g(x)}(t)$ تعطى بالشكل :

$$M_{g(X)}(t) = E\,e^{t\,g(x)} = \begin{cases} \sum_x e^{t\,g(x)} P_X(x) & ; \quad \text{منقطع} \quad X \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\,g(x)} \; f_X(x)\,dx & ; \quad \text{مستمر} \quad X \end{cases}$$

حيث إن t وسيط حقيقي .

وواضح أن وجود الدالة المولدة للعزوم مرهون بكون المجموع أو التكامل متقارباً على نحو مطلق و إذا لم يتحقق ذلك فإننا نقول أن الدالة المولدة لعزوم $g(X)$ غير موجودة ، و إذا كانت $M_{g(X)}(t)$ موجودة عندئذ يمكن التعرف إلى عزوم التوزيع الاحتمالي الذي اشتقت منه أي :

$$M'_{g(x)}(0) = Eg(X), M''_{g(x)}(0) = Eg^2(X), M'''_{g(x)}(0) = Eg^3(X), \ldots, M^{(r)}_{g(x)}(0) = Eg^r(X)\ ; r = 1,2,3, \ldots$$

- **ملاحظة :**

إذا بدلنا $g(X)$ بـ X في العلاقة التي تعرف الدالة المولدة لعزوم $g(X)$ و التي سوف نرمز لها بالرمز $M_X(t)$ و هي الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X و نترك الحالة العامة للمراحل المتقدمة .

- **خصائص الدالة المولدة لعزوم X :**

بفرض أن الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X موجودة و لتكن $M_X(t)$ عندئذ يتحقق ما يلي :

١") $M_x(0) = 1$ أي الدالة المولدة لعزوم X عندما $t = 0$ تساوي الواحد و هذا واضح من التعريف مباشرة ، أي :

$$M_X(0) = \begin{cases} \sum_x P_x(x) = 1 \quad ; \quad X \text{ منقطع} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad ; \quad X \text{ مستمر} \end{cases}$$

٢") من أجل أي عددين حقيقيين a , b يكون :

$$M_{aX+b}(t) = e^{bt}M_X(at)$$

و هذا واضح من كون أن :

$$M^{(t)}_{aX+b} = E\, e^{t\,(aX+b)} = E\, e^{a+X+bt} = e^{bt}Ee^{atx} = e^{bt}M_X(at)$$

○ **ملاحظة :**

لقد عرّفنا الكمية المعيارية لمتغير عشوائي X علم توقعه الرياضي μ و تباينه $\sigma^2 = V(X)$ بالشكل $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$: عندئذ الدالة المولدة لـ Z هي :

$$M_Z(t) = Ee^{tZ} = E\, e^{t(\frac{X-\mu}{\sigma})} = E\, e^{\frac{tX}{\sigma} - \frac{t\mu}{\sigma}}$$

$$= e^{-\frac{\mu}{\sigma}t} E\, e^{\frac{t}{\sigma}X} = e^{-\frac{\mu}{\sigma}t} M_X(\frac{t}{\sigma})$$

▪ **تعريف :**

إذا كانت الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي X موجودة فإن :

$$K_X(t) = \ln M_X(t)$$

موجودة و تدعى "بالدالة المولّدة التراكمية".

✓ **مبرهنة:**

إذا كانت الدالة التراكمية لمتغير عشوائي X موجودة عندئذ :

$$K''_X(0) = V(X) \ , \quad K'_X(0) = EX$$

<u>**الإثبات :**</u>

لدينا :

$$K_X(t) = \ln M_X(t) \Rightarrow$$

$$K'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \Rightarrow K'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = EX$$

$$K''_X(t) = \frac{M''_X(t)\, M_X(t) - M'^{\,2}_X(t)}{\left(M_X(t)\right)^2} \Rightarrow$$

$$K''_X(0) == \frac{M''_X(0)\, M_X(0) - M'^{\,2}_X(0)}{\left(M_X(0)\right)^2} \Rightarrow$$

ومنه :

$$K''_X(0) = EX^2 - (EX)^2 = V(X)$$

و على القارئ أن يلاحظ أن :

$$K_X(0) = Ln\, M_X(0) = 0$$

- **ملاحظة ١ :**

إذا وجدت الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي X فهي دالة وحيدة . أي كل توزيع احتمالي لـ X يملك دالة مولدة للعزوم فهذه الدالة وحيدة لا يوجد غيرها .

و هذا يدل على أن $M_X(t)$ تصف التوزيع الاحتمالي لـ X و العكس صحيح ، أي إن التوزيع الاحتمالي لـ X يصف الدالة المولدة للعزوم موجودة.

- **ملاحظة ٢:**

لا يمكن أن تتخذ الدالة المولدة لعزوم متغير عشوائي X الصيغة :

$$M_X(t) = \frac{t}{1-t}$$

و ذلك لأن هذا يتناقض مع خاصة من خواص الدالة المولدة هي : $M_X(0) = 1$ و في هذه الحالة يكون لدينا: $M_X(0) = 0$

مثال (١٨):

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = e^{-4}\,\frac{4^X}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

المطلوب :

١- أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X .

٢- اوجد الدالة التراكمية للمتغير العشوائي X .

٣- أوجد كل من التوقع الرياضي و التباين لـ X باستخدام أسلوب الدالة المولدة للعزوم و الدالة التراكمية .

٤- أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي $Y = 3 - 2X$.

الحل :

١") لدينا :

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} P_X$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} e^{-4} \frac{4^x}{x!} = e^{-4} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(4e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-4} e^{4e^t} = e^{-4(1-e^t)}$$

مع العلم أن : $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(4e^t)^x}{x!} = e^{4e^t}$

مع ملاحظة أن : $M_X(0) = 1$.

٢") لدينا :

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \ln e^{-4(1-e^t)} = 4(1 - e^t)$$

مع ملاحظة أن : $K_X(0) = 0$.

٣") لدينا :

$$M'_X(t) = 4e^t e^{-4(1-e^t)} \Rightarrow$$

$$M'_X(0) = 4 = EX$$

$$M''_X(t) = 4e^t e^{-4(1-e^t)} + 16 e^{2t} e^{-4(1-e^t)} \Rightarrow$$

$$M''_X(0) = 4 + 16 = 20 = E(X^2)$$

و منه :

$$V(X) = M''_X(0) - M'^2_X(0) = 20 - 16 = 4$$

و الآن لنوجد التوقع و التباين باستخدام أسلوب الدالة المولدة التراكمية ، لدينا :

$$K'_X(t) = 4e^t \Rightarrow K'_X(0) = 4 = EX$$

$$K''_X(t) = 4e^t \Rightarrow K''_X(0) = 4 = V(X)$$

٤") لدينا :

$$M_Y(t) = E\,e^{tY} = E\,e^{t(3-2X)} = e^{3t}\,M_X(-2t)$$

$$= e^{3t}.e^{-4(1-e^{-2t})}$$

و هي الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي Y .

مثال (١٩) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, x > 0$$

المطلوب:

١- أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X.

٢- اوجد الدالة التراكمية للمتغير العشوائي X.

٣- اوجد كل من التوقع الرياضي و التباين لـ X .

٤- أوجد الدالة المولدة لعزوم الكمية المعيارية لـ X .

الحل :

١") لدينا :

$$M_X(t) = E\, e^{tx} = \int_0^\infty e^{tx} \,.\, \frac{1}{3} \,.\, e^{-\frac{x}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{tx} \,.\, e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}(1-3t)x} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{3}{(1-3t)}\, e^{-\frac{1}{3}(1-3t)\,x}\right]_0^\infty = \frac{1}{(1-3t)} = (1-3t)^{-1}$$

و هي الدالة المولدة لعزوم المتغير X .

٢")

$$K_X(t) = \ln M_X(t) = \ln (1-3\,t)^{-1} = -\ln (1-3\,t)^{-2} \quad , t < \frac{1}{3}$$

٣") باستخدام أسلوب الدالة المولدة التراكمية :

$$K'_X(t) = \frac{3}{1-3\,t} \Rightarrow EX = K'_X(0) = 3$$

$$K''_X(t) = \frac{9}{\left(1-3\,t\right)^2} \Rightarrow V(X) = K''_X(0) = 9$$

٤") لدينا :

$$Z = \frac{X-3}{3}$$

$$M_Z(t) = e^{-\frac{\mu}{\sigma}t} \,.\, M_X(\frac{t}{\sigma})$$

$$= e^{-\frac{3}{9}t} .(1-3\,\frac{t}{3})^{-1} = e^{-\frac{3}{9}t}(1-t)^{-1} \quad , \quad t < 1$$

مثال (٢٠) :

بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \ , \ x \geq 1$$

هل الدالةالمولدة لعزوم X موجودة ؟

الحل :

$$M_X(t) = E\,e^{tx} = \int_1^\infty e^{tx}\,\frac{1}{x^2}\,dx$$

باستخدام أسلوب التكامل بالتجزئة نجد أن التكامل أعلاه متباعد و هذا يعني أن $M_X(t)$ غير موجودة وبالتالي لهذا المتغير X لا يوجد توقع و لا يوجد تباين .

- **ملاحظة:**

لقد عرفنا في فقرات سابقة كل من العزوم اللامركزية حول نقطة b و العزوم المركزية و العزوم الابتدائية لمتغير عشوائي من المرتبة r، حيث إن r صحيح موجب .

عندئذ يمكن توليد العزوم اللامركزية و العزوم المركزية و العزوم العاملية من خلال العلاقات التالية على الترتيب :

١) الدالة المولدة للعزوم اللامركزية تعطى بالعلاقة :

$$M_{(X-b)}(t) = E\,e^{t\,(X-b)} = e^{-b\,t}M_X(t)$$

و بذلك فإن العزم اللامركزي من المرتبة r حول النقطة b يعطى بالعلاقة :

$$E(X-b)^r = M_{(X-b)}^{(r)}(0) \ ; \ r = 1, 2, 3, ...$$

و من الواضح أن وجود الدالة المولدة للعزوم اللامركزية مرتبط بوجود الدالة المولدة لعزوم X.

٢) الدالة المولدة للعزوم المركزية تعطى بالعلاقة :

$$M_{(X-\mu)}(t) = E\,e^{t\,(X-\mu)} = e^{-\mu\,t}Ee^{tX} = e^{-\mu\,t}M_X(t)$$

و بذلك فإن العزم المركزي من المرتبة r هو :

$$E(X-\mu)^r = M^{(r)}_{(X-\mu)}(0) \; ; \; r = 1, 2, 3, ...$$

٣) الدالة المولدة للعزوم العاملية تعطى بالعلاقة :

$$M_X(t) = E\, e^{t\frac{X \ln t}{t}} \quad ; \quad M(1) = 1$$

$$= E\, e^{X \ln t} = E\, e^{\ln t^X} = E\, t^X = M_X(\ln t)$$

أي بالمختصر الدالة المولدة للعزوم العاملية هي :

$$M(t) = M_X(\ln t)$$

أي نحصل على الدالة المولدة للعزوم العاملية من الدالة المولدة لعزوم X بتبديل كل t بـ $\ln t$ و بالتالي فإن العزم العاملي من المرتبة r يعطى بالعلاقة :

$$M^{(r)}(1) = E\prod_{i=1}^{r}(X-i+1) \;\; ; \;\; r = 1,2, \dots \dots$$

مثال (٢١) :

بفرض أن X متغير عشوائي له دالة مولدة معطاة بالشكل :

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

المطلوب :

١ـ أوجد الدالة المولدة للعزوم اللامركزية حول النقطة ٢ ثم أوجد العزم اللامركزي الثاني .

٢ـ أوجد الدالة المولدة للعزوم المركزية ثم أوجد العزم المركزي الثالث .

٣ـ أوجد الدالة المولدة للعزوم العاملية ، ثم أوجد العزم العاملي الأول و الثاني .

الحل :

١": بما أن الدالة المولدة لـ X موجودة ، عندئذ الدالة المولدة للعزوم اللامركزية موجودة أيضاً و هي :

$$M_{(X-2)}(t) = e^{-2t}.e^{\frac{t^2}{2}} = e^{-2t+\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$$

$$M'_{(X-2)}(t) = e^{-2t+\frac{1}{2}t^2}(-2+t) \Rightarrow$$

$$M'_{(X-2)}(0) = E(X-2)^2 = -2$$

$$M''_{(X-2)}(t) = e^{-2t+\frac{1}{2}t^2} + (-2+t)^2 e^{-2t+\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow$$

$$M''_{(X-2)}(0) = E(X-2)^2 = 1+(-2)^2 = 1+4 = 5$$

:"٢

$$M_{(X-EX)}(t) = E\left(e^{-tE(X)+tX}\right)$$

$$= e^{-tE(X)}.M_X(t) = e^{-tE(X)}.e^{\frac{t^2}{2}}$$

و لكن :

$$M'_{(X)}(0) = EX = 0$$

و بالتالي :

$$M_{(X)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

أي الدالة المولدة للعزوم المركزية هي الدالة المولدة لعزوم X نفسها وذلك لأن التوقع للمتغير المعطى معدوم. و بالتالي :

$$M'_{(X-EX)}(t) = t\,e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M'_{(X)}(0) = EX = 0$$

$$M''_{(X)}(t) = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2 e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M''_{(X)}(0) = EX^2 = 1$$

$$M'''_{(X)}(t) = t\ e^{\frac{t^2}{2}} + 2t\ e^{\frac{t^2}{2}} + t^3 e^{\frac{t^2}{2}} \Rightarrow M'''_{(X)}(0) = 0$$

يلاحظ أن العزوم المركزية الفردية معدومة .

٣":

$$M(t) = M_X(\ln t) = e^{\frac{1}{2}(\ln t)^2} \;\; ; \;\; M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

مع ملاحظة أن : $M(1) = 1$

$$M'(t) = \frac{\ln t}{t} e^{\frac{1}{2}(\ln t)^2} \Rightarrow M'(1) = 0 = EX$$

$$M''(t) = \frac{1-\ln t}{t^2} e^{\frac{1}{2}(\ln t)^2} + \frac{(\ln t)^2}{t^2} e^{\frac{1}{2}(\ln t)^2} \Rightarrow$$

$$= \frac{1-\ln t + (\ln t)^2}{t^2} M(t) \Rightarrow$$

$$M''(1) = EX(X-1) = 1$$

وكتمرين للقارئ يطلب حساب العزم العاملي لـ X من المرتبة الثالثة والرابعة والخامسة .

♦ **الدالة المولدة الاحتمالية :**

إن مفهوم الدالة المولدة الاحتمالية يقترن بحالة المتغيرات العشوائية المنقطعة و هي لا تختلف عن الدالة المولدة للعزوم العاملية سوى أنها ممكنة الاستخدام لتوليد العزوم التوزيعات الاحتمالية المنقطعة كاستراتيجية بديلة للدالة المولدة لعزوم المتغير X .

⌗ **تعريف ١ :**

بفرض أن X متغير عشوائي منقطع توزيعه الاحتمالي $P_X(x)$ بحيث مجموعة القيم لهذا المتغير تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة $(0, 1, 2, \ldots\ldots)$، عندئذ بالتعريف ندعو الدالة و التي نرمز لها بالرمز $G_X(t)$ "بالدالة المولدة الاحتمالية" وتعطى بالعلاقة :

$$G_X(t) = E\,t^X = \sum_{x=0}^{\infty} t^X P_X(x) \;\; , \;\; |t| \le 1$$

- <u>من أهم الخصائص لهذه الدالة ما يلي :</u>

١-) $G_X(1) = 1$ و هذا واضح من التعريف لها .

٢-) $M_X(t) = E\, e^{tX} = E(e^t)^x = G(e^t)$.

وهي العلاقة التي تربط بين الدالة المولدة لعزوم X و الدالة المولدة الاحتمالية لـ X .

٣-) $G_X^{(r)}(t) \Big|_{t=1} = G^{(r)}(1) = M^{(r)}(1) = E(\prod_{i=0}^{r} (X - i + 1)$

$= E(X)\,(X - 1)\ ....\,(X - i + 1)$

٤-) الدالة المولدة الاحتمالية لمتغير عشوائي X منقطع وحيدة التعيين .

مثال (٢٢) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = e^{-4}\frac{4^x}{x!}\ , x = 0, 1, 2\ ....$$

و المطلوب إيجاد الدالة المولدة الاحتمالية لـ X .

<u>الحل :</u>

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{x=0}^{\infty} t^x\, P_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} t^x\, e^{-4}\,\frac{4^x}{x!}$$

$$= e^{-4}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(4t)^x}{x!} = e^{-4}.e^{4t} = e^{-4(1-t)}$$

و يلاحظ أن $G_X(1) = 1$ كذلك يمكن ملاحظة أن :

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{-4(1-e^t)}$$

وهي الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X .

- **ملاحظة :**

إذا اشتققنا الدالة المولدة الاحتمالية و عوضنا عن كل t بـ 1 نجد :

$$G'(t) = 4e^{-4(1-t)} = 4G(t) \Rightarrow G'(1) = EX = 4$$

$$G''(t) = 4^2 e^{-4(1-t)} = 4^2 G(t) \Rightarrow G''(1) = 4^2$$

$$\vdots$$

$$G^r(t) = 4^r e^{-4(1-t)} = 4^r G(t) \Rightarrow G^r(1) = 4^r \quad ; \quad r = 1, 2, ...$$

مثال (٢٣) :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = C_x^n (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{n-x} , x = 0, 1, 2, ..., n$$

و المطلوب إيجاد الدالة المولدة الاحتمالية لـ X .

الحل:

$$G_X(t) = Et^X = \sum_{x=0}^{n} t^x P_X(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} t^x C_x^n (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_x^n (\frac{t}{2})^x (\frac{1}{2})^{n-x}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)^n$$

و هي الدالة المولدة الاحتمالية و يلاحظ $G_X(1) = 1$ و نستطيع أن نحسب :

$$G'(t) = n\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^{n-1} \Rightarrow G'(1) = n\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = n(\frac{1}{2}) = EX$$

$$G''(t) = n(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^{n-2}(n-1) \Rightarrow G''(1) = n(n-1)\ (\frac{1}{2})^2 = EX(X-1)$$

$$\vdots$$

$$G_X{}^r(t) = n(n-1)\,.........\,(n-i+1)\,(\frac{1}{2})^r(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^{n-r} \Rightarrow$$

$$G_X{}^r(t) = n(n-1)\,.........(\frac{1}{2})^r = EX(X-1)......................(X-i+1)$$

$$= E\prod_{i=1}^{r}(X-i+1)$$

و يلاحظ أن :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = E(X)(X-1) + EX - (EX)^2$$

$$= n(n-1)(\frac{1}{2})^2 + n\frac{1}{2} - (\frac{n}{2})^2$$

$$= n^2(\frac{1}{2})^2 - \frac{n}{4} + n\frac{1}{2} - (\frac{n}{2})^2 = \frac{n}{2} - \frac{n}{4} = \frac{2n - n}{4} = \frac{n}{4}$$

تمارين غير محلولة على الفصل الثالث

١) بفرض X المتغير العشوائي الدال على عدد الصبيان في عائلة عندها ٤ أطفال ، عندئذ المطلوب :

١- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

٢- عيّن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X .

٢) جهاز الكتروني يحوي ٩ ترانزستورات، ثلاثة منها معطلة ، و اخترنا بشكل عشوائي ثلاثة ترانزستورات من الجهاز ثم فحصناها ، و بفرض أن X هو المتغير العشوائي الدال على عدد الترانزستورات العاطلة، عندئذ المطلوب :

١- أوجد جدول توزيع المتغير العشوائي X .

٢- احسب التوقع الرياضي X .

٣) بفرض X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{16} & , \ x = 1, 3, 5, 7 \\ 0 & , \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- احسب EX .

٢- احسب EX^3 .

٣- احسب $E(2X+3X^3)$.

٤) بفرض X متغير عشوائي دالة الكثافة الاحتمالية له معطاة بالشكل :

$$f_X(x) = \frac{x+a}{18} \quad ; -2 < x < 4$$

و المطلوب :

١- عيّن قيمة الثابت a .

٢- احسب: $EX \;,\; E(X+4)^2 \;,\; E(X-3)^2 \;,\; E(X-EX)^3 \;,\; E(3X) \;,\; V(X)$.

٥) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = 2x \;,\; 0 < x < 1$$

و المطلوب :

١- أوجد: $E\sqrt{X} \;,\; E\left(\frac{1}{X}\right) \;,\; E\, Ln\, X$.

٢- هل العلاقات الآتية صحيحة :

1) $E(\ln X) = \ln(EX)$

2) $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{E(X)}$

3) $E(\sqrt{X}) = \sqrt{E(X)}$

٦) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} (3 - \frac{3}{2}x) & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- أوجد التوقع الرياضي للمتغير X .

٢- أوجد التوقع الرياضي للمتغير $Y = X^2$.

٣- أوجد التوقع الرياضي للمتغير $Y = 6X + 3X^2$.

٧) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- حساب التوقع و الرياضي و التباين لـ X .

٢- حساب العزم الابتدائي من المرتبة r لـ X .

٣- العزم العاملي الثالث و الرابع لـ X .

٨) بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & ; 1 < x \leq 2 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- احسب EX^3 , EX^2 , EX .

٢- احسب التباين لـ X .

٣- عين الانحراف المعياري لـ X .

٩) بفرض أن التجربة سحب ٣ أقراص من نوع CD من صندوق يحوي ٧ أقراص من بينها ٣ أقراص غير صالحة ، و ليكن X المتغير العشوائي الدال على عدد الأقراص الصالحة المسحوبة ، و المطلوب :

١- اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

٢- عّين σ_x , $V(X)$, EX^2 , EX .

٣- عيّن $E(2X+1)$, $V(2X+3)$.

١٠) بفرض X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.05	0.10	0.25	0.10	0.25	0.15	0.10

و المطلوب :

١- إيجاد التوقع و التباين للمتغير العشوائي X .

٢- التوقع و التباين لكل من المتغيرين :

$$Y = X^2 + 4X \quad , \quad Y = 2X - 3$$

١١) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \frac{1}{4}, \ 0 < x < 4$$

و المطلوب :

١- إيجاد الدالة المولدة لعزم X .

٢- تحقق أن : $M_X(0) = 1$.

٣- أوجد التوقع و التباين للمتغير X باستخدام $M_X(t)$.

٤- أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير $Y = 2X + 4$.

٥- أوجد الدالة المولدة لعزوم الدرجة المعيارية لـ X .

١٢) بفرض X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = 2^{-x} \quad ; \quad x = 1, 2, ...$$

و المطلوب :

١- إيجاد الدالة المولدة لعزوم X ، ثم أوجد EX , $V(X)$ مستخدماً الدالة المولدة لعزوم X .

٢- ايجاد الدالة المولدة لعزوم X حول النقطة $x = 4$ ، ثم أوجد العزم اللامركزي من المرتبة الثالثة حول نفس النقطة .

٣- ايجاد الدالة المولدة للعزوم المركزية ثم أوجد العزم المركزي الرابع .

٤- ايجاد الدالة المولدة الاحتمالية للمتغير X .

١٣) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 3} & ; \quad 1 < x < 3 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- إيجاد EX , EX^2 , EX^3 .

٢- إيجاد $E(X^3 + 2X^2 - 3X + 1)$.

٣- إيجاد $V(X)$.

١٤) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & ; \ 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \ 1 < x \le 2 \\ \dfrac{3 - x}{2} & ; \ 2 < x < 3 \\ 0 & ; \ \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب إيجاد التوقع الرياضي للدالة : $g(x) = X^2 = 5X + 3$.

****

الفصل الرابع

المتجهات العشوائيةو التوزيعات الاحتمالية المشتركة

و أهم التوزيعات الاحتمالية

درسنا في الفصل الثاني المتغيرات العشوائية بأنواعها (المتقطعة و المستمرة) ، ثم تعرفنا إلى التوزيعات الاحتمالية لهذه المتغيرات ، أي درسنا المتغير العشوائي ذات البعد الواحد على الفضاء الاحتمالي Ω, F, P . و هذا يعني أنه تمت دراسة التجارب العشوائية التي يمكن التعبير عن نتيجتها بكمية واحدة ، ولكن كثيراً ما تصادفنا تجارب لايمكن التعبير عن نتيجتها بكمية واحدة و إنما يمكن التعبير عنها بزوج أو أكثر من الكميات.

فمثلاً أن نقطة هبوط مركبة فضائية يمكن تحديدها بالاعتماد على مجموعة من متغيرين عشوائيين (X, Y) ، حيث X يمثل خط العرض المار من النقطة المذكورة ، و Y يمثل خط الطول المار من النقطة المذكورة. مجموعة هذين المتغيرين X, Y تشكّل متجهاً عشوائياً ثنائي البعد .

وهناك أيضاً تجارب يمكن التعبير عن نتيجتها بثلاث كميات، فمثلاً لو سئل شخص عن طوله ووزنه و عمره لكن جوابه مؤلفاً من ٣ كميات يعبر عنها بالثلاثية (X, Y, Z) . و أخيراً إذا كانت التجربة بحيث يكون التعبير عن نتيجتها بـ n من الكميات و من ثم ربط كل كمية من هذه الكميات بعد حقيقي وحيد ، و نكون بذلك عرفنا دالة منطلقها فضاء الأحداث الابتدائية للتجربة Ω في R^n ، بحيث تنقل كل نتيجة من نتائج التجربة إلى نقطة $(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$من الفضاء R^n ، و قيم هذه الدالة تتحول مع تحويل نتيجة التجربة و لذلك فإن هذه الدالة تمثل متغيراً عشوائياً نرمز له بالرمز $(X_1 , X_2 , \dots , X_n)$، و ندعوه متجهاً عشوائياً ذا n بعد .

إن ضرورة التعامل مع المتجهات العشوائية أو مع المتغيرات العشوائية المتعددة البعد نابع من متطلبات الدراسة الاحتمالية لهذا النوع من التجارب. ويلاحظ أن كل مركبة من مركبات المتجه تمثل متغيراً عشوائياً تمت دراسته في الفصل الثاني. بالإضافة لذلك لابد من الملاحظة أنه ليس من الضرورة أن يكون لمركبات هذا المتجه التوزيع نفسه. إذاً من الممكن أن يكون لكل مركبة منه توزيع خاص به. وسوف ندرس المتجهات العشوائية ثنائية البعد وذلك على أساس فضاء احتمالي للتجربة العشوائية قيد الدراسة وهو:

$$(\Omega, F, P)$$

(٤-١): تعريف المتجه العشوائي ثنائي البعد :

إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً معلوماً و كانت :

$X_i : \underset{w}{\Omega} \underset{\to}{\to} \underset{X_i(w)}{R}$ حيث أن $i = 1, 2$ و $\{X_1(\omega) < x_1\} \in F$ ، $\{X_2(\omega) < x_2\} \in F$

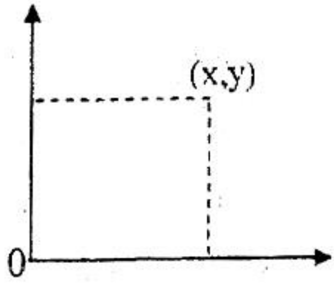
عندئذ ندعو المتغير: $X = (X_1(\omega), X_2(\omega))$

بالمتجه العشوائي ثنائي البعد أي إن :

$$X : \underset{\omega}{\Omega} \underset{\to}{\to} \underset{(X_1(\omega), X_2(\omega))}{R^2}$$

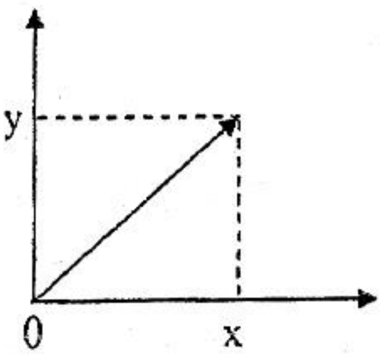
وبحيث يكون : $\{(X_1 < x_1), (X_2 < x_2)\} \in F$

وبقصد الوضوح سنعتمد على الفهم الهندسي للمتجهات العشوائية سنمثل المتجه العشوائي ثنائي البعد (X, Y) بنقطة عشوائية في المستوي إحداثياتها X, Y كما في الشكل (٤-١) .



الشكل (٤-١)

وعلى شكل متجه عشوائي منبعث من مبدأ الاحداثيات إلى النقطة (X,Y) ، وفي هذه الحالة ننظر إلى المتغيرين العشوائيين (X,Y) ، كمركبتين للمتجه العشوائي (X,Y) ، على المحورين الإحداثيين كما في الشكل (٤-٢) .



الشكل (٤-٢)

(٤-٢): تعريف الدالة التوزيعية لمتجه عشوائي ثنائي :

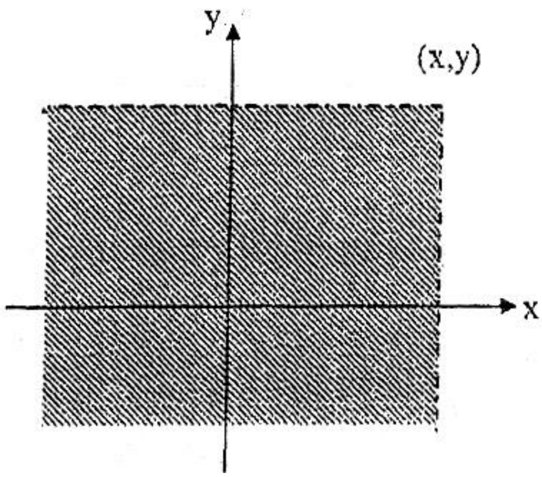
إذا كان (Ω, F, P) فضاءً احتمالياً و كان (X,Y) متجهاً عشوائياً ثنائياً على هذا الفضاء عندئذ الدالة الحقيقية $F(x,y)$ على R^2 المعرّفة بالشكل :

$$F_{(x,y)}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$$

تدعى بالدالة التوزيعية للمتجه العشوائي ثنائي البعد (X,Y) ، أو يطلق عليها بدالة التوزيع المشتركة للمتغيرين العشوائيين X,Y و التي تمثل مركبات المتجه العشوائي و هنا لا بد أن نلاحظ أن الدالة التوزيعية $F(x,y)$ تمثل احتمال تقاطع حدثين هما : $(X \le x), (Y \le y)$.

و هذه الدالة تعبر عن احتمال وقوع النقطة العشوائية (X,Y) في اللانهائي الذي يشكل (x,y) أحد رؤوسه ، و في هذه الحالة يشكّل المربع المذكور المساحة الممتدة إلى اليسار من الرأس المذكور و إلى الأسفل .

انظر الشكل (٤-٣) :



الشكل (٤-٣)

(٣-٤) : خصائص الدالة التوزيعية لمتجه عشوائي ثنائي البعد :

سوف نعرض أهم خصائص الدالة التوزيعية لمتجه عشوائي ثنائي البعد (X, Y) من خلال المبرهنة التالية :

- **مبرهنة ١:**

إذا كان $Z = (X, Y)$ متجهاً عشوائياً على الفضاء الاحتمالي (Ω, F, P) ، و كانت $F(x, y)$ تمثل الدالة التوزيعية لهذا المتجه العشوائي حيث $(x, y) \in R^2$ عندئذ :

١) $0 \le F(x, y) \le 1$.

وهذا ناتج من كون أن الدالة التوزيعية تمثل احتمال .

٢) الدالة التوزيعية $F(x, y)$ غير متناقصة بالنسبة لكل من (y, x)، أي :

١- من أجل $x_1 < x_2$ يكون $F(x_1, y) < F(x_2, y)$.

٢- من أجل $y_1 < y_2$ يكون $F(x, y_1) < F(x , y_2)$.

نلاحظ من الشكل (٣) أن زيادة قيمة أحد المتغيرين X أو Y أو كليهما ستؤدي إلى زيادة مساحة المربع، وبالتالي فإن احتمال وقوع النقطة العشوائية (X, Y) فيه لا يمكن أن يتناقص .

٣)

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,+\infty) &= \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y) \\ &= \lim_{y\to\infty} P(X < x , Y < y) \\ &= P(X < x , \ Y < \infty) \\ &= P(\,(X < x) \cap \Omega) = P\,(X < x) = F_X(x) \end{aligned}$$

و بالطريقة نفسها نجد :

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(+\infty, y) &= \lim_{x\to\infty} P(X < x , Y < y) \\ &= P(X < \infty , \ Y < y) \\ &= P(\,\Omega \cap (Y < y)\,) = P\,(Y < y) = F_y(y) \end{aligned}$$

أي إذا انتهى أحد المتغيرين فقط إلى (∞ +) فإن دالة التوزيع المشتركة ستتحول إلى دالة توزيع للمتحول الآخر و هو ما ندعوه بدالة التوزيع الهامشية و يمكن أن تكتب مباشرة :

$$F_{(X,Y)}(x ,+\infty) = F_X(x)$$

$$F_{(X,Y)}(+\infty , y) = F_Y(y)$$

٤)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F_{(X,Y)}(x, y) &= \lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} P(X < x , Y < y) \\ &= P(X < +\infty , Y < +\infty) = P(\Omega) = 1 \end{aligned}$$

٥)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x, y) = \lim_{y\to-\infty} F(x, y) &= \lim_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x, y) \\ &= P(\phi) = 0 \end{aligned}$$

أي أن :

$$F_{(X,Y)}(x,-\infty) = F_{(X,Y)}(-\infty, y) = F_{(X,Y)}(-\infty, -\infty) = P(\phi) = 0$$

و ذلك لأن كلاً من : $\{X < -\infty\}$ و $\{Y < -\infty\}$ يمثل حدثاً مستحيلاً و تقاطعهما $\{X < -\infty, Y < -\infty\}$ يمثل حدثاً مستحيلاً .

٦) الدالة التوزيعية $F_{(X,Y)}(x, y)$ مستمرة من اليسار بالنسبة لكل من y , x (تقبل بدون برهان) .

(٤-٤) أنواع المتجهات العشوائية :

من خلال دراسة المتغير العشوائي ذي البعد الواحد درسنا نوعين أساسيين من المتغيرات وهما المتغير العشوائي المنقطع والمتغير العشوائي المستمر، وأيضاً في هذا الفصل سوف نتعرف إلى متجهات عشوائية منقطعة، والتي تمثل مركباتها متغيرات عشوائية منقطعة، وإلى متجهات عشوائية مستمرة والتي تمثل مركباتها متغيرات عشوائية مستمرة ، و أيضاً يوجد نوع ثالث من المتجهات العشوائية و هو المتجه العشوائي الذي مركباته قد تمثل متغيرات عشوائية منقطعة و متغيرات مستمرة أو غير مستمرة .

و سوف نركز في دراستنا على المتجهات العشوائية من النوع الأول و الثاني ، أما النوع الثالث و الذي يمثل متجهات عشوائية مختلطة فسوف لن نتعرض له ضمن منهج هذا المقرر .

١) المتجه العشوائي المنقطع و توزيعه الاحتمالي (التوزيع المشترك) :

نقول عن المتجه (X, Y) إنه من النوع المنقطع إذا كانت كل من مركبتيه تمثل متغير عشوائي منقطع أي مجموعة قيم كل من X و Y تمثل مجموعة قابلة للعد تكون منتهية و قد تكون غير منتهية و سوف ندعو الاحتمال :

$$P_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x, Y = y) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big)$$

بأنه يمثل التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين العشوائيين X و Y (التوزيع الاحتمالي للمتجه (X, Y)) إذا تحقق ما يلي :

"١": $P(x, y)$ دالة وحيدة القيمة من أجل أي قيمة مخصصة لمتغيرات التوزيع مثل (x, y) .

"٢": إن التوزيع الاحتمالي المشترك يمثل دالة غير سالبة كونه يمثل احتمال وقوع الحدث:

$$(X = x) \cap (Y = y)$$

٣":

$$\sum_{x}\sum_{y} P(x, y) = 1$$

أي أن مجموع الاحتمالات المشتركة المقترنة بالقيم الممكنة إلى المتجه العشوائي المنقطع (X, Y) يجب أن تساوي الواحد .

- **مثال (١) :**

بفرض أن (Ω, F, P) فضاء احتمالي و بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان على هذا الفضاء الاحتمالي توزيعهما الاحتمالي المشترك معرّف بالشكل :

$$P(x, y) = a(x + y) \quad ; \quad x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2$$

و المطلوب :

١- تعيين قيمة الثابت a .

٢- حساب $P(X = 2, Y = 2)$.

<u>الحل :</u>

١"- لدينا :

$$\sum_x \sum_y P(x, y) = 1$$

$$a \sum_{x=1}^{3} \sum_{y=1}^{2} (x + y) = 1 \Rightarrow a \sum_{x=1}^{3} (2x + 3) = 1 \Rightarrow$$

$$a(21) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{21}$$

أي أن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y هو :

$$P(x, y) = \frac{(x+y)}{21} \quad ; \quad x = 1, 2, 3$$
$$y = 1, 2$$

٢"- $$P(X = 2, Y = 2) = \frac{2+2}{21} = \frac{4}{21}$$

- **ملاحظة ١:**

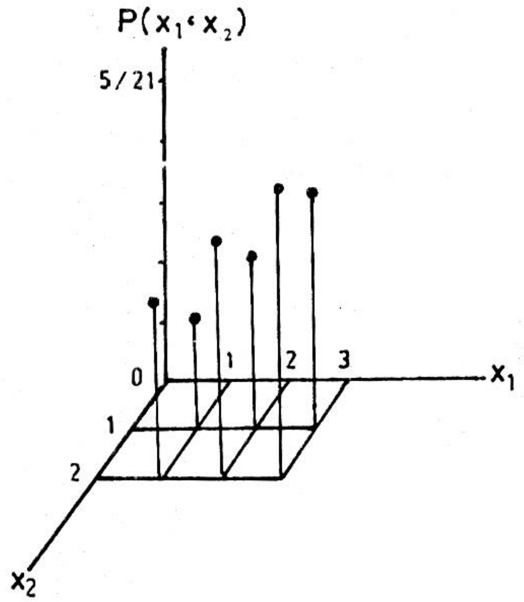
إن التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y في المثال السابق هو دالة غير سالبة وذات قيمة وحيدة لأي زوج مثل (x, y)، بالإضافة أنها تحقق الشرط :

$$\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}\frac{x+y}{21} = 1$$

و يمكن التعبير عن هذا التوزيع المشترك لـ X و Y بالشكل :

(x,y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,1)$	$(3,2)$
$P(x,y)$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$

و يمكن توضيح مخطط $P(x, y)$ ، و الذي ندعوه أيضاً "بدالة الكتلة الاحتمالية المشتركة" بالشكل الجانبي الشكل (٤-٤):



الشكل (٤-٤)

○ **ملاحظة٢:**

بشكل عام إذا كان لدينا توزيع مشترك لمتغيرين عشوائيين X و Y معطى بالشكل :

$$P(x, y) = P(X = x, Y = y) \quad ; \quad x = x_1, x_2, \ldots.., x_n$$

$$y = y_1, y_2, \ldots.., y_n$$

عندئذ سنضع جميع الاحتمالات $P(x, y)$ في رقعة مستطيلة الشكل لجدول ذي مدخلين ، أحدهما أفقي نضع فيه قيم المتغير العشوائي X ، و الآخر شاقولي نضع فيه قيم المتغير العشوائي Y. انظر الجدول (٥) .

مثل هذا الجدول سندعوه بجدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y أو مصفوفة التوزيع الاحتمالي.

X / Y	x_1	x_2	………..	x_n
y_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_2, y_1)$	………..	$P(x_n, y_1)$
y_2	$P(x_1, y_2)$	$P(x_2, y_2)$	………..	$P(x_n, y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	………..	$\vdots$
y_m	$P(x_1, y_m)$	$P(x_2, y_m)$	………..	$P(x_n, y_m)$

الجدول رقم (٥)

و من الواضح أن :

1) $P(x,y) \geq 0 \,, \forall x, y$

2) $\sum_x^n \sum_y^m P(x,y) = 1$

٢) دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة لـ X و Y :

إذا كان $P(x, y)$ يمثل توزيعاً مشتركاً لمتغيرين عشوائيين X و Y منقطعين ، عندئذ الدالة التوزيعية المشتركة لهذين المتغيرين X و Y تعطى بالعلاقة :

$$F(x\ ,\ y) = P(X\ \leq\ x\ , Y\ \leq\ y) = \sum_{i \leq x} \sum_{j \leq y} P(\,i\ ,\ j\,) = \sum_{i=x} \sum_{j=y} P(\,i\ ,\ j\,)$$

- **مثال (٢) :**

بفرض أن :

$$P\,(x\ ,\ y) = \frac{1}{(N+1)^2}\ ; \begin{array}{l} x = 0, 1, \dots , N \\ y = 0, 1, \dots , N \end{array}$$

توزيع احتمالي مشترك للمتغيرين X و Y حيث أن N صحيح موجب ، عندئذ أوجد الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y.

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{x=0}^{N} \sum_{y=0}^{N} \frac{N^2}{(N+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)(y+1)}{(N+1)^2} \; ; \begin{matrix} x = 0,1,\dots,N \\ y = 0,1,\dots,N \end{matrix}$$

و من الواضح أن :

$$1)\ \ F(N,N) = \frac{(N+1)^2}{(N+1)^2} = 1$$

$$2)\ F(N,y) = \frac{y+1}{N+1}, \quad y = 0,1,2,\dots\dots\dots,N$$

$$3)\ F(x,N) = \frac{x+1}{N+1}, \quad x = 0,1,2,\dots\dots\dots,N$$

أي إن :

$$F_Y(y) = \frac{y+1}{N+1}, \quad y = 0,1,2,\dots\dots\dots,N$$

$$F_X(x) = \frac{x+1}{N+1}, \quad x = 0,1,2,\dots\dots\dots,N$$

- **مثال (٣) :**

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان فإن لهما توزيع احتمالي مشترك معطى بالشكل :

$$P(x\ ,y) = \frac{1}{9}\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y} ; \begin{matrix} x = 0,1,2,\dots \\ y = 0,1,2,\dots \end{matrix}$$

و المطلوب : إيجاد الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y.

الحل :

$$F(x\ ,\ y) = P(X\ \le\ x\ , Y\ \le\ y)\ = \sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y} P(i\ ,\ j)$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}(\frac{2}{3})^{i+j}$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{i=0}^{x}\sum_{j=0}^{y}(\frac{2}{3})^{i}.(\frac{2}{3})^{j}$$

$$= \frac{1}{9}\,\frac{1-(\frac{2}{3})^{x+1}}{1-\frac{2}{3}}\,.\,\frac{1-(\frac{2}{3})^{y+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \left[1-(\frac{2}{3})^{x+1}\right].\left[(\frac{2}{3})^{y+1}\right]\ ;\ \begin{array}{l} x\ =\ 0,1,\dots,N \\ y\ =\ 0,1,\dots,N \end{array}$$

و هي الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y .

٣) التوزيعات الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y :

إذا علم التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين عشوائيين X,Y عندئذ يمكن أن نعلم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، و التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y و اللذين ندعوهما بالتوزيعات الهامشية أي يمكن حساب $P_X(x)$ و $P_Y(y)$.

لكن العكس غير صحيح إلاّ بإضافة شروط إضافية سوف نذكرها لاحقاً .

- **الإثبات :**

لدينا معلوم $P(x, y)$ أي :

$$\begin{aligned} P(x, y)\ &=\ P(X\ =\ x\ , Y\ =\ y) \\ &= P\big((X\ =\ x) \cap (Y\ =\ y)\big) \end{aligned}$$

و إذا رمزنا بـ :

$$A_x = (X = x)$$
$$B_Y = (Y = y)$$
$$A_x \cap B_Y = (X = x , Y = y)$$

عندئذ إذا ثبتنا X و غيرنا Y فنجد أن :

$$A_x = A_x \cap \Omega = A_x \cap (\bigcup_y B_Y) \;;\; y = y_1 , y_2 , ...$$
$$= \bigcup_y (A_x \cap B_Y) ; y = y_1 , y_2 , ...$$

و بأخذ احتمال الطرفين مع العلم أن الأحداث $A_x \cap B_Y$ تمثل أحداث متنافية مثنى لأن الأحداث B_Y متنافية مثنى عندئذ :

$$P(A_X) = \sum_y P(A_x \cap B_Y)$$

أي أن :

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x , Y = y)$$

و بشكل مختصر يمكن أن نكتب :

$$P_X(x) = \sum_y P(x , y)$$

و هذا يعني أنه للحصول على $P_X(x)$ يكفينا جمع الاحتمالات $P(x, y)$ مع تثبيت x و تغيير y .

و يمكن بالطريقة نفسها أن نثبت أنّ :

$$P_Y(y) = \sum_x P(x, y)$$

أي للحصول على $P_Y(y)$ يكفينا جمع الاحتمالات $P(x, y)$ مع تثبيت y و تغيير x .

و يمكن أن نحصل على التوزيعات الهامشية من جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين ، فمثلاً لو أردنا توزيع X عندئذ نثبت X و نغير Y :

$$P_X(x) = P(Y = \quad \underset{x}{P(X = x)} = \ ')$$

$$P_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{y} P(x, y)$$

- **مثال (٤):**

بفرض أن شخصان يلعبان بالشطرنج (جولة واحد) احتمال أن يربح الجولة الشخص الأول هو P_1 ، و احتمال أن يربح الشخص الثاني الجولة هو P_2 و احتمال أن لا يربح أحد الجولة هو: $1 - P_1 - P_2$.

و لنفرض X يدل على عدد مرات الربح للشخص الأول و Y عدد مرات الربح للشخص الثاني عندئذ كل من X و Y يأخذ القيم 1, 0 ، و بالتالي التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y يعطى من خلال مصفوفة التوزيع الاحتمالي التالية :

X / Y	٠	١	$P_Y(y)$
٠	$1 - P_1 - P_2$	P_1	$1 - P_2$
١	P_2	٠	P_2
$P_X(x)$	$1 - P_1$	P_1	١

أو يعطى التوزيع الاحتمالي المشترك لـ X و Y من خلال العلاقة :

$$P(x , y) = P_1^{x} P_2^{y} (1 - P_1 - P_2)^{1-x-y} \quad ; \quad \begin{matrix} x = 0, 1, \\ y = 0, 1, \end{matrix}$$

و يمكن أن نحصل على التوزيعات الهامشية لـ X و Y على الشكل :

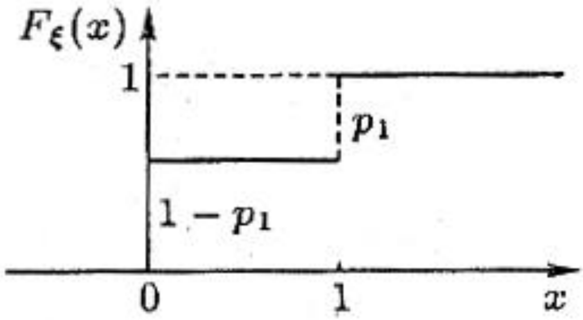
$$P_X(x) = P_1^{x}(1 - P_1)^{1-x} , \ x = 0 , 1$$

$$P_Y(y) = P_2^{Y}(1 - P_2)^{1-y} , \ y = 0 , 1$$

و يمكن إيجاد الدالة التوزيعية للمتغير X من خلال العلاقة :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ 1 - P_1 & 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \quad x \ge 1 \end{cases}$$

و منحى $F_X(x)$ له الشكل (٤-٥) :



الشكل (٤-٥)

- **مثال(٥):**

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان منقطعان جدول التوزيع الاحتمالي المشترك (مصفوفة التوزيع الاحتمالي) معطاة بالشكل التالي:

Y \ X	٠	١	٢	المجموع
٠	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{12}{36}$
١	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{36}$
٢	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{14}{36}$
المجموع	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	١

و المطلوب :

١) أوجد التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X و Y.

٢) أوجد $P(1 \leq X < 3, Y \geq 1)$.

الحل :

١": جدول التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من X يعطى بالجدول :

X	٠	١	٢
$P_X(x)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{12}{36}$

و الجدول الاحتمالي الهامشي لـ Y يعطى بالجدول :

Y	٠	١	٢
$P_Y(y)$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{14}{36}$

٢":

$$P(1 \leq X < 3\,, Y \geq 1) = \sum_{x=1}^{2} \sum_{x=1}^{2} P(x, y)$$

$$= \frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{14}{36}$$

٤) المتجه العشوائي الثنائي البعد المستمر:

نقول عن المتجه العشوائي الثنائي البعد (X, Y) إنه من النوع المستمر إذا كانت دالة التوزيع له $F(x, y)$ مستمرة و قابلة للمفاضلة بالنسبة للمتغيرين x و y و كان مشتقها المختلط من المرتبة الثانية : $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ موجوداً. و بكلمات أخرى يكون المتجه (X, Y) مستمراً إذا وجدت دالة $f(x, y)$ محققة لما يلي:

١) $f(x, y) \geq 0$ من أجل كل من x و y .

٢) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1$.

٣) $F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$.

٤) $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$.

و في هذه الحالة الدالة $f(x, y)$ ندعوها " دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة" للمتغيرين X, Y .

○ **ملاحظة (١) :**

إذا جعلنا $y \to +\infty$ في الدالة التوزيعية المشتركة لمتغيرين عشوائيين مستمرين نجد أن:

$$F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\, dy \right] du$$

و بالأسلوب نفسه إذا جعلنا $x \to +\infty$ في نفس الدالة التوزيعية المشتركة نجد أن :

$$F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v)\, dx \right] dv$$

من المعلوم أن : $F(x,+\infty) = F_X(x)$ و $F(+\infty, y) = F_Y(y)$.عندئذ بالاشتقاق نجد أن:

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$$

و هذا يعني أنه للحصول على دالة الكثافة الاحتمالية لأحد المتغيرين العشوائيين (الكثافة الهامشية) ، فإننا نكامل دالة الكثافة المشتركة من $-\infty$ إلى $+\infty$ على المتغير الأخر .

○ **ملاحظة ٢ :**

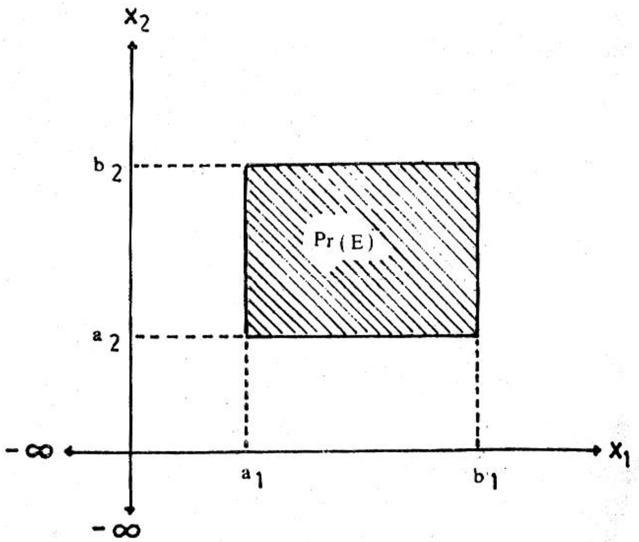
إذا كان(X, Y) متجهاً عشوائياً ثنائي دالة كثافته $f(x, y)$ و دالته التوزيعية $F(x, y)$ ،

و كانت a_1 , a_2 , b_1 , b_2 ثوابت حقيقية فإن :

$$P(a_1 < X \le a_2 \ , b_1 < Y \le b_2) = F(a_2, a_1) - F(a_1, b_1) - F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1)$$

<u>الإثبات :</u>

ليكن $A = (a_1 < X \le \ \ E \ \ b_1 < Y \le b_2)$ ، عندئذ لو نظر إلى الشكل (٤-٦) :



الشكل (٤-٦)

نجد أن:

$$
\begin{aligned}
P(A) \ P(E) &= P(a_1 < X \le a_2 \ , b_1 < Y \le b_2) \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b1}^{b_2} f(x, y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{b_2} f(x, y)\, dx\, dy - \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy - \int_{-\infty}^{b_2} \int_{-\infty}^{a_1} f(x, y)\, dx\, dy + \int_{-\infty}^{a_1} \int_{-\infty}^{b_1} f(x, y)\, dx\, dy \\
&= F(a_2, b_2) = F(a_2, b_1) - F(b_2, a_1) + F(a_1, b_1)
\end{aligned}
$$

و هو المطلوب .

- **ملاحظة ٣ :**

الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين العشوائيين Y, X تمثل احتمال وقوع النقطة العشوائية (X, Y) في المربع اللانهائي الواقع إلى يسار و أسفل النقطة (x, y) ، أي إذا نظرنا إليه على أنه مربع إحداثياته على السينات $-\infty$ ، x و مع التراتيب $-\infty$ ، y ، فإننا نجد :

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\, du\, dv$$

و هي العلاقة نفسها التي تعرفنا إليها عندما عرفنا المتجه العشوائي المستمر .

- **ملاحظة ٤ :**

من أجل أي مجموعة بورولية في المستوى ، فإن :

$$P\big((X, Y) \in A\big) = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy$$

و عندما A تمثل المستوى بأكمله فإن :

$$P\big((X, Y) \in A\big) = \iint_A f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

- **مثال (٦) :**

بفرض أن Y, X متغيران عشوائياً لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة من خلال العلاقة :

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & , \quad x > 0 \\ & \quad\;\; y > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

المطلوب : أوجد الدالة التوزيعية المشتركة لهذين المتغيرين ؟

الحل:

$$F(x,y) = \int_0^x \int_0^y e^{-(u+v)}\, du\, dv$$

$$= \int_0^x \left[\int_0^y e^{-v} dv \right] e^{-u}\, du$$

$$= (1 - e^{-y}) \int_0^x e^{-u}\, du = (1 - e^{-y})\ (1 - e^{-x})$$

أي أن :

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & ; x \le 0\,, y \le 0 \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & ;\ 0 < x < \infty\ ,\ 0 < y < \infty \\ 1 & ; x \to \infty\ ,\ y \to \infty \end{cases}$$

و يلاحظ من الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y, X ما يلي :

1) $\dfrac{\partial 2F(x,y)}{\partial x \partial y} = e^{-(x+y)} = f(x,y)$

2) $F_X(x, -\infty) = F_Y(-\infty, y) = 0$

3) $F(\infty, \infty) = \lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) = 1$

4) $P(1 < X < 3,\ \ 2 < y < 4) = F(3,4) - F(1,4) - F(3,2) + F(1,2)$

$= (1 - e^{-3})(1 - e^{-4}) - (1 - e^{-1})(1 - e^{-4}) - (1 - e^{-3})\ (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-1})(1 - e^{-2})$

5) $F(x, \infty) = F(x) = (1 - e^{-x})$

$F(\infty, y) = F(y) = (1 - e^{-y})$

- **مثال (٧) :**

بفرض أن Y, X متغيران عشوائيان منقطعان لهما توزيع احتمالي مشترك معطى بالشكل:

$$P(x, y) = a \quad ; \quad \begin{matrix} x = 1, 2, 3, 4 \\ y = 1, 2, 3, 4, 5 \end{matrix}$$

المطلوب : أوجد قيمة a ثم أوجد الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين العشوائيين .

<u>الحل :</u>

نجد قيمة a من العلاقة التالية :

$$\sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{5} P(x, y) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{4}\sum_{y=1}^{5} a = 1$$

و بالتالي :

$$20\, a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{20}$$

و منه :

$$P(x, y) = \frac{1}{20} \quad ; \quad \begin{matrix} x = 1, 2, 3, 4 \\ y = 1, 2, 3, 4, 5 \end{matrix}$$

و لنوجد الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y, X لدينا :

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{x}\sum_{j=1}^{y} \frac{1}{20} = \frac{x\, y}{20} \; ; \quad \begin{matrix} x = 1, 2, 3, 4 \\ y = 1, 2, 3, 4, 5 \end{matrix}$$

و يلاحظ أن :

1) $F(x,0) = F(0, y) = 0$

2) $F(4,5) = 1$

3) $P(2 < X \le 4 \;,\; 3 < Y \le 5) = F(4,5) - F(2,5) - F(4,3) + F(2,3)$

$$= 1 - \frac{10}{20} - \frac{12}{20} + \frac{6}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

4) $F(x,5) = F_X(x) = \dfrac{x}{4}$; $x = 1, 2, 3, 4$

$F(4, y) = F_Y(y) = \dfrac{y}{5}$; $x = 1, 2, 3, 4, 5$

و يلاحظ من الدالة التوزيعية المشتركة لـ X و Y التي كتبت على الشكل :

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{y} P(i, j)$$

$$= \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{y} \frac{1}{20} = \frac{x\,y}{20}$$

أي:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \text{ أو } Y < 1 \\ \dfrac{x\,.\,y}{20} & ; \quad x = 1, 2, ..., 4 \quad , \quad y = 1, 2, ..., 5 \\ 1 & ; x \ge 4 \quad , \quad y \ge 5 \end{cases}$$

- **مثال (٨) :**

بفرض أن Y, X متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} 2\,e^{-(x+2y)} & ; x \le 0 , y \le 0 \\ 0 & ; \text{ خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب : احسب الاحتمالات التالية :

١) $P(X > 1, \; Y > 1)$.

٢) $P(X < Y)$.

٣) $P(X < b)$.

الحل :

$$1)\quad P(X>1,\ Y>1) = \int_1^{\infty}\int_0^{1} 2e^{-x}.e^{-2y}$$

$$= \int_1^{\infty} 2e^{-x}\left[\int_0^1 e^{-2y}dy\right]dx = \int_1^{\infty} 2e^{-x}\left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^1 dx$$

$$= (1-e^{-2})\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = (1-e^{-2})\,e^{-1}$$

$$2)\ P(X<Y) = P(X<y;\ 0<Y<\infty)$$

$$= \int_0^{y}\int_0^{\infty} 2e^{-x-2y}dx\,dy = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{y} 2e^{-x}.\,e^{-2y}\,dx\right]dy$$

$$= \int_0^{\infty} 2e^{-2y}\left[\int_0^{y} e^{-x}dx\right]dy = 2\int_0^{\infty} e^{-2y}(1-e^{-y})\,dy$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-2y}\,dy - \int_0^{\infty} e^{-3y}\,dy$$

$$= \left[-e^{-2y}\right]_0^{\infty} + \left[\frac{2}{3}e^{-3y}\right]_0^{\infty} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$3)\ P(X<b) = P(X<b;0<Y<\infty)$$

$$= \int_0^{b}\int_0^{\infty} 2e^{-x-2y}dx\,dy$$

$$= \int_0^{b} 2e^{-x}\left[\int_0^{\infty} e^{-2y}dy\right]$$

$$= \int_0^{b} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{b} = 1-e^{-b}$$

(٤-٥) – استقلال المتغيرات العشوائية :

لقد تبين لنا حتى الآن أن معرفتنا بالتوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين عشوائيين Y, X تمكننا من معرفة التوزيع الاحتمالي الهامشي لكل من Y, X .

و السؤال الذي يطرح نفسه هنا هل العكس صحيح بشكل عام ؟ بمعنى أنه إذا علمنا توزيع المتغير X وتوزيع المتغير Y فهل يكفي لمعرفة التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين Y, X ؟

إن الإجابة في الحالة العامة تكون بالنفي ، و لكن في الحالة الخاصة عندما يكون المتغيران العشوائيان مستقلين يكون العكس صحيحاً .

- **تعريف (١) :**

الشرط اللازم و الكافي لكي يكون Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين هو تحقق الشرط :

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

حيث : $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ تمثلان دوال توزيع Y , X على الترتيب .

- **مثال (٩) :**

بفرض أن Y, X متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} a & ; -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} \;,\quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

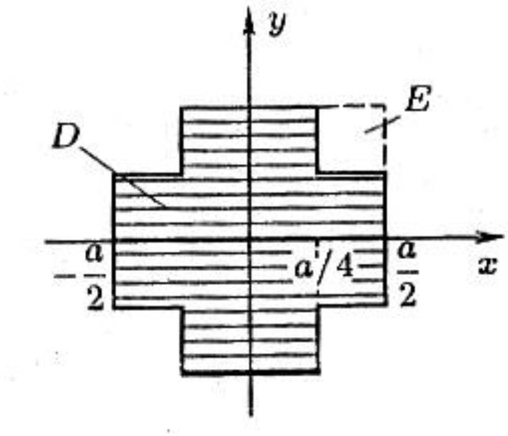
١) أوجد قيمة الثابت a .

٢) إيجاد التوزيعات الاحتمالية الهامشية لكل من Y, X.

٣) إيجاد الدالة التوزيعية لكل من Y, X .

٤) إيجاد الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين Y, X .

٥) احسب احتمال وقوع النقطة $(Y, X) \in D$، حيث أن D منطقة معطاة من خلال الشكل (٤-٧) :



الشكل (٤-٧)

الحل:

١": لدينا :

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} a \, dx \, dy = 1$$

$$a\, b^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b^2}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dy}{b^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right] = \frac{1}{b} & ; \quad |x| < \frac{b}{2} \\ 0 & ; \quad |x| \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

و بالطريقة نفسها نجد أن :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b} & ; \quad -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 0 & ; \quad |y| \geq \frac{b}{2} \end{cases}$$

٣": لدينا :

$$F_X(x) = \begin{cases} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{x} \dfrac{dt}{b} = \dfrac{1}{b}\left[\dfrac{b}{2} + x\right] & ; -\dfrac{b}{2} < x < \dfrac{b}{2} \\ 0 & ; x \le -\dfrac{b}{2} \\ 1 & ; x > \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

و هي الدالة التوزيعية للمتغير x .

و بنفس الطريقة نجد أن :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & ; y \le -\dfrac{b}{2} \\ \dfrac{1}{b}(y + \dfrac{b^2}{2}) & ; -\dfrac{b}{2} < y \le \dfrac{b}{2} \\ 1 & ; y > \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

و هي الدالة التوزيعية للمتغير y .

و نلاحظ هنا أن :

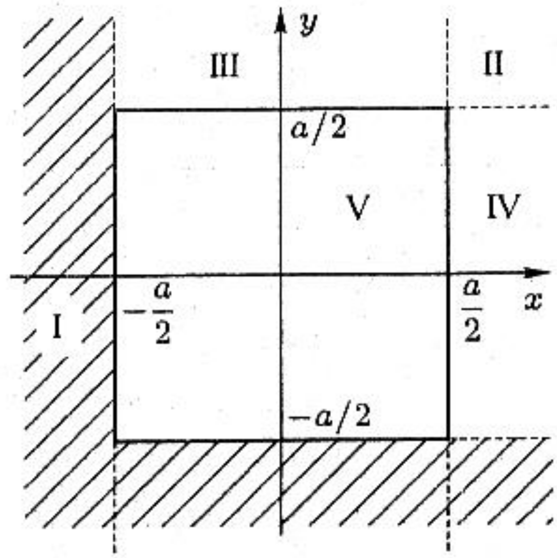
$$F_X(\frac{b}{2}) = \frac{1}{b}(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}) = 1$$

$$F_X(-\frac{b}{2}) = 0$$

كما نجد أن :

$$F_X'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b} & ; -\dfrac{b}{2} < x < \dfrac{b}{2} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

٤": لو نظرنا إلى الشكل (٤-٨) :



الشكل (٤-٨)

نجد أنّ :

$$y \le -\frac{b}{2} \ , x \le -\frac{b}{2} \Rightarrow F(x, y) = 0$$

$$x > \frac{b}{2} \ , \ y > \frac{b}{2} \Rightarrow F(x, y) = 1$$

$$-\frac{b}{2} < x \le \frac{b}{2} \ , \ y > \frac{b}{2} \Rightarrow F(x, y) = P(X < x \ , Y < \frac{b}{2}) = F_X(x)$$

$$-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \ , x > \frac{b}{2} \Rightarrow$$

$$F(x, y) = P(X < \frac{b}{2} , Y < y) = F_Y(y)$$

$$-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \ , -\frac{b}{2} < x \le \frac{b}{2}$$

$$F(x, y) = P(X < x , Y < y) = \int_{-\frac{b}{2}}^{x} \int_{-\frac{b}{2}}^{y} \frac{du\, dv}{b^2} = \frac{1}{b^2}(x + \frac{b}{2})(y + \frac{b}{2}) ;$$

و بهذا الشكل يمكن أن نكتب :

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{b}(x+\frac{b}{2}) & ; \ -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} \ , \ y > \frac{b}{2} \\ \frac{1}{b}(y+\frac{b}{2}) & ; \ x > \frac{b}{2} \ ; \ \frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ \frac{1}{b^2}(x+\frac{b}{2})+(y+\frac{b}{2}) & ; \ -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} \ , \ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 1 & ; \ x > \frac{b}{2} \ , \ y > \frac{b}{2} \\ 0 & ; x \leq -\frac{b}{2} \ \text{أو} \ y \leq -\frac{b}{2} \end{cases}$$

و هنا نلاحظ أن :

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = F_{(X,Y)}(\frac{b}{2}, y) = \begin{cases} \frac{1}{b}(y+\frac{b}{2}) & ; \ -\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2} \\ 1 & ; \ y > \frac{b}{2} \\ 0 & ; y \leq -\frac{b}{2} \end{cases}$$

$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, \infty) = F_{(X,Y)}(x, \frac{b}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{b}(x+\frac{b}{2}) & ; \ -\frac{b}{2} < x < \frac{b}{2} \\ 1 & ; \ x > \frac{b}{2} \\ 0 & ; x \leq -\frac{b}{2} \end{cases}$$

كما نلاحظ أيضاً أن :

$$F_{(X,Y)}(-\infty, y) = F_{(X,Y)}(-\frac{b}{2}, y) = 0$$

$$F_{(X,Y)}(x,-\infty) = F_{(X,Y)}(x,-\frac{b}{2}) = 0$$

$$F_{(X,Y)}(+\infty, +\infty) = F_{(X,Y)}(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}) = 1$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \frac{1}{b^2} & ; \ -\frac{b}{2} < x \leq \frac{b}{2} \ ,-\frac{b}{2} < y \leq \frac{b}{2} \\ 0 & ; \qquad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

:"٤

$$P\big((Y, X) \in E\big) = F_{(X,Y)}(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}) - F_{(X,Y)}(\frac{b}{2}, \frac{b}{4}) - F_{(X,Y)}(\frac{b}{4}, \frac{b}{2}) + F_{(X,Y)}(\frac{b}{4}, \frac{b}{4})$$

$$= 1 - \frac{1}{b^2}(\frac{b}{2} + \frac{b}{2})(\frac{b}{4} + \frac{b}{2}) - \frac{1}{b^2}(\frac{b}{2} + \frac{b}{4})(\frac{b}{2} + \frac{b}{2})$$

$$+ \frac{1}{b^2}(\frac{b}{4} + \frac{b}{20})(\frac{b}{4} + \frac{b}{2}) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} = \frac{1}{16}$$

و منه :

$$P\left(-\frac{b}{2} < X \leq \frac{b}{2} \ ; -\frac{b}{2} < Y \leq \frac{b}{2}\right) = 1 - 4\,P\big((Y, X) \in E\big)$$

$$= 1 - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}$$

و ذلك لأن :

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

$$= P(X < x) \,.\, P(Y < y)$$

أي يكون المتغيران العشوائيان مستقلين إذا كان قانون التوزيع لكل منهما لا يتعلق نهائياً بالقيم الموجودة في جدول توزيع الآخر .

و هذا يمكننا أن نقول عن المتغيرين العشوائيين Y, X إنهما مستقلان إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين تساوي جداء دالتي التوزيع لكل منهما على حدة .

- **تعريف (٢) :**

الشرط اللازم و الكافي من أجل أن يكون المتغيران العشوائيان المنقطعان Y, X مستقلين هو تحقق الشرط:

$$P_{(Y,X)}(x, y) = P_X(x).P_Y(y)$$

أي التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين Y, X يساوي جداء التوزيع الاحتمالي لكل منهما .

- **مبرهنة (١) :**

الشرط اللازم و الكافي من أجل أن يكون Y, X متغيرين عشوائيين مستمرين مستقلين هو تحقق الشرط:

$$f_{(Y,X)}(x, y) = f_X(x).f_Y(y)$$

<u>الإثبات :</u>

"١": نفرض Y, Xمستقلان عندئذ يكون :

$$F_{(Y,X)}(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

عندئذ باشتقاق العلاقة الأخيرة مرتين جزئياً بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y نجد أن :

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y) = F_X'(x).F_Y'(y) = f(x).f(y)$$

أي أن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرين عشوائيين مستقلين تساوي جداء دوال الكثافة الهامشية .

"٢": نفرض أن العلاقة الآتية صحيحة :

$$f(x, y) = f(x).f(y)$$

عندئذ :

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u\,,v)\;du\;dv = (\int_{-\infty}^{x} f(u)\;du)\;(\int_{-\infty}^{y} f(v)\;dv) \Rightarrow$$

$$F_{(Y,X)}(x,\,y) \;=\; F_X(x).F_Y(y)$$

و هذا يعني أن شرط الاستقلال تحقق، أي X و Y مستقلان .

- **مبرهنة (٢) :**

إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة $f(x, y)$ عندئذ :

$$P(a_1 \;<\; X \;<\; a_2 \;, b_1 \;<\; Y \;<\; b_2)$$

الذي يمثّل الاحتمال المشترك للحادثين :

$$A \;=\; (a_1 \;<\; X \;<\; a_2)\;, B \;=\; (b_1 \;<\; Y \;<\; b_2)$$

يعطى بالشكل :

$$\begin{aligned} P\,(A \cap B) \;&=\; P(A)\,.\,P(B) \\ &= P(a_1 \;<\; X \;<\; a_2)\,.\,P\,(b_1 \;<\; Y \;<\; b_2) \end{aligned}$$

<u>الإثبات :</u>

لدينا :

$$\begin{aligned} P\,(A \cap B) \;&=\; \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2} f(x,\,y)\;dx\;dy \\ &= \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x)\;dx\right).\left(\int_{b_1}^{b_2} f(y)\;dy\right) \\ &= P(A)\,.\,P(B) \;=\; P(a_1 \;<\; X \;<\; a_2)\,.\,P\,(b_1 \;<\; Y \;<\; b_2) \end{aligned}$$

- **مثال (١٠) :**

إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين مستقلين الدالة التوزيعية لكل منهما معطاة على الترتيب بالشكل :

$$F_X(x) = 1 - e^{-x} \; ; x > 0 \quad , \qquad F_Y(y) = 1 - e^{-y} \; ; y > 0$$

عندئذ أوجد دالة الكثافة المشتركة لهذين المتغيرين :

<u>الحل</u> :

واضح أن :

$$F_{(Y,X)}(x, y) = F_X(x).F_Y(y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) \quad ; \quad x > 0 \, , \; y > 0$$

و منه :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_x(x)}{\partial x} . \frac{\partial F_y(y)}{\partial y}$$

$$= e^{-x} . e^{-x} = e^{-(x+y)} \; ; \; x > 0 \; , \; y > 0$$

- **مثال (١١) :**

إذا كان Y, X متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = 4\, x \,.\, y \quad ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{array}$$

و المطلوب :

١) تأكد أن Y, X مستقلان .

٢) أوجد $P(0 < X < 0.6 \; , \; 0.2 < Y < 0.7)$.

<u>الحل</u> :

١":

$$f_X(x) = \int_0^1 4 \, dx \, dy = 4x \int_0^1 y \, dy$$

$$= 4x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 4x \left(\frac{1}{2}\right) = 2x \qquad \text{أي}$$

$$f_X(x) = 2x \quad ; 0 < x < 1$$

بنفس الطريقة نجد أن :

$$f_Y(y) = \int_0^1 4\,dx\,d\ 4x.y\ \ dx = 4y\int_0^1 x\,dx$$

$$= 4y\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2y \quad \text{أي}$$

$$f_Y(y) = 2\,y \quad ; 0 < x < 1$$

و منه نجد :

$$f(x)\,.\,f(y) = 2x.\,2y = 4\,x\,y = f(x, y)$$

هذا يعني أن Y, X مستقلان.

٢":

$$P\,(0 < X < 0.6\ ,\ 0.2 < Y < 0.7) = P(0 < X < 0.6)\,.\,P\,(0.2 < Y < 0.7)$$

و لدينا :

$$P(0 < X < 0.6) = \int_0^{0.6} 2x\,dx = x^2\Big|_0^{0.6} = (0.6)^2 = 0.36$$

$$P(0.2 < Y < 0.7) = \int_{0.2}^{0.7} 2y\,dy = y^2|_{0.2}^{0.7} = (0.7)^2 - (0.2)^2$$

$$= 0.49 - 0.4 = 0.45$$

و بالتالي :

$$P\,(0 < X < 0.6\ ,\ 0.2 < Y < 0.7) = (0.36)\,(0.45) = 0.162$$

- **مثال (١٢) :**

يطلق راميان بشكل مستقل كل واحد طلقة واحدة على هدفه الخاص ، و ليكن X المتغير العشوائي المعبّر عن عدد الاصابات التي حصل عليها الرامي الأول ، Y عدد الاصابات التي يحصل عليها الرامي الثاني .

فإذا كان احتمال إصابة الهدف من قبل الرامي الأول هو $\frac{1}{3}$ و من قبل الرامي الثاني $\frac{1}{4}$ ، و المطلوب تشكيل دالة التوزيع المشتركة للمتغيرين Y, X .

الحل :

بما أن Y, X متغيران مستقلان ، نستطيع أن نكتب :

$$F_{(Y,X)}(x, y) = F_X(x).F_Y(y)$$

و لدينا X منقطع ، جدول توزيعه الاحتمالي :

X	٠	١
$P_X(x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

و بالتالي الدالة التوزيعية له :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q = \frac{2}{3} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

و بالأسلوب نفسه نجد $F_Y(y)$ حيث جدول توزيع Y هو :

Y	٠	١
$P_Y(y)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ q = \frac{3}{4} & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

و بالتالي تأخذ $F(x, y)$ دالة التوزيع المشتركة الشكل :

$F(x, y) =$

X \ Y	$y < 0$	$0 \le y < 1$	$y \ge 1$
$x < 0$	٠	٠	٠
$0 \le x < 1$	٠	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{4}$	$\frac{2}{3}$
$x \ge 1$	٠	$\frac{3}{4}$	1

- **مثال (١٣) :**

بفرض Y, X متغيران عشوائيان منقطعان جدول توزيعهما المشترك معطى بالشكل :

Y \ X	3	5	10	Σ
1	0.06	0.04	0.10	0.2
2	0.03	0.02	0.05	0.1
3	0.09	0.06	0.15	0.3
4	0.12	0.08	0.20	0.4
Σ	0.3	0.2	0.5	1

والمطلوب :

١) شكّل التوزيع الهامشي لكل من Y, X .

٢) هل Y, X مستقلان ؟

الحل :

١": لدينا من الجدول السابق :

X	3	5	10
$P_X(x)$	0.3	0.2	0.5

Y	1	2	3	4
$P_Y(y)$	0.2	0.1	0.3	0.4

٢": نلاحظ أن شرط الاستقلال محقق ، أي :

$$P(x,,y) = P_X(x) . P_Y(y)$$

و ذلك لأن :

$$P\,(3\,,1) = P_X(3) . P_Y(1) = 0.06$$

$$P\,(3\,,2) = P_X(3) . P_Y(2) = 0.03$$

$$P\,(3\,,3) = P_X(3) . P_Y(3) = 0.09$$

$$P\,(3\,,4) = P_X(3) . P_Y(4) = 0.12$$

$$P\,(5\,,1) = P_X(5) . P_Y(1) = 0.04$$

$$P\,(5\,,2) = P_X(5) . P_Y(2) = 0.02$$

$$P\,(5\,,3) = P_X(5) . P_Y(3) = 0.06$$

$$P\,(5\,,4) = P_X(5) . P_Y(4) = 0.08$$

$$P\,(10\,,1) = P_X(10) . P_Y(1) = 0.10$$

$$P\,(10\,,2) = P_X(10) . P_Y(2) = 0.05$$

$$P\,(10\,,3) = P_X(10) . P_Y(3) = 0.15$$

$$P\,(10\,,4) = P_X(10) . P_Y(4) = 0.20$$

من الواضح أن هذه النتائج هي الأرقام ذاتها في الجدول السابق عموداً تلو الآخر و مجموعها يساوي ١ .

(٦-٤) التوقع الرياضي المشترك :

بفرض أن Y, X متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك ($P(x, y)$ أو $f(x, y)$)

و لتكن $g\,(X, Y)$ دالة بدلالة المتغيرين العشوائيين Y, X عندئذ يعرف التوقع الرياضي للدالة $g\,(X, Y)$ وفق الآتي :

$$E\ g\,(X, Y) = \begin{cases} \sum_x \sum_y g\,(x, y) .P\,(x, y) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g\,(x, y)\,.f\,(x, y)\,dx\,dy \end{cases}$$

و في كلتا الحالتين يكون التوقع الرياضي للدالة $g\,(X, Y)$ موجود إذا كانت عمليات الجمع او التكامل متقاربة على نحو مطلق أي أن :

$$\sum_x \sum_y \left| g\,(x, y) \right| .P\,(x, y) < +\infty$$

و إن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| g\,(x, y) \right| .f\,(x, y)\,dx\,dy < +\infty$$

- **من أهم خصائص التوقع الرياضي المشترك :**

١) إذا كانت $g\,(X, Y) = a$ حيث إن a ثابت حقيقي فإن :

$$E\ g\,(X, Y) = a$$

٢) إذا كانت $g(X, Y) = x$ أو $g\,(X, Y) = Y$ فإن :

$$E\ g\,(X, Y) = EX \quad , \quad E\ g\,(X, Y) = EY$$

٣) إذا كانت $g\,(X, Y) = (X - EX)^2$ أو $g\,(X, Y) = (Y - EY)^2$

عندئذ :

$$Eg\,(X,Y) = E(X - EX)^2 = \sigma_X^2 \quad \text{أو}$$

$$Eg\,(X,Y) = E(Y - EY)^2 = \sigma_Y^2$$

٤) إذا كانت $g\,(X,Y) = X \mp Y$ فإن :

$$E\,g\,(X,Y) = E(X \mp Y) = EX \mp EY$$

٥) إذا كانت $g\,(X,Y) = X.Y$ فإن :

$$E\,g\,(X,Y) = E(X.Y)$$

و في الحالة الخاصة إذا كان Y, X مستقلين فإن :

$$E(X,Y) = EX.EY$$

- **مثال (١٤) :**

بفرض (Y, X) متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك :

$$P\,(x,y) = \frac{x+y}{21} \quad ; \begin{matrix} x = 1, 2, 3 \\ y = 1, 2 \end{matrix}$$

و المطلوب إيجاد :

$$E(X.Y)\,,\ EX\,,\ EY$$
$$E(5X - 3Y)\,,\ E(3X + 2Y)$$

<u>الحل :</u>

$$EX = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} x\,(\frac{x+y}{21})$$

$$= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x^2 + x\,y) = \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}(2x^2 + 3x) = (2+3) + (6+6) + (18+9) = \frac{46}{21}$$

$$EY = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} y\,(\frac{x+y}{21}) = \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x\,y + y^2) = \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}(x + 1 + 2x + 4)$$

$$= \frac{1}{21}\left[(3+5) + (6+5) + (9+5)\right] = \frac{11}{7}$$

و من أجل إيجاد $E(X.Y)$ لدينا :

$$E(X.Y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} x\,(\frac{x+y}{21}) = \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2}(x^2 + x.\,y)$$

$$= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\ (x^2 + x + 2x^2 + 4x)$$

$$= \frac{1}{21}\sum_{x=1}^{3}\ (3x^2 + 5x)$$

$$= \frac{1}{21}\Big(\,(3+5)+(12+10)+(27+15)\,\Big) = \frac{72}{21}$$

كذلك فإن :

$$E(3X + 2Y) = 3\,EX + 2\,EY$$

$$= 3\,\frac{46}{21} + 2\,\frac{11}{7} = \frac{46+22}{7} = \frac{68}{7}$$

$$E(5X - 3Y) = 5\,EX - 3\,EY$$

$$= 5\,\frac{46}{21} - 3\,\frac{11}{7} = \frac{230}{21} - \frac{33}{7} = \frac{131}{21}$$

- **مثال (١٥) :**

بفرض Y, X متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\ ; & \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب حساب : $E(X.Y)\,,\, EX\,,\, EY$

الحل :

$$EX = \int_0^1 \int_0^1 x\,(x + y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 x\,y\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

و بالأسلوب نفسه نحسب EY فنجد أنّ : $EY = \dfrac{7}{12}$.

و كذلك فإن :

$$EXY = \int_0^1 \int_0^1 x\,y\,(x + y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 y\,dx\,dy + \int_0^1 \int_0^1 x\,y^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

و بالتالي من الواضح أن :

$$E(XY) \neq E(X).E(Y)$$

مما يعني أن X , Y غير مستقلين بحسب الخاصة رقم (٥) .

- **ملاحظة (١) :**

إذا كان المتغيران Y, X مستقلين فإن :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

الإثبات :

$$V(X+Y) = E(X+Y-EX-EY)^2$$
$$= E\left((X-EX)+(4-EY)\right)^2$$
$$= E\left((X-EX)^2 + 2(X-EX)(Y-EY) + (Y-EX)^2\right)$$
$$= V(X) + 2E(X-EX)(Y-EY) + V(Y)$$
$$= V(X) + V(Y)$$

و ذلك لأن :

$$E(X-EX)(Y-EY) = E(X-EX).E(Y-EY) = 0$$

بسبب الاستقلال .

- **تعميم استقلال n متغير عشوائي على فضاء احتمالي معطى :**

الشرط اللازم و الكافي من أجل ان تكون المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقلة هو تحقق الشرط :

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_1}(x_1).F_{X_2}(x_2)..........F_{X_n}(x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

و إذا كانت هذه المتغيرات العشوائية مستمرة و لها دالة كثافة مشتركة $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ، عندئذ الشرط اللازم و الكافي من أجل أن تكون هذه المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقلة هو تحقق الشرط التالي :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1).f(x_2)..........f(x_n)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

أمّا إذا كانت المتغيرات العشوائية منقطعة و توزيعها الاحتمالي المشترك $P\,(x_1 , x_2 , ... , x_n)$ معلوم عندئذ الشرط اللازم و الكافي لكي تكون هذه المتغيرات العشوائية مستقلة هو تحقق الشرط :

$$P\,(x_1 , x_2 , ... , x_n) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i)$$

▪ تعريف :

العينة العشوائية لمتغير عشوائي توزيعه الاحتماليمعلوم :

بفرض أن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي معلوم ($P_X(x)$ أو $f_X(x)$) عندئذ نقول عن المتغيرات $X_1 , X_2 , ... , X_n$ أنها تمثل عينة لـ X إذا كانت هذه المتغيرات مستقلة و كل منها يخضع لتوزيع المتغير العشوائي X المعطى .

و على سبيل المثال إذا كان X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي :

$$P_X(x) = e^{-3} \frac{3^x}{x\,!} \quad , \quad x = 0, 1, ...$$

عندئذ إذا كانت $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة عشوائية لـ X فإن تلك المتغيرات مستقلة و كل منها يخضع للتوزيع الاحتمالي $P_X(x)$ بالوسيط نفسه . و يكون التوزيع المشترك لمتغيرات هذه العينة :

$$\begin{aligned} P\,(x_1 , x_2 , ... , x_n) &= \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-3} \frac{3^x}{x_i\,!} \\ &= e^{-3n} . 3^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i\,!} \end{aligned}$$

و إذا كان X متغيراً عشوائياً مستمر و له دالة كثافة احتمالية :

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

و كانت $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة لـ X ، عندئذ المتغيرات تكون مستقلة و كل منها له نفس دالة الكثافة الاحتمالية بالوسيط λ و يكون :

$$f\,(x_1 , x_2 , ... , x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, e^{-\lambda x} = \lambda^n . e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

- **مبرهنة (٣) :**

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين ، و كان $\varphi_1(x)$ دالة عددية في X ، و $\varphi_2(y)$ دالة عددية في Y ، و كان لكل من هاتين الدالتين توقع موجود ، عندئذ :

$$E\left(\varphi_1(x) , \varphi_2(y)\right) = E\left[\varphi_1(x)\right].\left[\varphi_2(y)\right]$$

الإثبات :

من أجل الإثبات سوف نميز حالتين :

- **الحالة الأولى :**

إذا كان (X, Y) متجهاً عشوائياً منقطعاً توزيعه الاحتمالي :

$$P_{(X,Y)}(x, y) = P(X = x , Y = y)\,; \quad \begin{array}{l} x = x_1 , x_2 , ... \\ y = y_1 , y_2 , ... \end{array}$$

و كان $P_X(x)$ و $P_Y(y)$ التوزيعات الاحتمالية الهامشية لكن من X و Y على الترتيب فعندئذ :

$$\begin{aligned} E\,(\varphi_1(x)\,)\,(\,\varphi_2(y)) &= \sum_x \sum_y \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, P\,(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y \varphi_1(x)\, \varphi_2(y)\, P_X(x) . P_Y(y) \\ &= \sum_x \varphi_1(x)\, P_X(x) . \sum_y \varphi_2(y)\, P_Y(y) \\ &= E\, \varphi_1(x) . E\varphi_2(y) \end{aligned}$$

حيث (X, Y) مستقلان .

الحالة الثانية :

إذا كان (X,Y) متجهاً عشوائياً مستمراً و له دالة كثافة احتمالية $f(x,y)$ و بحيث $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ تمثّل دوال الكثافة الهامشية لكل من X و Y عندئذ :

$$E\,(\varphi_1(x))\,(\,\varphi_2(y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x).\varphi_2(y)\;f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x).\;f_X(x)\,.\varphi_2(y)\;f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x).\;f_X(x)\,dx\,.\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_2(y)\;f_Y(y)\,dy$$

$$= E\;\varphi_1(x).\,E\varphi_2(y)$$

حيث (X,Y) مستقلان .

و في الحالة الخاصة $\varphi_1(x) = X$ ، $\varphi_2(y) = Y$ عندئذ يكون :

$$E\;XY = EX\,.\,EY$$

و قد درست هذه الحالة فيما سبق .

- **مبرهنة (٤) :**

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما تباين موجود $V(X)$ و $V(Y)$ عندئذ من أجل أي عددين حقيقيين a , b يكون :

$$V(a\,X + b\,Y) = a^2\,V(X) + b^2\,V(Y)$$

الإثبات :

بالاعتماد على تباين متغير عشوائي و الاستفادة من خصائص التوقع الرياضي نجد :

$$
\begin{aligned}
V(a\,X + b\,Y) &= E(a\,X + b\,Y)^2 - \left(E(a\,X) + E\,(b\,Y)\right)^2 \\
&= E(a^2\,X^2 + a\,b\,XY + b^2\,Y^2) - E(a\,X)^2 - 2\,E(a\,X)E\,(b\,Y) - (E\,(b\,Y)\,)^2 \\
&= a^2\,EX^2 + 2ab\,E\,X\,Y + b\,Y^2 - a^2(EX)^2 - b\,(EY)^2 - 2\,a\,b\,EXY \\
&= a^2\,EX^2 - a^2(EX)^2 + b^2\,EY^2 - b^2\,(EY)^2 \\
&= a^2\left[EX^2 - (EX)^2\right] + b^2\left[EY^2 - (EY)^2\right] \\
&= a^2\,V(X) + b^2\,V(Y)
\end{aligned}
$$

و يمكن تعميم المبرهنة السابقة على الشكل التالي :

بفرض أن $X_1\,, X_2\,, ...\,, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة و لكل منها تباين عندئذ من أجل الثوابت الحقيقية $a_1\,, a_2\,, ...\,, a_n$ يكون :

$$V(\sum_{i=1}^{n} a_i\;X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2}\,V(X_i)$$

و في الحالة التي تكون فيها المتغيرات $X_1\,, X_2\,, ...\,, X_n$ تمثل عينة عشوائية لمتغير عشوائي X له تباين $V(X)$ عندئذ :

$$V(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} V(X) = n\,V(X) = n\,\overset{2}{\sigma}$$

تعريف :

بفرض أن $X_1\,, X_2\,, ...\,, X_n$ عينة عشوائية لمتغير عشوائي توزيعه الاحتمالي معلوم و لنفرض أن $EX = \mu$ ، $V(X) = \overset{2}{\sigma}$ يمثلان التوقع و التباين لـ X على الترتيب ، عندئذ

الوسط الحسابي لهذه العينة يعرّف بالعلاقة : $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$

ملاحظة :

الوسط الحسابي لمتغيرات عينة عشوائية لمتغير عشوائي معلوم X يمثل متغيراً عشوائياً جديداً يعتمد على التوزيع الاحتمالي لـ X ، عندئذ فإن :

$$E\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,X_i = \frac{1}{n}(n\,EX) = EX = \mu$$

$$V\overline{X} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X) = \frac{n\,V(X)}{n^2} = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$$

و هذا يدل على أن الوسط الحسابي يملك توقعاً و تبايناً علماً أن التوقع و التباين للمتغير X موجودة ، و ذلك لأن التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{X}$ يعتمد بطبيعة الحال على التوزيع الاحتمالي لـ X .

- **تعريف تباين العينة :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توقع μ ، و له تباين σ^2 ، و كانت $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة لـ X عندئذ تباين العينة و الذي نرمز له بالرمز S^2 يعرف بالشكل :

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$$

و من هذا التعريف لـ S^2 واضح أنه يتبع لمتغيرات العينة العشوائية أي هو متغير عشوائي يعتمد على التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . عندئذ فإن :

$$\begin{aligned}
E\,S^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\,(X_i - \overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\,\{(X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu)\}^2 \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\,(X_i - \mu) - \frac{2}{n-1}E\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) - (\overline{X} - \mu) + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} E\,(\overline{X} - \mu)^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\sigma^2 - 2n\left[(\overline{X}-\mu)^2 + nE\ (\overline{X}-\mu)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\sigma^2 - 2n\ V(\overline{X}) + nV(\overline{X}) \right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left\{ n\sigma^2 - nV(\overline{X}) \right\} = \frac{1}{n-1}(n\sigma^2 - \sigma^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$$

علماً أن :

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu) = n(\overline{X} - \mu)$$

$$2)\ \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)(\overline{X} - \mu) = n(\overline{X} - \mu)^2$$

و يكون أيضاً :

$$V(S^2) = \frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \frac{1}{n}\left[E(X-\mu)^4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4 \right]$$

حيث إن $\mu_4 = E(X-\mu)^4$ يمثل العزم المركزي حول الوسط من المرتبة الرابعة للمتغير العشوائي X.

و بهذا الشكل يتبين أن تباين العينة S^2 يمتلك عزماً من المرتبة الأولى حول نقطة المبدأ و هو σ^2، و عزماً مركزياً ذا مرتبة ثانية $V(S^2)$. و هذا يعني أن S^2 متغير عشوائي له توزيع احتمالي يتوقع قدره σ^2 و تباين مقداره $V(S^2)$. و سوف نتعرف فيما بعد على

التوزيع الاحتمالي للمتغير $\frac{(n-1)\, S^2}{\sigma}$ بعد أن نتعرف إلى مبرهنة تدعى "مبرهنة النهاية المركزية" .

- **مبرهنة (٥) :**

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين، و لكل منهما دالة مولدة $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ على الترتيب عندئذ:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t).\, M_Y(t)$$

<u>البرهان</u> : (استخدم مبرهنة سابقة) :

$$M_{X+Y}(t) = E\, e^{t(X+Y)} = E\, e^{tX} .\, e^{tY}$$
$$= E\, e^{tX} .\, Ee^{tY} = M_X(t).\, M_Y(t)$$

أي الدالة المولدة لمجموع متغيرين عشوائيين مستقلين يساوي إلى جداء الدوال المولدة لكل من X و Y.

❖ **تعميم:**

إذا كانت $X_1\, , X_2\, , ... , X_n$ مستقلة و لكل منها دالة مولدة عندئذ :

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = M_{X_1}(t).\, M_{x_2}(t). .... M_{x_n}(t)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

و إذا كانت المتغيرات $X_1\, , X_2\, , ... , X_n$ مستقلة و لكل منها التوزيع الاحتمالي نفسه بالوسيط نفسه (عينة عشوائية لـ X) عندئذ :

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \left[M_X(t) \right]^n$$

و إذا كان $\overline{X}$ الوسط الحسابي لمتغيرات العينة ، عندئذ :

$$M_{\overline{X}}(t) = \left[M_X(\frac{t}{n}) \right]^n$$

- **مثال (١٦) :**

نفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = e^{-x} , x > 0$$

و لتكن X_1 , X_2 , X_3 , X_4 عينة لـ X. و المطلوب :

١) عين الدالة المولدة للمتغير العشوائي X.

٢) عين الدالة المولدة للمتغير: $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

<u>الحل :</u>

"١":

$$M_X(t) = E\, e^{tX} = \int_0^\infty e^{tX}\, e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-(1-t)x}\, dx$$

$$= (1-t)^{-1} \;\; ; \;\; t < 1$$

و هي الدالة المولدة لـ X.

"٢":

$$M_Y(t) = \left[M_X\,(t) \right]^4 = \left[(1-t)^{-1} \right]^4 = (1-t)^{-4}$$

و هي الدالة المولدة للمتغير $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

❖ **التباين المشترك (التغاير بين متغيرين عشوائيين) و معامل الارتباط :**

- **التباين المشترك (التغاير بين متغيرين عشوائيين) :**

بفرض X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك بحيث التوقع لكل منهما موجود و التوقع لجدائهما موجود أي : EXY , EY , EX موجودة .

عندئذ بالتعريف التباين المشترك للمتغيرين X و Y و الذي نرمز له بالرمز $\operatorname{cov}(X,Y)$ و الذي يعرف بالعلاقة :

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= E\,(X - EX)(Y - EY)\\ &= E\,(XY - X\,EY - Y\,EX + EX\,EY)\\ &= E\,XY - EX\,EY - EY\,EX + EX\,EY\\ &= E\,XY - EX\,EY\end{aligned}$$

أي تعريفاً :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\,XY - EX\,EY$$

- **خواص التباين المشترك :**

بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما تباين مشترك $\operatorname{cov}(X,Y)$ عندئذ :

١) $\operatorname{cov}(X,X) = V(X) \quad , \quad \operatorname{cov}(Y,Y) = V(Y)$

٢) واضح من التعريف أن :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$$

٣) $\operatorname{cov}(a\,X, b\,Y) = a\,b\operatorname{cov}(X\,,Y)$

حيث إن $a\,,b$ أعداد حقيقية .

٤) $\operatorname{cov}(a\,X + c\,, b\,Y + d\,) = a\,b\operatorname{cov}(X\,,Y)$

حيث إن $a\,,b\,,c\,,d$ أعداد حقيقية . الأمر الذي يؤدي للقول بأن التباين المشترك لا يتعلق بالثوابت الحقيقية المنفردة .

يبرهن على صحة هذه الخواص اعتماداً على التعريف و نترك ذلك للقارئ .

- **مبرهنة (٦) :**

بفرض X و Y متغيران عشوائيان لكل منهما تباين و التباين المشترك لهما موجود عندئذ:

1) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)$

2) $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\operatorname{cov}(X,Y)$

البرهان :

سوف نبرهن على صحة (١) و بالأسلوب نفسه نبرهن على صحة (٢) :

لدينا حسب الصيغة المختزلة أن :

$$\begin{aligned}
V(X+Y) &= E(X+Y)^2 - (E(X+Y))^2 \\
&= E(X^2 + 2XY + Y^2) - (EX + EY)^2 \\
&= EX^2 + 2\,E\;XY + EY^2 - (EX)^2 - (EY)^2 - 2\,EX\;EY \\
&= EX^2 - (EX)^2 + EY^2 - (EX)^2 \quad (EX)^2\ XY - EX\;EY) \\
&= V(X) + V(Y) + 2\operatorname{cov}(X,Y)
\end{aligned}$$

و هو المطلوب .

- **نتيجة (١) :**

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين ، عندئذ :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = 0 \Rightarrow$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

- **نتيجة (٢) :**

من أجل $a\,,b$ ثابتين حقيقيين يكون :

$$V(a\,X + b\,Y) = a^2\,V(X) + b^2 V(Y) + 2\,ab\operatorname{cov}(X,Y)$$

و إذا كان X و Y مستقلين فإن :

$$V(a\,X + b\,Y) = a^2\,V(X) + b^2 V(Y) \;\; ; \;\; \operatorname{cov}(X,Y) = 0$$

- **مثال (١٧) :**

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك :

$$P(x,y) = a \quad ; \quad \begin{matrix} x = 1,2,3 \\ y = 1,2,3 \end{matrix}$$

و المطلوب :

١) عيّن قيمة الثابت a .

٢) عيّن $\operatorname{cov}(X, Y)$.

٣) عيّن $\operatorname{cov}(3X, 2Y)$.

الحل:

١":

$$\sum_1^3 \sum_1^3 P(x, y) = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_1^3 \sum_1^3 a = 0 \ \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

٢": نلاحظ أن:

$$P_X(x) = \frac{1}{3} \quad , \quad P_Y(y) = \frac{1}{3}$$

أي إن X و Y مستقلان و بالتالي $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

٣":

$$\operatorname{cov}(3X, 2Y) = 6 \operatorname{cov}(X, Y) = 6(0) = 0$$

حيث X و Y مستقلان .

(٧-٤) بعض التوزيعات الاحتمالية المستخدمة :

سوف نركّز في هذه الفقرة على أهم التوزيعات الاحتمالية المنقطعة و المستمرة ذات الأهمية التطبيقية في الإحصاء ، و ذلك من خلال عرض لبعض التوزيعات الاحتمالية لمتغير منقطع و لمتغير مستمر، مع عرض لأهم خصائصها :

(١) التوزيعات الاحتمالية المنقطعة :

١"١: التوزيع المنتظم المنقطع Discrete Uniform Distribution :

أ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع المنتظم المنقطع إذا كان التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير معرّفاً بالشكل الآتي :

$$P_X(x) = \frac{1}{N} \quad ; \quad x = 1, 2, \dots, N$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

حيث N عدد صحيح موجب يمثل وسيط هذا التوزيع ، يستخدم هذا التوزيع و بشكل غير مباشر في تلك التجارب التي تتصف نتائجها بكونها ذات الفرصة نفسها في الوقوع (مثل تجربة إلقاء حجر نرد متوازن أو تجربة إلقاء قطعة نقد متوازنة أو سحب كرة من صندوق يحوي عدد منته من الكرات المتشابهة ...) .

و من الواضح أن أحد أفراد عائلة هذا التوزيع المنتظم المنقطع حيث N=6 هو :

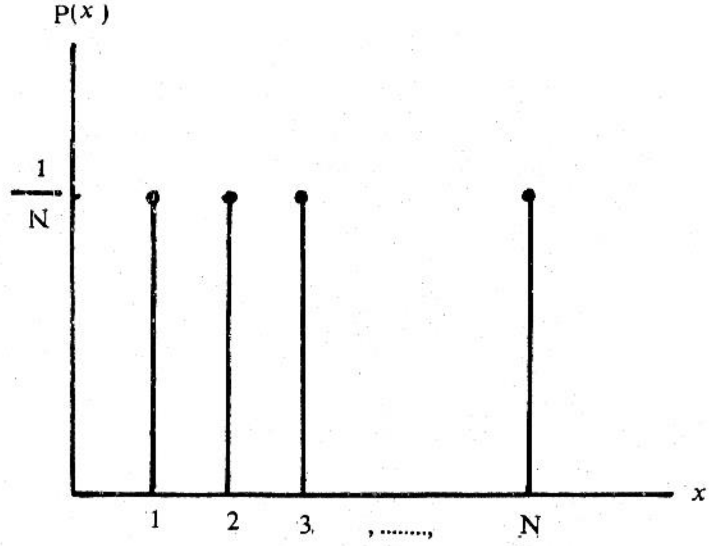
$$P_X(x) = \frac{1}{6} \quad ; \quad x = 1, 2, \dots, 6$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

إن تسمية هذا التوزيع بمنتظم منقطع ناجم عن كون قيمة $P_X(x)$ المقترنة بأي عنصر من عناصر فضاء الأحداث الابتدائية للمتغير X ثابتة و تساوي $\frac{1}{N}$ ، و كأن عناصر فضاء المتغير X هي حوادث لها الفرصة نفسها في الوقوع .

إن جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير المنتظم المنقطع بوسيط N سيكون له الشكل التالي :

X	١	٢	………..	N
$P_X(x)$	$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	………..	$\frac{1}{N}$

و إذا أردنا العرض البياني لهذا التوزيع فنجد أن له الشكل (٤-٩) :



الشكل (٤-٩)

و للسهولة سوف نرمز لهذا المتغير الذي يخضع لهذا التوزيع بالرمز $X \sim Du\,(N)$.

توضيح :

$$\sum_{x=1}^{N} P_X(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

أي مجموع الاحتمالات المقترنة بعناصر فضاء المتغير X يساوي ١ .

ب) الدالة التوزيعية لهذا المتغير :

من المعلوم أنّ الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منقطع X تمثل قيمة الاحتمال المجمعة لغاية قيمة معطاة للمتغير X ، أي :

$$F_X(x) = P\,(X \le x) = \sum_{k=1}^{x} P(k) = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N} \quad ; \quad x = 1, 2, \ldots\ldots, N$$

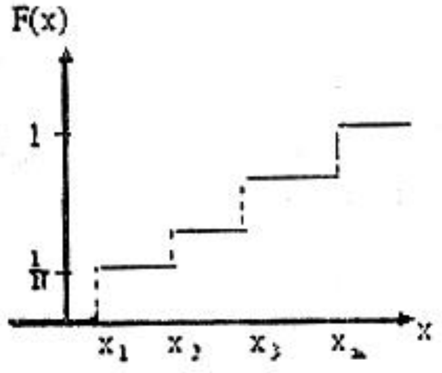
من الواضح أن :

$$F_X(0) = 0 \ , \ F_X(N) = 1$$

هذا و يمكن أن نعرض الدالة التوزيعية لـ X بالشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ \dfrac{1}{N} & ; \ 1 \le x < 2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \dfrac{N-1}{N} & ; \ N-1 \le x < N \\ 1 & ; \quad x \ge N \end{cases}$$

عندئذ يكون العرض البياني للدالة التوزيعية لهذا المتغير X كما في الشكل (٤-١٠) :



الشكل (٤-١٠)

جـ) التوقع و التباين: Expected and Variance :

<u>أولاً : التوقع :</u>

$$EX = \sum_{x=1}^{N} x \, P(x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{x}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x$$

و لكن : $\displaystyle\sum_{x=1}^{N} x = \frac{N(N+1)}{2}$

و بالتالي :

$$EX = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

ثانياً : التباين :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x^2 - \left(\frac{N+1}{2} \right)^2$$

و لكن :

$$\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

و بالتالي :

$$V(X) = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{1}{N} \cdot \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{N^2 - 1}{12}$$

د) الدالة المولدة للعزوم حول نقطة الأصل :

$$M_X(t) = E\, e^{tX} = \sum_{x=1}^{N} \frac{e^{tX}}{N} = \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} q^x \;\; ; \;\; q = e^t$$

$$= \frac{1}{N} (q + q^2 + ... + q^N) = \frac{q}{N} (1 + q + q^2 + ... + q^{N-1})$$

$$= \frac{q}{N} \cdot \frac{1 - q^N}{1 - q} = \frac{e^t (1 - e^{Nt})}{N(1 - e^t)} \quad , \quad t < 0$$

(المجموع داخل القوسين يمثل مجموع حدود متسلسلة هندسية نهائية أساسها مساوٍ إلى q)

- **مثال (١٨) :**

بفرض أن $X \sim Du(9)$ عندئذ :

$$1)\ P_X(x) = \frac{1}{9} \quad ; \quad x = 1, 2, \dots\dots\dots, 9$$

$$2)\ F_X(x) = \frac{x}{9} \quad ; \quad x = 1, 2, \dots\dots\dots, 9$$

$$3)\ EX = \frac{9+1}{2} = 5$$

$$4)\ V(X) = \frac{81-1}{12} = \frac{80}{12} = \frac{20}{3}$$

$$5)\ M_X(t) = \frac{e^t(1-e^t)}{N(1-e^t)} \ ;\ t < 0$$

$$6)\ P(X \le 6) = F(6) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$7)\ P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \le 3)$$

$$= 1 - F_X(3) = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

- **مثال (١٩) :**

بفرض أن $X \sim Du(7)$ عندئذ :

١) أوجد التوقع و التباين للمتغير $Y = 2X + 3$.

٢) أوجد $P(X > EX)$.

٣) أوجد $P(EX - \sigma_X \le X \le EX + \sigma_X)$.

الحل :

١": لدينا :

$$EX = \frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

$$V(X) = \frac{N^2-1}{12} = \frac{49-1}{12} = \frac{48}{12} = 4$$

$$E(Y) = E(2X+3) = 2\,EX + 3 = 2(4) + 3 = 11$$

$$V(Y) = 4\,V(X) = (4)\,(4) = 16$$

٢":

$$P(X > EX) = 1 - P(X \le EX)$$
$$= 1 - P(X \le 4)$$
$$= 1 - F_X(4) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

٣":

$$P(EX - \sigma_X \le X \le EX + \sigma_X) = P(2 \le X \le 6)$$
$$= P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{5}{7}$$

٢") توزيع برنولي : Bernoulli Distribution :

قبل إعطاء تعريف "التوزيع البرنولي" لا بد أن نعرّف التجربة البرنولية ، فعلى سبيل المثال إذا تأملنا تجربة فحص سلعة واحدة لبيان مدى مطابقتها للمواصفات المحددة من قبل الجهة المنتجة . فواضح أن نتيجة الفحص هي إماّ السلعة مطابقة للمواصفات أو غير مطابقة للمواصفات، أي إننا حيال تجربة فضاء الأحداث الابتدائية لها مؤلف من نتيجتين: واحدة نجاح و نرمز لها بالرمز S ، و الثانية فشل و نرمز لها بالرمز f بحيث:

$$\Omega = \{s, f\}$$

$P(S) = p$ و $P(f) = 1 - p$ الذي نرمز له بـ q .

$$0 < þ < 1 \quad , \quad p + q = 1$$

و قد كان يعقوب برنولي أول من قام بدراسة هذا النوع من التجارب لذلك سميت بالتجارب البرنولية .

إذا كان X يمثل عدد النجاحات في هذه التجربة عندئذ المتغير X يأخذ قيمتين هما (٠ و ١) .

أ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X أنه يخضع لتوزيع برنولي إذا كان توزيعه الاحتمالي معرّفاً بالشكل :

$$\begin{aligned} P_X(x) &= P^x (1-p)^{1-x} \; ; x = 0,1 \\ &= 0 \qquad ; \text{ خلاف ذلك} \end{aligned}$$

حيث P وسيط هذا التوزيع و بالرموز فإن : $X \sim Ber\,(þ)$.

X	٠	١
$P_X(x)$	$q = 1-p$	p

و يمكن أن يعطى التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي برنولي وسيطه p بجدول يدعى جدول التوزيع الاحتمالي له و ذلك على الشكل :

حيث إن : $0 < p < 1$

و هنا واضح إذا كانت $p = q$ فإن التوزيع الاحتمالي البرنولي في هذه الحالة يمثل توزيعاً منقطعاً منتظماً معرّفاً بالشكل التالي :

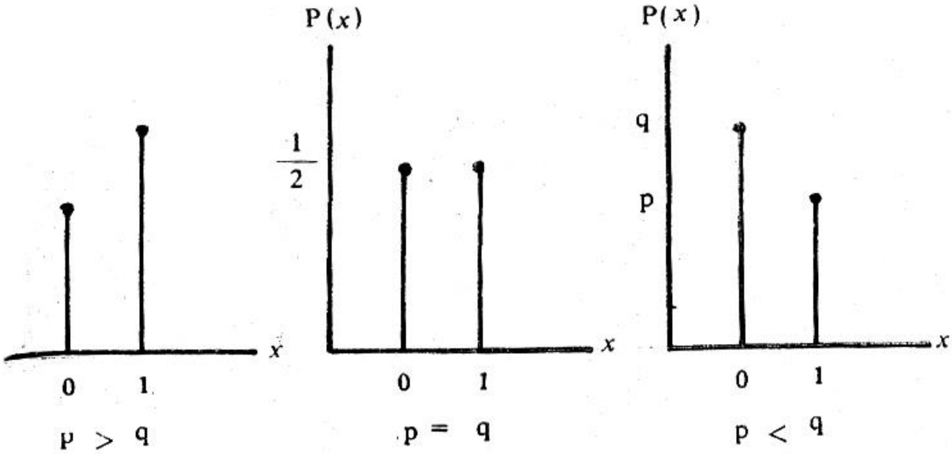
$$P_X(x) = \frac{1}{2} \;,\quad x = 0,1$$

- **ملاحظة (١) :**

المتغير العشوائي البرنولي يستخدم في التجارب التي تنتج عنها نتيجتان فقط مثل فعالية دواء معين ضد مرض معين أو عائلة عندها طفل واحد .....

○ ملاحظة (٢) :

إن العرض البياني لهذا التوزيع موضح بالشكل (٤-١١) :

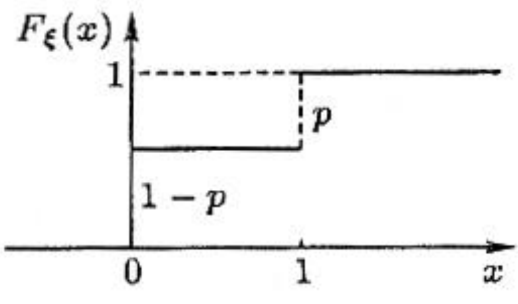


الشكل (٤-١١)

ب) الدالة التوزيعية :

$$F_X(x) = P(X \leq) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ q = 1 - p & ; \quad p \quad x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

و يمكن تمثيل دالة التوزيع له بيانياً بالشكل (٤-١٢) :



الشكل (٤-١٢)

جـ) التوقع و التباين لمتغير عشوائي برنولي :

<u>أولاً : التوقع :</u>

$$EX = \sum_{x}^{N} x\, P(x) = \sum_{x=0}^{1} x\, P^{x}(1-p)^{1-x} \qquad p$$
$$= (0)\,(q) + (1)\,(p) = P$$

و هذا يعني أن التوقع الرياضي لمتغير عشوائي برنولي يساوي وسيطه p (احتمال حدث النجاح في تجربة برنولية) .

<u>ثانياً : التباين :</u>

$$V(X) = EX^{2} - (EX)^{2}$$
$$= \sum_{x=0}^{1} x^{2}\, p^{x}(1-p)^{1-x} - p^{2} = p - p^{2} = p\,(1-q) = p\,.\,q$$

أي إن تباين المتغير العشوائي البرنولي يمثل جداء احتمال حدث النجاح p مضروب باحتمال الفشل في تجربة بونولية .

و يلاحظ أن : $V(X) = q.EX$ عندئذ يكون : $V(X) < EX$

د) الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_{X}(t) = E\, e^{tX} = \sum_{x=0}^{1} e^{tX} p^{x}(1-p)^{1-x} = (q + p\, e^{t}) \;;\; t \in R$$

و يلاحظ من هذه الدالة أن :

$$M'_{X}(0) = M''_{X}(0) = \dots\dots\dots = M_{X}^{(r)}(0) = p$$

أي إن :

$$EX^{r} = p \;,\; r = 1, 2, 3, \dots\dots$$

▪ **مثال (٢٠) :**

بفرض أن $X \sim Ber\ (0.4)$ عندئذ :

$$1)\ \ P_X(x) = \text{þ}^x (1-\text{þ})^{1-x} = (0.4)^x (0.6)^{1-x}\ ,\ \ x = 0\,,1$$

$$2)\ F_X(x) = \begin{cases} 0 & ;\ \ x < 0 \\ 0.6 & ;\ \ 0 \le x < 1 \\ 1 & ;\ \ x \ge 1 \end{cases}$$

$$3)\ EX = \text{þ} = 0.4\ \ ;\ \ V(X) = \text{þ}\,.\,q = (0.4)\,(0.6) = 0.24$$

$$4)\ M_X(t) = (q + \text{þ}\ e^t) = (0.6 + (0.4)\ \ e^t)$$

$$5)\ E\ X^r = \text{þ} = 0.4\ \ \ ,\ \ \ \mathrm{r} = 1\,,2\,,.....$$

٣) التوزيع الثنائي (الحداني) : Binomial Distribution :

مكتشف هذا التوزيع هو العالم برنولي عام ١٧٠٥ ، و تم نشر إنجازه بعد وفاته بثماني سنوات أي عام ١٧١٣، حيث إنّ فترة حياته هي (١٦٤٥-١٧٠٥) . و هذا التوزيع أكثر عمومية لتوزيع برنولي وذلك لأن هذا النوع من المتغيرات مستقل لتجارب برنولي باحتمال حدث نجاح p ، و في هذه الحالة يعبّر المتغير العشوائي X عن عدد النجاحات التي سنحصل عليها خلال تكرار التجربة البرنولية n مرة .

أي إن احتمال الحصول على x نجاح و $n-x$ فشل هو :

$$P\,(ss\ \ fs\ \ fff\ \ ....sf\,) = \underbrace{\text{þ}.\text{þ}.\ .....\text{þ}}_{x\ \ \text{مرة}}\,.\,\underbrace{qqq\ ......\ q}_{n-x\ \ \text{مرة}} = \text{þ}^x.q^{n-x}$$

وبما أن عدد الطرق التي يقع فيها حدث الحصول على x نجاح و $n-x$ فشل هو: C_x^n حيث $x \le n$ ، عندئذ :

$$P_X(x) = C_x^n\ \text{þ}^x\ q^{n-x}\ \ ;\ \ x = 0, 1, 2, ...\,, n$$

و منه يمكن إعطاء التعريف لمتغير عشوائي ثنائي بالشكل:

أ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع الثنائي أو الحداني إذا كان توزيعه الاحتمالي يأخذ الشكل :

$$P_X(x) = C_x^n \, þ^x \, q^{n-x} \;\; ; \;\; x = 0, 1, 2, \ldots, n$$
$$= 0 \;\; ; \;\; \text{خلاف ذلك}$$

حيث إن p يمثل الوسيط الأول له ، n يمثل الوسيط الثاني (n صحيح موجب يمثل عدد محاولات التكرار المستقلة ، þ يمثّل احتمال حدث النجاح في تجربة برنولية $0 < p < 1$ ، و يرمز له بالرمز $X \sim b(n,p)$.

كما نلاحظ مباشرة أن :

$$\sum_{x=0}^{n} P_X(x) = \sum_{x=0}^{n} C_x^n \, þ^x \, q^{n-x} = (þ + q)^n = 1$$

و هذا تأكيد على أن $P_X(x)$ يمثل توزيعاً احتمالياً للمتغير العشوائي الثنائي .

- **ملاحظة (١) :**

يعتبر توزيع ثنائي الحدين أحد التوزيعات الاحتمالية المنقطعة ذا أهمية تطبيقية كبيرة في الحياة العملية وخصوصاً في موضوع الرقابة على جودة الإنتاج . و جاءت هذه التسمية لهذا التوزيع بسبب أننا في كل محاولة نتخذ قراراً ذا حدّين و من الشكل "نجاح" أو "فشل"، "جيد" أو " غير جيد"، "مطابق" أو " غير مطابق" وغيرها من الألفاظ المماثلة.

- **ملاحظة (٢) :**

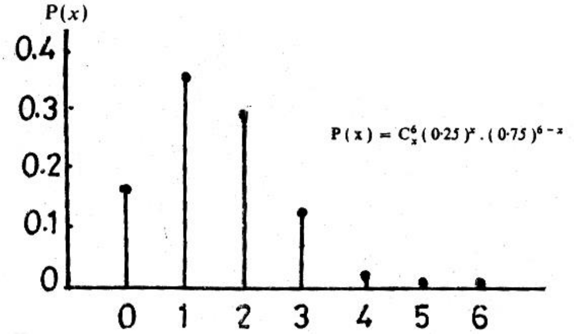
إن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الثنائي من أجل $p = \frac{1}{2}$ و $n = 6$ سيكون موضح بالجدول الآتي :

X	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
$P_X(x)$	$(\frac{1}{2})^6$	$C_1^6\,(\frac{1}{2})^6$	$C_2^6\,(\frac{1}{2})^6$	$C_3^6\,(\frac{1}{2})^6$	$C_4^6\,(\frac{1}{2})^6$	$C_5^6\,(\frac{1}{2})^6$	$C_6^6\,(\frac{1}{2})^6$

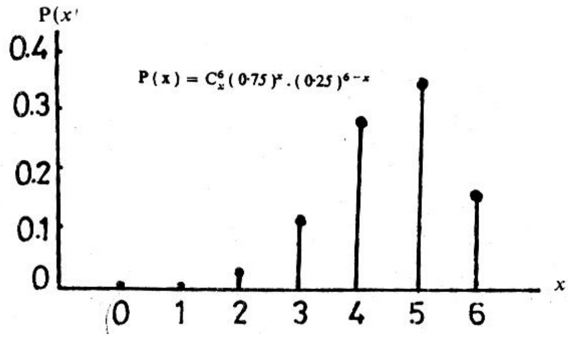
○ **ملاحظة (٣):**

عندما تُخصص قيم لكل من p و n نقصد تحديد أحد أفراد عائلة التوزيع الثنائي ، والأشكال الآتية (٤-١٣) و (٤-١٤) و (٤-١٥) توضح مخطط التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الثنائي في ثلاث حالات وهي :

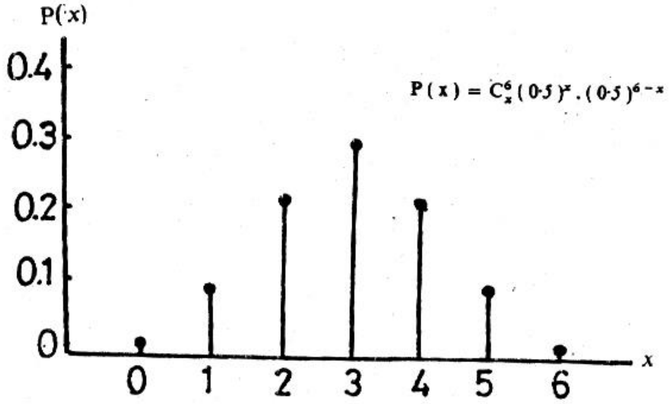
$p = 0.25$ و $n = 6$ و $p = 0.75$ و $n = 6$ وأخيراً $p = 0.5$ و $n = 6$.



الشكل (٤-١٣)



الشكل (٤-١٤)



الشكل (٤-١٥)

- **ملاحظة (٤):**

١) إذا كانت $p < q$ فذلك يعني أن التوزيع ذو التواء موجب.

٢) إذا كانت $p > q$ فذلك يعني أن التوزيع ذو التواء سالب.

٣) إذا كانت $p = q$ فذلك يعني أن التوزيع متماثل.

- **ملاحظة (٥) :**

عندما تكون p قريبة من الصفر مع ثبات قيمة n فذلك يعني أن q تكون قريبة من الواحد ، و هذا يعني زيادة شدة الالتواء الموجب . و لكن عندما þ تكون قريبة من الواحد عند ثبات قيمة n فذلك يعني أن q تكون قريبة من الصفر و هذا يعني شدة الالتواء السالب .

ب) الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي ثنائي بوسيطين p و n .

في الحالة العامة الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي ثنائي بوسيطين الأول p والثاني n هي:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} C_k^n\ þ^k\ q^{n-k}$$

و من أجل الحالة الخاصة التي يكون فيها $p = \frac{1}{2}$ و $n = 6$، فإن الدالة التوزيعية تكون على الشكل الآتي :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ q^6 = (\frac{1}{2})^6 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ C_0^6 (\frac{1}{2})^6 + C_1^6 (\frac{1}{2})^6 & ; \quad 1 \le x < 2 \\ C_0^6 (\frac{1}{2})^6 + C_1^6 (\frac{1}{2})^6 + C_2^6 (\frac{1}{2})^6 & ; \quad 2 \le x < 3 \\ C_0^6 (\frac{1}{2})^6 + C_1^6 (\frac{1}{2})^6 + C_2^6 (\frac{1}{2})^6 + C_3^6 (\frac{1}{2})^6 & ; \quad 3 \le x < 4 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 & ; \quad x \ge 6 \end{cases}$$

$$(\frac{1}{2})^6 = 0.015625$$

○ **ملاحظة :**

إن الصيغة التي تعطي الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي ثنائي بوسيطين الأول p و الثاني n هي صيغة تعطي قيمة الاحتمال المتجمع حتى قيمة معينة من قيم X و هي x.

بالإضافة إلى ذلك يلاحظ وجود صعوبة في التعامل مع هذه الدالة تطبيقياً و خاصة في الحالة التي تكون فيها n كبيرة .

فعلى سبيل المثال إذا طلب منّاً حساب $F_X(30)$ مع العلم أن $p = 0.9$ و $n = 60$ فإننا بحاجة لحساب قيمة $P_X(x)$ عند القيم : $x = 0, 1, 2, ..., 30$ ، و من ثم جمع هذه الاحتمالات و التي عددها (٣١) .

و للتخلص من هذه الصعوبة تم صياغة برنامج على الحاسب الالكتروني من أجل حساب الاحتمال المتجمّع لأية قيمة من قيم الوسيط n و يوجد جداول خاصة بهذا التوزيع تبين قيمة الاحتمال المتجمع لغاية قيمة من قيم المتغير العشوائي الثنائي X ، و عند قيم مختلفة لقيم الوسطاء p و n.

بالإضافة إلى ما تقدّم من وسائل لحساب الاحتمال يمكن أن نلجأ إلى استخدام توزيع آخر كتقريب لهذا التوزيع و سوف نتعرّض إلى معالجة هذه التقاربات في فقرة لاحقة .

جـ) التوقع و التباين لـ X :

أولاً : التوقع :

$$EX = \sum_{x=0}^{n} x\, C_x^n\, þ^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n\,!}{(x-1)\,(n-x)\,!}\ {}^{x}\, q^{n-x} = n.þ \sum_{x=0}^{n} \frac{(n-1)\ !}{(x-1)\,(n-x)\,!}\, þ^{\,x-1}\, q^{n-x}$$

عندئذ من أجل إيجاد المجموع الأخير نفرض أن $x-1 = y$ و $n-1 = k$ فنجد :

$$EX = n\,.þ \sum_{y=0}^{k} \frac{k\ !}{y!\,(k-y)\,!}\, þ^y\, q^{k-y}$$

$$= n\,.\,þ\,(þ+q)^k = n\,.þ \quad ; \quad Y \sim b\,(k, þ)$$

حيث : $p + q = 1$.

ثانياً: التباين:

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = EX\,(X-1) + EX$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\ (x-1)\ \frac{n\,!}{x\,!\,(n-x)\,!}\, þ^x\, q^{n-x} + n.p$$

$$= n\,(n-1)\,þ^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)\,!}{(x-2)\,!\,(n-x)\,!}\, þ^{\,x-2}\, q^{n-x} + n\,.\,þ$$

الآن بفرض أن $x-2 = y$ و $n-2 = r$ فإن :

$$EX^2 = n\,(n-1)\ p^2 \sum_{y=0}^{r} \frac{r\,!}{y\,!\,(r-y)\,!}\, þ^y\, q^{r-y} + n.þ$$

ومنه

$$= n\,(n-1)\,þ^2 + n.þ = n^2.þ^2 - n.þ^2 + n.þ$$

$$= n.p\,(1-þ) = n.þ.q$$

حيث : $1 - p = q$.

و يتبّين من صيغة التباين لـ X أن :

$$V(X) = EX.q$$

الأمر الذي يؤدي للقول بأن التباين لـ X أقل من التوقع الرياضي له حيث : $0 < q < 1$.

د) الدالة المولّدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E\,e^{tX} = \sum_{x=0}^{n} e^{tX} C_x^n\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_x^n\, (p\,e^t)^x\, q^{n-x}$$

$$= (q + p\,e^t)^n$$

- **مثال (٢١) :**

يرمي نعيم على هدف معين ببندقية بحيث يكون احتمال إصابته للهدف في كل مرة هو 0.8، عندئذ احسب احتمال :

١) أن يصيب الهدف مرتين إذا أطلق على الهدف ٨ طلقات نارية متتالية ؟

٢) أن يصيب الهدف ٣ مرات على الأقل عندما يطلق ٨ طلقات نارية متتالية ؟

الحل :

نفرض أن X المتغير العشوائي الذي يدل على عدد مرات إصابة الهدف ، عندئذ يخضع X للتوزيع الثنائي بوسيطين $p = 0.8$ و $n = 8$، أي : $q = 0.2$ و بالتالي يكون :

$$P_x(x) = C_x^8 (0.8)^x (0.8)^{8-x} \;\; ; \;\; x = 0,1,2, \dots \dots ,8$$

:"١

$$P(X = 2) = C_2^8 (0.8)^2\, (0.2)^6 = 0.0011468$$

و هو احتمال إصابة الهدف مرتين من خلال إطلاق ٨ طلقات متتالية .

:"٢

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$
$$= 1 - P(X \leq 2)$$
$$= 1 - \{P(0) + P(1) + P(2)\} \quad \text{بالحساب}$$
$$P_X(0) = C_0^8 (0.8)^0 (0.2)^8 = (0.2)^8 = 0.00000256$$
$$P_X(1) = C_1^8 (0.8)^1 (0.2)^7 = 0.00008192$$
$$P_X(2) = C_2^8 (0.8)^2 (0.2)^6 = 0.00114688 \Rightarrow$$
$$P(X \geq 3) = 1 - (0.00000256 + 0.0000819\,2 + 0.00114688)$$
$$= 1 - 0.001229056 = 0.9987$$

و هو احتمال إصابة الهدف ٣ مرات على الأقل .

- **مثال (٢١) :**

عائلة عندها ٤ أطفال ، و المطلوب :

١) ما احتمال أن يكون في العائلة صبي واحد على الأقل ؟

٢) ما احتمال أن يكون في العائلة ٤ صبيان تماماً ؟

٣) افرض أن لديك (١٦٠٠ عائلة) يقطنون في قرية سياحية في كل منها ٤ أطفال عندئذ ما العدد المتوقع للعائلات التي فيه ا:

a) صبي واحد على الأقل ؟

b) أربعة صبيان فقط ؟

الحل :

بفرض أن X المتغير العشوائي الدال على عدد الذكور في العائلة عندئذ X يخضع للتوزيع النهائي بوسيطين الأول $þ = \frac{1}{2}$ و $n = 4$ أي :

$$1)\ P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P_X(0)$$
$$= 1 - C_0^4 (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{2})^4 = 1 - (\frac{1}{2})^4 = 0.9375$$

و هو احتمال أن يكون في العائلة صبي واحد على الأقل .

$$2) P(X = 4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625$$

و هو احتمال أن يكون في العائلة ٤ صبيان تماماً .

3)

$$a)\ EX = n.p = 1600 . (0.9375) = 1500$$

و هذا يعني أن هناك ١٥٠٠ عائلة في المتوسط يوجد فيها صبي على الأقل .

$$b)\ EX = n.p = 1600 . (0.0625) = 100$$

و هذا يعني أن هناك ١٠٠ عائلة في المتوسط يوجد فيها ٤ صبيان .

- **مثال (٢٢) :**

إذا كان $X \sim b(7, \frac{1}{3})$ فإن :

$$1)\ P_X(x) = C_x^7 (\frac{1}{3})^x (\frac{2}{3})^{7-x} \ ; x = 0, 1, 2, \ ....\ , 7$$

$$2)\ F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} C_k^7 (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{7-k}$$

و في الحالة التي يكون فيها $x = 3$ نجد أنّ :

$$F_X(3) = \sum_{k=0}^{3} C_k^7 (\frac{1}{3})^k (\frac{2}{3})^{7-k}$$

$$3)\ EX = n.p = 7(\frac{1}{3}) = \frac{7}{3}$$

$$4)\ V(X) = n.p.q = 7(\frac{1}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{14}{9}$$

$$5)\ M_X(t) = (q + p\,e^t) = (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^t)^7$$

$$6)\ p(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - \big(P(0) + P(1)\big)$$

$$= 1 - \left((\frac{2}{3})^7 + 7(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^6 \right) = 0.649$$

$$7)\ P(X \ge 1) = 1 - P(0) = 1 - (\frac{2}{3})^7 = 0.999$$

- **مثال (٢٣) :**

تفحص أجهزة الحاسوب قبل عدّها صالحة للبيع ، فإذا كانت نسبة نجاح هذه الأجهزة في الفحص 0.95 ، وأرسل ٣٠ جهازاً للفحص ، فكم جهازاً تتوقع أن تكون صالحة ؟

<u>الحل :</u>

بفرض أن X متغير عشوائي يدل على عدد الأجهزة الصالحة ، عندئذ X يخضع للتوزيع الثنائي بوسيطين الأول $p = 0.95$ و الثاني $n = 30$ عندئذ :

$$EX = n.þ = (30)\,(0,95) \approx 28$$

و هو عدد الأجهزة الصالحة .

٤) التوزيع الهندسي : Geometric Distribution :

أ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع الهندسي إذا كان توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

$$P_X(x) = þ\, q^x \quad ; \quad x = 0, 1, 2, ..., \; þ + q = 1$$
$$= 0 \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}$$

حيث إن : $0 < p < 1$ و هو الوسيط لهذا التوزيع ، و بالرمز فإن : $X \sim G(þ)$

و لهذا التوزيع أهمية كبيرة في التطبيقات الاحصائية و خصوصاً في موضوع الاحصاء السكاني لدى دراسة معدلات نمو السكان و معدلات الولادات و الوفيات ، و المتغير العشوائي الذي يخضع للتوزيع الهندسي يعبّر عن عدد التجارب التي يجب تنفيذها حتى نحصل على أول نجاح ، و ذلك في التجارب العشوائية التي هي حصيلة r تكرار مستقل لتجارب برنولية باحتمال p .

كما أنه يستخدم بكثرة في مراقبة الجودة ، حيث نرفض أي طلبية عند ظهور أول عيب (سيارات) .

و يلاحظ هنا أنّ :

$$\sum_{x=0}^{n} þ\, q^x = \frac{þ}{þ} = 1 \quad ; \quad 0 < q < 1$$

حيث إن المجموع $\sum_{x=0}^{n} q^x$ يمثّل متسلسلة هندسية أساسها p .

ب) الدالة التوزيعية للمتغير الهندسي :

الدالة التوزيعية لهذا المتغير بوسيط þ تعطى من خلال العلاقة :

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \le x) &= \sum_{k=0}^{x} \text{þ}\, q^k \\ &= p\sum_{k=0}^{x} q^k = \text{þ}\, \frac{1-q^{x+1}}{1-q} \\ &= 1-q^{x+1} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

علماً أنّ :

$$\sum_{k=0}^{x} q^k = \frac{1-q^{x+1}}{1-q}$$

جـ) التوقع و التباين :

أولاً : التوقع :

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x=0}^{\infty} x\, \text{þ}\, q^x = \text{þ} \sum_{x=0}^{\infty} x \ q^x \\ &= \text{þ}\, q \sum_{x=0}^{\infty} x \ q^{x-1} = \text{þ}\, q \left(\sum_{x=0}^{\infty} q^x \right)'_q \\ &= \text{þ} \,.\, q \left(\frac{1}{1-q} \right)'_q = \frac{\text{þ} \,.\, q}{\text{þ}^2} = \frac{q}{\text{þ}} \end{aligned}$$

أي إن التوقع الهندسي بوسيط p يساوي حاصل قسمة احتمال حدث الفشل q على احتمال حدث النجاح pفي تجربة برنولية .

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$ **ثانياً التباين :**

لنوجد الآن EX^2 :

$$EX^2 = EX(X-1) + EX$$

$$= þ \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)q^x + \frac{q}{þ}$$

$$= þ q^2 \sum_{x=0}^{\infty} (q^x)''_q + \frac{q}{þ}$$

$$= þ q^2 \left(\frac{1}{1-q}\right)''_q + \frac{q}{þ}$$

$$= þ q^2 \left(\frac{2}{q^3}\right) + \frac{q}{þ} = \frac{2 þ q^2}{q^3} + \frac{q}{þ} = \frac{2 þ q^2}{q^3} + \frac{q}{þ} = \frac{2 þ q^2 + þ^2 q}{q^3}$$

و منه :

$$V(X) = \frac{2 þ q^2 + þ^2 q}{q^3} - \frac{q^2}{þ^2} = \frac{2 þ q^2 + þ^2 q - þ q^2}{q^3}$$

$$= \frac{þ q^2 + þ^2 q}{q^3} = \frac{þ q (q+b)}{q^3} = \frac{q}{þ^2}$$

حـ) الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E e^{tX} = þ \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} q^x$$

$$= þ \sum_{x=0}^{\infty} (e^t q)^x$$

$$= \frac{þ}{1 - qe^t} \; ; \quad qe^t < 1$$

▪ **مثال (٢٤) :**

بفرض أن X متغير عشوائي هندسي وسيطه $p = \frac{1}{4}$ ، عندئذ :

$$1)\ P_X(x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^x \qquad ;\ x = 0, 1, 2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2)\ F_X(x) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \qquad ;\ x = 0, 1, 2, \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$3)\ EX = \frac{q}{\text{þ}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

$$4)\ V(X) = \frac{q}{\text{þ}^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = 12$$

$$5)\ M_X(t) = \frac{\text{þ}}{1 - q\,e^t} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{3}{4}\,e^t}$$

$$6)\ P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2)$$

$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4218$$

$$7)\ P(4 < X \le 6) = F_X(6) - F_X(4)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^7\right) - \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5\right)$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{3}{4}\right)^7 = 0.1038$$

▪ **مثال (٢٥) :**

صندوق يحوي n كرة متماثلة، كتب على إحداها عبارة رابح ، فلو قام شخص ما بعمليات سحب مع الإعادة لكرة من هذا الصندوق وبحيث يتوقف عن السحب لدى حصوله على الكرة الرابحة، فما احتمال أن يتوقف عن السحب بعد الانتهاء من السحب ذات الرقم $\frac{n}{4}$ ؟

الحل:

نلاحظ أن التجارب التي يقوم بها الشخص هي تجارب برنولية مستقلة بعضها عن بعض الآخر باحتمال قدره

$p = \frac{1}{n}$. عندئذ لو فرضنا X متغيراً عشوائياً يدل على عدد التجارب التي يمكن تنفيذها حتى يحصل عليها عبارة رابح ، أي هذا المتغير يخضع للتوزيع الهندسي بوسيط $p = \frac{1}{n}$ ، و بالتالي الاحتمال المطلوب هو :

$$P_X(\frac{n}{4}) = þ \, . \, q^{\frac{n}{4}-1} = (\frac{1}{n})\,(\frac{n-1}{n})^{\frac{n}{4}-1}$$

و على سبيل المثال لو كانت $n = 40$ لوجدنا أن احتمال أن يحصل على الكرة الرابحة بعد ١٠ عمليات سحب هو :

$$P\,(X = 10) = (\frac{1}{40})\,(\frac{40-1}{40})^{9} = (\frac{1}{40})\,(\frac{39}{40})^{9} = 0.0199$$

علماً أنه يمكن أن نكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الهندسي بالشكل :

$$P_X(x) = þ \, . \, q^{x-1} \;\; ; \;\; x = 1, 2, ...$$

لكن إذا كان $n = 100$ فإن احتمال أن يحصل الشخص على الكرة الرابحة بعد ٢٥ عملية سحب هو :

$$P\,(X = 25) = (\frac{1}{100})\,(\frac{99}{100})^{24} = 0.007856$$

أي إنّ قيمة الاحتمال قد صغرت . و ذلك بزيادة عدد الكرات الموجودة بالصندوق .

٥) التوزيع فوق الهندسي :

إن التجربة فوق الهندسية هي تلك التجربة التي تحقق الشرطين التاليين :

١") يتم اختيار عينة عشوائية حجمها n من مجتمع فيه N من العناصر ويكون سحب العينة بدون إرجاع .

٢") إن المجتمع المذكور فيه N_1 من العناصر من نوع معين نسميها "نجاحاً" و باقي العناصر N_2 من نوع آخر نسميها "فشلاً" ، أي : $N = N_1 + N_2$.

فإذا فرضنا أن عدد النجاحات التي نحصل عليها في التجربة فوق الهندسية هو X ، عندئذ ندعو X متغيراً عشوائياً هندسياً . و احتمال الحصول على x من النجاحات في هذه الحالة يعبّر عنه بالرمز $H\,(N, M, n)$ علماً أن هذا الاحتمال يعتمد على حجم المجتمع N وحجم العينة و عدد النجاحات في المجتمع N_1 و عدد مرات الفشل N_2 .

آ) تعريف التوزيع فوق الهندسي :

بفرض لدينا مجتمع إحصائي حجمه N يحتوي على M عنصراً نسميها "نجاحاً" ، و $N - M$ عنصر نسميها "فشلاً". و اخترنا عينة حجمها n دون إرجاع من هذا المجتمع و فرضنا أن عدد النجاحات في هذه العينة التي حجمها n هو المتغير X ، فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي . و يعطى من خلال العلاقة التالية :

$$P\,(x, N, M, n) = H\,(N, M, n) = \frac{C_x^M \; C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}\;;\;\; x = 0, 1, 2, ..., n$$

حيث إن N, M, n أعداد طبيعية و $1 \le n \le N$ و $1 \le M \le N$ مع أن :

$$Max\,\{\,0\,,\, n - N + M\} \le x \le \min\,\{\,n, M\,\}$$

و لا بد أن ننّوه إن هذا التوزيع يستخدم في اختبارات الجودة و في تجارب السحب دون إعادة .

وتوضح الأشكال (٤-١٦) و (٤-١٧) و (٤-١٨) مخطط التوزيع فوق الهندسي في الحالة التي تكون فيها :

أي $X \sim H(10, 5, 7)$: أي $N = 10\,, M = 5\,, n = 7$:

$$Max\{0,2\} \leq x \leq min\{5,7\}$$

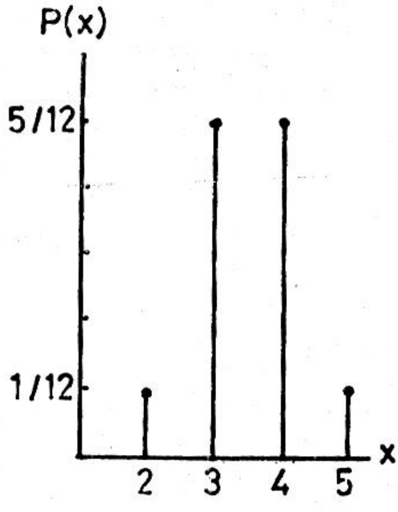
وفي حالة $X \sim H(10,5,3)$ أي :

$$Max\{0,-2\} \leq x \leq min\{3,5\}$$

أخيراً في حالة $X \sim H(10,5,5)$ أي:

$$Max\{0,0\} \leq x \leq min\{5,5\}$$

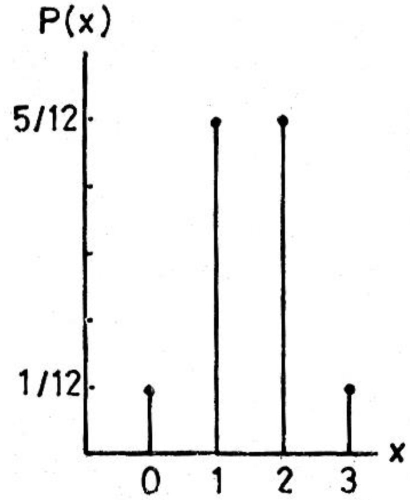
عندئذ :



مخطط $H(10,5,7)$

$max(0,2) \leq x \leq min(5,7)$

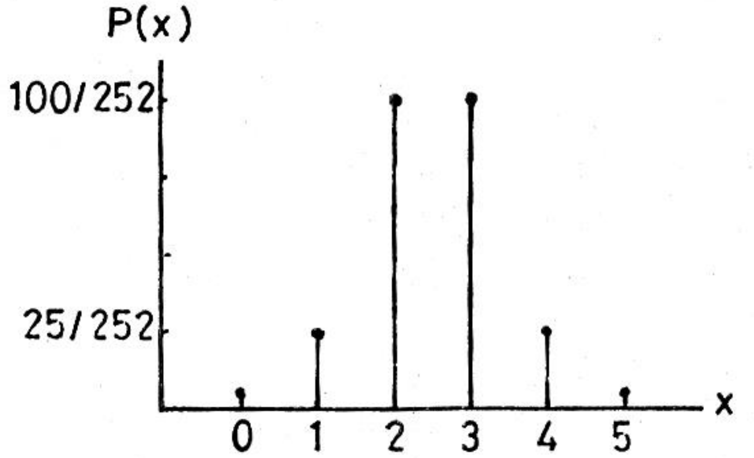
الشكل (٤-١٦)



مخطط $H(10,5,3)$

$max(0,-2) \leq x \leq min(3,5)$

الشكل (٤-١٧)



مخطط H (10, 5, 5)

max (0 , 0) ≤ x ≤ min (5 , 5)

الشكل (٤-١٨)

هذا و يمكن التأكد من أن مجموع الاحتمالات المقترنة بعناصر فضاء المتغير X مساوي للواحد ، أي :

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{C_x^M \; C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N} = \frac{1}{C_n^N} \sum_{x=0}^{n} C_x^M \; C_{n-x}^{N-M}$$

و لكن $C_x^N = \sum_{x=0}^{n} C_x^M \; C_{n-x}^{N-M}$ لأن :

$\sum_{k=0}^{n} C_k^a \; C_{n-k}^b = C_n^{a+b}$ و بناء على ذلك يكون :

$$\sum_{x=0}^{n} P\,(x, N, M, n) = \frac{C_n^N}{C_n^N} = 1$$

ب) الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي فوق الهندسي :

إذا كان $X \sim H(N, M, n)$ فإن :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k \le x} P(k, N, M, n)$$

$$= \sum_{k=c}^{x} \frac{C_k^M \; C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}$$

حيث : $C = Max\{0, n - N + M\}$

و قد جرت محاولات عديدة لإيجاد صيغ تقريبية يمكن من خلالها حساب الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي فوق الهندسي ، و هنالك جداول خاصة بهذا التوزيع .

و على سبيل المثال لو كان : $X \sim H(8, 4, 4)$ فإن :

$$P_X(x) = \frac{C_x^N \; C_{4-x}^{8-4}}{C_4^8}$$

عندئذ من الواضح أن $x = 0, 1, 2, 3, 4$ و ذلك لأن :

$$Max\{0, 0\} = 0 \;, \quad \min\{4, 4\} = 4$$

و بالتالي جدول التوزيع الاحتمالي أو مصفوفة التوزيع الاحتمالي لـ X هي :

X	٠	١	٢	٣	٤
$P_X(x)$	$\frac{C_0^4 \; C_{4-0}^{8-4}}{C_4^8}$	$\frac{C_1^4 \; C_3^4}{C_4^8}$	$\frac{C_2^4 \; C_2^4}{C_4^8}$	$\frac{C_3^4 \; C_1^4}{C_4^8}$	$\frac{C_4^4 \; C_0^4}{C_4^8}$

و هذا يعني أن الدالة التوزيعية المجمعة لـ X تعطى بالشكل :

X	٠	١	٢	٣	٤
$F(x)$	$P_X(0)$	$P(0) + P(1)$	$(0) + P(1) + P(2)$	$(0) + P(1) + P(2) + P(3)$	١

و إذا كانت $N = 10 , M = 6 , n = 6$ فإن :

$$Max\{0 , 2\} = 2 , \quad \min\{6, 6\} = 6$$

و نترك ذلك كتمرين للقارئ لإيجاد $F_X(x) , P_X(x)$ حسب ما تقدّم .

جـ) التوقع و التباين :

أولاً : التوقع :

لنفرض أن : $Max\{0 , n - N + M\} = 0 , \quad \min\{n, M\} = n$.

عندئذ :

$$EX = \frac{1}{C_n^N} \sum_{x=0}^{n} x\, C_k^M \, C_{n-k}^{N-M}$$

$$= \frac{n}{N} \sum_{x=1}^{n} \frac{M\,!}{(x-1)!\,(M-x)!} \cdot \frac{C_{n-x}^{N-M}}{C_{n-1}^{N-1}}$$

$$= \frac{n\,M}{N} \sum_{x=1}^{n} \frac{(M-1)!}{(x-1)!\,(M-x)!} \cdot \frac{C_{n-x}^{N-M}}{C_{n-1}^{N-1}}$$

و بفرض أنّ : $n' = n - 1$ و $M' = M - 1$ و $N' = N - 1$ و $x - 1 = y$

عندئذ نجد :

$$EX = \frac{n\,M}{N} \sum_{y=0}^{n'} \frac{C_y^{M'} \cdot C_{n'-M'}^{N'-M'}}{C_{n'}^{N'}} = \frac{n\,M}{N}$$

حيث إنّ: $Y \sim H(N', M', n')$

ثانياً : التباين :

لنوجد EX^2 :

$$EX^2 = EX(X-1) + EX$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{C_x^M \, C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N} + \frac{nM}{N}$$

$$= \frac{n(n-1)M(M-1)}{N(N-1)} \sum_{y=0}^{n'} \frac{C_y^{M'} \, C_{n'-y}^{N'-M'}}{C_{n'}^{N'}} + \frac{nM}{N}$$

حيث فرضنا $x-2=Z$ و $N'=N-2$ و $M'=M-2$ و $n'=n-2$

أي كأنّ $Y \sim H(N', M', n')$ و بالتالي :

ومنه $$EX^2 = \frac{nM(n-1)(M-1)}{N(N-1)} + \frac{nM}{N}$$

$$V(X) = \frac{nM(n-1)(M-1)}{N(N-1)} + \frac{nM}{N} - \frac{n^2 M^2}{N^2}$$

$$= \frac{nM}{N} \cdot \frac{N-M}{M} \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

$$= EX \cdot \frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}$$

حـ) الدالة المولدة لعزوم X :

إن صيغة الدالة المولدة لعزوم X الذي يخضع للتوزيع فوق الهندسي نادرة الاستخدام و غير مألوفة كبقية الدوال المولدة للعزوم و لا يمكن إعطاؤها من خلال علاقات أولية بسيطة .

- **مثال (٢٦) :**

صندوق يحوي ٢٠ ظرف سيتامول من بينها ٧ ظروف غير صالحة . سحبت من الصندوق ٤ ظروف دون إرجاع ، أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد الظروف الصالحة في العينة المسحوبة ؟

<u>الحل</u> :

نفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الظروف الصالحة في العينة ، عندئذ من الواضح أن التجربة تحقق شروط التوزيع فوق الهندسي و فيه :

$$N - M = 7 \ , \quad M = 13 \ , \quad N = 20 \ , \quad n = 4$$

و لذلك فإن التوزيع الاحتمالي لـ X يكون :

$$P\ (\ x, 20, 13, 4\ ) = \frac{C_x^{13}\ C_{4-x}^{20-13}}{C_4^{20}} \ , \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

- **مثال (٢٧) :**

صندوق يحوي ٢٠ ظرف سيتامول من بينها ١٤ ظرف صالح. اختيرت عينة عشوائية من هذا الصندوق حجمها ٦ ظروف ، عندئذ :

١) احسب احتمال الحصول على ٤ ظروف صالحة ضمن العينة .

٢) احسب احتمال الحصول على ظرفين صالحين على الأقل .

<u>الحل</u> :

نفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الظروف الصالحة المسحوبة ضمن العينة ،عندئذ من الواضح أن :

$X \sim H\ (20, 14, 6\ )$ و بالتالي :

$$N = 20\ , n = 6\ , M = 14\ , (x = 4)$$

$$1")\ P(X = 4) = \frac{C_4^{14} C_2^6}{C_6^{20}} \approx 0.38738$$

و هو احتمال الحصول على ٤ ظروف سيتامول ضمن العينة .

$$2'')\ P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - \left\{ P(0) + P(1) \right\}$$
$$= 1 - \left\{ \frac{C_0^{14}\, C_6^{6}}{C_6^{20}} + \frac{C_1^{14}\, C_5^{6}}{C_6^{20}} \right\}$$
$$= 1 - \{ 0.00025799 + 0.00216718 \}$$
$$= 1 - (0.002425) \approx 0.997$$

و هو احتمال الحصول على ظرفي سيتامول صالحين على الأقل ضمن العينة .

٦) توزيع بواسون :

آ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي إنه يخضع لتوزيع بواسون بوسيط $\lambda > 0$ إذا كان توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل:

$$P_X(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \ , \ x = 0, 1, 2, ...$$

و بالرموز : $X \sim Po(\lambda)$

و يعتبر هذا التوزيع أحد أهم هذه التوزيعات المنقطعة المهمة جداً في كثير من التطبيقات الإحصائية ، و يدعى هذا التوزيع "بتوزيع الحوادث النادرة الوقوع" كحوادث سقوط الطائرات ، و عدد المكالمات الهاتفية القادمة إلى مقسم هاتف خلال فترة زمنية محدودة ، عدد السيارات التي تخالف قواعد السير على طريق عامة في فترة زمنية محددة و غيرها من الأمثلة التي تتميز بطابع الندرة .

و أول من قدم هذا التوزيع هو العالم الرياضي الفيزيائي الفرنسي " سيمون بواسون" Simeon Poisson الذي عاش في الفترة (١٧٨١ – ١٨٤٠) و تم اشتقاق هذا التوزيع كحالة تقاربية من توزيع ثنائي الحدين عام ١٨٧٣.

و لا بد أن نذكر أيضاً أن لهذا التوزيع استخدامات بشكل واسع في نظرية الخدمات و نظرية الوثوقية .

○ **ملاحظة ١ :**

للتأكد من التعريف يمكن تبيان أن $\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = 1$ و ذلك على الشكل :

$$\sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} . e^{\lambda} = e^0 = 1$$

و ذلك لأن المجموع $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$ يمثل مجموع حدود متسلسلة لا نهائية تتقارب من e^{λ}.

○ **ملاحظة ٢ :**

إن المتغير العشوائي البواسوني يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة ، و λ هي معدل النجاحات في فترة زمنية محددة أو (منطقة محددة) و الذي دعوناه بالوسيط لهذا التوزيع .

ب) الدالة التوزيعية :

تعطى الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي بواسوني X بوسيط $\lambda > 0$ من خلال العلاقة :

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

لكن مشكلة التعامل مع $F(x)$ و بهذا الشكل تطبيقياً تبدو معقدة بعض الشيء و خاصة عند حساب $F(x)$ من أجل قيم كبيرة لـ X و هذا الأمر يصبح سهلاً في حالة برمجة هذه الدالة بإحدى لغات البرمجة المعروفة على حاسب الكتروني من شأنه حساب هذه الدالة لأية قيمة معطاة من قيم X و لأية قيمة مخصصة للوسيط λ.

و هنالك جداول خاصة بهذا التوزيع تعطينا الاحتمالات المقترنة بقيم X و القيم المختلفة للوسيط λ.

- **مثال (١) :**

إذا كانت $\lambda = 3$ فإن :

$$P(0) = e^{-3}\,\frac{3^0}{0!} = e^{-3}$$

$$P(1) = 3\,e^{-3}..........$$

$$P(14) = e^{-3}\,\frac{3^{14}}{14!}$$

- **مثال (٢) :**

إذا كان متوسط عدد الولادات في مشفى الوليد بحمص هو ولادتين كل ساعة، والمطلوب:

١) ما احتمال أن تكون حالة ولادة واحدة خلال ساعة معينة ؟

٢) ما احتمال أن تكون هنالك ٤ ولادات على الأكثر خلال ساعة معينة ؟

٣) ما احتمال عدم حدوث ولادة خلال ساعة معينة ؟

<u>الحل :</u>

١") نفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد الولادات خلال ساعة معينة ، عندئذ X يخضع للتوزيع البواسوني بوسيط $\lambda = 2$ ، أي :

$$P_X(x) = e^{-2}\,\frac{2^x}{x!} \quad ; \quad x = 0, 1, 2........ \quad \text{وبالتالي}$$

$$1)\ P_X(1) = P(X = 1) = e^{-2}\,\frac{2}{1!} = 2\,e^{-2} = \frac{2}{e^2}$$

$$2)\ P(X \leq 4) = e^{-2}\sum_{x=0}^{4}\frac{2^x}{x!}$$

$$= e^{-2}\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!}\right]$$

$$= \frac{7}{e^2} = \frac{7}{7.344} \approx 0.953$$

3) $P_x(0) = e^{-2}$

جـ) التوقع و التباين لمتغير عشوائي بواسوني :

أولاً : التوقع :

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x \; e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = e^{-\lambda}.\lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda \; e^{\lambda} = \lambda$$

أي إنّ التوقع لمتغير عشوائي بواسوني يساوي الوسيط λ .

ثانياً : التباين :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = EX(X-1) + EX$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} + \lambda$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$ *وبالتالي*

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$ *أي*

$$V(X) = EX = \lambda$$

و هذه الصفة فقط يتمتع بها التوزيع البواسوني عن بقية التوزيعات و هي أن التوقع و التباين متساويان و كل منهما يساوي λ.

حـ) الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E\, e^{tX} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} e^{tX} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda} .\, e^{\lambda e^t}$$

و ذلك لأن المجموع $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!}$ يتقارب من $e^{\lambda e^t}$.

- **مثال (٣) :**

إذا كان $X \sim Po\,(4)$ عند ذلك :

1) $P_X(x) = e^{-4} \frac{4^x}{x!} \;\; ; \;\; x = 0, 1, 2, ...$

2) $EX = V(X) = 4$

3) $M_X(t) = e^{-4(1-e^t)}$

4) $P_X(0) = e^{-4}$

5) $P(X \geq 1) = 1 - P_X(0) = 1 - e^{-4}$

٢) التوزيعات الاحتمالية المستمرة :

في هذه الفقرة سوف نعرض أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التي تلعب دوراً أساسياً في الاحصاء الرياضي و نبدأ بالتوزيع التالي :

أولاً: التوزيع المنتظم المستمر : Continous Uniform Distribution :

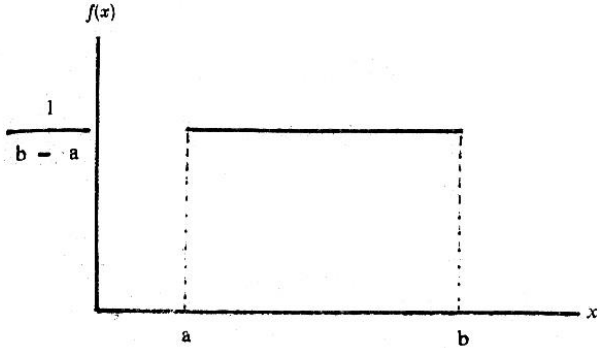
آ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع المنتظم المستمر على المجال $[a\,, b]$ حيث أن $a\,, b \in R$ و $a < b$ ، إذا كان له دالة كثافة احتمالية من الشكل :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \; a \le x \le b \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و بالرموز نكتب : $X \sim Cu\,(a\,,b)$

وهذا التوزيع يدعى في بعض الأحيان بالتوزيع المستطيلي لكون مخططه البياني يأخذ شكل مستطيل ، كما في الشكل (٤-١٩) :



الشكل (٤-١٩)

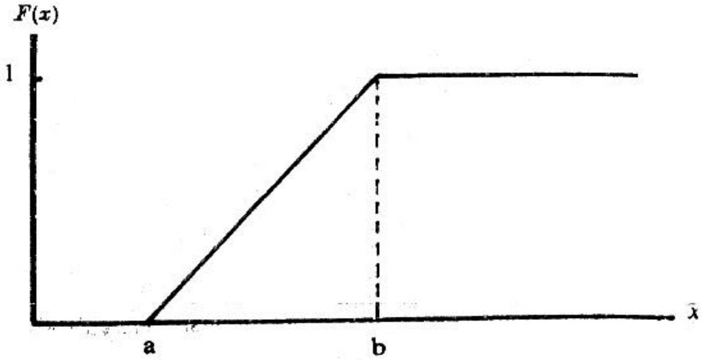
و من أهم استخدامات هذا التوزيع هي تكوين ما يدعى بـ "جداول الأرقام العشوائية" التي تستخدم في اختيار عينة عشوائية من مجتمع إحصائي .

ب) الدالة التوزيعية :

تعطي الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منتظم مستمر بالشكل :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & ; \; x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & ; \; a \le x \le b \\ 1 & ; \; x > b \end{cases}$$

و نلاحظ مماّ سبق أن المخطط البياني للدالة التوزيعية للمتغير العشوائي المنتظم المستمر على المجال $]a\,,b[$ مبيّن من خلال الشكل (٤-٢٠) :



الشكل (٤-٢٠)

جـ) التوقع و التباين :

أولاً : التوقع :

$$EX = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

ثانياً : التباين (التشتت) :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \frac{(a+b)^2}{4}$$ وبالتالي

$$V(X) = \left(\frac{b-a}{12}\right)^2$$

حـ) الدالة المولدة لعزوم المتغير المستمر المنتظم على مجال $[a\,,b]$:

$$M_X(t) = E\,e^{tX} = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tX}\,dx = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t\,(b-a)}$$

ويتضح من هذه الدالة أن $M_X(0) = \frac{0}{0}$ حالة عدم تعيين نظامية و باستخدام قاعدة أوبيتال يمكن أن نزيل عدم التعيين أي :

$$\lim_{t\to 0} M_X(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{bt} - a^{at}}{t(b-a)} = \lim_{t\to 0} \frac{b e^{bt} - a e^{at}}{b-a}$$

$$= \frac{b-a}{b-a} = 1$$

و يبدو من هذه الدالة المولدة لعزوم X أن توليد عزوم X معقد لذلك سوف نوجد صيغة للعزم الابتدائي ذي المرتبة r و على الشكل الآتي :

$$EX^r = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{(r+1)(b-a)} = M_X^{(r)}(0)$$

حيث r صحيح موجب .

- **مثال (٤) :**

بفرض أن $X \sim Cu\,(2,4)$ عندئذ :

1) $f_X(x) = \dfrac{1}{2} \quad ; \; 2 \le x \le 4$

2) $F_X(x) = \dfrac{x-2}{2} \quad ; \; 2 \le x \le 4$

3) $EX = \dfrac{2+4}{2} = 3$

4) $V(X) = \dfrac{(4-2)^2}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

5) $M_X(t) = \dfrac{e^{-4t} - e^{-2t}}{2t} \quad ; \; t > 0$

6) $EX^r = \dfrac{4^{r+1} - 2^{r+1}}{2(r+1)} \quad ; \; r = 1, 2, ...$

7) $P(X < 3) = F_X(3) = \dfrac{1}{2}$

- **مثال (٥) :**

إذا علمت أن X متغير عشوائي منتظم مستمر على المجال $[-a\,,a]$ حيث $a > 0$ ، و المطلوب :

١) أوجد قيمة a إذا كان $P(X > 2) = \frac{1}{4}$.

٢) احسب : $P(|X| \le \frac{1}{4})$.

٣) احسب: $P(X \le 3)$.

<u>الحل :</u>

١") واضح أن :

أي $\quad f_X(x) = \frac{1}{2a} \quad ; \ -a \le x \le a$

ومنه $\quad P(X > 2) = \int_2^a \frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{4}$

$$\frac{a-2}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4a - 8 = 2a \Rightarrow$$
$$2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

٢")

$$P(|X| \le \frac{1}{4}) = P(-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4})$$
$$= F_X(\frac{1}{4}) - F_X(-\frac{1}{4}) = \frac{\frac{1}{4} + 4}{8} - \frac{-\frac{1}{4} + 4}{8}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16}$$

٣")

$$P\,(X \le 3) = F(3) = \frac{3+4}{8} = \frac{7}{8}$$

و لاننسى أننا استخدمنا في الطلب الثاني و الثالث الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي منتظم على المجال $]-4\,,4[$ و التي تعطى بالشكل :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \;;\; x < -4 \\ \dfrac{x+4}{8} \;;\; -4 \le x \le 4 \\ 1 \;;\; x > 4 \end{cases}$$

ثانياً: التوزيع الأسي :

آ) تعريفه :

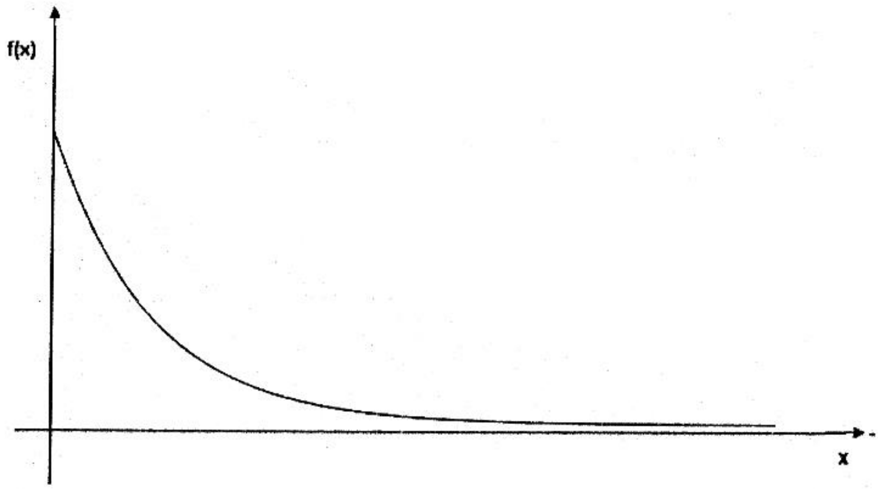
نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع الأسي إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ معطاة بالشكل:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} \;;\; x > 0 \\ 0 \;;\; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث λ تمثل وسيط هذا التوزيع $\lambda > 0$، و بالرموز فإن :

$$X \sim EXP\,(\lambda)$$

هذا و يمكن تبيان أن المخطط البياني لهذه الدالة موضح في الشكل (٤-٢١) :



الشكل (٤-٢١)

و يلاحظ أن : $\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[- e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = 1$

ب) الدالة التوزيعية :

تعطى الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي أسيّ بوسيط λ على الشكل :

$$F_X(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0 \qquad \text{أي}$$

:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و نظراً لسهولة حساب الدالة التوزيعية $F_X(x)$ وفق الصيغة السابقة فإنه ليس من الضروري بناء جدول خاص بهذا التوزيع ، فمثلاً لو كانت $\lambda = 1$ فإن :

$$F(1) = 1 - e^{-1} \quad , \quad F(2) = 1 - e^{-2} \quad , \quad F(3) = e^{-3}$$

جـ) التوقع و التباين :

أولاً : التوقع :

$$EX = \lambda \int_0^{\infty} x\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

أي إن التوقع يساوي مقلوب الوسيط λ.

ثانياً : التباين :

$$\begin{aligned} V(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x^2\, e^{-\lambda x}\, dx - \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

أي إنّ التباين يساوي مربع مقلوب الوسيط λ.

حـ) الدالة المولدة لعزوم X **:**

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\, e^{tX} &= \lambda \int_0^{\infty} e^{tX}\, e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - t)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t} = (1 - \frac{t}{\lambda})^{-1} \quad ; \quad t < \lambda \end{aligned}$$

▪ **مثال (٦) :**

بفرض أن $X \sim EXP\,(5)$ عندئذ :

$$1)\; f_X(x) = \begin{cases} 5e^{-5x} & , \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$2)\; F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-5x} & , \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$3)\; EX = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{5}$$

$$4)\; V(X) = \frac{1}{25}$$

$$5)\; M_X(t) = (1 - \frac{t}{5})^{-1}$$

$$6)\; P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1}$$

$$7)\; P(1 < X < 3) = F_X(3) - F_X(1) = (1 - e^{-15})\,(1 - e^{-5})$$

$$= e^{-5} - e^{-15} = \frac{1}{e^{5}} - \frac{1}{e^{15}}$$

$$= \frac{e^{10} - 1}{e^{15}}$$

▪ **مثال (٧) :**

بفرض أن $X \sim EXP\,(\frac{1}{100})$ ، المطلوب :

١) عين $F_X(x)$.

٢) احسب $P(X < 95)$.

٣) عيّن قيمة x إذا علمت أن $F_X(x) = 0.5$.

الحل :

إن دالة الكثافة للمتغير العشوائي X هي :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} & , \quad x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و بالتالي :

١") الدالة التوزيعية لـ X هي :

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{100}} & , \quad x > 0 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

٢") لدينا :

$$P(X < 95) = F_X(95) = 1 - e^{-\frac{95}{100}}$$

٣") لدينا :

$$F_X(x) = 0.5 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x}{100}} = 0.5 \quad \text{أي}$$

$$e^{-\frac{x}{100}} = 0.5 \Rightarrow x = -100 \ln(0.5) = -100(-0.693)$$

$$\Rightarrow x = 96.3$$

ثالثاً : التوزيع الطبيعي :

آ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X إنه يخضع للتوزيع الطبيعي بوسيطين الأول: μ ، و الثاني σ^2 إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له من الشكل :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ 0 < \sigma^2 < \infty \end{matrix}$$

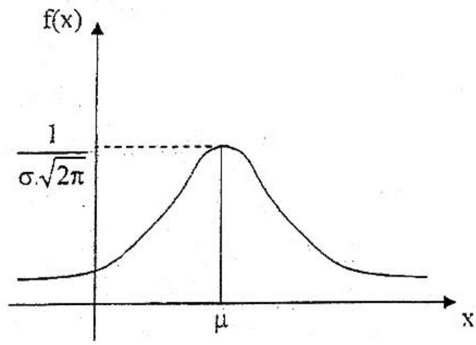
و بالرموز : $X \sim N(\mu , \overset{2}{\sigma})$

و هذا التوزيع يلعب دوراً مهماً و استثنائياً في نظرية الاحتمالات و يشغل حيزاً خاصاً وسط جميع التوزيعات الاحتمالية واستخدامات هذا التوزيع تدخل في كافة الحقول و الميادين ، و يعد هذا التوزيع القاعدة الأساس لموضوع الرقابة على جودة الإنتاج ، و التوزيعات السكانية المختلفة حسب الجنس و العمر .

و من تعريف دالة الكثافة الاحتمالية نجد أنّ $f_X\ (x)$ تبلغ قيمة عظمى عندما $x = \mu$ و هذه القيمة هي $Y = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ مع ملاحظة أن الزيادة في قيمة σ يؤدي إلى نقصان في قيمة Y.

و بما أن المساحة النسبية المحدودة بالمنحني و المحور $o\,x$ تساوي الواحد ، فمع ازدياد قيمة σ المنحني سوف يمتد نحو الأعلى منضغطاً حول محور التراتيب .

و الشكل (٤-٢٢) يوضح مخطط المنحني البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:



الشكل (٤-٢٢)

ممّا تقدم نستنتج أهم خواص التوزيع الطبيعي و هي :

١- التوزيع الطبيعي متناظر حول العمود المقام على التوقع الرياضي μ و له شكل جرسي مقلوب .

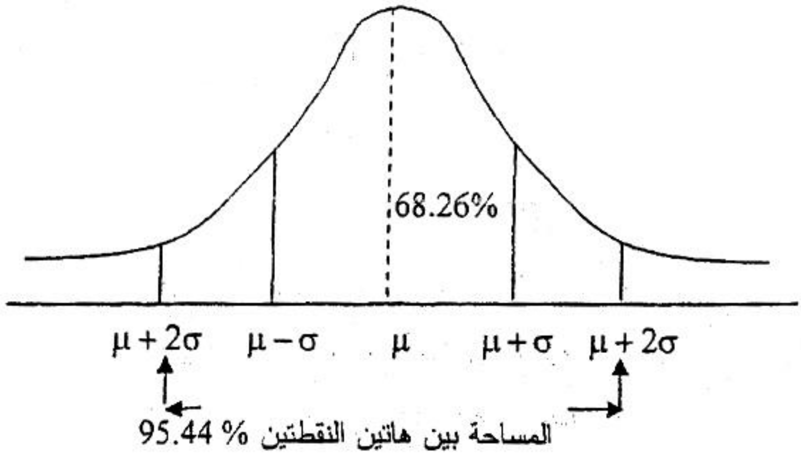
٢- للتوزيع الطبيعي قيمة عظمى واحدة يدركها عندما $x = \mu$.

٣- يتقارب طرفا منحني التوزيع الطبيعي من الصفر عندما $x \to \infty$ ، $x \to -\infty$.

٤- المساحة النسبية تحت منحني التوزيع الطبيعي تساوي الواحد .

٥- هناك نسب معينة من المساحة الواقعة ضمن أي عدد من الانحرافات المعيارية عن التوقع الرياضي μ

انظر الشكل (٤-٢٣):



الشكل (٤-٢٣)

و يلاحظ أن المساحة ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu - \sigma , \mu + \sigma)$ و تساوي 68.26% من المساحة الكلية .

لكن المساحة ضمن انحرافين معياريين عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma)$ وتساوي 95.44 % من المساحة الكلية .

و المساحة ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu - 3\sigma , \mu + 3\sigma)$ و تساوي ٩٩.٧٥% من المساحة الكلية .

ب) الدالة التوزيعية :

تعطى الدالة التوزيعية لمتغير عشوائي طبيعي بوسيطين أول μ و الثاني σ^2 بالشكل :

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt \qquad dx$$

جـ) التوقع و التباين لمتغير عشوائي طبيعي بوسيط الأول μ و بوسيط ثاني σ^2 :

أولاً : التوقع :

$$EX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

و بفرض أنّ $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ نجد أنّ :

$$EX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma Z + \mu)\; e^{-\frac{1}{2}Z^2} dZ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z\, e^{-\frac{Z^2}{2}} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_1 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_2$$

حيث I_1 يساوي الصفر لأن الدالة المستكملة فردية و حدود التكامل متناظرة ، أما من أجل حساب التكامل I_2 نتبع ما يلي :

$$\mathrm{I}_2{}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

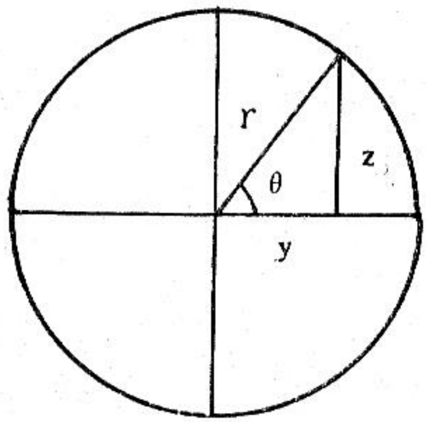
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Z^2+y^2}{2}} dZ\, dy$$

و لحساب هذا التكامل الثنائي نحتاج إلى إجراء تحويل للإحداثيات القطبية ، انظر الشكل (٤ – ٢٤) :

$$Z = r\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{Z}{r}$$

$$Y = r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{Y}{r}$$

$$r > 0 \ , \ 0 < \theta < 2\pi \ , \ Y^2 + Z^2 = r^2$$



الشكل (٤-٢٤)

علماً أن معامل التحويل من Y ، Z إلى θ، r معرف بالقيمة المطلقة لمحدد مصفوفة جاكوبي من المرتبة 2×2 ، عناصرها تمثل مشتقات جزئية للمتغيرين Y ، Z نسبة إلى θ، r. فإذا رمزنا لهذا المعامل بـ J فإن :

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial Z}{\partial r} & \dfrac{\partial Z}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial r} & \dfrac{\partial Y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r$$

$$\Rightarrow \left| J \right| = r$$ وبالتالي

$$I_2^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \left| J \right| d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \right)$$

$$= 2\pi$$

$$I_2 = \sqrt{2\pi}$$

نعود و نعوّض في صيغة إيجاد التوقع فنجد أن :

$$EX = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi} \right) = \mu$$

ثانياً : التباين :

$$V(X) = EX^2 - \mu^2$$

لنحسب EX^2

$$EX^2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma Z + \mu)^2 e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z^2 e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_1 + \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_2 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_3$$

حيث $\mathrm{I}_2 = 0$ لأن الدالة المستكملة فردية و حدود التكامل متناظرة و $\mathrm{I}_3 = \sqrt{2\pi}$ أي :

$$EX^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_1 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{2\pi})$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{I}_1 + \mu^2$$

بإنجاز التكامل I_1 بالتجزئة نجد $\mathrm{I}_1 = \sqrt{2\pi}$ ، و منه نجد :

إذن $$EX^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\sqrt{2\pi}\right) + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

أي إن تباين التوزيع الطبيعي يساوي وسيطه الثاني σ^2 .

و بالتالي الانحراف المعياري الطبيعي هو :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\sigma_x^2}$$

حـ) الدالة المولدة لعزوم X :

$$M_X(t) = E\,e^{tX} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tX}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma Z+\mu)}\, e^{-\frac{Z^2}{2}} dZ \quad ; \frac{x-\mu}{\sigma} = Z$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(Z^2-2\sigma t Z)} dZ$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(Z^2-2\sigma t Z^2+\sigma^2 t^2-\sigma^2 t^2)} dZ$$

$$= \frac{e^{\mu t}\, e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(Z-\sigma t)^2} dZ$$

$$= \frac{e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}(\sqrt{2\pi}) = e^{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2}$$

لدينا : $\sim N(\mu,\sigma^2)$ عندئذ :

و يتضح من الدالة المولدة لعزوم X الحاصلة أنّ :

1) $M_X(0) = 1$

2) $M_X'(0) = EX = \mu$

3) $M_X''(0) = EX^2 = \sigma^2 + \mu^2$

4) $V(X) = M_X''(0) - \left(M_X'(0)\right)^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

رابعاً: التوزيع الطبيعي المعياري :

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ فإن : $Z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ تمثّل الدرجة المعيارية لـ Z. و إذا فرضنا أن الدالة المولدة لـ Z موجود عندئذ :

$$M_Z(t) = E\, e^{tZ} = E\, e^{\frac{t}{\sigma}X - \frac{t\mu}{\sigma}}$$

$$= e^{-\frac{t}{\sigma}\mu} . E\, e^{\frac{t}{\sigma}X}$$

$$= e^{-\frac{t}{\sigma}\mu} . M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{t}{\sigma}\mu} . e^{\frac{t}{\sigma}\mu + \frac{\sigma^2}{2} . \frac{t^2}{\sigma^2}} = e^{\frac{t^2}{2}}$$

أي إنّ $M_Z(t)$ تمثل دالة مولدة لطبيعي وسيطاه $\mu = 0 \,, \sigma^2 = 1$ و هذا يعني أنّ:

$$E_Z = 0 \;,\; V(Z) = 1$$

هذا يوضّح أنّ : $Z \sim N(0,1)$ و بالتالي يمكن أن نعطي التعريف التالي :

آ) تعريف :

نقول عن متغير عشوائي Z أنه يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له معطاة بالشكل :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Z^2}{2}} \quad , \quad -\infty < Z < \infty$$

○ **ملاحظة :**

مماّ سبق نلاحظ أنه يمكن تحويل أي متغير عشوائي طبيعي إلى متغير عشوائي طبيعي معياري و ذلك وفق التحويل التالي :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

و على سبيل المثال إذا كان :

$$X \sim N(4, 9) \Rightarrow \frac{X-4}{3} \sim N(0, 1)$$

$$X \sim N(100, 81) \Rightarrow \frac{X-100}{90} \sim N(0, 1)$$

$$X \sim N(-3, 16) \Rightarrow \frac{X+3}{4} \sim N(0, 1)$$

و هذا يدل على ثبات التوزيع الطبيعي عند توقع و قدره صفر و تباين مقداره واحد ، و هذا يمكننا من بناء جدول خاص بهذا التوزيع . علماً أن خصائص التوزيع الطبيعي المعياري هي خصائص الطبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ نفسه بمجرد التعويض عن μ بصفر و σ^2 بواحد .

ب) الدالة التوزيعية :

إذا كان $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ عندئذ الدالة التوزيعية له تعرّف بالشكل :

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du \quad ; \quad U \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma}\right) = P(Z < z) = F_Z(z)$$

$$= \int_{-\infty}^{z} f(t)\, dt \quad ; \quad T \sim N(0, 1)$$

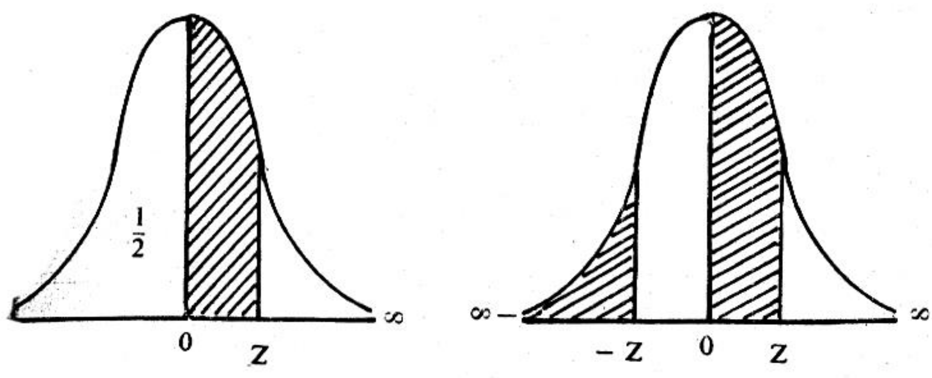
وعلى أساس الدالة التوزيعية لطبيعي معياري يمكن بناء جداول التوزيع الطبيعي التي تبيّن الاحتمال (التجميعي) التراكمي لغاية قيمة معطاة Z. ويوجد نوعان من هذه الجداول أولهما مبني على أساس التكامل على المجال $]-\infty, Z]$، و هذا النوع هو الأسهل و الأوسع تداولاً في النواحي العملية و الفكرة الأساس في بناء هذه الجداول هي حساب المساحة تحت المنحني لدالة الكثافة الاحتمالية لطبيعي معياري $N(0, 1)$ للفترة $(-\infty, x)$.

أما النوع الثاني من هذه الجداول فمبني على أساس الاعتماد على التماثل في التوزيع ، و فكرة تأسيس هذه الجداول هي حساب المساحة تحت منحني دالة الكثافة لطبيعي معياري $N(0,1)$ للفترة $(0, z)$ ، و من ثم يضاف $\frac{1}{2}$ للناتج معتبرين أن: $P(X < 0) = \frac{1}{2}$.

أماّ إذا كانت z سالبة عندئذ يتم حساب $P(X < -z)$ على أساس طرح المساحة للفترة $(0, z)$ من $\frac{1}{2}$ معتبرين أن :

$$P(0 < Z < z) = P(-z < Z < 0)$$

انظر الشكل (٤-٢٥) :



الشكل (٤-٢٥)

و بشكل عام إذا كان X طبيعي معياري فإن :

1) $P(X < 0) = P(X > 0) = \frac{1}{2}$

2) $P(X < -z) = P(X > z) \Rightarrow F_X(-z) + F_X(z) = 1$

3) $P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a)$

و من أجل الحصول على الدالة التوزيعية لطبيعي معياري عند قيمة Z نوجدها من الجداول المتعلقة بالتوزيع الطبيعي المعياري .

- **كيفية استخدام الجداول :**

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ عندئذ إذا طلب منا حساب $P(Z < 2.51)$ فإننا ننظر إلى الجدول الملحق و نجد أن القيمة لـ $F(2.51)$ هي التقاء السطر 2.5 بالعمود 0.01 ، أي :

$$P(Z < 2.51) = F_Z(2.51) = 0.9940$$

و بالطريقة نفسها نجد أن :

1) $P(Z < -1.74) = F_Z(-1.74) = 0.0499$

2) $P(Z < -1.93) = F_Z(-1.93) = 0.0266$

3) $P(Z < 2.99) = 1 - P(Z \le 2.99) = 1 - 0.9986 = 0.0014$

4) $P(-2.14 < Z < 1.56) = P(Z < 1.56) - P(Z < -2.14)$

$$= F(1.56) - F(-2.14)$$

$$= 0.9406 - 0.0162 = 0.9244$$

- **ملاحظة :**

إذا كان $Z \sim N(0,1)$ و طلب مننا إيجاد قيمة a بحيث يكون:

$$P(Z < a) = 0.9582$$

عندئذ نلجأ إلى استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري من الملحق بشكل عكسي أي أننانبحث عن القيمة 0.9582 داخل الجدول ثم نحدد السطر و العمود اللذين يلتقيان عند القيمة 0.9582 ، وسنجد أن القيمة تقع عند السطر 1.7 و العمود 0.03، إذاً قيمة $a = 1.73$.

و بالمثل إذا أردنا حساب $P(Z < a) = 0.040$ فإننا نجد $a = -1.75$.

و اعتماداً على الخاصة $F(-z) + F(z) = 1$ يمكننا حساب قيمة a إذا كان :

$P(-a < x < a)$

الحل :

$$P(-a < x < a) = 2F(a) - 1 = 0.95$$

$$\Rightarrow F(a) = \frac{0.95}{2} \overset{1.95}{=} 0.975$$

$$\Rightarrow a = 1.96$$

- **مثال (٨) :**

إذا كان $X \sim N(3, 36)$ فإن :

$$1)\ f_X(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{6}\right)^2} \quad ; -\infty < x < \infty$$

$$2)\ EX = \mu = 3$$

$$3)\ V(X) = \sigma_x^2 = 36$$

$$4)\ M_X(t) = e^{3t+18t^2}$$

- **مثال (٩) :**

إذا كان $X \sim N(50, 16)$ ، و المطلوب احسب ما يلي :

١) $P(48 < X < 55)$.

٢) $P(X < 60)$.

الحل :

$$1)\ P(48 < X < 55) = P\left(\frac{48-50}{4} < Z < \frac{55-50}{4}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{2} < Z < \frac{5}{4}\right)$$

$$= F(-0.5 < Z < 1.25) = F(1.25) - F(-0.5)$$

$$= 0.8461 - 0.3085 = 0.5376$$

$$2)\ \ P\,(X < 60) = P\,(\frac{X - 50}{4} < \frac{60 - 50}{4})$$

$$= P\,(Z < \frac{10}{4})$$

$$= F_Z(\frac{16}{4}) = F_Z(2.5) \quad = 0.9938$$

- **مثال (١٠) :**

إذا كانت درجات الذكاء في مجتمع الطلبة في جامعة البعث تتوزع طبيعياً بمتوسط ١٠٠ و انحراف معياري ١٥، و المطلوب :

١) عين نسبة الطلاب الذين تزيد درجة ذكائهم على ١٢٠ .

٢) عين نسبة الطلاب الذين تقل درجة ذكائهم على ٨٥ .

٣) عين نسبة الطلاب الذين تقع درجة ذكائهم بين ٨٠ و ١٠٠ .

الحل :

نفرض X متغيراً عشوائياً يدل على عدد درجات الذكاء عندئذ $X \sim N\,(100\,,225)$ و منه :

$$1)\ \ P\,(X > 120) = 1 - P\,(X < 120)$$

$$= 1 - P\,(Z < \frac{120 - 100}{15})$$

$$= 1 - F_Z(\frac{20}{15}) = 1 - F(1.34)$$

$$= 1 - 0.9099 = 0.0901$$

$$2)\ \ P\,(X < 85) = P\,(Z < \frac{58 - 100}{15})$$

$$= 1 - F_X(-1)$$

$$= 1 - \left[1 - F_{(X)}(1)\right]$$

$$= F_X(1) = 0.8413$$

$$3)\quad P(80 < X < 120) = P\left(Z < \frac{58-100}{15}\right)$$

$$= P\left(\frac{80-100}{15} < Z < \frac{120-100}{15}\right)$$

$$= P(-1.34 < Z < 1.34) = F_Z(1.34) - F_Z(-1.34)$$

$$= 2\,F_Z(1.34) - 1 = 2\,(0.9099) - 1 = 0.8198$$

- **مثال (١١) :**

إذا كان $X \sim N(1, 2)$ و $Y \sim N(3, 4)$ متغيرين طبيعيين مستقلين ، عندئذ احسب :

١) $P(1 < X < 3)$.

٢) $P(X \leq Y)$.

٣) $P(3X - 2Y > 1)$.

الحل :

$$1)\quad P(1 < X < 3) = P\left(\frac{1-1}{\sqrt{2}} < \frac{X-1}{\sqrt{2}} < \frac{3-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= P\left(0 < Z < \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = P(0 < Z < \sqrt{2}) \quad ; \quad Z \sim N(0,1)$$

$$= F_Z(\sqrt{2}) - F_Z(0) = F_Z(1.41) - 0.5$$

$= 0.9207 - 0.5 = 0.4207$ حيث

$F_Z(1.41) = 0.9207$

حيث $F(1.41)$ أعطيت من جدول التوزيع الطبيعي المعياري و تساوي : $F_Z(1.41) = 0.9207$.

$$2)\ P(X \le Y) = P(X - Y \le 0) = P(W \le 0) \quad ; \quad W = X - Y$$

$$= P\left(\frac{W+2}{\sqrt{6}} \le \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = P\left(Z \le \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= F_Z(0.82) = 0.7939$$

حيث إن $W \sim N(-2\,,6)$ و $Z \sim N(0\,,1)$ و $F_Z(0.82)$ تعطى من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

$$3)\ P(3X - 2Y > 1) = P(W > 1) \quad ; \quad W \sim N(-3{,}32)$$

$$= P\left(\frac{W+3}{\sqrt{32}} > \frac{1+3}{\sqrt{32}}\right) = P\left(Z > \frac{4}{\sqrt{32}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - F_Z(0.84)$$

$$= 1 - 0.7995 = 0.2005$$

خامساً : التوزيع الغماوي :

إن التوزيع الغماوي في الحقيقة مشتق من الدالة الغماوية Gamma Function، أو ما يسمى أحياناً بتكامل غاما الذي يرد ذكره في الكثير من مراجع الرياضيات و لذلك الأمر لا بد من التعريف بهذه الدالة وبعض خواصها .

- يعرّف تكامل غاما رياضياً بالشكل التالي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}.e^{-x}dx$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ تمثّل قيمة تكامل غاما عند قيمة (α) و إن هذا التكامل متقارب لجميع قيم $(\alpha \ge 0)$، و متباعد لقيم $(\alpha \le 0)$.

على سبيل المثال : عندما $\alpha = 1$ فإن :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

و إذا كانت $\alpha = 0$ فإن :

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty x^{-1}.e^{-x}dx$$

و هذا التكامل متباعد (استخدم التكامل بالتجزئة) .

لكن حساب التكامل غاما الذي قيمته $\Gamma(\alpha)$ باستخدام طريقة التجزئة ، يتم بأخذ :

$$u = x^{\alpha-1} \quad \Rightarrow du = (\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}dx$$

$$dv = e^{-x}dx \;\Rightarrow v = -e^{-x}$$

عندئذ :

$$\Gamma(\alpha) = -x^{\alpha-1}.e^{-x}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}.e^{-x}dx$$

$$= (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1) \;\; ; \;\; \left(-x^{\alpha-1}.e^{-x}\Big|_0^\infty = 0\right)$$

و بإعادة حساب التكامل بالتجزئة بالأسلوب نفسه نجد أن :

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)(\alpha-2)\,\Gamma(\alpha-2) = \alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\,\Gamma(\alpha-3)$$

و من أجل n صحيح موجب، و $\alpha = n$ نجد أن :

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\,..........3\,.\,2\,\Gamma(1) = (n-1)!$$

و من أجل $\alpha = n+1$ نجد :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

و منه يمكن أن نوجد :

$$\Gamma(2) = 1! \;,\; \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2!$$

و في الحالة التي يكون فيها $\alpha > 0$ حقيقياً موجباً و ليس صحيحاً ، سوف نهتم بالقيمة $\Gamma(\frac{1}{2})$ التي تساوي $\sqrt{\pi}$ ، و بناءً عليه من أجل أي عدد صحيح موجب مثل n فإن :

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1.3.5.7.......(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

مثلاً لماّ :

$$n = 0 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$n = 1 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$n = 2 \Rightarrow \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

و هكذا بالنسبة للقيم الأخرى لـ n .

آ) تعريف توزيع غاما :

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتوزع وفق توزيع غاما بالوسيط (α) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له من الشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-x} & ; \quad x > 0 \;, \alpha > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و هذا ما يسمّى بالشكل الأول لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير يتوزع وفق غاما بالوسيط $\alpha > 0$ و بالرموز فإن:

$$X \sim G(\alpha)$$

- في الحالة الخاصة إذا كانت $\alpha = 1$ فإننا نحصل على دالة كثافة لمتغير عشوائي أسّي وسيطه ١ .

و هنالك شكل آخر لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي غماوي مشتق من الشكل السابق على الشكل :

بفرض $x = \beta y$ حيث $\lambda \neq 0$ عندئذ :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty (\lambda y)^{\alpha-1} . e^{-\beta y} dy \Rightarrow$$

$$1 = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} . e^{-\beta y} dy$$

وهذا يعني أن Y متغير عشوائي بدالة كثافة احتمالية :

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} . e^{-\beta y} dy & ; \quad y > 0 \ , \quad \alpha, \beta > 0 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و هذا هو الشكل الثاني لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتوزع وفق غاما بوسيطين $\beta , \alpha > 0$، وبالرموز يكون : $Y \sim G(\alpha , \beta)$.

و يتضح من الشكل الأخير أن التوزيع الأسّي حالة خاصة من توزيع غاما عندما $\alpha = 1$ و $\beta = \lambda$.

ب) يبرهن أن العزم الابتدائي من المرتبة r حول نقطة البدء لتوزيع غاما معطى بالعلاقة:

$$EX^r = \frac{\Gamma(r + \alpha)}{\beta^r \Gamma(\alpha)}$$

و من هذه العلاقة يمكن أن نجد كلاً من التوقع و التباين و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يخضع لتوزيع غاما بالوسيطين β , α على الشكل :

$$r = 1 \Rightarrow EX = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\beta \, \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \, \Gamma(\alpha)}{\beta \, \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$r = 2 \Rightarrow EX^2 = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha + 1) \, \alpha \, \Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}$$

و منه يمكن أن نحصل على التباين الغماوي :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

و بالتالي :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} > 0$$

و هو الانحراف المعياري للمتغير العشوائي الغماوي X.

جـ) يبرهن أن الدالة المولدة لعزوم X تعطى بالعلاقة :

$$M_X(t) = (1 - \frac{t}{\beta})^{-\alpha} \quad ; \quad t < \beta$$

سادساً: التوزيع الأسي Chi-Square Distribuaiton $\chi^2(n)$:

آ) تعريفه :

نقول عن متغير عشوائي X أنه يخضع لتوزيع كاي مربع بوسيط $n \in N$ (n تدعى درجة الحرية للتوزيع) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له معطاة بالشكل :

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad ; \quad x > 0$$

و بالرموز تكون : $X \sim \chi^2(n)$

ب) دالة التوزيع له :

تعطى الدالة التوزيعية للمتغير $X \sim \chi^2(n)$ بالشكل :

$$F_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^x t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \, dt$$

ومن أجل حساب قيم الدالة التوزيعية السابقة يوجد جدول خاص بهذا التوزيع في آخر الكتاب بعطينا قيم هذه الدالة من أجل قيم مختلفة لـ n ، فعلى سبيل المثال من أجل $n = 4$ لدينا :

$$P(X \leq 11.1433) = 0.9750$$

و من أجل $n = 5$ نجد :

$$P(X \leq 2.6746) = 0.7509$$

جـ) الصفات المميزة لهذا المتغير :

يبرهن أنّ :

$$EX = n$$

$$V(X) = 2n$$

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}$$

- **ملاحظة ١ :**

عندما $n = 1$ نحصل على توزيع كاي مربع بدرجة حرية ١ و يكون :

$$EX = 1$$

$$V(X) = 2$$

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$$

- **ملاحظة ٢ :**

هناك توزيعات احتمالية أخرى سوف نتعرض لها في مقرر نظرية الاحتمالات (١) و منها التوزيع البيتاوي و توزيع ستيودنت و توزيع فيشر و كوشي .... الخ .

تمارين غير محلولة على الفصل الرابع

١) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما جدول توزيع مشترك معطى بالشكل :

Y \ X	-1	3
2	0.30	0.10
5	0.40	0.20

و المطلوب :

١: أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y.

٢: أوجد التوقع الرياضي لكل من X و Y ثم أوجد $E(X+Y)$.

٢) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما جدول توزيع احتمالي مشترك .

$$P(x, y) = \frac{x + 2y}{a} \quad ; \quad \begin{matrix} x = 0, 1, 2 \\ y = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

و المطلوب :

١: أوجد قيمة الثابت a .

٢: أوجد $P(X = 1,\ Y \le 2)$ و $P(X \ge 1,\ Y = 3)$.

٣: أوجد التوزيعات الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y .

٣) بفرض أنّ X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة و معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x(1 + 3y^2)}{4} & ; \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١: أوجد دوال الكثافة الهامشية لكل من Xو Y ، و هل Xو Y مستقلان ؟

٢: أوجد التوقع الرياضي لكل من Xو Y .

٣: أوجد $E\,XY$.

٤) بفرض أن Xو Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \;;\; \begin{matrix} 0 < x < 2 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

١: أوجد EXو EY و $E\,XY$.

٢: أوجد $E\,(X + Y)$.

٥) بفرض أن Xو Y متغيران عشوائيان لهما دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة المعرفة بالعلاقة :

$$f(x, y) = x\,y\,e^{-(x+y)} \;;\; \begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}$$

و المطلوب :

١: أوجد دوال الكثافة الهامشية لكل من Xو Y .

٢: أثبت أن Xو Y مستقلان .

٣: أوجد التوقع الرياضي لكل من Xو Y .

٦) بفرض أن Xو Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية لهما معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & ; \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب : حساب قيمة الاحتمال $P\left(0 < X < \frac{1}{2} , Y > 0\right)$.

٧) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل:

$$f(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(x^2 + 4)(y^2 + 4)} \quad ; \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{matrix}$$

و المطلوب :

١: عيّن الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y .

٢: احسب $P(X < 2 , Y < 2)$.

٣: احسب $P(0 < X < 2\sqrt{3} , 0 < Y < 1)$.

٨) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة توزيع مشتركة معطاة بالشكل :

$$F(x, y) = (1 - e^{-3x})(1 - e^{-3y}) \quad ; \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

و المطلوب تعيين دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين X و Y .

٩) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك معطى بالشكل :

$$f(x, y) = a(x + y) \quad ; \quad \begin{matrix} x = 1, 2, 3 \\ y = 1, 2 \end{matrix}$$

و المطلوب :

١: عّين قيمة الثابت a .

٢: عيّن التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .

٣: عيّن EX و $E(XY)$ و $E(3X + 2Y)$.

١٠) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك معطى من خلال جدول التوزيع الاحتمالي التالي :

Y \ X	٠	١	المجموع
١	0.1	0.2	0.3
٢	0.2	0.1	0.3
٣	0.3	0.1	0.4
٤	0.6	0.4	١

و المطلوب :

١: تعيين جدول التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .

٢: حساب EX و $V(X)$ و EY و $V(Y)$ و $E\,(XY)$ و $COV(X,Y)$.

٣: حساب $COV(3X,4Y)$ و $\rho\,(3X,4Y)$ و $V(2X,3Y)$.

١١) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x,y) = \begin{cases} 24\,x\,y^2\,(1-y) \;; & \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix} \\ 0 \;; & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١: عيّن دالة الكثافة الاحتمالية الهامشية لكل من X و Y .

٢: عيّن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X .

٣: عيّن $E\,(XY)$.

١٢) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة توزيع مشتركة معطاة بالشكل :

$$F(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \, arctg \; 2x \right] \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \, arctg \; 3y \right]$$

و المطلوب :

١: أوجد دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y .

٢: أحسب $P\left(X < \frac{1}{2} ,\; Y < \frac{1}{3}\right)$.

١٣) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = \begin{cases} a\,x\,y & ; \quad \begin{array}{l} 0 < x < 4 \\ 1 < y < 5 \end{array} \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١: عّين قيمة الثابت a .

٢: أوجد $P(1 < X < 2 ,\; 2 < Y < 3)$.

٣: أوجد $P(X \geq 3 \;,\; Y \leq 2)$.

١٤) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع احتمالي مشترك معطى بالشكل :

$$P(x, y) = \begin{cases} a\,x\,y & ; \quad \begin{array}{l} x = 1, 2, 3 \\ y = 1, 2, 3 \end{array} \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١: عّين قيمة الثابت a .

٢: أوجد التوزيعات الهامشية لكل من X و Y .

٣: هل X و Y مستقلان ؟

٤: احسب $P(X = 2, Y = 3)$.

٥: احسب $P(1 \le X \le 2, Y \le 2)$ و $P(X \ge 2)$.

٦: احسب $P(X = 1)$ و $P(Y = 3)$ و $P(Y < 2)$.

١٥) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = a \,.\, e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} \quad ; \quad \begin{array}{c} -\infty < x < \infty \\ -\infty < y < \infty \end{array}$$

و المطلوب :

١: عيّن قيمة الثابت a .

٢: أوجد دالة الكثافة الهامشية لكل من X و Y .

٣: هل X و Y مستقلان ؟

٤: أوجد الاحتمال $P(0 < X < 2 \,,\, 0 < Y < 1)$.

- **ملاحظة :** استخدم $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

١٦) تقوم طائرتان بشكل مستقل بالإغارة على بطارية صواريخ دفاع جوي ، كل طائرة توجه صاروخين (جو – أرض) باتجاه الهدف المذكور ، و ليكن X المتغير العشوائي الذي يصف عدد مرات إصابة الهدف من قبل الطائرة الأولى ، و Y المتغير العشوائي الذي يصف عدد مرات إصابة الهدف من قبل الطائرة الثانية.

عندئذ إذا كان احتمال إصابة الهدف من قبل الطائرة الأولى في كل مرة هو $p_1 = 0.7$ و من قبل الطائرة الثانية $p_2 = 0.4$ ، و المطلوب :

١: عيّن جدول التوزيع الاحتمالي المشترك (مصفوفة التوزيع) للمتغيرين العشوائيين X و Y .

٢: إيجاد الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y .

٣: أوجد جدول التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .

١٧) بفرض X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{6} & ; \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١- تحقق أن $f(x)$ تمثل فعلاً دالة كثافة احتمالية .

٢- أوجد كلاً من EX و EX^2 و $V(X)$ و σ_X .

١٨) بفرض X و Y متغيرين عشوائيين لهما دالة كثافة احتمالية مشتركة معطاة بالشكل :

$$f(x, y) = a \cos x \cos y \quad ; \; 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad ; \; 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

و المطلوب :

١- عيّن قيمة الثابت a.

٢- عيّن الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين X و Y.

٣- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X و Y.

١٩) بفرض أن :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\pi} & ; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1 \\ 0 & ; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

دالة كثافة احتمالية مشتركة لمتغيرين عشوائيين X و Y. و المطلوب تعيين دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X و Y.

٢٠) بفرض أن :

$$P(x, y) = \frac{4x - 2y + 3}{36} \quad ; \quad \begin{matrix} x = 0, 1, 2 \\ y = 0, 1 \end{matrix}$$

تمثل توزيع احتمالي مشترك لمتغيرين عشوائيين X و Y . و المطلوب :

١- عين التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y .

٢- عيّن EX و $V(X)$ و $E(2X + 3Y)$.

٢١) بفرض أن :

$$f(x, y) = 24\, x\, y^2 (1 - y) \quad ; \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$$

دالة كثافته احتمالية مشتركة لمتغيرين عشوائيين X, Y ، و المطلوب :

١- عيّن دالة الكثافة الاحتمالية لكل من X و Y .

٢- عيّن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X .

٣- عيّن $E(X\, Y)$.

٢٢) X متغير عشوائي منقطع منتظم ($(X \sim Du(N))$)، عندئذ أوجد أقرب عدد صحيح إلى N بحيث يكون $P(X \le EX) = 0.56$. و المطلوب :

١- تعيين $P_X(x)$.

٢- تعيين $F_X(x)$.

٣- تعيين EX و $V(X)$ و $M_X(t)$.

٤- احسب $P(X > 4)$ و $P(X \le 4)$.

٥- أوجد التوقع و التباين للمتغير $Y = 4X + 1$.

٦- احسب $P(X > 2EX)$.

٢٣) بفرض أن $(X \sim Ber(0.95))$ عندئذ المطلوب :

١- أوجد EX و $V(X)$ و $M_X(t)$.

٢- عيّن $P_X(x)$.

٣- احسب $P(X \ge 0)$.

٢٤) بفرض أن X و Y متغيران عشوائيان لهما توزيع مشترك معطى بالشكل :

$$P(x, y) = þ^{x+y}(1 - þ)^{2-x-y} \quad ; \quad \begin{array}{l} x = 0, 1 \\ y = 0, 1 \end{array}$$

و المطلوب : عين التوزيع الاحتمالي لكل من X و Y مع تسمية التوزيع .

٢٥) بفرض أن $X \sim Ber(0.7)$ ، عندئذ أوجد التوقع والتباين للمتغير $Y = 2 - 4X$.

٢٦) إذا كان $X \sim b(8, \frac{1}{4})$ و المطلوب :

١- اكتب التوزيع الاحتمالي لـ X .

٢- احسب $P(X \le 2)$ و $P(X > 1)$.

٣- عيّن كل من EX و $V(X)$ و $M_X(t)$.

٢٧) افرض أن :

$$X \sim b(6, \frac{1}{4}) \quad \text{و} \quad Y \sim b(8, \frac{1}{4}) \quad \text{و} Z \sim b(10, \frac{1}{4})$$

ثلاث متغيرات عشوائية ثنائية مستقلة ، و المطلوب :

١- أثبت أن $W = X + Y + Z \sim b(24, \frac{1}{4})$.

٢- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير W .

٣- عيّن التوقع الرياضي للمتغير W .

٤- عيّن التباين للمتغير W .

٢٨) افرض أن التجربة إلقاء ٨ قطع نقد متجانسة مرة واحدة و ليكن X يدل على عدد الصور .والمطلوب :

١- عين التوزيع الاحتمالي لـ X .

٢- ما احتمال الحصول على صورة واحدة على الأقل ؟

٣- ما احتمال الحصول على ٧ صور تماماً ؟

٤- أوجد القيمة المتوسطة لعدد الصور في هذه التجربة ؟

٢٩) إذا كان $X \sim b(n, þ)$. المطلوب :

١- أثبت أن $Y = n - X \sim b(n, þ)$.

٢- احسب $COV(X, N - X)$.

٣- احسب $\frac{V(X)}{n}$.

٣٠) افرض أن : $X \sim b(15, 0.8)$ ، $Y \sim b(10, 0.8)$ متغيران عشوائيان مستقلان بحيث :

$$Z = X + Y$$

و المطلوب :

١- عين التوزيع الاحتمالي للمتغير Z .

٢- عين التوقع و التباين و الدالة المولدة للمتغير Z .

٣- احسب $P(Z \geq EZ)$ و $P(EZ - \sigma_Z \leq Z \leq EZ + \sigma_Z)$.

٣١) إذا علمت أن ٦% من المصابيح المنتجة في مصنع معين معيبة، وافرض أن التجربة اختيار عينة عشوائية حجمها ١٨ مصباح من إحدى وجبات الإنتاج. و المطلوب:

١- ما احتمال عدم وجود مصباح معيب في هذ العينة ؟

٢- ما احتمال وجود ثلاثة مصابيح على الأكثر معيبة ؟

٣- ما احتمال وجود على الأقل ١٠ مصابيح غير معيبة ؟

٤- ما متوسط عدد المصابيح المعيبة في هذه العينة ؟

٣٢) إذا علمت أن $X \sim H(9, 4, 5)$ متغير عشوائي فوق هندسي ، و المطلوب :

١- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير X .

٢- عين التوقع و التباين للمتغير X .

٣- احسب $P(X < 3)$ و $P(X \geq 1)$.

٣٣) افرض X متغيرعشوائي بواسوني وسيطه $\lambda = 5$ ، و المطلوب :

١- اكتب التوزيع الاحتمالي لـ X .

٢- عين التوقع و التباين للمتغير العشوائي X .

٣- عين الدالة المولدة لـ X .

٤- احسب $P_X(0)$ و $P(X \geq 1)$.

٣٤) بفرض أن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $[2,6]$ ، و المطلوب :

١- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

٢- عين الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X .

٣- عين التوقع و التباين لـ X .

٤- عين العزم الابتدائي من المرتبة r (r عدد صحيح موجب) .

٥- عين العزم المركزي من المرتبة r (r عدد صحيح موجب) .

٦- احسب $P(X < 4)$.

٣٥) بفرض أن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $[4,10]$ ، و المطلوب :

١- عين كثافة الدالة الاحتمالية للمتغير X .

٢- عين الدالة التوزيعية للمتغير X .

٣- إيجاد التوقع و التباين للمتغير X .

٤- إيجاد العزم الابتدائي الثالث و الرابع لـ X .

٥- إيجاد العزم المركزي من المرتبة الرابعة لـ X .

٣٦) بفرض أن X متغير عشوائي أسي بوسيط $\lambda = 5$ ، أي $X \sim \exp(5)$ و المطلوب :

١- عين الدالة التوزيعية للمتغير X .

٢- عين كل من التوقع و التباين و الدالة المولدة للمتغير X .

٣- عين كل من التوقع والتباين و الدالة المولدة للمتغير $Y = 2X - 3$.

٣٧) إذا كان $X \sim N(10,16)$ ، و المطلوب :

١- عين كثافة الدالة الاحتمالية للمتغير X .

٢- عين كل من التوقع و التباين والدالة المولدة للمتغير X .

٣- احسب $P(X < 8)$ و $P(X < 15)$.

٤- احسب $P(2 < X < 18)$.

٣٨) إذا علمت أن $X \sim N(12,16)$ و المطلوب :

١- احسب $P(X > 20)$ و $P(0 < X < 12)$.

٢- عين قيمة كل من b, a بحيث أن : $P(a < X < b) = 0.95$ و
$P(X < a) = 0.05$.

٣٩) افرض X متغيرعشوائي غماوي وسيطاه الأول $\alpha = 2$ و الثاني $\beta = 3$ و المطلوب :

١- اكتب دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X.

٢- عين التوقع و التباين و الدالة المولدة للمتغير X.

٣- عين العزم الابتدائي من المرتبة r.

الفصل الخامس

قانون الأعداد الكبيرة

استعرضنا في الفصل السابق العينة العشوائية لمتغير عشوائي X معلوم و التي تلعب دوراً في حساب بعض الاحصاءات و التي سوف تلعب كمقدّرات لوسطاء التوزيع الاحتمالي الذي أخذت له العينة العشوائية .

و عند أخذ عينة عشوائية لمتغير عشوائي X توزيعه معلوم إمّا $P_X(x)$ أو $f_X(x)$ يتبيّن أن حجم العينة n يلعب دوراً مهماً في دقة التقديرات لوسطاء التوزيع الاحتمالي و التي تمثّل كميات تابعة فقط لمتغيرات هذه العينة، فمثلاً كلما كان حجم العينة كبيراً عندها سيكون احتمال الفرق بين الوسط الحسابي و الوسيط صغيراً .

و على سبيل المثال إذا كان X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي معلوم و كانت $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عيّنة لهذا المتغير ، و كان μ التوقع لـ X عندئذ إذا أردنا إيجاد قيمة تقدير لـ μ ، فإن ذلك أمر ممكن من خلال حساب $\overline{X}$ على أساس ملاحظات العينة لـ X على أنه في الحالة العامة $\overline{X} \neq \mu$ ، لكن معلوم أن $E\overline{X} = \mu$ وإن الهدف الأساسي جعل الفرق المطلق بين μ و $\overline{X}$ قريباً من الصفر أي $\left| \overline{X} - \mu \right|$ قريب من الصفر و هنا يلعب حجم العينة دوراً كبيراً في التوصل للهدف من خلال ما يسمّى "بقانون الأعداد الكبيرة" الذي يبين لنا العلاقة بين الصفات النظرية و التجريبية للتجارب العشوائية ، و لهذا القانون صيغ مختلفة سوف تعرض عن طريق المبرهنات المهمة (تشيبتشيف – برنولي – بواسون ...) و لكن قبل هذا العرض لا بد من عرض بعض المتباينات الهامة :

(٥-١) متباينة تشيبتشيف :

في هذه الفقرة سوف نتعرض لأهم المتباينات الشهيرة و التي لها أهمية تطبيقية لكنها ذات قيمة نظرية كبيرة لآنها تستخدم أساساً لإثبات مجموعة من المبرهنات المتعلقة بقانون الأعداد الكبيرة و التي تدعى " متباينة تشيبتشيف" و قبل التعرَف إلى هذه المتباينة لنبرهن على صحة المبرهنة المهمة التالية :

- **مبرهنة :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توزيع احتمالي و كانت الدالة الحقيقية غير السالبة $g(x)$ و التي تملك توقعاً رياضياً $E\left|\, g(X)\,\right| < +\infty$ عندئذ تتحقق المتباينة التالية :

$$P\left(g(x) \geq K\right) \leq \frac{E\, g(X)}{K} \quad ; \quad K > 0$$

__البرهان__ :

للبرهان على صحة المبرهنة سوف نميز حالتين :

الحالة الأولى : نفرض X متغيراً عشوائياً مستمراً له دالة كثافة احتمالية $f_X(x)$.

الحالة الثانية : نفرض X متغيراً عشوائياً منقطعاً توزيعه الاحتمالي $P_X(x)$.

- **الحالة الأولى :**

لدينا :

$$\begin{aligned}
E\, g(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x)\, dx \\
&= \int_{\{x\,;\, g(x) \geq k} g(x)\, f(x)\, dx + \int_{\{x\,;\, g(x) < k} g(x)\, f(x)\, dx \geq \\
& \int_{\{x\,;\, g(x) \geq k\}} g(x)\, f(x)\, dx \geq \int_{\{x\,;\, g(x) \geq k\}} g(x)\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx = \\
&= K\, P\left(g(x) \geq k\right)
\end{aligned}$$

و منه يكون :

$$\frac{E\ g(X)}{K} \geq P\left(g(X) \geq k\ \right)$$

- الحالة الثانية :

تبرهن بشكل مماثل و ذلك بتبديل رمز التكامل بمجموع .

◈ **حالة خاصة (١) :**

إذا بدلنا في المبرهنة السابقة $g(X)$ بـ X و $K = 1$ عندئذ نحصل على المتباينة :

$$P\left(X \geq 1\right) \leq EX$$

◈ **حالة خاصة (٢) :**

إذا بدلنا في المبرهنة السابقة $g(x)$ بـ $|X|$ ، حيث r صحيح موجب، $K = \varepsilon$ فإن المتغير X يملك عزماً من المرتبة r عندئذ تتحقق المتباينة :

$$P\left(|X| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\,|X|^{\,r}}{\varepsilon^{r}} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

و التي تدعى بمتباينة ماركوف .

◈ **حالة خاصة (٣) :**

إذا بدلنا في المبرهنة كل $g(x)$ بـ X غير سالب و كل K بـ ε تتحقق المتباينة :

$$P\left(X \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E\ X}{\varepsilon} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

و التي تدعى أيضاً متباينة ماركوف ، و يمكن البرهان عليها بالشكل التالي :

$$EX = \int_{0}^{\infty} x\ f(x)\,dx = \int_{0}^{\varepsilon} x\ f(x)\,dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} x\ f(x)\,dx \geq$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x\ f(x)\,dx \geq \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon\ f(x)\,dx = \varepsilon \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx$$

ومنه نجد أن :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \le \frac{EX}{\varepsilon} \Rightarrow P(X \ge \varepsilon) \le \frac{EX}{\varepsilon} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

و يمكن استنتاجها من المبرهنة مباشرة .

- ممّاً تقدّم سوف نصيغ متباينة تشيبتشيف على الشكل :

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توقع رياضي $EX = \mu$ و تباينه : $V(X) = \sigma^2$، عندئذ :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

<u>الإثبات</u> : لدينا :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \ge \varepsilon\right) = P\left((X - \mu)^2 \ge \varepsilon^2\right)$$

عندئذ لو عدنا إلى المبرهنة السابقة و بدلنا $g(X) = (X - \mu)^2$ و $K = \varepsilon^2$ حصلنا على المتباينة المطلوبة ، أي :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \ge \varepsilon\right) = P\left((X - \mu)^2 \ge \varepsilon^2\right) \le \frac{E(X - \mu)^2}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

و هو المطلوب .

- **ملاحظة (١) :**

يمكن الحصول على صيغة مكافئة لمتباينة تشيبتشيف من الصيغة السابقة ، أي :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \quad \Rightarrow 1 - P\left\{\left|X - \mu\right| < \varepsilon\right\} \le \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

و منه :

$$P\left(\left|X - \mu\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

و هي الصيغة المكافئة المطلوبة .

○ **ملاحظة (٢) :**

إن أهمية متباينة تشيبتشيف تكمن في إيجاد حد راجح للاحتمال دون الحاجة لمعرفة نوعية التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X و لكن بمعرفة كل من التوقع الرياضي و التباين له .

◈ **حالة خاصة من متباينة تشيبتشيف :**

لو بدلنا في المتباينة المذكورة كل ε بـ $h\sigma$ حيث $h \in R^{+}$ نجد أن :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \geq h\sigma\right) \leq \frac{\sigma^2}{h^2\sigma^2} \quad \Rightarrow$$

$$P\left(\left|X - \mu\right| \geq h\sigma\right) \leq \frac{1}{h^2}$$

و منه يمكن أن نكتب :

$$1 - P\left(\left|X - \mu\right| < h\sigma\right) \leq \frac{1}{h^2} \Rightarrow$$

$$P\left(\left|X - \mu\right| < h\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

$$P\left(\mu - h\sigma < X < \mu + h\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{h^2}$$

أي أن احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيماً في المجال $\left[\, \mu - h\sigma \,,\, \mu + h\sigma \,\right]$ لا يقل عن $1 - \frac{1}{h^2}$ وعلى سبيل المثال إذا كانت $h = 3$ فإن :

$$P\left(\mu - h\sigma < X < \mu + h\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

و هذا يدل على أنه من أجل متغير عشوائي X تباينه موجود ، فإن الاحتمال السابق لا يقل عن $\frac{8}{9}$.

- **مثال (١) :**

افرض X متغيراً عشوائياً أسياً وسيطه $\lambda = 2$، عندئذ استخدم متباينة تشيبتشيف للحصول على حد راجح للاحتمال $P\left(\left|X - \mu\right| > 1\right)$ و قارن ذلك مع القيمة الفعلية لهذا الاحتمال .

<u>الحل :</u>

بما أن المتغيرالعشوائي أسّي وسيطه $\lambda = 2$، عندئذ :

$$V(X) = \frac{1}{4} \ , EX = \frac{1}{2}$$

و بالتالي :

$$P\left(\left|X - \mu\right| > 1\right) \leq \frac{V\,(X)}{1} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$P\left(\left|X - \frac{1}{2}\right| > 1\right) \leq 0.25$$

أي أعلى قيمة للاحتمال لن تزيد عن 0.25 .

لكن من أجل حساب القيمة الفعلية للاحتمال يمكن أن نكتب :

$$P\left(|X-\mu|>1\right)=1-P\left(|X-\mu|\le 1\right)$$
$$=1-P(-1\le X-\frac{1}{2}\le 1)$$
$$=1-P(-\frac{1}{2}<X\le\frac{3}{2})$$
$$=1-P(0\le X\le 1.5)$$
$$=1-\left(F_X(1.5)-F_X(0)\right)$$
$$=1-\left(1-e^{-2(1.5)}-(1-e^{0})\right)$$
$$=1-\left(1-e^{-3}\right)=e^{-3}=\frac{1}{e^{3}}=0.0498$$

و بالمقارنة مع الحد الراجح نجد أن المتباينة محققة .

- **مثال (٢) :**

بفرض أن $X\sim N(20,9)$ ، عندئذ احسب الحد الأعلى لاحتمال الحدث $\{|X-\mu|\ge 6\}$ ، ثم قارن بينه و بين الاحتمال الحقيقي للحدث نفسه .

الحل:

بما أن المتغير العشوائي طبيعي له توقع $EX=20$ و $V(X)=9$ عندئذ :

$$P\left\{|X-\mu|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow$$
$$P\left\{|X-20|\ge 6\right\}\le\frac{9}{36}=\frac{1}{4}=0.25$$

أي الحد الأعلى لاحتمال الحدث $\{|X-20|\ge 6\}$ هو 0.25 .

$$
\begin{aligned}
P\left(\left|X-20\right|\geq 6\right) &= 1-P\left(\left|X-20\right|<6\right)\\
&= 1-P\left(-6<X-20<6\right)\\
&= 1-P\left(14<X<26\right)\\
&= 1-P\left(\frac{14-\mu}{\sigma}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{26-\mu}{\sigma}\right)\\
&= 1-P\left(\frac{14-20}{3}<Z<\frac{26-20}{3}\right)\\
&= 1-P\left(-2<Z<2\right)\\
&= 1-\left(F(2)-F(-2)\right)\\
&= 1-\left(2F(2)-1\right); F(2)+F(-2)=1\\
&= 2-2F(2) = 2-2\,(0.9772)\\
&= 2-1.9544 = 0.0556
\end{aligned}
$$

و هو الاحتمال الحقيقي للحدث المطلوب، حيث إنه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري لدينا :

$$F_Z(2) = 0.9772$$

- **مثال (٣):**

بفرض أن $X \sim N(\mu, 0)$ ، عندئذ أثبت أن :

$$P(X=\mu)=1$$

<u>الحل:</u>

$$P\left(\left|X-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

و هذا يعني أن احتمال الحدث $\left(\left|X-\mu\right|\geq\varepsilon\right)$ مساوٍ للصفر .

أي إنه يجب أن يكون $P(X=\mu)=1$.

- **مثال (٤):**

بفرض أن X متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda = 4$ عندئذ ، عيّن الحد الراجح لاحتمال الحدث $\left(|X - \mu| \geq 6\right)$ ، ثم قارن مع الاحتمال الفعلي لاحتمال هذا الحدث .

<u>الحل :</u>

بما أن X بواسوني وسيطه $\lambda = 4$ عندئذ: $EX = 4$ ، $V(X) = 4$ و بالتالي :

$$P\left(|X - \mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$P\left(|X - 4| \geq 6\right) \leq \frac{4}{36} \Rightarrow$$

$$P\left(|X - 4| \geq 6\right) \leq \frac{1}{9} \approx 0.11$$

و من ناحية أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} P\left(|X - 4| \geq 6\right) &= P(X \geq 10) \\ &= 1 - P\ X < 10) = 1 - P(X \leq 9) \\ &= 1 - F_X(9) \end{aligned}$$

و لدينا من جدول توزيع بواسون بالوسيط $\lambda = 4$ أن : $F_X(9) = 0.9914$.

و بالتالي الاحتمال الفعلي للحدث المطلوب هو :

$$P\left(|X - 4| \geq 6\right) = 1 - 0.9914 = 0.0081$$

و هنا نلاحظ أن القيمة الفعلية للاحتمال أقل بكثير من الحد الراجح .

(٥-٢) قانون الأعداد الكبيرة :

إذا كان X متغيراً عشوائياً له توقع $EX = \mu$ ، و له تباين $V(X) = \sigma^2$ ، و لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X ، عندئذ :

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon\right) = 0 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

الإثبات :

لدينا : $E\overline{X} = \mu$ و $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

و بتطبيق متباينة تشيبتشيف نجد :

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \frac{V(\overline{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2}$$

و بأخذ نهاية الطرفين بالمتباينة الأخيرة عندما $n \to \infty$ نجد :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\,\varepsilon^2} = 0$$

و بما أن الاحتمال غير سالب عندئذ :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

و هذا ما ندعوه بقانون الأعداد الكبيرة في شكله المبسط .

و يعبر هذا القانون على أن $\overline{X}$ مقدّر للوسيط μ و هي الفائدة التي يقدمها هذا القانون .

و هذا يلعب دوراً مهماً في الاحصاء الرياضي عندما تقدّر متوسط المجتمع μ (المجهول) من خلال الوسط الحسابي لمتغيرات العينة العشوائية المسحوبة من المجتمع المعطى .

- **ملاحظة (٣) :**

يوجد شكل مكافئ لقانون الأعداد الكبيرة نحصل عليه من الشكل السابق و هو :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1$$

و الذي يدل على أنه باحتمال قدره واحد، $\overline{X}$ يقترب من μ عندما $n \to \infty$ ، و يمكن أن ترمز لذلك بالشكل:

$$X \xrightarrow{\quad P \quad} \mu$$

- **مثال (٥) :**

أوجد حجم العينة العشوائية n التي يمكن أخذها للمتغير العشوائي X بحيث تحقق المتباينة :

$$P\left(\left| \overline{X} - \mu \right| \leq \frac{\sigma}{10} \right) \geq 0.95$$

<u>الحل :</u>

بما أن : $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{10}$ فإن :

$$P\left(\left| \overline{X} - \mu \right| \leq \frac{\sigma}{10} \right) \geq 1 - \frac{V(\overline{X})}{n\,\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\,\dfrac{\sigma^2}{100}}$$

$$= 1 - \frac{100}{n}$$

و منه :

$$0.95 = 1 - \frac{100}{n} \Rightarrow \frac{100}{n} = 0.05 \quad \text{ومنه}$$

$$n = \frac{100}{0.05} = \frac{10000}{5} = 2000$$

أي يجب أن يكون حجم العينة لـ X أكبر أو يساوي ٢٠٠٠ مشاهدة وفق معطيات المسألة

- **مثال (٦) :**

أوجد حجم العينة العشوائية n التي يمكن أخذها للمتغير العشوائي X الذي يخضع للتوزيع الطبيعي بوسيط أول μ و وسيط ثانٍ $\sigma^2 = 6$ ، بحيث تتحقق المتباينة :

$$P\left(\left| \overline{X} - \mu \right| < 0.8 \right) \geq 0.98$$

<u>الحل</u> :

بما أن $\varepsilon = 0.8$ نجد :

$$P\left(\left|\,\overline{X} - \mu\,\right| < 0.8\right) \geq 1 - \frac{\sigma^{2}}{n\,(0.8)^{2}} = 0.98 \quad \text{أي}$$

$$1 - \frac{6}{n\,(0.64)} = 0.98 \Rightarrow \frac{6}{n\,(0.64)} = 0.02 \Rightarrow$$

$$n = \frac{6}{(0.02)\,(0.64)} = \frac{6}{0.0128} \approx 469$$

أي حجم العينة اللازم أخذه يجب أن يكون أكبر أو يساوي ٤٦٩ مشاهدة وفق معطيات المسألة .

- **مثال (٧) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً ثنائياً وسيطاه الأول þ و الثاني n، أي :

$$V(X) = \sigma^{2} = n.\,\rho.\,q \qquad , \qquad EX = \mu = n.\,\text{þ}$$

عندئذ تتحقق المتباينة التالية :

$$P\left(\left|X - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^{2}} \Rightarrow$$

$$P\left(\left|X - \mu\right| \geq n.\,\rho\right) \geq 1 - \frac{n.\,\rho.\,q}{\varepsilon^{2}}$$

أما إذا كان X متغيراً عشوائياً برلونياً بوسيط þ، أي :

$$P_X(x) = \text{þ}^{\,x}(1 - \text{þ})^{1-x} \;\; , \;\; x = 0, 1$$

أو :

X	0	1
$P_X(x)$	q	ρ

و كانت $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة لـ X ، عندئذ من أجل أي ε موجب يتحقق :

$$P\left(\left| \overline{X} - \rho \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{V(X)}{n\,\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$P\left(\left| \overline{X} - \rho \right| \leq \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{\rho . q}{n\,\varepsilon^2}$$

علماً أن $EX = \mu = þ$ و $V(X) = þ. q$ و $\overline{X} = \dfrac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$

و بالتالي إذا أخذنا النهاية لطرفي المتباينة وجدنا :

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left| \overline{X} - \rho \right| \leq \varepsilon \right) = 1 \quad , \quad \forall \varepsilon > 0$$

و بهذا الشكل نكون قد برهنا على مبرهنة تدعى "مبرهنة برنولي" و التي تعتبر حالة خاصة من متباينة تشيبتشيف ، أي يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات عينة عشوائية لبرنولي وسيطp.

- **مثال (٨):**

بفرض X متغيراً عشوائياً جدول توزيعه الاحتمالي :

X	-1	0	1
$P_X(x)$	0.125	0.500	0.375

و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة عشوائية للمتغير X ، هل يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات العينة ؟

<u>الحل :</u>

أولاًً : نبحث عن كل من التوقع و التباين لـ X .

$$EX = (-1)\,(0.125) + (0)\,(0.5) + (1)\,(0.375) = 0.25$$

$$EX^2 = (1)\,(0.125) + (0)\,(0.5) + (1)\,(0.375) = 0.5$$

و عليه :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2 = 0.5 - (0.25)^2$$
$$= \frac{5}{10} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16} = 0.4375$$

و بما أن التباين لكل من متغيرات العينة موجود و يساوي 0.4375 أي محدود ، عندئذ يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات العينةالعشوائية لـ X ، حيث :

$$E\overline{X} = EX = 0.25$$
$$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{7}{16\,N}$$

و لدينا :

$$P\left(\left| \overline{X} - \frac{1}{4} \right| > \varepsilon \right) = \frac{V(X)}{n\,\varepsilon^2} = \frac{7}{16\,n\,\varepsilon^2} \quad \text{أي}$$
$$\lim_{n \to \infty} \left(\left| \overline{X} - \frac{1}{4} \right| > \varepsilon \right) = 0$$

- **مثال (٩) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي :

X	-2^i	0	2^i
$P_X(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

و لتكن $X_1 , X_2 , \ldots\ldots , X_n$ عينة عشوائية لـ X ، هل يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات العينة العشوائية ؟

الحل :

لدينا :

$$EX = \sum_x x\, P_x(x) = -2^i \frac{1}{3} + (0)\,(\frac{1}{3}) + 2^i \frac{1}{3}$$

$$= \frac{-2^i}{3} + \frac{2^i}{3} = 0$$

و بالتالي :

$$EX = E\overline{X} = 0 \quad \text{موجود}$$

و لدينا :

$$V(X) = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX^2 = \sum_x x\, P_x(x) = 2^{2i}.\frac{1}{3} + 2^{2i}.\frac{1}{3} = 2.\frac{2^{2i}}{3} = \frac{2^{2i+1}}{3}$$

و بالتالي :

$$V(X) = \frac{2^{2i+1}}{3} - 0 = \frac{2^{2i+1}}{3}$$

و منه :

$$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{2^{2i+1}}{3n} \quad ; \; i = 1, 2, ..., n$$

و بالتالي : نلاحظ أن تباين $\overline{X}$ غير موجود عندما $n \to \infty$ ، أي لا يمكن تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات العينة العشوائية .

- **مبرهنة تشيبتشيف :**

بفرض أن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة بحيث $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ التوقعات لهذه المتغيرات على الترتيب ، و بفرض أن التباين لكل من هذه المتغيرات محدود بثابت C.

عندئذ :

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\, \overline{X} - \overline{\mu}\,\right| \le \varepsilon\right) = 1$$

حيث :

$$\overline{\mu} = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n}{n} \quad , \quad \overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}$$

أو :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu_i}{n}$$

<u>الإثبات :</u>

لدينا :

$$EX_1 = \mu_1 \quad , \quad EX_2 = a_2 \quad , \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ , \quad EX_n = \mu_n$$

$$V(X_1) \le C \, , \quad V(X_2) \le C \, , \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ , V(X_n) \le C$$

حيث C ثابت .

و لدينا أيضاً :

$$E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(EX_1 + EX_2 + \ldots\ldots + EX_n)$$

$$= \frac{1}{n}(\mu + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n) = \frac{\mu_1 + \mu_2 + \ldots\ldots + \mu_n}{n}$$

$$V\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(V(X_1) + V(X_2) + \ldots\ldots + V(X_n)\right)$$

$$= \frac{1}{n}(\underbrace{C + C + \ldots\ldots + C}_{n \text{ مرة}}) = \frac{n\,C}{n^2} = \frac{C}{n}$$

عندئذ باستخدام متباينة تشيبتشيف نجد أن :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right| - \left|\frac{\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

و لكن لدينا :

$$V(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}) \leq \frac{C}{n}$$

عندئذ :

$$1 - \frac{V(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n})}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{\frac{C}{n}}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{C}{n\,\varepsilon^2}$$

وبالتالي يكون :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right| - \left|\frac{\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\,\varepsilon^2}$$

وبأخذ نهاية الطرفين في المتباينة الأخيرة عندما يكون حجم العينة كبيراً لدرجة كافية نجد:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right| - \left|\frac{\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n}{n}\right| \leq \varepsilon\right) = 1$$

نتيجة :

إذا كانت المتغيرات $X_1 , X_2 , ... , X_n$ مستقلة و لها التوزيع الاحتمالي نفسه أي لكل منها التوقع الرياضي μ نفسه، وكان التباين لكل منها محدوداً بالعدد الثابت C. عندئذ يتحقق:

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right| - \mu \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{C}{n\,\varepsilon^2}$$

و منه:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right| - \mu \leq \varepsilon\right) = 1$$

- **مثال (١٠) :**

بفرض أن $X_1 , X_2 , ... , X_n$ متغيرات مستقلة و لكل منها توقع رياضي μ و التباين لكل منها محدود بالعد الثابت $C = 25$ و يتحقق :

$$P\left(\left|\frac{X_1 , X_2 , ... , X_n}{n}\right| - \mu \leq 1\right) = 0.95$$

عندئذ عيّن قيمة n اللازمة من أجل تحقق ذلك .

الحل :

لدينا :

$$1 - \frac{C}{n\,\varepsilon^2} = 1 - \frac{25}{n} \geq 0.95 \Rightarrow$$

$$\frac{25}{n} \leq 0.05 \Rightarrow \frac{n}{25} \geq \frac{1}{0.05} \Rightarrow n \geq \frac{25}{0.05} = 500$$

أي حجم العينة اللازم لا يقل عن ٥٠٠ .

(٥-٣) مبرهنة النهاية المركزية :

بفرض X متغيراً عشوائياً له توقع $EX = \mu$، و له تباين $V(X) = \sigma^2$، و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X عندئذ المتغير :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

يتقارب من التوزيع الطبيعي المعياري عندما n كبيرة بقدر كافٍ ، أي $Z \sim N\,(0,1)$.

البرهان :

من أجل البرهان على صحة المبرهنة سوف نعتمد على أسلوب الدالة المولدة للعزوم لـ Z ، أي :

$$M_Z(t) = E\, e^{tZ} = E\, e^{t\, \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}$$

$$= E\, e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{1}^{n} X_i - n\,\mu\right)}$$

$$= E\, e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1-\mu)+\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_2-\mu)+\ldots\ldots+\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_n-\mu)}$$

$$= E\, e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_1-\mu)} \,.\, E\, e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_2-\mu)} \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots .\, E\, e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_n-\mu)}$$

و ذلك لأن المتغيرات العشوائية $X_1 , X_2 , \ldots\ldots , X_n$ مستقلة و بالتالي المتغيرات

$e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}(X_i-\mu)}$ ، $i = 1, 2, \ldots.. , n$ مستقلة .

و حسب مبرهنة التوقع لجداء متغيرات مستقلة يساوي جداء التوقعات الرياضية ، و منه :

$$M_Z(t) = M_{X_1-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots M_{X_n-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$= \left[M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) \right]^n$$

و بالاعتماد على منشور الدالة المولدة نجد :

$$M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} M'_{X-\mu}(0) + \frac{t^2}{2!\,\sigma(n)} M''_{X-\mu}(0) + \ldots\ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2\,n} + \frac{1}{n}\left[\frac{t^3}{3!\,\sigma^3\sqrt{n}} M'''_{X-\mu}(0) + \frac{t^4}{4!\,\sigma^4 n} M''''_{X-\mu}(0) + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2\,n} + \frac{1}{n}\left[\frac{t^3}{3!\,\sigma^3\sqrt{n}} E(X-\mu)^2 + \frac{t^4}{4!\,\sigma^4 n} E(X-\mu)^4 + \ldots\ldots\ldots \right]$$

$$= 1 + \frac{t^2}{2\,n} + \frac{1}{n}\Psi(n) \quad , \quad \Psi(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

عندئذ :

$$M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}$$

و بالتالي :

$$M_Z(t) = \left[M_{X-\mu}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}\right]^n$$

و بأخذ نهاية الطرفين في العلاقة الأخيرة $\infty \leftarrow n$ أي :

$$\lim_{n\to\infty} M_Z(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}\right]^n$$

و باستخدام حقيقة رياضية في التحليل الرياضي و هي :

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}\right]^{Cn} = e^{bc} \quad ; \quad (c, b \in R \; ; \lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(n)}{n} \to 0)$$

و بالتالي :

$$\lim_{n\to\infty} M_Z(t) = \lim_{n\to\infty}\left[1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{\Psi(n)}{n}\right]^n = e^{\frac{t^2}{2}}$$

علماً أن : $b = \frac{t^2}{2}$ و $c = 1$ و $\Psi(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

و الدالة الناتجة المولدة لـ Z هي دالة مولدة لعزوم متغير عشوائي طبيعي معياري ، و منه من أجل n كبيرة بقدر كافٍ يكون : $Z \sim N(0,1)$.

نتيجة :

بشكل عام ، نستنتج من مبرهنة النهاية المركزية أن الدرجة المعيارية (الكمية المعيارية) في أي توزيع احتمالي منقطع أو مستمر تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري عندما n كبيرة بقدر كافٍ .

- **مثال (١١) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً ثنائياً وسيطاه : الأول ρ و الثاني n فإن :

$$Z = \frac{X - n\,\rho}{\sqrt{n\,.\,\rho.\,q}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N\,(0\,,1)$$

- **مثال (١٢) :**

إذا كان X متغيراً بواسونياً عشوائياً وسيطه λ فإن :

$$Z = \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N\,(0\,,1) \quad \text{و}\ \lambda \to \infty$$

(٤-٥) مبرهنة دوموافر :

إذا كان X متغيراً عشوائياً ثنائياً وسيطاه الأول þ و الثاني n ، عندئذ من أجل $a\,,b \in R$ و قيم مختلفة لـ þ يكون :

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} C_K^n \, \text{þ}^K q^{n-K}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-n\text{þ}-\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}}^{\frac{b-n\text{þ}+\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$$

$$= P\left(Z \leq \frac{b-n\text{þ}+\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}\right) - P\left(Z \leq \frac{a-n\text{þ}-\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}\right)$$

$$= F_Z\left(\frac{b-n\text{þ}+\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}\right) - F_Z\left(\frac{a-n\text{þ}-\frac{1}{2}}{\sqrt{n\text{þ}q}}\right)$$

و هي نتيجة من نتائج مبرهنة النهاية المركزية مع ملاحظة إضافة نصف و طرح نصف في حدود التكامل ، و هو ما يسمى بـ "مصحح الاستمرارية" حيث ننتقل من متغير عشوائي منقطع إلى متغير عشوائي مستمر ، و هذا ما ندعوه بتقريب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي ، و هو من أهم تطبيقات مبرهنة النهاية المركزية.

- **مثال (١٣) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً ثنائياً وسيطاه الأول $\text{þ} = 0.5$ و الثاني $n = 10$ ، والمطلوب:

احسب $P(3 \leq X \leq 5)$ باستخدام :

١- التوزيع الثنائي .

٢- تقريب التوزيع الطبيعي .

الحل:

١") باستخدام التوزيع الثنائي نجد :

$$P(3 \le X \le 5) = \sum_{x=3}^{5} P(x) = \sum_{x=3}^{5} C_x^{10}\, þ^x q^{10-x}$$

$$= C_3^{10} (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^7 + C_4^{10} (\frac{1}{2})^4 (\frac{1}{2})^6 + C_5^{10} (\frac{1}{2})^5 (\frac{1}{2})^5 = 0.3174$$

٢") باستخدام التوزيع الطبيعي ، نلاحظ بالبداية أن :

أي $EX = n\,.\,þ = 10\,(\frac{1}{2}) = 5 \quad , \quad V(X) = n\,.\,þ\,.q = 10\,(\frac{1}{2})\,(\frac{1}{2}) = \frac{10}{4}$

$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = 1.58$

و منه :

$$P(3 \le X \le 5) = P(3 - \frac{1}{2} \le X \le 5 + \frac{1}{2})$$
$$= P(2.5 \le X \le 5.5)$$

علماً أن جودة التقريب هنا تعود إلى تناظر التوزيع الثنائي و خاصة من أجل قيم $þ$ القريبة من $\frac{1}{2}$ حيث نستطيع أن نكتب :

$$P(a \le X \le b) = P(a - \frac{1}{2} \le X \le b + \frac{1}{2})$$

$$P(3 \le X \le 5) = P(\frac{2.5 - \mu}{\sigma} \le \frac{X - \mu}{\sigma} \le \frac{5.5 - \mu}{\sigma})$$
$$= P(\frac{2.5 - 5}{1.58} \le Z \le \frac{5.5 - 5}{1.58})$$
$$= P(-1.58 \le Z \le -0.32)$$
$$= F_Z(-0.32) - F_Z(-1.58) = 0.6745 - 0.0571$$

حيث حصلنا على :

$$F\ (-0.32) = 0.6745$$

$$F\ (-1.58) = 0.0571$$

من جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

- **مثال (١٤) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً ثنائياً وسيطاه الأول $þ = 0.02$ و الثاني $n = 1000$ ، عندئذ احسب :

$$P\ (X \geq 28)$$

الحل :

$$P\ (X \geq 28) = \sum_{x=28}^{1000} C_x^{1000}\ (0.02)^x\ (0.98)^{1000-x}$$

و لكن حساب هذا الاحتمال ليس بالأمر السهل ، لذلك نحسب هذا الاحتمال عن طريق تقريب للتوزيع الطبيعي. أي :

$$P\ (X \geq 28) = P\ (X \geq 28 - \frac{1}{2}) = P(XX \geq 27.5)$$

$$= P\ (\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{27.5 - \mu}{\sigma})$$

حيث إن :

$$EX = \mu = n\ .\ \rho = 1000\ (0.02) = 20$$

$$\sigma^2 = V(X) = n\ .\ \rho\ .q = 1000\ (0.02)\ (0.98) = 19.6 \quad \text{أي}$$

$$\sigma_X = \sqrt{19.6} = 4.43$$

عندئذ :

$$P(X \geq 28) = P(Z \geq \frac{27.5 - 20}{4.43})$$
$$= P(Z \geq \frac{7.50}{4.43})$$
$$= P(Z \geq 1.96)$$
$$= 1 - P(Z < 1.69) = 1 - F_Z(1.69)$$
$$= 1 - 0.9545 = 0.0455$$

حيث حصلنا على $F(1.69) = 0.0455$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري .

- **مثال (١٥) :**

إذا كان X متغيراً عشوائياً دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq x \leq 1 \\ & ; \quad \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و لتكن $X_1, X_2, ..., X_{75}$ عينة عشوائية للمتغير العشوائي X ، عندئذ احسب $P(0.55 < \overline{X} < 0.60)$

<u>الحل :</u>

لدينا $n = 75 > 30$ عندئذ يمكن تطبيق مبرهنة النهاية المركزية ، أي :

$$P(0.55 < \overline{X} < 0.60) = P(\frac{0.55 - E\overline{X}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{\overline{X} - E\overline{X}}{\sigma_{\overline{X}}} < \frac{0.60 - E\overline{X}}{\sigma_{\overline{X}}})$$

علماً أن : $E\overline{X} = EX = \mu = \dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$

مع ملاحظة أن دالة الكثافة المعطاة دالة كثافة لمتغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $[0, 1]$.

$$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\frac{(b-a)^2}{12}}{75} = \frac{(b-a)^2}{(12)\,(75)} = \frac{1}{(12)\,(75)} = 0.0011$$

و منه :

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{0.0011} = 0.033$$

و هذا يعني أن : $\overline{X} \sim N\,(\frac{1}{2}, 0.0011)$

و بالتالي :

$$P\,(0.55 < \overline{X} < 0.60) = P\,(\frac{0.55-0.5}{0.33} < Z < \frac{0.60-0.5}{0.33})$$
$$= P\,(1.52 < Z < 3.03)$$
$$= F_Z(3.03) - F_Z(1.52)$$
$$= 0.9988 - 0.9357 = 0.0631$$

تمارين غير محلولة على الفصل الخامس

١) بفرض أن X متغير عشوائي مستمر منتظم على المجال $\left]-\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3}\right[$، عندئذ عين باستخدام متباينة تشيبتشيف حداً راجحاً لاحتمال الحدث $\left(|X - \mu| \geq K_{\sigma}\right)$ علماً أن $\varepsilon = \frac{3}{2}$.

٢) عيّن قيمة حدية لكل من :

١- $P(-4 < X < 20)$.

٢- $P(|X - 8| \geq 6)$.

علماً أن : $X \sim N(8, 9)$.

٣) بفرض أن كمية المطر التي تسقط في منطقة معينة تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 40$، و انحراف معياري ٢ .

عندئذ عيّن حداً راجحاً لاحتمال أن تكون كمية المطر في عام معين تختلف بـ 5 cm عن المتوسط ، و قارنه مع القيمة الفعلية للاحتمال .

٤) إذا كان $X \sim N(25, 16)$ ، عيّن حداً راجحاً لكل من الاحتمالين :

١- $P(|X - 25| \geq 12)$.

٢- $P(17 < X < 33)$.

٥) بفرض أن X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي :

X	-2^i	0	2^i
$P_X(x)$	2^{-2i-1}	$1-2^{-2i}$	2^{-2i-1}

و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_n$ عينة عشوائية لـ X ، هل نستطيع تطبيق قانون الأعداد الكبيرة على متغيرات هذه العينة ؟

٦) بفرض أن X متغير عشوائي برنولي وسيطه ρ ، و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_{100}$ عينة عشوائية لـ X ، عندئذ إذا كان $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i \quad , \quad \rho = 0.5$ فاحسب :

$$P(48 < Y < 52)$$

٧) بفرض أن $X \sim N(80 , 400)$ و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_{100}$ عينة لـ X ، و المطلوب حساب :

١- $P(82 < \overline{X} < 85)$.

٢- $P(\overline{X} > 77)$.

٨) إذا كان ٦٠% من الناخبين في مدينة كبيرة يؤيدون قضية ، فما احتمال أن تظهر عينة عشوائية حجمها $n = 100$ ناخب من هذه المدينة أغلبية لصالح القضية المذكورة ؟

٩) بفرض أن X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية :

$$f(x) = 1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

و لتكن $X_1 , X_2 , ... , X_{20}$ عينة عشوائية لـ X ، و ليكن المتغير $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$ ، عندئذ احسب :

١- $P(Y \le 9.1)$.

٢- $P(8.5 \le Y \le 11.7)$.

١٠) إذا كان X متغيراً عشوائياً غير سالب له توقع رياضي $EX = \mu$ ، عندئذ أثبت أن :

$$P(X > 2\mu) \le \frac{1}{2}$$

١١) إذا كانت الفترة الزمنية التي يقضيها شخص ما انتظاراً لخدمته في إحدى الندوات الطلابية تمثل متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} & ; \; x > 0 \\ 0 & ; \; \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

و المطلوب :

١_ عيّن كلاً من التوقع و التباين لـ X .

٢_ احسب $P\left(\left| X - \mu \right| \le (1.5)\,\sigma^2 \right)$.

٣_ باستخدام متباينة تشيبتشيف عين الحد الأدنى لاحتمال الحدث $\left(\left| X - \mu \right| \le (1.5)\,\sigma^2 \right)$ ، ثم بيّن معنى النتيجة التي نحصل عليها بشأن الفترة الزمنية اللازمة انتظاراً للخدمة .

١٢) بفرض أن بيانات الزواج الصادرة في شهر آب في إحدى المدن متغير عشوائي توقعه $EX = \mu = 124$ و تباينه هو $\sigma^2 = 56.25$. عندئذ باستخدام متباينة تشيبتشيف عيّن الحد الأدنى لاحتمال صدور عدد من بيانات الزواج يتراوح بين ٦٤ و ١٤٨ في شهر آب .

١٣) افرض أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي مفروض بحيث $EX = 3$ و $V(X) = 4$ باستخدام متباينة تشيبتشيف عيّن الحد الأدنى للاحتمال $P(-2 < X < 8)$.

١٤) إذا كان احتمال شفاء مريض من أحد أمراض الدم هو 0.4 ، و بفرض أن هنالك ١٥ مريض يعانون هذا المرض عندئذ المطلوب :

١ _ حساب احتمال شفاء ١٠ مرضى على الأقل من هذا المرض .

٢ _ حساب احتمال شفاء ٣ إلى ٨ من المرضى .

٣ _ احسب احتمال أن يشفى من هذا المرض ٥ مرضى تماماً .

٤ _ استخدم متباينة تشيبتشيف :

$$P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma)$$

لإيجاد معنى للقيمة $\mu \pm k\sigma$.

١٥) بفرض أن X متغير عشوائي جدول توزيعه الاحتمالي معطى بالشكل :

X	-1	0	1
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$

و المطلوب :

١_ عيّن كل من EX و $V(X)$.

٢_ احسب احتمال الحدث $\left(\mid X - \mu \mid < 2\sigma \right)$ بالحد الأدنى لمتباينة تشيبتشيف بحيث يكون احتمال أن يأخذ متغير عشوائي X قيمة بين $\mu + k\sigma$ و $\mu - k\sigma$ هو :

١) على الأقل 0.95 . ٢) على الأقل 0.99 .

١٦) بفرض أن X متغير عشوائي غير سالب ، و له توقع رياضي $EX = \mu < \infty$ ، عندئذ من أجل أي عدد حقيقي $K \geq 1$ تتحقق المتباينة $P(X \leq k\mu) \geq 1 - \frac{1}{k}$.

****

الفصل السادس

تحليل الانحدار و الارتباط

(٦-١) تمهيد :

في كثير من الأبحاث نهتم بمسألة دراسة التنبؤ بقيم متغير أو أكثر بدلالة متغير أو أكثر و على سبيل المثال :

١) العلاقة بين زيادة الانتاج الزراعي وتغيير كميات السماد المستخدم .

٢) العلاقة بين طول الأب و متوسط أطوال الأبناء .

٣) العلاقة بين حجم الطلب على سلعة معينة و سعرها .

٤) العلاقة بين حجم الدخل القومي و عدد السكان .

٥) العلاقة بين درجة الحرارة و درجة التبخر .

٦) العلاقة بين درجة الرطوبة و درجة التأكسد .

٧) العلاقة بين حجم أسرة و حجم إنفاقها .

مثل هذه المسائل و ما يشابهها التي تبحث بالعلاقة بين المتغيرات تندرج في إطار ما يدعى بالانحدار أو الارتباط ، علماً أن الانحدار (الانكفاء) يستخدم لتحديد نوع العلاقة بين الظاهرتين ، أما الارتباط يستخدم لدرجة تحديد هذه العلاقة و وجهتها (نوعها) ، و الغرض من ذلك يتمثل بامكانية التنبؤ بقيم أحد المتغيرات أو أكثر بدلالة متغير آخر أو أكثر .

و سوف ندرس تحليل الانحدار الخطي البسيط و الارتباط الخطي البسيط .

(٦-٢) شكل الانتشار :

نفترض أنه لدينا ظاهرتان (متغيران) الأولى X و الثانية Y ، و إن القيم المقابلة لقيم X يقابلها قيم مقابلة لقيم Y على الترتيب ، فمثلاً لو أخذنا n قياساً لـ (X, Y) فإننا نحصل على مجموعة الأزواج المرتبة :

$$\{ (x_i , y_i) \ ; i = 1, 2, ... , n \}$$

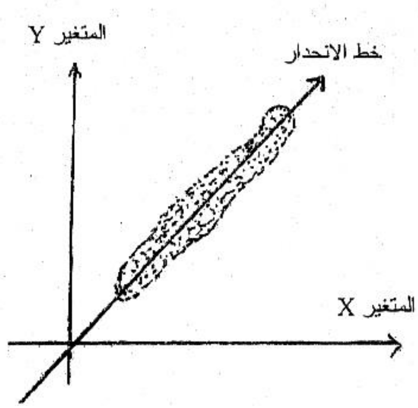
و التي يمكن تمثيلها بالجدول التالي :

قيم X	x_1	x_2	x_3	....	x_n
قيم Y	y_1	y_2	y_3	....	y_n

الآن إذا عرضنا قيم الظاهرتين و مثلناها في مستوى المحوريين الإحداثيين $o\,x\,y$ فنحصل على مخطط نقطي يدعى "شكل الانتشار" لهذا الجدول المعطى .

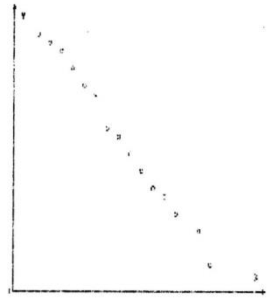
و حسب توضع نقاط الانتشار ، يمكن تحديد نوع العلاقة و الارتباط ، و هنا سوف نميز حالات مختلفة :

"١": لو كانت نقاط الانتشار على شكل حزمة خطية صاعدة من اليسار إلى اليمين ، بمعنى أنه كلما زادت قيم أحد المتغيرين X و Y تزداد قيم المتغير الآخر ، و هذا يدل على أن العلاقة طردية و الارتباط إيجابي كما في الشكل (٦-١) أي : $y = a\,x + b$.



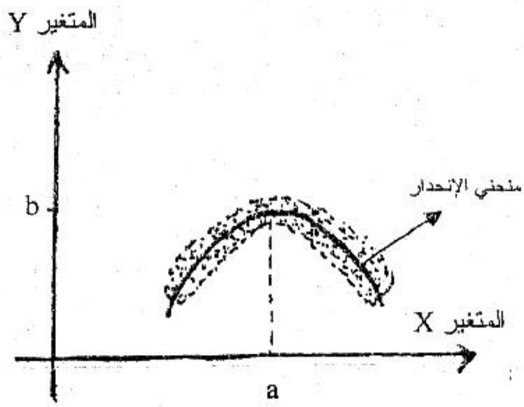
الشكل (٦-١) الارتباط إيجابي (العلاقة طردية)

"٢": أمّا إذا كانت نقاط الانتشار على شكل حزمة خطية هابطة من اليسار إلى اليمين ، بمعنى آخر كلما زادت قيم أحد المتغيرين تنقص قيم المتغير الآخر . فهذا يعني أن العلاقة عكسية و الارتباط سلبي كمـا في الشكل (٦-٢) و يكون : $y = a\,x + b$.



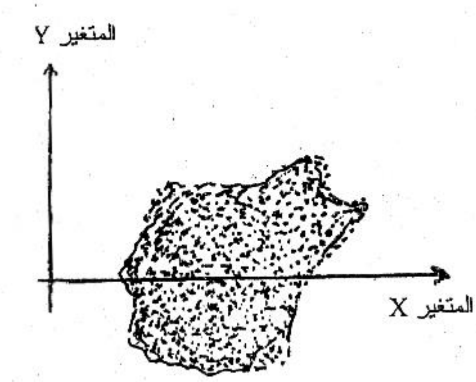
الشكل (٦-٢) الارتباط سلبي (العلاقة عكسية)

٣": و في الحالة التي تكون فيها نقاط الانتشار كما في الشكل (٦-٣) ، عندئذ علاقة الارتباط تكون من الشكل : $y = a x^2 + b x + c$ (قطع مكافئ) ، أي الانتشار يوضح أن وجود علاقة غير خطية بين قيم المتغيرين X و Y و تسمى بالعلاقة المنحنية .



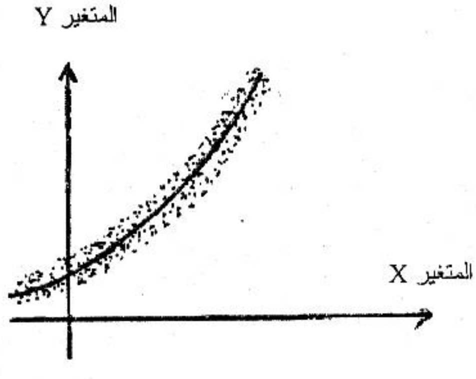
الشكل (٦-٣)

٤": إذا كانت نقاط الانتشار مبعثرة بشكل غير منتظم ، فهذا يعني أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين X و Y. كما في الشكل (٦-٤) :



الشكل (٦-٤)

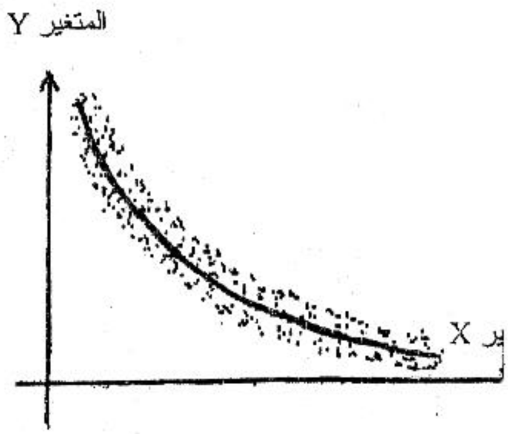
٥": إذا كانت نقاط الانتشار كما في الشكل (٦-٥) فإن علاقة الارتباط تكون علاقة غير خطية بين قيم المتغيرين و يمكن تمثيلها بالنموذج التالي : $y = a\,e^{b\,x}$.



الشكل (٦-٥)

الانتشار يبيّن وجود علاقة غير خطية بين قيم المتغيرين و التي يمكن تمثيلها بالنموذج $y = a\,e^{b\,x}$.

٦": إذا كانت نقاط الانتشار كما في الشكل (٦-٦) :

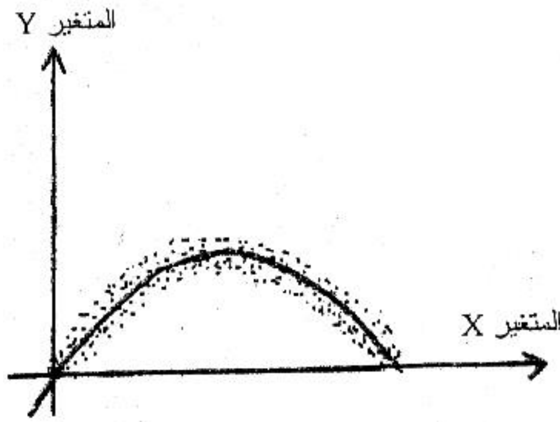


الشكل (٦-٦)

الانتشار يوضّح وجود علاقة غير خطية عكسية بين قيم المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج

غير الخطي $y = \frac{a}{x}$.

٧": إذا كانت نقاط الانتشار كما في الشكل (٦-٧) :



الشكل (٦-٧)

الانتشار يوضح وجود علاقة غير خطية بين المتغيرين يمكن تمثيلها بالنموذج غير الخطي $y = a \sin x$.

✓ **ملاحظة :**

عند دراسة علاقة ما بين متغيرين (ظاهرتين) X و Y أو ظاهرتين X و Y ، و كان هناك ارتباط بين هذين المتغيرين أو الظاهرتين X و Y فإنه يتكون لدينا تصوّر بأنه يمكن تقدير قيم أحد المتغيرين بدلالة الآخر . وإن العلاقة التي تربط المتغير التابع Y بالمتغير المستقل X تسمى "بمعادلة الانحدار" (معادلة انكفاء Y بالنسبة لـ X) و في الحالة التي تكون فيها العلاقة خطية بين X و Y أي من النموذج التالي :

$$y = a\,x + b \qquad (1-6)$$

عندئذ نقول بأن الارتباط بين X و Y هو وفق نموذج الارتباط الخطي البسيط ، و بالتالي نسمي المعادلة (٦-١) بمعادلة الانحدار أو بمعادلة التنبؤ عن قيم Y بدلالة X .

(٦-٤): معادلة خط الانحدار :

لنفرض أن X و Y يرتبطان بعضهما ببعض وفق النموذج الخطي الآتي :

$$y = a\,x + b$$

عندئذ مهمتنا تكمن في تقدير قيم كل من a و b على أساس عينة من القياسات الممثلة بالشكل الآتي :

$$(x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , \ldots\ldots\ldots , (x_n , y_n)$$

أي يوجد n نقطة يمكن تمثيلها في مستوى المحورين الاحداثيين $o\,x\,y$ ، و الطريقة المثالية لإيجاد تقدير لقيم كل من a و b هي طريقة المربعات الصغرى التي تعطينا أفضل تقدير للثابتين a و b و التي تعطى من خلال العلاقات :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} \qquad (2-6)$$

علماً أن :

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \qquad , \qquad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

و يتم الحصول على كل من a و b من فرضية الحصول على أصغر قيمة لمربع الخطأ بين القيمة على النموذج المعطى $\hat{Y}$ و بين القيمة الواقعية Y و لكافة عناصر العينة ، و يعبر عن ذلك بالعبارة الرياضية التالية:

$$E_i^2 = (y_i - \hat{y})^2 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

علماً أن E_i يمثل مقدار الخطأ الذي يتم تربيعه للتخلص من القيمة السالبة للخطأ ، و بالجمع لكافة قيم i نجد أن:

$$G = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

و باستخدام المشتقات الجزئية مرة لـ a و مرة لـ b و إعدامها فنجد القيمة الصغرى ، أي نفترض أن :

$$\frac{\partial G}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\big(y_i - (ax_i + b)\big)(-x_i)\right] = 0 \qquad (5-6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} \left[\big(y_i - (ax_i + b)\big)(-1)\right] = 0 \qquad (6-6)$$

و بتبسيط العلاقتين السابقتين نجد المعادلتين :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\,b + a\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (7-6)$$

$$\sum x_i\, y_i = b\sum x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (8-6)$$

و من المعادلة (٦-٧) نجد بالقسمة على n أن :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = b + a\overline{X} \Rightarrow \overline{Y} = b + a\,\overline{X} \quad \text{أي}$$

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X} \qquad (9-6)$$

و أخيراً بحل جملة المعادلتين (٦- ٧) و (٦-٨) نجد a و b بالشكل الذي عبرنا عنه بالعلاقتين (٦-٢) و (٦-٣) .

و من أجل التبسيط و الفهم نفرض أن :

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_i\,Y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i)\sum_{i=1}^{n} (Y_i)$$

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i)^2$$

$$S_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i)^2$$

حيث : $S_{yy} = S_y^2$, $S_{xx} = S_x^2$ و هما تقديرين غير متميزين لتباين x و لتباين y على التوالي ، و يستخدمان في قضايا التنبؤ و التقدير .

عندئذ يمكن أن نكتب :

$$a = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \quad , \quad b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

- **ملاحظة (١) :**

يمكن كتابة العلاقات (٦-٢) و (٦-٣) على الترتيب بالشكل :

$$a = \frac{\sum X_i\,Y_i - n\,\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\,\overline{X}^2} \quad , \quad b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

○ **ملاحظة (٢) :**

من معادلة خط الانحدار $y = a\,x + b$ واضح أن a تمثل ميل خط الانحدار ، و تعبر عن مقدار تغير y عندما تتغير x بمقدار وحدة واحدة ، أماّ b فتمثل طول الجزء الذي يقطعه الخط الممهد من المحور الرأسي حيث إنه يعطينا قيمة y عندما تكون x مساوية للصفر ، و تسمى أحياناً بالحد الأدنى عندما لا يمكن أن تكون x سالبة .

○ **ملاحظة (٣) :**

من الواضح أن :

n تمثل عدد الملاحظات للعينة .

$\sum X$ مجموع قيم المتغير المستقل .

$\sum Y$ مجموع قيم المتغير التابع .

$\sum X\,Y$ مجموع حاصل ضرب أزواج القيم المتناظرة للمتغيرين X و Y .

▪ **مثال (١):**

بفرض لدينا البيانات التالية :

X	1.2	0.8	1.0	1.3	0.7	0.8	1.0	0.6	0.9	1.1
Y	101	92	110	120	90	82	93	75	91	105

عندئذ عيّن قيم a و b بطريقة المربعات الصغرى لكل من النموذجين :

$$y = ax + b \quad , \quad x = by + a$$

الحل :

لنوجد قيم a و b بطريقة المربعات الصغرى لدينا :

$$\sum Y_i = a\,N + B \sum x_i\, y_i$$
$$\sum X\,Y = a \sum x_i + B \sum x_i^2$$

و لحساب $\sum x_i^2$ و $\sum x_i$ و $\sum y_i$ و $\sum x_i\, y_i$ من خلال الجدول التالي :

X	X_i	Y_i	$X_i\, Y_i$	$X_i^{\,2}$	Y_i^2
1	1.2	101	121.2	1.44	10201
2	0.8	92	73.6	0.66	8464
3	1.0	110	110.0	100	12100
4	1.3	120	156.0	1.96	14400
5	0.7	90	63.0	0.44	8100
6	0.8	82	65.0	0.64	6724
7	1.0	93	93.0	1.00	8644
8	0.6	75	450	0.36	5625
9	0.9	91	81.9	0.11	8281
10	1.1	105	115.1	1.21	11025
$\sum$	9.4	959	9.28	93569	924.4

لدينا :

$$\sum Y_i = a \sum X_i + n\, b$$

$$\sum X_i\, Y_i = a \sum X_i^{\,2} + b \sum X_i$$

و منه :

$$959 = (9.4)\,a + 10\,b$$
$$924.4 = (9.28)\,a + (9.4)\,b$$

و بحل جملة المعادلتين نجد أن :

$$b = 47.33 \quad , \quad a = 51.67$$

و تكون معادلة خط انحدار Y بالنسبة لـ X هي :

$$\tilde{Y} = (51.67)X + 47.33$$

هذا و يمكن ايجاد قيمة a و b من القوانين المتعلقة بـ a و b مباشرة :

$$a = \frac{\sum X_i\,Y_i - n\,\overline{X}\,\overline{Y}}{\sum X_i^2 - n\,\overline{X}^2} \quad , \quad b = \overline{Y} - a\,\overline{X}$$

و منه :

$$a = \frac{924.4 - 10\left(\frac{9.4}{10}\cdot\frac{959}{10}\right)}{9.28 - n\left(\frac{9.4}{10}\right)^2} = 51.67$$

$$b = 95.9 - (51.67)\,(0.94) = 47.33$$

و منه خط الانحدار يأخذ الشكل :

$$\tilde{Y} = (51.67)X + 47.33$$

○ **ملاحظة (٤) :**

في المثال السابق إذا أردنا إيجاد معادلة انحدار X على Y و هي :

$$X = \alpha\,Y + \beta$$

و منه يمكن حسابها مباشرة بالتعويض في المعادلتين :

$$\sum X_i = \alpha \sum Y_i + n \ \beta$$
$$\sum Y_i \ X_i = \alpha \sum Y_i^{\ 2} + \ \beta \sum Y_i$$

و باستخدام الجدول السابق نجد أن :

$$9.4 = 959 \ \alpha + 10\beta$$
$$924.4 = 93569 \ \alpha + 959 \ \beta$$

و بحل هاتين المعادلتين نجد أن :

$$\beta = -0.403$$
$$\alpha = 0.014$$

و منه المعادلة المطلوبة:

$$\tilde{X} = 0.014Y - 0.403$$

هذا و نترك الحساب مباشرة من العلاقتين :

$$\alpha = \frac{\sum X_i \ Y_i - n \ \overline{X} \ \overline{Y}}{\sum Y_i^2 - n \ \overline{Y}} \qquad , \qquad \beta = \overline{X} - \alpha \ \overline{Y}$$

و نترك ذلك للقارئ كتمرين .

- و في الحالة العامة تختلف معادلتي الانحدار Y على X مع X على Y ، و لا يتم التطابق بينهما إلاّ إذا كان الارتباط بين الظاهرتين أو المتغيرين ارتباطاً تاماً .

- **مثال (٢) :**

تمت دراسة عينة مؤلفة من ١٢ ملاحظة فتبين أن :

$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_i \ Y_i$	$\sum X_i^{\ 2}$
725	1011	61685	44475

و المطلوب : حساب معادلة انحدار Y على X .

الحل :

$$\alpha = \frac{n\sum X_i\, Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^{\,2} - \sum X_i^{\,2}}$$

$$= \frac{12\ (61685) - (725)\ (1011)}{12\ (44475) - (725)^2} = 0.897$$

$$\beta = \overline{Y} - \alpha\ \overline{X} = \frac{1011}{12} - (0.897)\left(\frac{725}{12}\right) = 30.056$$

و بالتالي خط الانحدار المطلوب هو :

$$\tilde{Y} = (0.897)X - 30.056$$

و هذا يمكن استخدام المعادلة التي توصلنا إليها للتنبؤ بقيمة المتغير التابع Y عندما يأخذ المتغير المستقل X قيمة محددة و التي قد تكون من ضمن الملاحظات الموجودة في العينة أو من خارج ملاحظات العينة .

وعلى سبيل المثال إذا عدنا إلى معادلة انحدار Y على X في المثال السابق والتي كانت:

$$\tilde{Y} = (51.67)X - 47.33$$

و فرضنا أن المتغير $X = 1$ و هي إحدى الملاحظات للعينة ، وجدنا أن القيمة المتنبئ بها للمتغير التابع Y وهي : ٩٩ ، في حين أن القيمة الفعلية المقابلة هي ٩٣ أو ١١٠ ، مماّ يدل على وجود عوامل أخرى مؤثرة غير X ، وواضح أنه كلما زاد تأثير تلك العوامل كلما زاد الفرق بين القيمة الفعلية و القيمة المتنبئ بها باستخدام المعادلة ، و هذه دلالة على ضعف في الارتباط بين الظاهرتين أو المتغيرين و العكس صحيح ، أي كلما قربت القيمة المتوقعة أو المتنبئ بها من القيمة الفعلية دل ذلك على زيادة درجة الارتباط و القيمة المتوقعة هي قيمة متوسطة للمتغير التابع يتجه إليها كلما زاد حجم العينة .

- **ملاحظة (٥) :**

يمكن استخدام معادلة خط الانحدار في حساب القيمة التقديرية للمتغير التابع عندما يأخذ المتغير المستقل قيمة تقع خارج حدود العينة . باستخدام المعادلة السابقة نفسها فعلى سبيل المثال عندما $x = 2.0$ فإن :

$$\tilde{Y} = (51.67)(2) - 47.33 = 150.67$$

- **ملاحظة (٦) :**

إن التنبؤ يعتمد على صحة الفرض الأساسي الخاص بنوع العلاقة بين الظاهرتين أو المتغيرين محل الدراسة و مدى استمرارية هذا الفرض.

- **ملاحظة (٧) :**

إن خط الانحدار الذي حصلنا عليه بطريقة المربعات الصغرى (خط المربعات الصغرى) يمر بنقطة الوسطين الحسابيين للمتغيرين أي إنه يمر بالنقطة $(\overline{X}, \overline{Y})$ و هذا واضح من المعادلتين الطبيعيتين التي يحققها خط الانحدار $Y = a\,X + b$ ، و المعادلة $\sum Y_i = a \sum X_i + n\,b$ ، و بقسمة هذه المعادلة على عدد الملاحظات نحصل على :

$$\frac{\sum Y_i}{n} = a\,\frac{\sum X_i}{n} + b \Rightarrow \overline{Y} = a\,\overline{X} + b$$

و بطرح هذه المعادلة الأخيرة من معادلة خط الانحدار نحصل على :

$$(Y - \overline{Y}) = a\,(X - \overline{X})$$

- **مثال (٣) :**

الجدول التالي يوضح درجات مادة الرياضيات X و درجة مادة الفيزياء Y لعشرة من طلاب الشهادة الثانوية العامة خلال الامتحان النهائي للعام الدراسي ٢٠٠٩-٢٠١٠ .

X	55	40	58	40	55	50	33	56	30	42
Y	36	25	34	30	35	30	22	35	22	25

و المطلوب :

١- أوجد معادلة خط الانحدار Y بالنسبة لـ X .

٢- أوجد متوسط درجات الطلاب في الفيزياء الذين حصلوا على ٤٦ درجة في مادة الرياضيات .

<u>الحل :</u>

١": من أجل تعيين خط انحدار Y على X و هو $Y = a X + b$.

لنشكل الجدول التالي من أجل تبسيط الحسابات :

القياس	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i Y_i$		
١	55	36	3025	1296	1980		
٢	40	25	1600	625	1000		
٣	58	34	3364	1156	1972		
٤	40	30	1600	900	1200		
٥	55	35	3025	1225	1925		
٦	50	30	2500	900	1500		
٧	33	22	1089	484	726		
٨	56	35	3136	1225	1960		
٩	30	22	900	484	660		
١٠	42	25	1764	625	1050		
$\sum$	459	294	22003	8920	13973		

عندئذ :

$$a = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{n\sum_{i=1}^{10} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{10} (x_i) \sum_{i=1}^{10} (y_i)}{n\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{10} (x_i)^2}$$

$$= \frac{10\,(13973) - (459)\,(294)}{10\,(22003) - (459)^2} = \frac{139730 - 134946}{220030 - 210681}$$

$$= \frac{4784}{9349} \approx 0.512$$

لدينا :

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X} \quad , \quad \overline{X} = 45.9 \quad , \quad \overline{Y} = 29.4 \quad \text{أي}$$

$$b = 29.4 - (0.512)\,(45.9) = 29.4 - 23.5 = 6$$

و بالتالي تكون معادلة خط الانحدار :

$$\tilde{Y} = 0.512X + 6$$

و هذا المستقيم يمر من النقطتين : (95.9 ,29.4) و (0,6) .

٢": من أجل $x = 46$ نجد بعد التعويض في معادلة الانحدار :

$$\tilde{Y} = (0.512)(46) + 6 = 29.552$$

أي متوسط درجات الطلاب في الفيزياء الذين حصلوا على ٤٦ في الرياضيات هو (29.55) أو تقريباً ٣٠ درجة .

○ **ملاحظة :**

إذا كان السؤال هو يمكن معرفة متوسط عدد الدرجات في الرياضيات إذا كان متوسط الدرجات في الفيزياء ٣٥. عندئذ نجد :

$$\tilde{X} = \frac{y - 6}{0.512} = \frac{35 - 6}{0.512} = 56.6$$

أي إذا كان متوسط الدرجات في الفيزياء ٣٥ فإن متوسط الدرجات في الرياضيات هو ٥٧ درجة .

- **مثال (٤):**

بفرض لديك البيانات التالية :

X	1	2	3	4	4	2	5
Y	3	5	6	9	8	4	9

و المطلوب :

١ـ احسب معادلة انحدار Y على X.

٢ـ عيّن القيمة التقديرية لـ Y عندما $X = 4$.

الحل :

١": من أجل التوصل إلى معالة الانحدار Y على X نقوم بإنشاء الجدول المساعد التالي:

القياس	X	Y	XY	X^2	Y^2
١	1	3	3	1	9
٢	2	5	10	4	25
٣	3	6	18	9	36
٤	4	9	36	16	81
٥	4	8	32	16	64
٦	2	4	8	4	16
٧	5	9	45	25	81
$\sum$	21	44	152	75	312

عندئذ :

$$a = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{n\sum_{1}^{7} x_i\, y_i - \sum_{1}^{7} (x_i) \sum_{1}^{7} (y_i)}{n\sum x_i^{\,2} - \sum_{1}^{10} (x_i)^2}$$

$$= \frac{7\,(152) - (21)\,(44)}{7\,(75) - (21)^2} \approx 1.667$$

و لدينا : $3 = \frac{21}{7} = \frac{\sum_{i=1}^{7} X_i}{7} = \overline{X}$ و $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{7} Y_i}{7} = \frac{44}{7} \approx 6.3$

عندئذ :

$$b = \overline{Y} - a\,\overline{X} = 6.2 - (1.667)\,(3) \approx 1285$$

عندئذ تأخذ معادلة انحدار Y على X الشكل التالي :

$$Y = 1.285 + (1.667)\; X$$

٢": بتعويض $X = 4$ في معادلة الانحدار نحصل على القيمة التقديرية لـ Y و هي :

$$\tilde{Y} = 1.285 + (1.667)(4) = 7.953$$

- **مثال (٥) :**

إذا علمت أنه في دراسة عينة مؤلفة من ٦ ملاحظات كان :

$$\sum_{i=1}^{6} X_i\, Y_i = 114 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} X_i^{\,2} = 154 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} X_i = 28 \quad , \quad \sum_{i=1}^{6} Y_i = 27.5$$

و المطلوب :

١- عيّن معادلة انحدار Y على X .

٢- حساب القيمة التقديرية لـ Y عندما $x = 7$.

الحل :

١": لدينا :

$$a = \frac{S_{X\,Y}}{S_{XX}} = \frac{n\sum_{1}^{6} x_i\ y_i - \left(\sum_{1}^{6}(x_i)\right)\left(\sum_{1}^{6}(y_i)\right)}{n\sum_{1}^{6} x_i^{\ 2} - \left(\sum_{1}^{6} x_i\right)^2}$$

$$= \frac{6\,(114) - (28)\,(27.5)}{6\,(154) - (28)^2} \approx -0.6143$$

و بالتالي :

$$b = \frac{27.5}{6} + (0.6143)\,(\frac{28}{6}) = 7.45$$

و منه معادلة انحدار Y على X :

$$\tilde{y} = (1.285)x + 7.45$$

٢": إذا كانت $x = 7$ فإن القيمة التقديرية لـ Y هي :

$$\tilde{Y} = (-0.6143)(7) + 7.45 = 3.1499$$

(٦-٥) معامل الارتباط :

إذا عدنا إلى المثال ما قبل السابق و نظرنا إلى شكل الانتشار لنجد ارتباط خطي بين المتغيرين X و Y ، مع ملاحظة أن أغلبية النقاط تقع بالقرب من مستقيم الانحدار أو تقع على هذا المستقيم .

من الواضح أن الارتباط بين ظاهرتين X و Y يعني أن التغير في أحدهما يرافقه تغيّر في الآخر، أي إن الارتباط يدرس ميل الظاهرتين للتغير معاً.

- و من أهم مقاييس الارتباط :

٣") معامل الارتباط الخطي لكارل بيرسون :

يحسب كارل بيرسون المتوسط الحسابي لنواتج ضرب كل زوج من الملاحظات معبراً عنها بوحدات معيارية كمقياس لدرجة الارتباط الخطي بين الظاهرتين . بحيث لو كانت العلاقة بين الظاهرتين غير خطية فهذه الطريقة لا تصلح كمقياس للارتباط .

لذا من أجل هذا الأمر يفضل استخدام شكل الانتشار كخطوة أولى للتأكد من طبيعة العلاقة قبل تطبيق معامل بيرسون لقياس مدى قوتها .

يعرف معامل الارتباط لبيرسون و الذي نرمز له بالرمز : r بالعلاقة التالية :

$$r = \frac{1}{n}\left\{\left(\frac{X_1 - \overline{X}}{S_X}\right).\left(\frac{Y_1 - \overline{Y}}{S_Y}\right) + \left(\frac{X_2 - \overline{X}}{S_X}\right).\left(\frac{Y_2 - \overline{Y}}{S_Y}\right) + \dots\dots\dots + \left(\frac{X_n - \overline{X}}{S_X}\right).\left(\frac{Y_n - \overline{Y}}{S_Y}\right)\right\}$$

علماً أن S_X تمثل الانحراف المعياري للمتغير X او الظاهرة X، و S_Y يمثل الانحراف المعياري للمتغير Y أو الظاهرة Y . و $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي لملاحظات الظاهرة X ، و $\overline{Y}$ يمثل الوسط الحسابي لملاحظات الظاهرة Y .

n يمثل عدد الملاحظات لكل من الظاهرتين X و Y، وعلى ذلك يمكن التعبير عن معامل ارتباط بيرسون بالمعادلة التالية :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{n\, S_X S_Y}$$

و إذا كتبنا للاختصار $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = S_{XY}$، فيصبح معامل ارتباط بيرسون على الشكل :

$$r = \frac{S_{XY}}{n\, S_X S_Y} \; ; \quad S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2 \quad , \; S_Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$$

■ **مثال (٦) :**

بفرض لديك البيان الإحصائي التالي :

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

عندئذ احسب معامل الارتباط بين X و Y .

الحل :

	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
	X	Y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	1	1	-6	-4	24	36	16
	3	2	-4	-3	12	16	9
	4	4	-3	-1	3	9	1
	6	4	-1	-1	1	1	1
	8	5	1	0	0	1	0
	9	7	2	2	4	4	4
	11	8	4	3	12	16	9
	14	9	7	4	28	49	16
$\sum$	56	40	0	0	84	132	56

من الجدول نجد أن :

$$S_{XY} = \sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 84$$

$$S_X^{\ 2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8}(132) = 16.5 \Rightarrow S_X = 4.06$$

$$S_Y^{\ 2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{8}(56) = 7 \Rightarrow S_Y = 2.65$$

و منه معامل الارتباط :

$$r = \frac{S_{XY}}{n\, S_X S_Y} = \frac{84}{8\,(4.06)\,(2.65)} = \frac{84}{83.94} = 0.977$$

أي قيمة معامل الارتباط قريبة من الواحد ، و هو ما يدل على وجود ارتباط قوي و بنفس الوقت يدل على طردية العلاقة بين المتغيرين .

- **ملاحظة (١) :**

يقيس معامل الارتباط قوة العلاقة الخطية بين الظاهرتين X و Y ، وجهتها (عكسية – طردية) .

- **ملاحظة (٢) :**

يمكن تصنيف درجات الارتباط حسب ما يلي :

١) إذا كانت قيمة معامل الارتباط مساوية $r = 1$ فإن الارتباط يكون إيجابياً تاماً .

٢) إذا كانت قيمة معامل الارتباط مساوية للناقص واحد $r = -1$ فإن الارتباط يكون سلبياً تاماً .

٣) إذا تحقق الشرط $1 > r \geq 0.9$ فإن الارتباط عالٍ جداً و طردي .

٤) إذا تحقق الشرط $-0.9 \geq r > -1$ فإن الارتباط عالٍ جداً و عكسي .

٥) إذا تحقق الشرط $0.9 > r \geq 0.7$ فإن الارتباط عالٍ و طردي .

٦) إذا تحقق الشرط $0.7 \geq r > -0.9$ فإن الارتباط عالٍ .

٧) إذا تحقق الشرط $0.7 > r \geq 0.5$ فإن الارتباط متوسط و طردي .

٨) إذا تحقق الشرط $-0.5 \geq r > -0.7$ فإن الارتباط عكسي و متوسط.

٩) إذا تحقق الشرط $0.5 > r \geq 0.2$ فإن الارتباط طردي و ضعيف.

١٠) إذا تحقق الشرط $-0.2 \geq r > -0.5$ فإن الارتباط عكسي و ضعيف .

١١) إذا تحقق الشرط $0 < r < 0.2$ فإن الارتباط طردي و ضعيف جداً.

١٢) إذا تحقق الشرط $-0.2 < r < 0$ فإن الارتباط عكسي و ضعيف جداً.

- **مثال (٧) :**

إذا عدنا للمثال السابق الذي كانت فيه قيمة معامل الارتباط مساوية لـ $r = 0.977$ فنقول بأن الارتباط طردي و عالٍ جداً .

- **ملاحظة (١) :**

إن قيمة معامل الارتباط لا تزيد عن الواحد و لا تنقص عن الناقص ١ إي أن :

$$r \in [-1, +1]$$

- **ملاحظة (٢) :**

القيم الموجبة للارتباط تحدث عندما يكون هنالك توافق بين المتغيرين X و Y . أي إن تغير قيم Y يتوافق مع تغير قيم X ، كما أن انخفاض قيم x يتوافق مع انخفاض قيم y .

- **ملاحظة (٣) :**

القيم السالبة للارتباط تحدث عندما لا يكون هناك توافق في تغير قيم X و المتغيرين X و Y أي تغير قيم X يوافقه تناقص في قيم Y أو بالعكس .

- **ملاحظة (٤) :**

يعطى معامل بيرسون للارتباط بالعلاقة التالية :

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\,.\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}}$$

- **مثال (٨) :**

احسب معامل بيرسون للارتباط بين الظاهرتين X و Y التاليتين :

X	1	3	4	6	8	10
Y	2	6	7	10	15	20

<u>الحل :</u>

نشكل الجدول التالي :

X	X_i	Y_i	$X_i\ Y_i$	$X_i^{\ 2}$	Y_i^2
1	1	2	2	1	4
2	3	6	18	9	36
3	4	7	28	16	49
4	6	10	60	36	100
5	8	15	120	64	225
6	10	20	200	100	400
$\sum$	32	60	428	226	814

و بتطبيق العلاقة في الملاحظة الأخيرة نجد أن :

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\ y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}\ .\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2} - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}}$$

$$= \frac{6\ (428) - (32)\ (60)}{\sqrt{6\ (226) - (32)^2}\ .\ \sqrt{6\ (814) - (60)^2}} \qquad \simeq 0.99$$

هذا يعني أن الارتباط طردي و عالٍ جداً.

○ **ملاحظة (٥) :**

لقد تبين أن خط الانحدار الخطي البسيط المنجز بطريقة المربعات الصغرى يمر بنقطة الوسطين الحسابيين للظاهرتين أو للمتغيرين أي إنه يمر بالنقطة $(\overline{X}, \overline{Y})$ و هذا ما تم توضيحه في ملاحظة سابقة .

و حصلنا على : $Y - \overline{Y} = a (X - \overline{X})$

عندئذ من المعادلة :

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})}$$

و يمكن إثبات أنّ :

$$a = \rho \frac{S_Y}{S_X}$$

و بالتالي يمكن أن نكتب :

$$Y - \overline{Y} = \rho \frac{S_Y}{S_X} (X - \overline{X})$$

و بإعادة ترتيب المعادلة الأخيرة نجد أن معادلة خط الانحدار تكتب بالشكل :

$$Y = \overline{Y} + \rho \frac{S_Y}{S_X} (X - \overline{X})$$

حيث أن :

$\hat{Y}$ القيمة التقديرية للمتغير التابع Y .

$\overline{X}$ و $\overline{Y}$ الوسيطان الحسابيان للظاهرتين X و Y .

S_X و S_Y الانحرافان المعياريان للظاهرتين .

و تسمى الكمية $\rho \frac{S_Y}{S_X}$ بمعامل انحدار Y على X .

و تساوي ميل خط الانحدار إذا علمنا قيمة معامل الارتباط و الانحراف المعياري لكل من المتغيرين محل الدراسة .

- **مثال (٩) :**

بفرض لديك البيانات التالية :

X	1	3	4	6	8	9	11	14
Y	1	2	4	4	5	7	8	9

المطلوب :

حساب معادلة انحدار Y على X اعتماداً على معامل ارتباط بيرسون .

<u>الحل :</u>

من البيانات المعطاة يمكننا بسهولة أن نحصل على :

$$\overline{X} = 7 \ , \ \overline{Y} = 5 \ , \ \ \rho = 0.97 \ \ , \ \ S_X = 4.06 \ , \ S_Y = 2.65$$

و منه بالتعويض في العلاقة :

$$\tilde{Y} = \overline{Y} + \rho \frac{S_Y}{S_X}(X - \overline{X})$$

$$\tilde{Y} = 5 + (0.97)\frac{2.65}{4.06}(X - 7)$$

$$\tilde{Y} = 0.6 + 0.63\,X$$

علماً أنه إذا أخذت X القيمة صفر فإن القيمة التقديرية لـ Y هي 0.6 ، مع العلم أن ميل خط الانحدار هو 0.63 و هو موجب ، و مما يدل على أن العلاقة بين المتغيرين X و Y هي علاقة طردية .

- **ملاحظة ٦) :**

يمكن استخدام معادلة الانحدار في المثال السابق في التنبؤ الإحصائي كما ذكرنا سابقاً ، وعلى سبيل المثال إذا فرضنا $X = 9$ فإن القيمة التقديرية لـ $\tilde{Y}$ هي :

$$\tilde{Y} = 0.6 + 0.63\,(9) = 0.6 + 5.67 = 6.27$$

و هي تختلف عن القيمة الفعلية المقابلة لقيمة X المعطاة في الجدو لو هي ٧ ، وهذا يعكس تأثير العوامل الأخرى التي تؤثر على المتغير التابع و لم تؤخذ في الحسبان ، و هذا يدل على أنه كلما زاد الفرق بين القيمة الفعلية و القيمة النظرية المحسوبة باستخدام خط الانحدار على ضعف درجة الارتباط بين الظاهرتين والعكس صحيح .

- **ملاحظة (٧) :**

يمكن حساب معادلة خط الانحدار X على Y من العلاقة :

$$\tilde{X} = \overline{X} + \rho \frac{S_X}{S_Y} (Y - \overline{Y})$$

حيث ندعو الكمية $\rho \frac{S_X}{S_Y}$ بمعامل انحدار X على Y.

- **مثال (١٠) :**

استخدم المثال السابق لإيجاد معادلة انحدار X على Y.

<u>الحل :</u>

بالتعويض في العلاقة :

$$\tilde{X} = \overline{X} + \rho \frac{S_X}{S_Y} (Y - \overline{Y})$$

$$\tilde{X} = 7 + (0.97) \frac{4.06}{2.65} (Y - 5)$$

$$= - 0.43 + 1.49\, Y$$

و إذا فرضنا $Y = 10$ عندئذ :

$$\tilde{X} = - 0.43 + 1.49\,(10) = 14.47$$

و هي القيمة التقديرية لـ X عندما $Y = 10$ ، أي يمكن استخدام هذه المعادلة في التنبؤ لقيم X المناظرة لقيم Y خارج حدود المشاهدات المستخدمة مع ملاحظة نفس التحفظات التي سبق الإشارة إليها .

- **ملاحظة (٨):**

إذا رسمنا خطي الانحدار في رسم بياني واحد نجد أنهما يتقاطعان في النقطة التي إحداثيها الأفقي يساوي المتوسط الحسابي لملاحظات المتغير X و إحداثيها العمودي يساوي المتوسط الحسابي لملاحظات المتغير Y علماً أن هذه النقطة تحقق معادلتي خط الانحدار.

و يمكن أن ننظر لمعامل الارتباط على أنه مقياس لمدى البعد بين خطي الانحدار .

- **ملاحظة (٩) :**

عندما يكون معامل الارتباط معدوماً ، أي لا يوجد ارتباط خطي ، عندئذ نجد أن خطي الانحدار يشكلان زاوية قائمة، أما في الحالة التي يكون فيها الارتباط تاماً فإن خطي الانحدار يتطابقا، أي أنه كلما تقارب خطا الانحدار من بعضهما كان ذلك دليلاً على قوة الارتباط بين الظاهرتين X و Y محل الدراسة .

- **ملاحظة (١٠) :**

إذا نظرنا إلى معادلتي خط الانحدار :

$$\tilde{X} = \overline{X} + \rho \frac{S_X}{S_Y} (Y - \overline{Y})$$

$$\tilde{Y} = \overline{Y} + \rho \frac{S_Y}{S_X} (X - \overline{X})$$

نجد أن حاصل ضرب معاملي الانحدار هو مربع معامل الارتباط و الذي ندعوه "بمعامل التحديد" ، أي :

$$R^2 = \left(\rho \frac{S_Y}{S_X} \right) . \left(\rho \frac{S_X}{S_Y} \right)$$

أي أن معامل الارتباط هو الجذر التربيعي لحاصل ضرب معاملي الانحدار حيث أن معامل الانحدار يساوي ميل خط الانحدار .

▪ **مثال (١١) :**

بفرض أن معادلتي خط الانحدار :

$$\tilde{Y} = 4.0 + (0.5)\ X$$

$$\tilde{X} = 2.4 + (0.61)\ Y$$

المطلوب : حساب معامل الارتباط بين الظاهرتين .

<u>الحل</u> :

لدينا :

$$R^2 = (0.51).(0.61) = 0.305 \Rightarrow \rho = 0.55$$

و إشارته تتوافق مع إشارة معامل x أو معامل y من المعادلتين فالعلاقة طردية .

○ **ملاحظة (١١) :**

لاحظنا ممّا تقدّم أن القيم الفعلية لن تقع كلها على خط الانحدار بل سيقع قسم منها على خط الانحدار و الآخر ملاصق له في حين يقع البعض بعيداً عنه . و بتعبير آخر نلاحظ أن هناك اختلاف بين القيم المقدّرة لمعادلة خط الانحدار و القيم الفعلية ، لذا فإننا نحتاج إلى مقياس لمدى تشتت القيم الفعلية حول خط الانحدار مقياس لدرجة الدقة في حساب القيم المقدّرة للمتغير كتابع .

✓ **تنـويـه** :

التشتت حول المتوسط الحسابي يقاس بالجذر التربيعي لمتوسط مربع الانحرافات عن المتوسط الحسابي، هذا و يمكن حساب التشتت حول خط الانحدار باستخدام الأسلوب نفسه أي بمتوسط مربعات انحرافات النقط الفعلية عن الخط ، أي بمعنى أنه يمكن حساب الخطأ المعياري لمعادلة انحدار Y على X باستخدام العلاقة:

$$S_{\tilde{Y}} = \sqrt{\frac{\sum\left(Y - \tilde{Y}\right)^2}{n-2}}$$

علماً أن :

$S_{\hat{Y}}$ هي الخطأ المعياري للقيم المقدّرة .

Y القيم الفعلية .

$\tilde{Y}$ القيم المقدرة (النظرية) باستخدام معادلة الانحدار .

n عدد الملاحظات أو المشاهدات .

- **ملاحظة (١٢) :**

يمكن حساب الخطأ المعياري باستخدام العلاقة :

$$S_{\hat{Y}} = S_Y \sqrt{1 - R^2}$$

علماً أن:

$S_{\hat{Y}}$ الخطأ المعياري لانحدار Y على X .

S_Y الانحراف المعياري للمتغير Y .

R^2 معامل التحديد (مربع معامل الارتباط) .

علماً أننا استخدمنا معادلة انحدار Y على X .

- **ملاحظة (١٣) :**

إذا استخدمنا معادلة انحدار X على Y نجد أن :

$$S_{\tilde{X}} = S_X \sqrt{1 - R^2}$$

- **ملاحظة (١٤) :**

لقد سمينا مربع معامل الارتباط و الذي يرمز له بالرمز R^2 "بمعامل التحديد" و الذي يعرف أيضاً بأنه نسبة التباين المفسر إلى التباين الكلي في إحدى الظواهر أو المتغيرات ، أي إن :

$$R^2 = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين الكلي}}$$

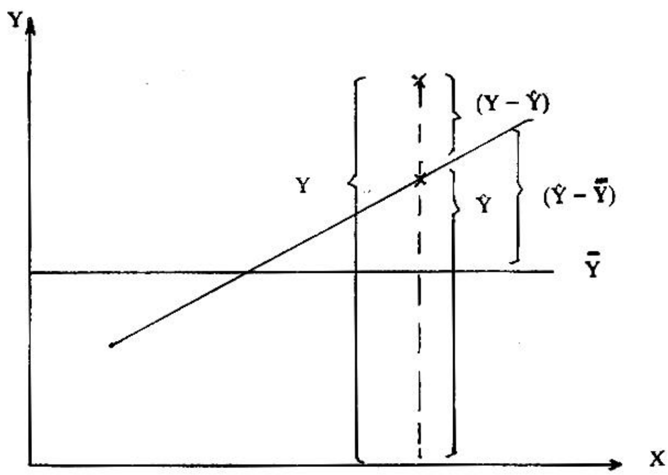
علماً أن التباين الكلي لأي ظاهرة يمثل مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي لملاحظات الظاهرة .

على سبيل المثال التباين الكلي في Y مثلاً يساوي $(Y - \overline{Y})^2$ و الذي يمكن التعبير عنه بالعلاقة :

$$(Y - \hat{Y})^2 = (Y - \tilde{Y})^2 + (\tilde{Y} - \overline{Y})^2$$

و تدعى القيمة $(Y - \tilde{Y})^2$ بالمتغير غير المفسر ، أي الذي لا يعود إلى التغير في المتغير المستقل .

بينما تدعى القيمة $(\tilde{Y} - \overline{Y})^2$ بالتغير المفسر بالتغيرات في المتغير المستقل ، أي أنه الجزء من التغير الكلي في Y الذي يمكن إرجاعه إلى التغير في X ، كما يتوضح في الشكل (٦-٨) :



الشكل (٦-٨)

حيث الجزء الأول $(Y - \tilde{Y})^2$ يمثل مجموع مربعات المسافات الرأسية التي تمثل انحرافات القيم الملاحظة عن خط الانحدار ، لهذا فهي تقيس الجزء من التغير الكلي الذي يعود إلى عوامل أخرى غير المتغير المستقل، أي التغير في التغير المستقل لا يفسر هذا الجزء من التغير الكلي .

بينما الجزء الثاني $(\tilde{Y} - \bar{Y})^2$ يقيس الجزء من التغير الكلي الذي يعود إلى المتغير المستقل .

❖ **نتيجة :**

إذا وقعت كل الملاحظات على خط الانحدار ، فإن التغير في $\boldsymbol{Y}$ يرجع إلى التغير في X بعبارة أخرى أن التغير في X المتغير المستقل يشرح كل التغير في $\boldsymbol{Y}$ و عندها يكون معامل التحديد مساوياً للواحد .

و هذا يدل على أن معامل التحديد يوضح نسبة التغير في المتغير التابع التي يمكن إرجاعها للتغير في المتغير المستقل .

أي يمكن كتابة معامل التحديد على الشكل التالي :

$$R^2 = \frac{\sum (\tilde{Y} - \bar{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$$

$$R^2 = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2 - \sum (Y - \tilde{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum (Y - \tilde{Y})^2}{\sum (Y - \bar{Y})^2}$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2_{\hat{Y}}}{\sigma^2_{Y}}$$

حيث إن :

R^2 معامل التحديد .

$\sigma^2_{\hat{Y}}$ تباين القيم المقدرة .

σ^2_{Y} تباين المتغير Y .

و في حالة استخدام معادلة انحدار X على Y نجد أن :

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma^2_{X^2}}{\sigma^2_{X}}$$

- **مثال (١٢) :**

إذا علمت أن $\sigma^2_{\tilde{X}} = 0.013$, $\sigma^2_{X} = 0.045$

و باستخدام معادلة انحدار X على Y فإن معامل التحديد يكون :

$$R^2 = 1 - \frac{0.013}{0.045} = 0.72$$

علماً أن :

$$\sigma^2_{\tilde{X}} = \frac{\sum X^2 - \alpha \sum X - \beta \sum X\,Y}{n} \quad , \quad \sigma^2_{X} = \frac{1}{n} \sum (X - \overline{X})^2$$

$$\sigma^2_{\tilde{Y}} = \frac{\sum Y^2 - a \sum Y - b \sum X\,Y}{n}$$

تمرينات غير محلولة على الفصل السادس

(١) احسب معادلتي الانحدار الخطي من البيانات التالية .

X	6.6	3.0	3.8	6.0	7.0	4.3	3.0	5.8	5.6	4.9
Y	2.5	8.0	3.0	4.1	5.6	5.5	8.2	3.6	6.5	1.0

(2) إذا علمت أن :

$$\tilde{Y} = 19 - 1.6\,X$$
$$\hat{X} = 25 - 0.4\,Y$$

عندئذ المطلوب :

١- أوجد معامل الارتباط بين الظاهرتين محل الدراسة .

٢- نسبة التغير المفسر إلى التغير الكلي .

٣- نسبة التغير غير المفسر إلى التغير الكلي .

(٣) في دراسة ميدانية حصل أحد الباحثين على المعلومات التالية :

$$\sum X = 48 \quad , \quad \sum Y = 240 \quad , \quad \sum XY = 2016 \quad , \quad \sum X^2 = 432 \quad , \quad n = 6$$

عندئذ المطلوب :

١- احسب معادلة انحدار X على Y.

٢- احسب الخطأ المعياري للتقديرات .

(٤) استخدم بيانات التمرين الثالث و احسب معامل التحديد .

(٥) احسب معامل بيرسون مستخدماً البيانات التالية :

X	6	9	9	12	5	3	7	9	15
Y	69	92	89	80	60	65	78	95	90

(٦) إذا علمت أن معامل الارتباط بين ظاهرتين $\rho = 0.60$ و إن الانحراف المعياري للمتغير X هو $S_X = 1.50$ ، و أن الانحراف المعياري للمتغير الثاني Y هو

$S_Y = 2.00$ ، و كان الوسط الحسابي لملاحظات الظاهرة الثانية هو $20 = \overline{Y}$ ، عندئذ احسب معادلتي خطأ الانحدار .

(٧) بفرض أنه لديك البيانات التالية :

X	٩	٥	١٠	١	٨	٧	٣	٤	٢	٦
Y	٨	٣	٩	٢	٧	١٠	٤	٦	١	٥

عندئذ احسب معادلتي الانحدار X على Y ثم احسب الخطأ المعياري للتقديرات ومعامل الارتباط .

(٨) بفرض لديك ظاهرتان X و Y على الترتيب، وبفرض أن n=10 حجم العينة الموافق لكل ظاهرة ، فتبين أن :

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 16 \quad , \quad \left(\sum_{i=1}^{10} x_i\right)^2 = 256 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 26.14$$

$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 210 \quad , \quad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 = 44100 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = 4584$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 344.9 \quad , \quad S_X = 0.54 \quad , \quad S_Y = 174$$

المطلوب : حساب معامل ارتباط الظاهرتين X و Y.

(٩) بفرض لديك البيانات التالية :

X	١١	٩	٧	٨	٦	١٠	٢	٨	٤	٧	٣	٥
Y	١٠	٨	٧	١١	٥	٨	٦	٩	٥	٨	٦	٨

و المطلوب استخدام طريقة المربعات الصغرى ، وعين معامل الارتباط بين الظاهرتين X و Y.

(١٠) بفرض أنه لديك البيانات التالية :

X	٥٥	٤٠	٥٨	٤٠	٥٥	٥٠	٣٣	٥٦	٣٠	٤٢
Y	٣٦	٢٥	٣٤	٣٠	٣٥	٣٠	٢٢	٣٥	٢٢	٢٥

المطلوب :

١- أوجد معادلة مستقيم انحدار X على Y.

٢- أوجد معامل الارتباط بين X و Y.

٣- أوجد القيمة المتنبئ بها للمتغير Y علماً أن $X = 40$.

(١١) بفرض أنه لديك البيانات التالية :

X	٣	٤	٥	٦	٨	٩
Y	٠	٣	٤	٨	١٠	١١

المطلوب :

١- أوجد معادلة انحدار Y على X .

٢- أوجد القيمة المتوقعة لـ Y الموافقة للقيمة $X = 7$.

٣- أوجد معامل بيرسون للارتباط بين الظاهرتين X و Y .

(١٢) بفرض لديك البيانات التالية :

X	0.9	1.2	0.8	1.5	0.7	2	1.0	0.5
Y	4	5	4	5	3	6	4	3

المطلوب :

١- ارسم شكل الانتشار .

٢- أوجد معادلة انحدار Y على X .

٣- أوجد القيمة المتنبئ بها لـ Y الموافقة للقيمة $X = 1.4$.

٤- أوجد معامل الارتباط لبيرسون بين X و Y .

المراجع العربية

١- د. أبو القاسم عمر الطبولي د. فتحي صالح ابو سدرة، مبادئ الاحصاء – الدار الجماهيرية للنشر والتوزيع و الاعلان ١٩٨٨ .

٢- د. عزات عمر القاسم، مبادئ الاحتمالات و الاحصاء – منشورات جامعة دمشق ١٩٩٥ .

٣- د. هيثم فرح و د. إحسان خلف – الرياضيات العامة ١ – منشورات جامعة البعث ٢٠٠٧ .

٤- د. هيثم فرح – نظرية الاحتمالات – منشورات جامعة البعث ١٩٩٤ .

٥- د. أنيس كنجو - الاحصاء والاحتمال – منشورات جامعة الملك سعود ١٩٩٣ .

٦- د. محمد جنيد العمر- الاحصاء الرياضي – جامعة حلب ١٩٩٠ .

٧- د. أنيس كنجو – الإحصاء و طرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي – الجزء الأول – بيروت – مؤسسة الرسالة ١٩٩٧ .

٨- د. حسان عاقل- مدخل إلى الإحصاء و الاحتمالات ١ – منشورات جامعة دمشق ٢٠١١ .

٩- د. صلاح الأحمد – منشورات جامعة دمشق ١٩٨٨ .

١٠ – د. عدنان عمورة - د. عزت قاسم -. محمد صبح – نظرية الاحتمالات – منشورات جامعة دمشق ٢٠٠٢.

١١- د. خضر الكريدي – مبادئ الاحتمالات و الإحصاء – منشورات جامعة حلب – ١٩٩٠ .

١٢- د. علاء الدين القبانجي – د. حسام كمرجي – منشورات جامعة دمشق ٢٠٠٦ .

١٣- سيمور ليبشتيز – الاحتمالات – سلسلة ملخصات شوم .

١٤- د. هيثم فرح – الإحصاء (١)- منشورات جامعة البعث ٢٠١١ .

١٥- د. زياد رمضان – مبادئ الاحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي – منشورات دار وائل للطباعة والنشر ٢٠٠١.

١٦- د.عدنان حميدان – د. عمار اغا – الاحصاء الحيوي – منشورات جامعة دمشق ٢٠٠٤ .

١٧- د. سمير حجير ، د. محمد سمير دركزللي – الرياضيات العالية ، منشورات جامعة حلب ١٩٨٨ .

١٨- د. سمير حجير ، د. محمد سمير دركزللي – مبادئ الإحصاء ، منشورا جامعة حلب ٢٠٠٤ .

المراجع الأجنبية

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.
2. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и её инженерные приложения. — М.: Наука, 1988.
3. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. — М.: ОНТИ, 1934.
4. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Физматгиз, 1961.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Киев: Вища школа, 1979.
6. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1989.
7. *Колемаев В. А., Староверов О. В., Турундаевский В. Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1991.
8. *Коваленко И. Н., Филлипова А. А.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1973.
9. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Теория распределений. — М.: Наука, 1966.
10. *Лозинский С. Н.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Статистика, 1967.
11. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1963.
12. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1987.
13. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — М.: Наука, 1989.
14. *Пугачёв В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.
15. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.
16. *Соколов Г. А., Чистякова Н. А.* Предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики. — М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 1993.
17. *Соколов Г. А., Чистякова Н. А., Закатий С. В.* Вероятностно-комбинаторные схемы. — М.: РЭА им. Г.В. Плеханова, 1993.
18. *Вуколов Э. А., Ефимов В. Н. и др.* Сборник задач по математике для ВТУЗов. Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1990.

19. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. — М.: Мир. Т. 1 — 1964. Т. 2 — 1967.
20. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987.
21. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Мир, 1989.
22. *Дунин-Барковский И.В., Смирнов Н.В.* Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). — М.: ГИТТЛ, 1955.
23. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.
24. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под ред. К.А. Рыбникова. — М.: Наука, 1982.
25. В. Е. ГМУРМАН – Теория ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА - МОСКВА – 200(
26. Н.Ш. КРЕМЕР - Теория ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА - МОСКВА – 2001 .
27. С.Ф.ГОРБАНЬ , Н. В. СНИЖКО Теория ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА
28. FELLER W. AN INTRODUCTION TO PROBABILITY THORY AND ITS APPLICATIONS . New York . 1970 .
29. John E. Freund's Mathematical Statistics New Jersey – 1999 .
30. GUPTA S. C. , V. K. KAPOOR : " Fundementals of mathematical statistics " , Sultan chand & Sons publishers , New Delhi , 1982 .
31. HOGG . V. R. , A. T. CRAIG , " Introduction to mathematical statistics " , Macmillan publishing Co. Ink , New York , 1970 .
32. HAROLD J. LARSON : " Introduction to probability theory and statistical inference " , 3rd ed ., John Wiley & Sons , Ink , New York , 1982 .
33. IAN F. BLAKE : " An introduction to applied probability " , John Wiley & Sons . Ink , New York, 1979 .
34. JOHNSON amd KOTZ : " Discrete distributions " . John Wiley & Sons . Ink , New York , 1969 .
35. JOHNSON and KOTZ : " Continuous univariate distributions -1 " , John Wiley & Sons , Ink , New York , 1970 .
36. JOHNSON amd KOTZ : " Continuous univariate distributions - 2 " , John Wiley & Sons Ink . New York , 1970 .
37. KAPUR J. N. , H. C. SAXENA : " Mathematical statistiscs" , chand & Co. (pvt.) LTD , New Delhi , 1972 .
38. LUKACS E, R. G. LAHA : " Application of characteristic functions " , charles Griffin & company limited , London , 1964.
39. MICHAEL WOODROOFE : " Probability with application " , Mc Fraw-Hill book Co. , New York , 1975 .
40. MOOD A. M. , F. A. GRAYBILL : " Introduction to the theory of statistics " , Mc Graw-Hill book Co., New York, 1963.
41. MOOD A. M. , F. A. GRAYBILL and DUANE C. B. : "Introduction to the theory of statistics " , Mc Graw-Hill book Co., New York , 1974 .
42. MORAN P. A. P. : " Calculation of the normal distribution function " , Biometrica 67 , pp. 675-6 , 1980 .
43. PAUL G. HOEL : " Introduction to mathematica statistics " , John Wiley & Sons , Ink , New York , 1970 .

الجداول الإحصائية

الجدول (١) : توزيع ثنائي الحدين

$$P(x) = C_x^n \, P^x (1 - P)^{n-x}$$

$$x = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$0 < P < 1$$

n	x	P .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
1	0	.9500	.9000	.8500	.8000	.7500	.7000	.6500	.6000	.5500	.5000
	1	.0500	.1000	.1500	.2000	.2500	.3000	.3500	.4000	.4500	.5000
2	0	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4225	.3600	.3025	.2500
	1	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4550	.4800	.4950	.5000
	2	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1225	.1600	.2025	.2500
3	0	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2746	.2160	.1664	.1250
	1	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4436	.4320	.4084	.3750
	2	.0 71	.0270	.0574	.0960	.1406	.1890	.2389	.2880	.3341	.3750
	3	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0429	.0640	.0911	.1250
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625
5	0	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1160	.0778	.0503	.0312
	1	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3124	.2592	.2059	.1562
	2	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3364	.3456	.3369	.3125
	3	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1811	.2304	.2757	.3125
	4	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0488	.0768	.1128	.1562
	5	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0053	.0102	.0185	.0312
6	0	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0754	.0467	.0277	.0156
	1	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2437	.1866	.1359	.0938
	2	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3280	.3110	.2780	.2344
	3	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2355	.2765	.3032	.3125
	4	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0951	.1382	.1861	.2344
	5	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0205	.0369	.0609	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0018	.0041	.0083	.0156
7	0	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0490	.0280	.0152	.0078
	1	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.1848	.1306	.0872	.0547
	2	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.2985	.2613	.2140	.1641
	3	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2679	.2903	.2918	.2734
	4	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1442	.1935	.2388	.2734
	5	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0466	.0774	.1172	.1641
	6	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0084	.0172	.0320	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0016	.0037	.0078
8	0	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0319	.0168	.0084	.0039
	1	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1373	.0896	.0548	.0312
	2	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2587	.2090	.1569	.1094
	3	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2786	.2787	.2568	.2188
	4	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1875	.2322	.2627	.2734
	5	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0808	.1239	.1719	.2188
	6	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0217	.0413	.0703	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0033	.0079	.0164	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0017	.0039

تابع الجدول (١)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
9	0	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0207	.0101	.0046	.0020
	1	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1004	.0605	.0339	.0176
	2	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2162	.1612	.1110	.0703
	3	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2716	.2508	.2119	.1641
	4	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2194	.2508	.2600	.2461
	5	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1181	.1672	.2128	.2461
	6	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0424	.0743	.1160	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0098	.0212	.0407	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0035	.0083	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0020
10	0	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0135	.0060	.0025	.0010
	1	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0725	.0403	.0207	.0098
	2	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1757	.1209	.0763	.0439
	3	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2522	.2150	.1665	.1172
	4	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2377	.2508	.2384	.2051
	5	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1536	.2007	.2340	.2461
	6	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0689	.1115	.1596	.2051
	7	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0212	.0425	.0746	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0043	.0106	.0229	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0042	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
11	0	.5688	.3138	.1673	.0859	.0422	.0198	.0088	.0036	.0014	.0005
	1	.3293	.3835	.3248	.2362	.1549	.0932	.0518	.0266	.0125	.0054
	2	.0867	.2131	.2866	.2953	.2581	.1998	.1395	.0887	.0513	.0269
	3	.0137	.0710	.1517	.2215	.2581	.2568	.2254	.1774	.1259	.0806
	4	.0014	.0158	.0536	.1107	.1721	.2201	.2428	.2365	.2060	.1611
	5	.0001	.0025	.0132	.0388	.0803	.1321	.1830	.2207	.2360	.2256
	6	.0000	.0003	.0023	.0097	.0268	.0566	.0985	.1471	.1931	.2256
	7	.0000	.0000	.0003	.0017	.0064	.0173	.0379	.0701	.1128	.1611
	8	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0037	.0102	.0234	.0462	.0806
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018	.0052	.0126	.0269
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0007	.0021	.0054
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0005
12	0	.5404	.2824	.1422	.0687	.0317	.0138	.0057	.0022	.0008	.0002
	1	.3413	.3766	.3012	.2062	.1267	.0712	.0368	.0174	.0075	.0029
	2	.0988	.2301	.2924	.2835	.2323	.1678	.1088	.0639	.0339	.0161
	3	.0173	.0852	.1720	.2362	.2581	.2397	.1954	.1419	.0923	.0537
	4	.0021	.0213	.0683	.1329	.1936	.2311	.2367	.2128	.1700	.1208
	5	.0002	.0038	.0193	.0532	.1032	.1585	.2039	.2270	.2225	.1934
	6	.0000	.0005	.0040	.0155	.0401	.0792	.1281	.1766	.2124	.2256
	7	.0000	.0000	.0006	.0033	.0115	.0291	.0591	.1009	.1489	.1934
	8	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0078	.0199	.0420	.0762	.1208
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0048	.0125	.0277	.0537
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0025	.0068	.0161
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0029
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
13	0	.5133	.2542	.1209	.0550	.0238	.0097	.0037	.0013	.0004	.0001
	1	.3512	.3672	.2774	.1787	.1029	.0540	.0259	.0113	.0045	.0016
	2	.1109	.2448	.2937	.2680	.2059	.1388	.0836	.0453	.0220	.0095
	3	.0214	.0997	.1900	.2457	.2517	.2181	.1651	.1107	.0660	.0349
	4	.0028	.0277	.0838	.1535	.2097	.2337	.2222	.1845	.1350	.0873
	5	.0003	.0055	.0266	.0691	.1258	.1803	.2154	.2214	.1989	.1571
	6	.0000	.0008	.0063	.0230	.0559	.1030	.1546	.1968	.2169	.2095
	7	.0000	.0001	.0011	.0058	.0186	.0442	.0833	.1312	.1775	.2095
	8	.0000	.0000	.0001	.0011	.0047	.0142	.0336	.0656	.1089	.1571
	9	.0000	.0000	.0000	.0001	.0009	.0034	.0101	.0243	.0495	.0873
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0022	.0065	.0162	.0349
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0012	.0036	.0095
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

تابع الجدول (١)

n	x	p .05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
14	0	.4877	.2288	.1028	.0440	.0178	.0068	.0024	.0008	.0002	.0001
	1	.3593	.3559	.2539	.1539	.0832	.0407	.0181	.0073	.0027	.0009
	2	.1229	.2570	.2912	.2501	.1802	.1134	.0634	.0317	.0141	.0056
	3	.0259	.1142	.2056	.2501	.2402	.1943	.1366	.0845	.0462	.0222
	4	.0037	.0348	.0998	.1720	.2202	.2290	.2022	.1549	.1040	.0611
	5	.0004	.0078	.0352	.0860	.1468	.1963	.2178	.2066	.1701	.1222
	6	.0000	.0013	.0093	.0322	.0734	.1262	.1759	.2066	.2088	.1833
	7	.0000	.0002	.0019	.0092	.0280	.0618	.1082	.1574	.1952	.2095
	8	.0000	.0000	.0003	.0020	.0082	.0232	.0510	.0918	.1398	.1833
	9	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0066	.0183	.0408	.0762	.1222
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0014	.0049	.0136	.0312	.0611
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0033	.0093	.0222
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0019	.0056
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0009
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
15	0	.4633	.2059	.0874	.0352	.0134	.0047	.0016	.0005	.0001	.0000
	1	.3658	.3432	.2312	.1319	.0668	.0305	.0126	.0047	.0016	.0005
	2	.1348	.2669	.2856	.2309	.1559	.0916	.0476	.0219	.0090	.0032
	3	.0307	.1285	.2184	.2501	.2252	.1700	.1110	.0634	.0318	.0139
	4	.0049	.0428	.1156	.1876	.2252	.2186	.1792	.1268	.0780	.0417
	5	.0006	.0105	.0449	.1032	.1651	.2061	.2123	.1859	.1404	.0916
	6	.0000	.0019	.0132	.0430	.0917	.1472	.1906	.2066	.1914	.1527
	7	.0000	.0003	.0030	.0138	.0393	.0811	.1319	.1771	.2013	.1964
	8	.0000	.0000	.0005	.0035	.0131	.0348	.0710	.1181	.1647	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0007	.0034	.0116	.0298	.0612	.1048	.1527
	10	.0000	.0000	.0000	.0001	.0007	.0030	.0096	.0245	.0515	.0916
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0074	.0191	.0417
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052	.0139
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0032
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
16	0	.4401	.1853	.0743	.0281	.0100	.0033	.0010	.0003	.0001	.0000
	1	.3706	.3294	.2097	.1126	.0535	.0228	.0087	.0030	.0009	.0002
	2	.1463	.2745	.2775	.2111	.1336	.0732	.0353	.0150	.0056	.0018
	3	.0359	.1423	.2285	.2463	.2079	.1465	.0888	.0468	.0215	.0085
	4	.0061	.0514	.1311	.2001	.2252	.2040	.1553	.1014	.0572	.0278
	5	.0008	.0137	.0555	.1201	.1802	.2099	.2008	.1623	.1123	.0667
	6	.0001	.0028	.0180	.0550	.1101	.1649	.1982	.1983	.1684	.1222
	7	.0000	.0004	.0045	.0197	.0524	.1010	.1524	.1889	.1969	.1746
	8	.0000	.0001	.0009	.0055	.0197	.0487	.0923	.1417	.1812	.1964
	9	.0000	.0000	.0001	.0012	.0058	.0185	.0442	.0840	.1318	.1746
	10	.0000	.0000	.0000	.0002	.0014	.0056	.0167	.0392	.0755	.1222
	11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0013	.0049	.0142	.0337	.0667
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0040	.0115	.0278
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0008	.0029	.0085
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
17	0	.4181	.1668	.0631	.0225	.0075	.0023	.0007	.0002	.0000	.0000
	1	.3741	.3150	.1893	.0957	.0426	.0169	.0060	.0019	.0005	.0001
	2	.1575	.2800	.2673	.1914	.1136	.0581	.0260	.0102	.0035	.0010
	3	.0415	.1556	.2359	.2393	.1893	.1245	.0701	.0341	.0144	.0052
	4	.0076	.0605	.1457	.2093	.2209	.1868	.1320	.0796	.0411	.0182
	5	.0010	.0175	.0668	.1361	.1914	.2081	.1849	.1379	.0875	.0472
	6	.0001	.0039	.0236	.0680	.1276	.1784	.1991	.1839	.1432	.0944
	7	.0000	.0007	.0065	.0267	.0668	.1201	.1685	.1927	.1841	.1484
	8	.0000	.0001	.0014	.0084	.0279	.0644	.1134	.1606	.1883	.1855
	9	.0000	.0000	.0003	.0021	.0093	.0276	.0611	.1070	.1540	.1855
	10	.0000	.0000	.0000	.0004	.0025	.0095	.0263	.0571	.1008	.1484
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0026	.0090	.0242	.0525	.0944
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0081	.0215	.0472
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0021	.0068	.0182
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0016	.0052

(تابع الجدول (١)

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
17	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
18	0	.3972	.1501	.0536	.0180	.0056	.0016	.0004	.0001	.0000	.0000
	1	.3763	.3002	.1704	.0811	.0338	.0126	.0042	.0012	.0003	.0001
	2	.1683	.2835	.2556	.1723	.0958	.0458	.0190	.0069	.0022	.0006
	3	.0473	.1680	.2406	.2297	.1704	.1046	.0547	.0246	.0095	.0031
	4	.0093	.0700	.1592	.2153	.2130	.1681	.1104	.0614	.0291	.0117
	5	.0014	.0218	.0787	.1507	.1988	.2017	.1664	.1146	.0666	.0327
	6	.0002	.0052	.0301	.0816	.1436	.1873	.1941	.1655	.1181	.0708
	7	.0000	.0010	.0091	.0350	.0820	.1376	.1792	.1892	.1657	.1214
	8	.0000	.0002	.0022	.0120	.0376	.0811	.1327	.1734	.1864	.1669
	9	.0000	.0000	.0004	.0033	.0139	.0386	.0794	.1284	.1694	.1855
	10	.0000	.0000	.0001	.0008	.0042	.0149	.0385	.0771	.1248	.1[illegible]
	11	.0000	.0000	.0000	.0001	.0010	.0046	.0151	.0374	.0742	.1214
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0047	.0145	.0354	.0708
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0045	.0134	.0327
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0039	.0117
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0009	.0031
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
19	0	.3774	.1351	.0456	.0144	.0042	.0011	.0003	.0001	.0000	.0000
	1	.3774	.2852	.1529	.0685	.0268	.0093	.0029	.0008	.0002	.0000
	2	.1787	.2852	.2428	.1540	.0803	.0358	.0138	.0046	.0013	.0003
	3	.0533	.1796	.2428	.2182	.1517	.0869	.0422	.0175	.0062	.0018
	4	.0112	.0798	.1714	.2182	.2023	.1491	.0909	.0467	.0203	.0074
	5	.0018	.0266	.0907	.1636	.2023	.1916	.1468	.0933	.0497	.0222
	6	.0002	.0069	.0374	.0955	.1574	.1916	.1844	.1451	.0949	.0518
	7	.0000	.0014	.0122	.0443	.0974	.1525	.1844	.1797	.1443	.0961
	8	.0000	.0002	.0032	.0166	.0487	.0981	.1489	.1797	.1771	.1442
	9	.0000	.0000	.0007	.0051	.0198	.0514	.0980	.1464	.1771	.1762
	10	.0000	.0000	.0001	.0013	.0066	.0220	.0528	.0976	.1449	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0003	.0018	.0077	.0233	.0532	.0970	.1442
	12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0004	.0022	.0083	.0237	.0529	.0961
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0024	.0085	.0233	.0518
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0006	.0024	.0082	.0222
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0022	.0074
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0005	.0018
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
20	0	.3585	.1216	.0388	.0115	.0032	.0008	.0002	.0000	.0000	.0000
	1	.3774	.2702	.1368	.0576	.0211	.0068	.0020	.0005	.0001	.0000
	2	.1887	.2852	.2293	.1369	.0669	.0278	.0100	.0031	.0008	.0002
	3	.0596	.1901	.2428	.2054	.1339	.0716	.0323	.0123	.0040	.0011
	4	.0133	.0898	.1821	.2182	.1897	.1304	.0738	.0350	.0139	.0046
	5	.0022	.0319	.1028	.1746	.2023	.1789	.1272	.0746	.0365	.0148
	6	.0003	.0089	.0454	.1091	.1686	.1916	.1712	.1244	.0746	.0370
	7	.0000	.0020	.0160	.0545	.1124	.1643	.1844	.1659	.1221	.0739
	8	.0000	.0004	.0046	.0222	.0609	.1144	.1614	.1797	.1623	.1201
	9	.0000	.0001	.0011	.0074	.0271	.0654	.1158	.1597	.1771	.1602
	10	.0000	.0000	.0002	.0020	.0099	.0308	.0686	.1171	.1593	.1762
	11	.0000	.0000	.0000	.0005	.0030	.0120	.0336	.0710	.1185	.1602
	12	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0039	.0136	.0355	.0727	.1201
	13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0010	.0045	.0146	.0366	.0739
	14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0012	.0049	.0150	.0370
	15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0049	.0148
	16	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0013	.0046
	17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011
	18	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0002
	19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
	20	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

الجدول (٢) : التوزيع الهندسي الزائدي

$$P(x) = \frac{C_x^M \cdot C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}$$

$$\max.(0, n - N + M) \leq x \leq \min.(n, M), \; a = M$$

N	n	a	x	$p_X(x)$
2	1	1	0	.500000
2	1	1	1	.500000
3	1	1	0	.666667
3	1	1	1	.333333
3	2	1	0	.333333
3	2	1	1	.666667
3	2	2	1	.666667
3	2	2	2	.333333
4	1	1	0	.750000
4	1	1	1	.250000
4	2	1	0	.500000
4	2	1	1	.500000
4	2	2	0	.166667
4	2	2	1	.666667
4	2	2	2	.166667
4	3	1	0	.250000
4	3	1	1	.750000
4	3	2	1	.500000
4	3	2	2	.500000
4	3	3	2	.750000
4	3	3	3	.250000
5	1	1	0	.800000
5	1	1	1	.200000
5	2	1	0	.600000
5	2	1	1	.400000
5	2	2	0	.300000
5	2	2	1	.600000
5	2	2	2	.100000
5	3	1	0	.400000
5	3	1	1	.600000
5	3	2	0	.100000
5	3	2	1	.600000
5	3	2	2	.300000
5	3	3	1	.300000
5	3	3	2	.600000
5	3	3	3	.100000
5	4	1	0	.200000
5	4	1	1	.800000
5	4	2	1	.400000
5	4	2	2	.600000

N	n	a	x	$p_X(x)$
5	4	3	2	.600000
5	4	3	3	.400000
5	4	4	3	.800000
5	4	4	4	.200000
6	1	1	0	.833333
6	1	1	1	.166667
6	2	1	0	.666667
6	2	1	1	.333333
6	2	2	0	.400000
6	2	2	1	.533333
6	2	2	2	.066667
6	3	1	0	.500000
6	3	1	1	.500000
6	3	2	0	.200000
6	3	2	1	.600000
6	3	2	2	.200000
6	3	3	0	.050000
6	3	3	1	.450000
6	3	3	2	.450000
6	3	3	3	.050000
6	4	1	0	.333333
6	4	1	1	.666667
6	4	2	0	.066667
6	4	2	1	.533333
6	4	2	2	.400000
6	4	3	1	.200000
6	4	3	2	.600000
6	4	3	3	.200000
6	4	4	2	.400000
6	4	4	3	.533333
6	4	4	4	.066667
6	5	1	0	.166667
6	5	1	1	.833333
6	5	2	1	.333333
6	5	2	2	.666667
6	5	3	2	.500000
6	5	3	3	.500000
6	5	4	3	.666667
6	5	4	4	.333333
6	5	5	4	.833333

N	n	a	x	$p_X(x)$
6	5	5	5	.166667
7	1	1	0	.857143
7	1	1	1	.142857
7	2	1	0	.714286
7	2	1	1	.285714
7	2	2	0	.476190
7	2	2	1	.476190
7	2	2	2	.047619
7	3	1	0	.571429
7	3	1	1	.428571
7	3	2	0	.285714
7	3	2	1	.571429
7	3	2	2	.142857
7	3	3	0	.114286
7	3	3	1	.514286
7	3	3	2	.342857
7	3	3	3	.028571
7	4	1	0	.428571
7	4	1	1	.571429
7	4	2	0	.142857
7	4	2	1	.571429
7	4	2	2	.285714
7	4	3	0	.028571
7	4	3	1	.342857
7	4	3	2	.514286
7	4	3	3	.114286
7	4	4	1	.114286
7	4	4	2	.514286
7	4	4	3	.342857
7	4	4	4	.028571
7	5	1	0	.285714
7	5	1	1	.714286
7	5	2	0	.047619
7	5	2	1	.476190
7	5	2	2	.476190
7	5	3	1	.142857
7	5	3	2	.571429
7	5	3	3	.285714
7	5	4	2	.285714
7	5	4	3	.571429

N	n	a	x	$p_X(x)$
7	5	4	4	.142857
7	5	5	3	.476190
7	5	5	4	.476190
7	5	5	5	.047619
7	6	1	0	.142857
7	6	1	1	.857143
7	6	2	1	.285714
7	6	2	2	.714286
7	6	3	2	.428571
7	6	3	3	.571429
7	6	4	3	.571429
7	6	4	4	.428571
7	6	5	4	.714286
7	6	5	5	.285714
7	6	6	5	.857143
7	6	6	6	.142857
8	1	1	0	.875000
8	1	1	1	.125000
8	2	1	0	.750000
8	2	1	1	.250000
8	2	2	0	.535714
8	2	2	1	.428571
8	2	2	2	.035714
8	3	1	0	.625000
8	3	1	1	.375000
8	3	2	0	.357143
8	3	2	1	.535714
8	3	2	2	.107143
8	3	3	0	.178571
8	3	3	1	.535714
8	3	3	2	.267857
8	3	3	3	.017857
8	4	1	0	.500000
8	4	1	1	.500000
8	4	2	0	.214286
8	4	2	1	.571429
8	4	2	2	.214286
8	4	3	0	.071429
8	4	3	1	.428571
8	4	3	2	.428571

تابع الجدول (٢)

N	n	a	x	$p_X(x)$
8	4	3	3	.071429
8	4	4	0	.014286
8	4	4	1	.228571
8	4	4	2	.514286
8	4	4	3	.228571
8	4	4	4	.014286
8	5	1	0	.375000
8	5	1	1	.625000
8	5	2	0	.107143
8	5	2	1	.535714
8	5	2	2	.357143
8	5	3	0	.017857
8	5	3	1	.267857
8	5	3	2	.535714
8	5	3	3	.178571
8	5	4	1	.071429
8	5	4	2	.428571
8	5	4	3	.428571
8	5	4	4	.071429
8	5	5	2	.178571
8	5	5	3	.535714
8	5	5	4	.267857
8	5	5	5	.017857
8	6	1	0	.250000
8	6	1	1	.750000
8	6	2	0	.015714
8	6	2	1	.428571
8	6	2	2	.535714
8	6	3	1	.107143
8	6	3	2	.535714
8	6	3	3	.357143
8	6	4	2	.214286
8	6	4	3	.571429
8	6	4	4	.214286
8	6	5	3	.357143
8	6	5	4	.535714
8	6	5	5	.107143
8	6	6	4	.535714
8	6	6	5	.428571
8	6	6	6	.035714

N	n	a	x	$p_X(x)$
8	7	1	0	.125000
8	7	1	1	.875000
8	7	2	1	.250000
8	7	2	2	.750000
8	7	3	2	.375000
8	7	3	3	.625000
8	7	4	3	.500000
8	7	4	4	.500000
8	7	5	4	.625000
8	7	5	5	.375000
8	7	6	5	.750000
8	7	6	6	.250000
8	7	7	6	.875000
8	7	7	7	.125000
9	1	1	0	.888889
9	1	1	1	.111111
9	2	1	0	.777778
9	2	1	1	.222222
9	2	2	0	.583333
9	2	2	1	.388889
9	2	2	2	.027778
9	3	1	0	.666667
9	3	1	1	.333333
9	3	2	0	.416667
9	3	2	1	.500000
9	3	2	2	.083333
9	3	3	0	.238095
9	3	3	1	.535714
9	3	3	2	.214286
9	3	3	3	.011905
9	4	1	0	.555556
9	4	1	1	.444444
9	4	2	0	.277778
9	4	2	1	.555556
9	4	2	2	.166667
9	4	3	0	.119048
9	4	3	1	.476190
9	4	3	2	.357143
9	4	3	3	.047619
9	4	4	0	.039683

N	n	a	x	$p_X(x)$
9	4	4	1	.317460
9	4	4	2	.476190
9	4	4	3	.158730
9	4	4	4	.007936
9	5	1	0	.444444
9	5	1	1	.555556
9	5	2	0	.166667
9	5	2	1	.555556
9	5	2	2	.277778
9	5	3	0	.047619
9	5	3	1	.357143
9	5	3	2	.476190
9	5	3	3	.119048
9	5	4	0	.007936
9	5	4	1	.158730
9	5	4	2	.476190
9	5	4	3	.317460
9	5	4	4	.039683
9	5	5	1	.039683
9	5	5	2	.317460
9	5	5	3	.476190
9	5	5	4	.158730
9	5	5	5	.007936
9	6	1	0	.333333
9	6	1	1	.666667
9	6	2	0	.083333
9	6	2	1	.500000
9	6	2	2	.416667
9	6	3	0	.011905
9	6	3	1	.214286
9	6	3	2	.535714
9	6	3	3	.238095
9	6	4	1	.047619
9	6	4	2	.357143
9	6	4	3	.476190
9	6	4	4	.119048
9	6	5	2	.119048
9	6	5	3	.476190
9	6	5	4	.357143
9	6	5	5	.047619

N	n	a	x	$p_X(x)$
9	6	6	3	.238095
9	6	6	4	.535714
9	6	6	5	.214286
9	6	6	6	.011905
9	7	1	0	.222222
9	7	1	1	.777778
9	7	2	0	.027778
9	7	2	1	.388889
9	7	2	2	.583333
9	7	3	1	.083333
9	7	3	2	.500000
9	7	3	3	.416667
9	7	4	2	.166667
9	7	4	3	.555556
9	7	4	4	.277778
9	7	5	3	.277778
9	7	5	4	.555556
9	7	5	5	.166667
9	7	6	4	.416667
9	7	6	5	.500000
9	7	6	6	.083333
9	7	7	5	.583333
9	7	7	6	.388889
9	7	7	7	.027778
9	8	1	0	.111111
9	8	1	1	.888889
9	8	2	1	.222222
9	8	2	2	.777778
9	8	3	2	.333333
9	8	3	3	.666667
9	8	4	3	.444444
9	8	4	4	.555556
9	8	5	4	.555556
9	8	5	5	.444444
9	8	6	5	.666667
9	8	6	6	.333333
9	8	7	6	.777778
9	8	7	7	.222222
9	8	8	7	.888889
9	8	8	8	.111111

الجدول (٢) : توزيع پواسون

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!} \quad ; x = 0, 1, 2, \ldots , \mu = \lambda$$

x	λ = .1	.2	.3	4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2222	.2681	.3033	.3293	.3476	.3595	.3659	.3679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0988	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0030	.0050	.0077	.0111	.0153
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3329	.3012	.2725	.2466	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3662	.3614	.3543	.3452	.3347	.3230	.3106	.2975	.2842	.2707
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0998	.1128	.1255	.1378	.1496	.1607	.1710	.1804
4	.0203	.0260	.0324	.0395	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ = 2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

x	λ = 3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1858	.1888	.1912	.1931	.1944	.1951	.1954
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0989	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132
10	.0010	.0013	.0016	.0019	.0023	.0028	.0033	.0039	.0045	.0053
11	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0009	.0011	.0013	.0016	.0019
12	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006
13	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
14	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

تابع الجدول (٢)

x	λ 4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0166	.0150	.0136	.0123	.0111	.0101	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0679	.0630	.0583	.0540	.0500	.0462	.0427	.0395	.0365	.0337
2	.1393	.1323	.1254	.1188	.1125	.1063	.1005	.0948	.0894	.0842
3	.1904	.1852	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1951	.1944	.1933	.1917	.1898	.1875	.1849	.1820	.1789	.1755
5	.1600	.1633	.1662	.1687	.1708	.1725	.1738	.1747	.1753	.1755
6	.1093	.1143	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1462
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0328	.0360	.0393	.0428	.0463	.0500	.0537	.0575	.0614	.0653
9	.0150	.0168	.0188	.0209	.0232	.0255	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0092	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0023	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

x	λ 5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0061	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0311	.0287	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0793	.0746	.0701	.0659	.0618	.0580	.0544	.0509	.0477	.0446
3	.1348	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1740	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1490	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1086	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0692	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0392	.0423	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0262	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0129	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0039	.0045	.0051	.0058	.0065	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0028	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0012	.0011	.0010	.0009
1	.0137	.0126	.0116	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1579	.1549	.1519	.1487	.1454	.1420	.1385	.1349	.1314	.1277
6	.1605	.1601	.1595	.1586	.1575	.1562	.1546	.1529	.1511	.1490
7	.1399	.1418	.1435	.1450	.1462	.1472	.1480	.1486	.1489	.1490
8	.1066	.1099	.1130	.1160	.1188	.1215	.1240	.1263	.1284	.1304
9	.0723	.0757	.0791	.0825	.0858	.0891	.0923	.0954	.0985	.1014
10	.0441	.0469	.0498	.0528	.0558	.0588	.0618	.0649	.0679	.0710
11	.0245	.0265	.0285	.0307	.0330	.0353	.0377	.0401	.0426	.0452
12	.0124	.0137	.0150	.0164	.0179	.0194	.0210	.0227	.0245	.0264
13	.0058	.0065	.0073	.0081	.0089	.0098	.0108	.0119	.0130	.0142
14	.0025	.0029	.0033	.0037	.0041	.0046	.0052	.0058	.0064	.0071
15	.0010	.0012	.0014	.0016	.0018	.0020	.0023	.0026	.0029	.0033
16	.0004	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0010	.0011	.0013	.0014
17	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006
18	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002
19	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

تابع الجدول (٢)

x	λ 7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8.0
0	.0008	.0007	.0007	.0006	.0006	.0005	.0005	.0004	.0004	.0003
1	.0059	.0054	.0049	.0045	.0041	.0038	.0035	.0032	.0029	.0027
2	.0208	.0194	.0180	.0167	.0156	.0145	.0134	.0125	.0116	.0107
3	.0492	.0464	.0438	.0413	.0389	.0366	.0345	.0324	.0305	.0286
4	.0874	.0836	.0799	.0764	.0729	.0696	.0663	.0632	.0602	.0573
5	.1241	.1204	.1167	.1130	.1094	.1057	.1021	.0986	.0951	.0916
6	.1468	.1445	.1420	.1394	.1367	.1339	.1311	.1282	.1252	.1221
7	.1489	.1486	.1481	.1474	.1465	.1454	.1442	.1428	.1413	.1396
8	.1321	.1337	.1351	.1363	.1373	.1382	.1388	.1392	.1395	.1396
9	.1042	.1070	.1096	.1121	.1144	.1167	.1187	.1207	.1224	.1241
10	.0740	.0770	.0800	.0829	.0858	.0887	.0914	.0941	.0967	.0993
11	.0478	.0504	.0531	.0558	.0585	.0613	.0640	.0667	.0695	.0722
12	.0283	.0303	.0323	.0344	.0366	.0388	.0411	.0434	.0457	.0481
13	.0154	.0168	.0182	.0196	.0211	.0227	.0243	.0260	.0278	.0296
14	.0078	.0086	.0095	.0104	.0113	.0123	.0134	.0145	.0157	.0169
15	.0037	.0041	.0046	.0051	.0057	.0062	.0069	.0075	.0083	.0090
16	.0016	.0019	.0021	.0024	.0026	.0030	.0033	.0037	.0041	.0045
17	.0007	.0008	.0009	.0010	.0012	.0013	.0015	.0017	.0019	.0021
18	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
19	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004
20	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002
21	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001

x	λ 8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0269	.0252	.0237	.0222	.0208	.0195	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0752	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1358	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1395	.1392	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1256	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1318
10	.1017	.1040	.1063	.1084	.1104	.1123	.1140	.1157	.1172	.1186
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0505	.0530	.0555	.0579	.0604	.0629	.0654	.0679	.0703	.0728
13	.0315	.0334	.0354	.0374	.0395	.0416	.0438	.0459	.0481	.0504
14	.0182	.0196	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0098	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0050	.0055	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

x	λ 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1302	.1286	.1269	.1251	.1232	.1212	.1191	.1170	.1148	.1126
9	.1317	.1315	.1311	.1306	.1300	.1293	.1284	.1274	.1263	.1251

تابع الجدول (٢)

x	λ = 9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
10	.1198	.1210	.1219	.1228	.1235	.1241	.1245	.1249	.1250	.1251
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0752	.0776	.0799	.0822	.0844	.0866	.0888	.0908	.0928	.0948
13	.0526	.0549	.0572	.0594	.0617	.0640	.0662	.0685	.0707	.0729
14	.0342	.0361	.0380	.0399	.0419	.0439	.0459	.0479	.0500	.0521
15	.0208	.0221	.0235	.0250	.0265	.0281	.0297	.0313	.0330	.0347
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0180	.0192	.0204	.0217
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0088	.0095	.0103	.0111	.0119	.0128
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0051	.0055	.0060	.0065	.0071
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0026	.0028	.0031	.0034	.0037
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001

x	λ = 11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0026	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0646	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0005
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0072	.0042	.0024	.0013
9	.1085	.0874	.0661	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0984	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1060	.1024	.0930	.0800	.0655	.0514	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0906	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0866	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0550	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0161	.0272	.0409	.0557	.0699	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0559	.0692	.0798	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0063	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

الجدول (٤) : التوزيع الطبيعي

$$F(Z) = P_r(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(z)\,dz$$

$$Z \sim N(0,1), \ -\infty < Z < \infty$$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
−3.0	.0013	.0010	.0007	.0005	.0003	.0002	.0002	.0001	.0001	.0000
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0238	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0300	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0570	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
− .9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
− .8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
− .7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
− .6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
− .5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
− .4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
− .3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
− .2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
− .1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
− 0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

تابع الجدول (٤)

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9430	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9648	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9700	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9874	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.	.9987	.9990	.9993	.9995	.9997	.9998	.9998	.9999	.9999	1.0000

الجدول (٥) : توزيع بيتا

$$F(x) = P_r(X \le x) = \int_0^x f(u)\,du = 0{\cdot}05$$

$$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)\ ;\ 0 < x < 1$$

α* \ β*	·5	·0	·5	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5
·5	·0061558	·0025000	·0015429	·0011119	$\cdot 0^{3}86320$	$\cdot 0^{3}71179$	$\cdot 0^{3}60300$	$\cdot 0^{3}52300$	$\cdot 0^{3}46170$
·0	·097500	·050000	·033617	·025321	·020308	·016952	·014548	·012741	·011334
·5	·22852	·13572	·097308	·076010	·062413	·052962	·046007	·040671	·036447
1·0	·34163	·22361	·16825	·13535	·11338	·097611	·085727	·076440	·068979
1·5	·43074	·30171	·23553	·19403	·16528	·14409	·12778	·11482	·10427
2·0	·50053	·36840	·29599	·24860	·21477	·18926	·16927	·15316	·13989
2·5	·55593	·42489	·34929	·29811	·26063	·23182	·20890	·19019	·17461
3·0	·60071	·47287	·39607	·34259	·30260	·27134	·24613	·22532	·20783
3·5	·63751	·51390	·43716	·38245	·34080	·30777	·28082	·25835	·23930
4·0	·66824	·54928	·47338	·41820	·37553	·34126	·31301	·28924	·26894
4·5	·69425	·58003	·50546	·45033	·40712	·37203	·34283	·31807	·29677
5·0	·71654	·60696	·53402	·47930	·43590	·40031	·37044	·34494	·32286
5·5	·73583	·63073	·55958	·50551	·46219	·42635	·39604	·37000	·34732
6·0	·75268	·65184	·58256	·52932	·48626	·45036	·41980	·39338	·37025
6·5	·76754	·67070	·60333	·55102	·50836	·47255	·44187	·41521	·39176
7·0	·78072	·68736	·62217	·57036	·52872	·49310	·46242	·43563	·41196
7·5	·79249	·70297	·63933	·58907	·54750	·51217	·48159	·45474	·43094
8·0	·80307	·71687	·65503	·60584	·56490	·52991	·49949	·47267	·44880
8·5	·81263	·72954	·66944	·62131	·58103	·54645	·51624	·48951	·46564
9·0	·82131	·74113	·68271	·63564	·59605	·56189	·53194	·50535	·48152
9·5	·82923	·75178	·69496	·64894	·61004	·57635	·54669	·52027	·49652
10·0	·83647	·76160	·70632	·66132	·62312	·58990	·56056	·53434	·51071
10·5	·84313	·77067	·71687	·67287	·63536	·60263	·57363	·54764	·52415
11·0	·84927	·77908	·72669	·68366	·64684	·61461	·58596	·56022	·53689
11·5	·85494	·78690	·73586	·69377	·65764	·62590	·59761	·57213	·54898
12·0	·26021	·79418	·74444	·70327	·66780	·63658	·60864	·58343	·56048
12·5	·86511	·80099	·75249	·71219	·37738	·34663	·61909	·59416	·57141
13·0	·86967	·80736	·76004	·72060	·68643	·65617	·62900	·60436	·58183
13·5	·87394	·81334	·76715	·72854	·69499	·66522	·63842	·61407	·59177
14·0	·87794	·81896	·77386	·73604	·70311	·67381	·64738	·62332	·60125
15·0	·90734	·86089	·82447	·79327	·76559	·74053	·71758	·69636	·67663
20·0	·93748	·90497	87881	·85591	·83517	·81606	·79824	·73150	·76569
30·0	·96837	·95130	·93720	·92458	·91290	·90192	·89148	·88150	·87191
∞	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000

ملاحظة ، ان كل   تعني   وان كل λ تعني

تابع الجدول (٥)

α^{*} \ β^{*}	4·0	5·0	6·5	9·0	11·0	14·0	19·0	29·0	59·0
− ·5	$\cdot 0^{3}41325$	$\cdot 0^{3}34154$	$\cdot 0^{3}27098$	$\cdot 0^{3}20156$	$\cdot 0^{3}16727$	$\cdot 0^{3}13326$	$\cdot 0^{4}99535$	$\cdot 0^{4}66082$	$\cdot 0^{4}32904$
·0	·010206	·0085124	·0068158	·0051162	·0042653	·0034137	·0025614	·0017083	$\cdot 0^{3}85452$
·5	·033020	·027794	·022465	·017026	·014264	·011472	·0086511	·0057991	·0029157
1·0	·062850	·053376	·043541	·033319	·028053	·022679	·017191	·011585	·0058568
1·5	·095510	·081790	·067312	·051995	·043994	·035747	·027240	·018458	·0093841
2·0	·12876	·11111	·092207	·071870	·061103	·049898	·038224	·026043	·013317
2·5	·16142	·14029	·11733	·092238	·078783	·064651	·049781	·034103	·017540
3·0	·19290	·16875	·14216	·11267	·096658	·079695	·061676	·042481	·021976
3·5	·22292	·19618	·16638	·13288	·11449	·094827	·073748	·051068	·026572
4·0	·25137	·22244	·18984	·15272	·13211	·10991	·085885	·059786	·031288
4·5	·27823	·24746	·21244	·17207	·14943	·12484	·098008	·068575	·036094
5·0	·30354	·27125	·23413	·19086	·16636	·13955	·11006	·077394	·040967
5·5	·32737	·29383	·25492	·20908	·18288	·15401	·12199	·086209	·045889
6·0	·34981	·31524	·27481	·22669	·19895	·16818	·13377	·094994	·050847
6·5	·37095	·33554	·29382	·24370	·21457	·18203	·14539	·10373	·055827
7·0	·39086	·35480	·31199	·26011	·22972	·19556	·15682	·11240	·060821
7·5	·40965	·37307	·32936	·27594	·24441	·20877	·16805	·12099	·065820
8·0	·42738	·39041	·34596	·29120	·25865	·22164	·17908	·12950	·070818
8·5	·44414	·40689	·36183	·30591	·27244	·23418	·18989	·13791	·075809
9·0	·45999	·42256	·37701	·32009	·28580	·24639	·20050	·14622	·080789
9·5	·47501	·43746	·39154	·33375	·29874	·25828	·21088	·15442	·085753
10·0	·48925	·45165	·40544	·34693	·31126	·26985	·22106	·16252	·090698
10·5	·50276	·46518	·41877	·35964	·32340	·28112	·23102	·17051	·095622
11·0	·51560	·47808	·43154	·37190	·33515	·29208	·24077	·17838	·10052
11·5	·52782	·49040	·44379	·38373	·34653	·30275	·25032	·18615	·10539
12·0	·53945	·50217	·45554	·39516	·35756	·31314	·25966	·19379	·11024
12·5	·55054	·51343	·46683	·40619	·36826	·32325	·26880	·20133	·11505
13·0	·56112	·52420	·47768	·41685	·37862	·33309	·27775	·20875	·11983
13·5	·57122	·53452	·48812	·42715	·38867	·34267	·28650	·21606	·12458
14·0	·58088	·54442	·49816	·43711	·39842	·35200	·29507	·22326	·12930
19·0	·65819	·62459	·58083	·52099	·48175	·43321	·37136	·28936	·17453
29·0	·75070	·72282	·68535	·63185	·59522	·54807	·48477	·39458	·25416
59·0	·86266	·84504	·82047	·78342	·75661	·72016	·66738	·58326	·42519
∞	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000	1·00000

الجدول (٦) : توزيع مربع كاي

$$F(\chi^2) = P_r(\chi^2 \leq \chi^2_n(\alpha)) = 1 - \alpha$$

$$\chi^2 \sim \chi^2_{(n)}, 0 < \chi^2 < \infty$$

n \ α	·005	·01	·025	·05	·10	·25	·50
1	392704.10^{-10}	157088.10^{-9}	982069.10^{-9}	393214.10^{-8}	·0157908	·1015308	·454936
2	·0100251	·0201007	·0506356	·102587	·210721	·575364	1·38629
3	·0717218	·114832	·215795	·351846	·584374	1·212534	2·36597
4	·206989	·297109	·484419	·710723	1·063623	1·92256	3·35669
5	·411742	·554298	·831212	1·145476	1·61031	2·67460	4·35146
6	·675727	·872090	1·23734	1·63538	2·20413	3·45460	5·34812
7	·989256	1·239043	1·68987	2·16735	2·83311	4·25485	6·34581
8	1·34441	1·64650	2·17973	2·73264	3·48954	5·07064	7·34412
9	1·73493	2·08790	2·70039	3·32511	4·16816	5·89883	8·34283
10	2·15586	2·55821	3·24697	3·94030	4·86518	6·73720	9·34182
11	2·60322	3·05348	3·81575	4·57481	5·57778	7·58414	10·3410
12	3·07382	3·57057	4·40379	5·22603	6·30380	8·43842	11·3403
13	3·56503	4·10692	5·00875	5·89186	7·04150	9·29907	12·3398
14	4·07467	4·66043	5·62873	6·57063	7·78953	10·1653	13·3393
15	4·60092	5·22935	6·26214	7·26094	8·54676	11·0365	14·3389
16	5·14221	5·81221	6·90766	7·96165	9·31224	11·9122	15·3385
17	5·69722	6·40776	7·56419	8·67176	10·0852	12·7919	16·3382
18	6·26480	7·01491	8·23075	9·39046	10·8649	13·6753	17·3379
19	6·84397	7·63273	8·90652	10·1170	11·6509	14·5620	18·3377
20	7·43384	8·26040	9·59078	10·8508	12·4426	15·4518	19·3374
21	8·03365	8·89720	10·28293	11·5913	13·2396	16·3444	20·3372
22	8·64272	9·54249	10·9823	12·3380	14·0415	17·2396	21·3370
23	9·26043	10·19567	11·6886	13·0905	14·8480	18·1373	22·3369
24	9·88623	10·8564	12·4012	13·8484	15·6587	19·0373	23·3367
25	10·5197	11·5240	13·1197	14·6114	16·4734	19·9393	24·3366
26	11·1602	12·1981	13·8439	15·3792	17·2919	20·8434	25·3365
27	11·8076	12·8785	14·5734	16·1514	18·1139	21·7494	26·3363
28	12·4613	13·5647	15·3079	16·9279	18·9392	22·6572	27·3362
29	13·1211	14·2565	16·0471	17·7084	19·7677	23·5666	28·3361
30	13·7867	14·9535	16·7908	18·4927	20·5992	24·4776	29·3360
40	20·7065	22·1643	24·4330	26·5093	29·0505	33·6603	39·3353
50	27·9907	29·7067	32·3574	34·7643	37·6886	42·9421	49·3349
60	35·5345	37·4849	40·4817	43·1880	46·4589	52·2938	59·3347
70	43·2752	45·4417	48·7576	51·7393	55·3289	61·6983	69·3345
80	51·1719	53·5401	57·1532	60·3915	64·2778	71·1445	79·3343
90	59·1963	61·7541	65·6466	69·1260	73·2911	80·6247	89·3342
100	67·3276	70·0649	74·2219	77·9295	82·3581	90·1332	99·3341

تابع الجدول (٦)

n \ α	·75	·90	·95	·975	·99	·995	·999
1	1·32330	2·70554	3·84146	5·02389	6·63490	7·87944	10·828
2	2·77259	4·60517	5·99146	7·37776	9·21034	10·5966	13·816
3	4·10834	6·25139	7·81473	9·34840	11·3449	12·8382	16·266
4	5·38527	7·77944	9·48773	11·1433	13·2767	14·8603	18·467
5	6·62568	9·23636	11·0705	12·8325	15·0863	16·7496	20·515
6	7·84080	10·6446	12·5916	14·4494	16·8119	18·5476	22·458
7	9·03715	12·0170	14·0671	16·0128	18·4753	20·2777	24·322
8	10·2189	13·3616	15·5073	17·5345	20·0902	21·9550	26·125
9	11·3888	14·6837	16·9190	19·0228	21·6660	23·5894	27·877
10	12·5489	15·9872	18·3070	20·4832	23·2093	25·1882	29·588
11	13·7007	17·2750	19·6751	21·9200	24·7250	26·7568	31·264
12	14·8454	18·5493	21·0261	23·3367	26·2170	28·2995	32·909
13	15·9839	19·8119	22·3620	24·7356	27·6882	29·8195	34·528
14	17·1169	21·0641	23·6848	26·1189	29·1412	31·3194	36·123
15	18·2451	22·3071	24·9958	27·4884	30·5779	32·8013	37·697
16	19·3689	23·5418	26·2962	28·8454	31·9999	34·2672	39·252
17	20·4887	24·7690	27·5871	30·1910	33·4087	35·7185	40·790
18	21·6049	25·9894	28·8693	31·5264	34·8053	37·1565	42·312
19	22·7178	27·2036	30·1435	32·8523	36·1909	38·5823	43·820
20	23·8277	28·4120	31·4104	34·1696	37·5662	39·9968	45·315
21	24·9348	29·6151	32·6706	35·4789	38·9322	41·4011	46·797
22	26·0393	30·8133	33·9244	36·7807	40·2894	42·7957	48·268
23	27·1413	32·0069	35·1725	38·0756	41·6384	44·1813	49·728
24	28·2412	33·1962	36·4150	39·3641	42·9798	45·5585	51·179
25	29·3389	34·3816	37·6525	40·6465	44·3141	46·9279	52·618
26	30·4346	35·5632	38·8851	41·9232	45·6417	48·2899	54·052
27	31·5284	36·7412	40·1133	43·1945	46·9629	49·6449	55·476
28	32·6205	37·9159	41·3371	44·4608	48·2782	50·9934	56·892
29	33·7109	39·0875	42·5570	45·7223	49·5879	52·3356	58·301
30	34·7997	40·2560	43·7730	46·9792	50·8922	53·6720	59·703
40	45·6160	51·8051	55·7585	59·3417	63·6907	66·7660	73·402
50	56·3336	63·1671	67·5048	71·4202	76·1539	79·4900	86·661
60	66·9815	74·3970	79·0819	83·2977	88·3794	91·9517	99·607
70	77·5767	85·5270	90·5312	95·0232	100·425	104·215	112·317
80	88·1303	96·5782	101·879	106·629	112·329	116·321	124·839
90	98·6499	107·565	113·145	118·136	124·116	128·299	137·208
100	109·141	118·498	124·342	129·561	135·807	140·169	149·449

الجدول : (٧) توزيع t

$$F(t) = P_r(t \le t_n(\alpha)) = 1 - \alpha$$

$$t \sim t_{(n)} \; ; \; -\infty < t < \infty$$

n \ α	·60	·75	·90	·95	·975	·99	·995	·9975	·999	·9995
1	·325	1·000	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657	127·32	318·31	636·62
2	·289	·816	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925	14·089	22·327	31·598
3	·277	·765	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841	7·453	10·214	12·924
4	·271	·741	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604	5·598	7·173	8·610
5	·267	·727	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032	4·773	5·893	6·869
6	·265	·718	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707	4·317	5·208	5·959
7	·263	·711	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499	4·029	4·785	5·408
8	·262	·706	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355	3·833	4·501	5·041
9	·261	·703	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250	3·690	4·297	4·781
10	·260	·700	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169	3·581	4·144	4·587
11	·260	·697	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106	3·497	4·025	4·437
12	·259	·695	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055	3·428	3·930	4·318
13	·259	·694	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012	3·372	3·852	4·221
14	·258	·692	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977	3·326	3·787	4·140
15	·258	·691	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947	3·286	3·733	4·073
16	·258	·690	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921	3·252	3·686	4·015
17	·257	·689	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898	3·222	3·646	3·965
18	·257	·688	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878	3·197	3·610	3·922
19	·257	·688	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861	3·174	3·579	3·883
20	·257	·687	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845	3·153	3·552	3·850
21	·257	·686	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831	3·135	3·527	3·819
22	·256	·686	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819	3·119	3·505	3·792
23	·256	·685	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807	3·104	3·485	3·767
24	·256	·685	1·318	1·711	2·064	2·492	2·797	3·091	3·467	3·745
25	·256	·684	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787	3·078	3·450	3·725
26	·256	·684	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779	3·067	3·435	3·707
27	·256	·684	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771	3·057	3·421	3·690
28	·256	·683	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763	3·047	3·408	3·674
29	·256	·683	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756	3·038	3·396	3·659
30	·256	·683	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750	3·030	3·385	3·646
40	·255	·681	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704	2·971	3·307	3·551
60	·254	·679	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660	2·915	3·232	3·460
120	·254	·677	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617	2·860	3·160	3·373
∞	·253	·674	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576	2·807	3·090	3·291

الجدول (٨) : توزيع F

$$G(f) = P_r(f \le f_{n_1,n_2}(0{\cdot}05)) = 0{\cdot}95$$

$$f \sim F(n_1, n_2)\ ;\ 0 < f < \infty$$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161·4	199·5	215·7	224·6	230·2	234·0	236·8	238·9	240·5	241·9	243·9	245·9	248·0	249·1	250·1	251·1	252·2	253·3	254·3
2	18·51	19·00	19·16	19·25	19·30	19·33	19·35	19·37	19·38	19·40	19·41	19·43	19·45	19·45	19·46	19·47	19·48	19·49	19·50
3	10·13	9·55	9·28	9·12	9·01	8·94	8·89	8·85	8·81	8·79	8·74	8·70	8·66	8·64	8·62	8·59	8·57	8·55	8·53
4	7·71	6·94	6·59	6·39	6·26	6·16	6·09	6·04	6·00	5·96	5·91	5·86	5·80	5·77	5·75	5·72	5·69	5·66	5·63
5	6·61	5·79	5·41	5·19	5·05	4·95	4·88	4·82	4·77	4·74	4·68	4·62	4·56	4·53	4·50	4·46	4·43	4·40	4·36
6	5·99	5·14	4·76	4·53	4·39	4·28	4·21	4·15	4·10	4·06	4·00	3·94	3·87	3·84	3·81	3·77	3·74	3·70	3·67
7	5·59	4·74	4·35	4·12	3·97	3·87	3·79	3·73	3·68	3·64	3·57	3·51	3·44	3·41	3·38	3·34	3·30	3·27	3·23
8	5·32	4·46	4·07	3·84	3·69	3·58	3·50	3·44	3·39	3·35	3·28	3·22	3·15	3·12	3·08	3·04	3·01	2·97	2·93
9	5·12	4·26	3·86	3·63	3·48	3·37	3·29	3·23	3·18	3·14	3·07	3·01	2·94	2·90	2·86	2·83	2·79	2·75	2·71
10	4·96	4·10	3·71	3·48	3·33	3·22	3·14	3·07	3·02	2·98	2·91	2·85	2·77	2·74	2·70	2·66	2·62	2·58	2·54
11	4·84	3·98	3·59	3·36	3·20	3·09	3·01	2·95	2·90	2·85	2·79	2·72	2·65	2·61	2·57	2·53	2·49	2·45	2·40
12	4·75	3·89	3·49	3·26	3·11	3·00	2·91	2·85	2·80	2·75	2·69	2·62	2·54	2·51	2·47	2·43	2·38	2·34	2·30
13	4·67	3·81	3·41	3·18	3·03	2·92	2·83	2·77	2·71	2·67	2·60	2·53	2·46	2·42	2·38	2·34	2·30	2·25	2·21
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·76	2·70	2·65	2·60	2·53	2·46	2·39	2·35	2·31	2·27	2·22	2·18	2·13
15	4·54	3·68	3·29	3·06	2·90	2·79	2·71	2·64	2·59	2·54	2·48	2·40	2·33	2·29	2·25	2·20	2·16	2·11	2·07
16	4·49	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·66	2·59	2·54	2·49	2·42	2·35	2·28	2·24	2·19	2·15	2·11	2·06	2·01
17	4·45	3·59	3·20	2·96	2·81	2·70	2·61	2·55	2·49	2·45	2·38	2·31	2·23	2·19	2·15	2·10	2·06	2·01	1·96
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·58	2·51	2·46	2·41	2·34	2·27	2·19	2·15	2·11	2·06	2·02	1·97	1·92
19	4·38	3·52	3·13	2·90	2·74	2·63	2·54	2·48	2·42	2·38	2·31	2·23	2·16	2·11	2·07	2·03	1·98	1·93	1·88
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2·71	2·60	2·51	2·45	2·39	2·35	2·28	2·20	2·12	2·08	2·04	1·99	1·95	1·90	1·84
21	4·32	3·47	3·07	2·84	2·68	2·57	2·49	2·42	2·37	2·32	2·25	2·18	2·10	2·05	2·01	1·96	1·92	1·87	1·81
22	4·30	3·44	3·05	2·82	2·66	2·55	2·46	2·40	2·34	2·30	2·23	2·15	2·07	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·78
23	4·28	3·42	3·03	2·80	2·64	2·53	2·44	2·37	2·32	2·27	2·20	2·13	2·05	2·01	1·96	1·91	1·86	1·81	1·76
24	4·26	3·40	3·01	2·78	2·62	2·51	2·42	2·36	2·30	2·25	2·18	2·11	2·03	1·98	1·94	1·89	1·84	1·79	1·73
25	4·24	3·39	2·99	2·76	2·60	2·49	2·40	2·34	2·28	2·24	2·16	2·09	2·01	1·96	1·92	1·87	1·82	1·77	1·71
26	4·23	3·37	2·98	2·74	2·59	2·47	2·39	2·32	2·27	2·22	2·15	2·07	1·99	1·95	1·90	1·85	1·80	1·75	1·69
27	4·21	3·35	2·96	2·73	2·57	2·46	2·37	2·31	2·25	2·20	2·13	2·06	1·97	1·93	1·88	1·84	1·79	1·73	1·67
28	4·20	3·34	2·95	2·71	2·56	2·45	2·36	2·29	2·24	2·19	2·12	2·04	1·96	1·91	1·87	1·82	1·77	1·71	1·65
29	4·18	3·33	2·93	2·70	2·55	2·43	2·35	2·28	2·22	2·18	2·10	2·03	1·94	1·90	1·85	1·81	1·75	1·70	1·64
30	4·17	3·32	2·92	2·69	2·53	2·42	2·33	2·27	2·21	2·16	2·09	2·01	1·93	1·89	1·84	1·79	1·74	1·68	1·62
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·25	2·18	2·12	2·08	2·00	1·92	1·84	1·79	1·74	1·69	1·64	1·58	1·51
60	4·00	3·15	2·76	2·53	2·37	2·25	2·17	2·10	2·04	1·99	1·92	1·84	1·75	1·70	1·65	1·59	1·53	1·47	1·39
120	3·92	3·07	2·68	2·45	2·29	2·17	2·09	2·02	1·96	1·91	1·83	1·75	1·66	1·61	1·55	1·50	1·43	1·35	1·25
∞	3·84	3·00	2·60	2·37	2·21	2·10	2·01	1·94	1·88	1·83	1·75	1·67	1·57	1·52	1·46	1·39	1·32	1·22	1·00

تابع الجدول (٨)

$$G(f) = P_r(f \leq f_{n_1, n_2}(0{\cdot}01)) = 0{\cdot}99$$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98·5	99·0	99·2	99·2	99·3	99·3	99·4	99·4	99·4	99·4	99·4	99·4	99·4	99·5	99·5	99·5	99·5	99·5	99·5
3	34·1	30·8	29·5	28·7	28·2	27·9	27·7	27·5	27·3	27·2	27·1	26·9	26·7	26·6	26·5	26·4	26·3	26·2	26·1
4	21·2	18·0	16·7	16·0	15·5	15·2	15·0	14·8	14·7	14·5	14·4	14·2	14·0	13·9	13·8	13·7	13·7	13·6	13·5
5	16·3	13·3	12·1	11·4	11·0	10·7	10·5	10·3	10·2	10·1	9·89	9·72	9·55	9·47	9·38	9·29	9·20	9·11	9·02
6	13·7	10·9	9·78	9·15	8·75	8·47	8·26	8·10	7·98	7·87	7·72	7·56	7·40	7·31	7·23	7·14	7·06	6·97	6·88
7	12·2	9·55	8·45	7·85	7·46	7·19	6·99	6·84	6·72	6·62	6·47	6·31	6·16	6·07	5·99	5·91	5·82	5·74	5·65
8	11·3	8·65	7·59	7·01	6·63	6·37	6·18	6·03	5·91	5·81	5·67	5·52	5·36	5·28	5·20	5·12	5·03	4·95	4·86
9	10·6	8·02	6·99	6·42	6·06	5·80	5·61	5·47	5·35	5·26	5·11	4·96	4·81	4·73	4·65	4·57	4·48	4·40	4·31
10	10·0	7·56	6·55	5·99	5·64	5·39	5·20	5·06	4·94	4·85	4·71	4·56	4·41	4·33	4·25	4·17	4·08	4·00	3·91
11	9·65	7·21	6·22	5·67	5·32	5·07	4·89	4·74	4·63	4·54	4·40	4·25	4·10	4·02	3·94	3·86	3·78	3·69	3·60
12	9·33	6·93	5·95	5·41	5·06	4·82	4·64	4·50	4·39	4·30	4·16	4·01	3·86	3·78	3·70	3·62	3·54	3·45	3·36
13	9·07	6·70	5·74	5·21	4·86	4·62	4·44	4·30	4·19	4·10	3·96	3·82	3·66	3·59	3·51	3·43	3·34	3·25	3·17
14	8·86	6·51	5·56	5·04	4·70	4·46	4·28	4·14	4·03	3·94	3·80	3·66	3·51	3·43	3·35	3·27	3·18	3·09	3·00
15	8·68	6·36	5·42	4·89	4·56	4·32	4·14	4·00	3·89	3·80	3·67	3·52	3·37	3·29	3·21	3·13	3·05	2·96	2·87
16	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	4·03	3·89	3·78	3·69	3·55	3·41	3·26	3·18	3·10	3·02	2·93	2·84	2·75
17	8·40	6·11	5·19	4·67	4·34	4·10	3·93	3·79	3·68	3·59	3·46	3·31	3·16	3·08	3·00	2·92	2·83	2·75	2·65
18	8·29	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·84	3·71	3·60	3·51	3·37	3·23	3·08	3·00	2·92	2·84	2·75	2·66	2·57
19	8·19	5·93	5·01	4·50	4·17	3·94	3·77	3·63	3·52	3·43	3·30	3·15	3·00	2·92	2·84	2·76	2·67	2·58	2·49
20	8·10	5·85	4·94	4·43	4·10	3·87	3·70	3·56	3·46	3·37	3·23	3·09	2·94	2·86	2·78	2·69	2·61	2·52	2·42
21	8·02	5·78	4·87	4·37	4·04	3·81	3·64	3·51	3·40	3·31	3·17	3·03	2·88	2·80	2·72	2·64	2·55	2·46	2·36
22	7·95	5·72	4·82	4·31	3·99	3·76	3·59	3·45	3·35	3·26	3·12	2·98	2·83	2·75	2·67	2·58	2·50	2·40	2·31
23	7·88	5·66	4·76	4·26	3·94	3·71	3·54	3·41	3·30	3·21	3·07	2·93	2·78	2·70	2·62	2·54	2·45	2·35	2·26
24	7·82	5·61	4·72	4·22	3·90	3·67	3·50	3·36	3·26	3·17	3·03	2·89	2·74	2·66	2·58	2·49	2·40	2·31	2·21
25	7·77	5·57	4·68	4·18	3·86	3·63	3·46	3·32	3·22	3·13	2·99	2·85	2·70	2·62	2·53	2·45	2·36	2·27	2·17
30	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·30	3·17	3·07	2·98	2·84	2·70	2·55	2·47	2·39	2·30	2·21	2·11	2·01
40	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	3·12	2·99	2·89	2·80	2·66	2·52	2·37	2·29	2·20	2·11	2·02	1·92	1·80
60	7·08	4·98	4·13	3·65	3·34	3·12	2·95	2·82	2·72	2·63	2·50	2·35	2·20	2·12	2·03	1·94	1·84	1·73	1·60
120	6·85	4·79	3·95	3·48	3·17	2·96	2·79	2·66	2·56	2·47	2·34	2·19	2·03	1·95	1·86	1·76	1·66	1·53	1·38
∞	6·63	4·61	3·78	3·32	3·02	2·80	2·64	2·51	2·41	2·32	2·18	2·04	1·88	1·79	1·70	1·59	1·47	1·32	1·00

الجدول (٩) : توزيع المدى القياسي

$$P_r\left(S \le S_{n,m}(0{\cdot}05)\right) = 0{\cdot}95$$

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

تابع الجدول (٩)

$$P_r (S \leq S_{n,m} (0{\cdot}01)) = 0{\cdot}99$$

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.36	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	3.33	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

دليل المصطلحات العلمية
رياضية و احصائية

A	
Additive Property	خاصية الجمع
Alternative Hypothesis	فرضية بديلة
Analysis Of Variance	تحليل التباين
Applied Mathematics	رياضيات تطبيقية
Approximation	تقريب
Arc-Sine Distribution	توزيع الجيب القوسي
Associative	قانون الترتيب
Asymptotic Distribution	توزيع محاذي
Axioms	بديهيات
B	
Bay's Theorem	نظرية بيز
Bernoulli	محاولات برنولي
Best Estimator	أفضل تقدير
Beta Distribution	توزيع بيتا
Binomial Distribution	توزيع ثنائي الحدين
Binomial Theorem	نظرية ثنائي الحدين
C	
Cauchy Distribution	توزيع كوشي
Central Absolute Moments	عزوم مطلقة مركزية
Central Limit Theorem	مبرهنة الغاية المركزية
Characteristics Function	عزوم مركزية
Characteristic function	دالة مميزة (وصفية)
Chebyshev's inequality	متباينة تشيبتشيف
Chi-Square Distribution	توزيع مربع كاي

Coefficient of Dispersion	معامل التشتت
Coefficient of Skewness	معامل الالتواء
Coefficient of Variation	معامل الاختلاف
Coefficient Law	قانون الإبدال
Complement	متممة
Complex Number	عدد معقد
Composite Hypothesis	فرضية مركبة
Compound Distribution	توزيعات مركبة
Concave Function	دالة مقعرة
Conditional	شرطيّ
Conditional Distribution	احتمال شرطيّ
Confidence Interval	فترة ثقة
Confluent Hyper-Geometric Function	الدالة الزائدية المندمجة
Conjugate Function	دالة مرافقة
Consistent Estimator	تقدير متسق
Continuity Correction	مصحح الاستمرارية
Continuous	مستمر
Convergence	تقارب
Convex Function	دالة محدبة
Convolution Formula	صيغة الالتفافية
Correlation Coefficient	معامل ارتباط
Countable Set	مجموعة قابلة للعد
Covariance	تباين مشترك
Critical Region	منطقة حرجة
Critical Values	قيم حرجة
Cumulate Generating	دالة مولدة تراكمية
Cumulative Distribution Function	دالة التوزيع التراكمية

D	
Deciles	العُشيرات
Degrees of Freedoms	درجات حرية
Density Function	دالة كثافة
Digamma Function	دالة كاما المضاعفة
Discontinuity	انقطاع (عدم الاستمرارية)
Discrete	منقطع (منفصل)
Divergency	تباعد
Domain	منطلق
E	
Efficiency	كفاءة
Efficient Estimator	تقدير كفوء
Element	عنصر
Empty	مجموعة خالية
Equally Likely Events	حوادث ذات فرص متساوية
Equivalent Sets	مجموعات متكافئة
Euler's Constant	ثابت أويلر
Event	حادثة
Expected Frequency	تكرار متوقع
Exponential	التوزيع الأسي
Extreme Values Distribution	توزيع القيمة المتطرفة
F	
Factorial Moments	عزوم عاملية
Finite Set	مجموعة منتهية
Flatness	تسطح
Fourier's Inversion Theorem	نظرية الانعكاس لـ فورابر

G	
Gamma Distribution	توزيع كاما
Giometric Distribution	التوزيع الهندسي
Goodness of Fit	حسن المطابقة
Gumbel Distribution	توزيع كامبل
H	
Harmonic Mean	وسط توافقي
Hypergeometric Distribution	توزيع هندسي زائد
I	
Idempotent Law	قانون اللانمو
Identity Matrix	مصفوفة أحادية
Incomplete	غير تام (ناقص)
Inequality	متباينة (متراجحة)
Infinite Set	مجموعة غير منتهية
Inflexion	نقاط انقلاب
Intersection	تقاطع
Interval Estimation	التقدير بفترة
J	
Joint Distribution	توزيع مشترك
K	
Kurtosis	تفلطح
L	
Laplace Distribution	توزيع لابلاس
Law of Large Numbers	قانون الأعداد الكبيرة
Level of Significance	مستوى المعنوية
Likelihood Function	دالة إمكان
Limit Theorems	نظريات الغاية

Limiting Distribution	توزيع مقيد
Linear Combination	تركيب خطي
Logistic Distribution	التوزيع الوقي
Log Normal Distribution	التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي
Lopital's Rule	قاعدة لوبيتل
M	
Maclaurin's Expansion	مفكوك مكلورين
Maps	يُطبّق
Marginal Distribution	توزيع حدي (هامشي)
Mass Function	دالة كتلة
Mathematical Expectation	توقع رياضي
Mathematical Model	نموذج رياضي
Maximum Likelihood	إمكان أعظمي
Mean	متوسط (وسط)
Mean Deviation	انحراف مطلق (متوسط)
Median	وسيط
Mid-Range	منتصف المدى
Mixture of Distribution	خلط التوزيعات
Mode	منوال
Moments	عزوم
Moments about the Origin	عزوم حول نقطة الأصل
Moment Generating Function	دالة مولدة للعزوم
Most Powerful Test (M.P.T)	الاختبار الأكثر قوة
Multinomial Distribution	توزيع متعدد الحدود
Multiple Correlation	ارتباط متعدد
Multivariate Distribution	توزيع متعدد المتغيرات
Mutually Exclusive Event	حوادث متنافية

N	
Negative Binomial Distribution	توزيع ثنائي الحدين السالب
Non-Central Moments	عزوم لا مركزية
Non-Decreasing Function	دالة غير متناقصة
Non-Negative Function	دالة غير سالبة
Normal Distribution	التوزيع الطبيعي
O	
Optimum Test	الاختبار الأمثل (الأفضل)
Order	مرتب ، منظم
Order Statistics	احصاءات مرتبة
Orthogonal	متعامد
Other Wise	في غير ذلك (في أحوال أخرى)
P	
Parameter	معلمة
Parametric Distribution	توزيع معلمي
Pareto Distribution	توزيع باريتو
Partial Correlation	ارتباط جزئي
Peakedness	تذبذب
Pearsonian System	منظومة بيرسون
Pint Estimation	التقدير بنقطة
Poisson Distribution	توزيع بواسون
Polar Coordinates	احداثيات قطبية
Polya's Distribution	توزيع بوليا
Population	مجتمع
Power of a Test	قوة اختبار
Power Series Distribution	توزيع سلسلة القوى
Probability Curve	منحى احتمالي

Probability Distribution	توزيع احتمالي
Probability Generating Function	دالة مولدة احتمالية
Probability Theory	نظرية الاحتمالات
Q	
Quality Control	الرقابة على الجودة
Quantiles	تجزئات
Quartiles	رُبيعات
Quartile Deviation	انحراف ربيعي
R	
Random Sample	عينة عشوائية
Random Variable	متغير عشوائي
Range	مدى
Rank	رتبة
Real-Valued Function	دالة ذات قيمة حقيقية
Recurrence Formula	صيغة التراجع
Reliability	معقولية
S	
Sample Point	نقطة عينة
Sample Space	فضاء العينة
Sampling Distribution	توزيع معاينة
Sampling Techniques	أساليب معينة
Sequential Analysis	تحليل متسلسل
Set Difference	فضاء المجموعة
Set Theory	نظرية المجموعات
Single-Valued Function	دالة وحيدة القيمة
Simple Hypothesis	فرضية بسيطة
Skewed Distribution	توزيع ملتوي

Skewness	الالتواء
Space	فضاء
Standard Deviation	انحراف معياري
Statistic	مؤشر إحصائي
Stochastic Convergence	التقارب التصادفي
Stochastic Independence	الاستقلال التصادفي
Studentized Range	المدى القياسي
Sub Set	مجموعة جزئية
Sufficient statistic	مؤشر إحصائي كافي
Symmetric	متماثل
Symmetric Distribution	توزيع متماثل
T	
Theory of Estimation	نظرية التقدير
Testing Hypotheses	اختبار الفرضيات
Transformation	تحويل
Truncated Distribution	توزيع مقطوع (مبتور)
U	
Unbiased Estimator	تقدير غير متحيز
Uncorrelated	غير مرتبط
Uncountable Set	مجموعة غير قابلة للعد
Uniform, Distribution	توزيع منتظم
Uniformly M.P.T	الاختبار الأكثر قوة بانتظام
Union	اتحاد
Unique Function	دالة وحيدة (فريدة)
Universal Set	المجموعة الشاملة
V	
Variance	تباين

Venn Diagrams	مخططات فين
W	
Wald Distribution	توزيع والد
Wiebull Distribution	توزيع وايبل

لجنة التقويم العلمي

١.أ.د. سهيل خياط
٢.أ.د. نعيم زريق
٣.أ.د. سمير حجير

المدقق اللغوي
الدكتورة سمر الديوب