$$\widetilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \widetilde{A}'x \quad ; \quad x \in X .$$

وينتج من ذلك أن $\widetilde{A} = \widetilde{A}'$.

(١–٧–٥) **ملاحظة:** نسمي المؤثر $\widetilde{A}$ المذكور في النتيجة السابقة التمديد المستمر (المحدود) للمؤثر A .

(١ – ٨) تمديد الداليات الخطية المحدودة ومبرهنة هان – باناخ

معلوم أن الداليات الخطية هي نوع خاص من المؤثرات الخطية. لذلك فإن ما ذكرناه في الفقرة السابقة عن تمديد المؤثرات الخطية يصح أيضاً من أجل الداليات الخطية. مع ذلك يمكن الحصول على تمديدات ذات ميزات خاصة لداليات معرفة على فضاء جزئي من فضاء خطي منظم. يمكن الحصول على هكذا تمديدات اعتماداً على مبرهنة هان . باناخ التي سنثبتها بعد قليل. ولنتمكن من إثباتها نحتاج لبعض التمهيدات.

إذا كانت * عملية ثنائية معرفة على مجموعة غير خالية M وتحقق:

(١) من أجل أي عنصر $x \ni M$ فإن $x * x$ (أي أن * انعكاسية).

(٢) إذا كان $x * y$ و $y * x$ فإن $x = y$ (أي أن * تخالفية).

(٣) إذا كان $x * y$ و $y * z$ فإن $x * z$ (أي أن * متعدية).

عندئذ نقول إن المجموعة M مرتبة جزئياً مع العلاقة * ، كما نقول إن * علاقة ترتيب جزئي على المجموعة M .

إن كلمة جزئي في التعريف السابق تعني أنه قد يوجد في المجموعة M عناصر x و y بحيث أن أي من العلاقتين $x * y$ و $y * x$ غير محققة. في هذه الحالة نقول إن هذه العناصر غير قابلة للمقارنة (أو أنها غير متقارنة). لذلك نقول بالمقابل أن العنصرين x و y قابلين للمقارنة (أو متقارنين) إذا كان $x * y$ أو $y * x$.

نسمي M مجموعة مرتبة كلياً (أو سلسلة **chain**) إذا كان كل عنصرين من M قابلين للمقارنة (أي إما $x * y$ أو $y * x$ من أجل أي عنصرين x و y من M وربما يكون بنفس الوقت $x * y$ و $y * x$ محققة).

نقول عن عنصر $m \ni M$ إنه عنصر أعظمي للمجموعة M إذا نتج من $m * x$ أن $m = x$.
تجدر الإشارة هنا أنه قد لا يوجد للمجموعة M أي عنصر أعظمي.

إذا كانت V مجموعة جزئية من المجموعة المرتبة جزئياً M فنقول عن العنصر $x \ni M$ إنه حد أعلى للمجموعة V إذا كان

$$v * x \quad ; \quad \forall v \in V.$$

تجدر الإشارة هنا أنه قد لا يوجد للمجموعة V حد أعلى.

نتناول الآن بعض الأمثلة.

(١–٨–١) **مثال:** لتكن $M = \boldsymbol{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنضع

$$x * y \Leftrightarrow x \le y \quad ; \quad \forall x, y \in \boldsymbol{R}.$$

فنجد أن M مجموعة مرتبة كلياً مع علاقة الترتيب $\le$. هنا لايوجد عنصر أعظمي.

(١–٨–٢) **مثال:** لتكن $M = \boldsymbol{C}$ مجموعة الأعداد العقدية

$$z = x + i\,y \quad ; \quad x, y \in \boldsymbol{R}.$$

إذا كان $z = x + i\,y$ و $z' = x' + i\,y'$ عنصرين كيفيين من $\boldsymbol{C}$ ، ووضعنا

$$z \le z' \Leftrightarrow x \le x' \quad , \quad y \le y',$$

فنجد اعتماداً على المثال السابق أن $\boldsymbol{C}$ مجموعة مرتبة جزئياً مع العلاقة $\le$. لكنها غير مرتبة كلياً لأنه لو أخذنا العنصرين

$$\boldsymbol{C} \ni z = 2x + i3y \quad \text{و} \quad \boldsymbol{C} \ni z' = 5x + 2i\,y$$

لوجدنا أن كلا العلاقتين $z \le z'$ و $z' \le z$ غير محققة.

هنا يجب استيعاب الرموز " $\le$ " بشكل جيد والتمييز بينها. ففي حين $z \le z'$ تعني $z * z'$ الواردة في تعريف المجموعة المرتبة جزئياً (وعلاقة الترتيب) ، وهي ليس دوماً محققة من أجل أي عنصرين z و z' من $\boldsymbol{C}$ ، فإن $x \le x'$ محققة دوماً من أجل أي عددين حقيقيين x و x' ، ونفس الشيء بالنسبة لـ $y \le y'$.

(١–٨–٣) **مثال:** لتكن M مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}$ ولنأخذ المجموعة

$$M^n = \{ x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \; ; \; x_1, x_2, \dots, x_n \in M \}.$$

فإذا كان $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ عنصرين كيفيين من M^n ووضعنا

$$x \le y \Leftrightarrow x_j \le y_j \quad ; \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

فنجد أن M^n مجموعة مرتبة جزئياً مع العلاقة $\le$ ، لكنها غير مرتبة كلياً.

هنا ، وكما هو الحال في المثال السابق ، يجب التمييز بين $x \le y$ و $x_j \le y_j$.

(١–٨–٤) **مثال:** لتكن $M = \{1, 2, 3, \dots\}$ ولنعرف العلاقة $\div$ بالشكل:

$$m \text{ يقسم } n \Leftrightarrow n \div m$$

فنجد أن $\div$ تعرف علاقة ترتيب جزئي على M ، أي أن M مجموعة مرتبة جزئياً (وليس كلياً) مع علاقة الترتيب الجزئي $\div$.

(١–٨–٥) مثال: لتكن X مجموعة غير خالية ولنرمز بـ $M = \mathcal{P}(X)$ لأسرة كل أجزاء X . فإذا كان E و F عنصرين كيفيين من M (أي أن E و F مجموعتين جزئيتين من X) ووضعنا

$$E * F \Leftrightarrow E \subset F$$

فنجد أن M مجموعة مرتبة جزئياً (وليس كلياً).

نشير هنا بأنه يوجد لـ M عنصر أعظمي وحيد هو $m = X$.

فيما يلي نذكر تمهيدية زورن (**Zorn's Lemma**) التي سنعتمد عليها في إثبات مبرهنة هان – باناخ (مع الإشارة إلى أن لهذه التمهيدية تطبيقات عديدة وفوائد كثيرة).

(١–٨–٦) تمهيدية زورن: لتكن $M \neq \phi$ مجموعة مرتبة جزئياً ، ولنفرض أن كل مجموعة جزئية مرتبة كلياً $W \subset M$ لها حد أعلى. عندئذ يوجد في M عنصر أعظمي واحد على الأقل.

(١–٨–٧) مبرهنة (هان . باناخ): ليكن Y فضاء خطياً جزئياً من الفضاء الخطي المنظم X ، وليكن $f : Y \to \boldsymbol{K}$ دالياً خطياً معرفاً على Y ومحدوداً. عندئذ يمكن تمديد f إلى كل X مع المحافظة على نظيمه ، هذا يعني وجود دالي $\tilde{f} \in X'$ بحيث يكون

$$(1) \qquad \tilde{f}(x) = f(x) \quad ; \quad \forall x \in Y ,$$

$$(2) \qquad \| \tilde{f} \|_{X'} = \| f \|_{Y'} .$$

(العلاقة (2) تعني أن $\sup\limits_{x \in Y , \| x \| = 1} | f(x) | = \sup\limits_{x \in X , \| x \| = 1} | \tilde{f}(x) |$).

الإثبات: إذا كان $Y = \{ \theta \}$ فيكون بطبيعة الحال $f = 0$ ، وبالتالي يمكن أخذ التمديد $\tilde{f} = 0$ فوراً. لذلك سنفرض فيما يلي أن $Y \neq \{ \theta \}$ ، حيث $Y \neq \phi$. ونورد الإثبات في مرحلتين: الأولى عندما يكون الفضاء X حقيقياً ، والثانية عندما يكون الفضاء X عقدياً.

في البداية نعتبر أن الفضاء X حقيقي. عندئذ الدالي f له الشكل

$$f : Y \to \boldsymbol{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x).$$

ليكن $x_0 \in (X \setminus Y)$ ولنشكل المجموعة M_1 بالشكل

$$M_1 = Y + t x_0 = \{ x + t x_0 : x \in Y , t \in \boldsymbol{R} \}.$$

من الواضح أن M_1 فضاء خطي جزئي في X ، ولكل عنصر $u \in M_1$ تمثيل وحيد من الشكل $u = x + t\,x_0$ ، لأنه في الواقع لو وجد تمثيلان مختلفان لـ u:

$$u = x_1 + t_1\,x_0 \quad , \quad u = x_2 + t_2\,x_0 \quad ; \quad t_1 \,, t_2 \in \boldsymbol{R} \,,$$

فيكون $x_1 - x_2 = (t_2 - t_1)\,x_0$. فإذا كان $t_1 = t_2$ ينتج فوراً أن $x_1 = x_2$ ، وبالتالي نحصل على التمثيل الوحيد للعنصر u. أما إذا كان $t_1 \neq t_2$ فيكون $x_0 = \dfrac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1}$ ، وبالتالي x_0 ينتمي إلى Y ، وهذا مخالف للفرض. لذلك لابد وأن يكون $t_1 = t_2$ ومن ثم $x_1 = x_2$ ، وبالتالي وحدانية التمثيل.

من أجل عنصرين x' و x'' من Y يكون لدينا

$$\begin{aligned} f(x') - f(x'') &= f(x' - x'') \\ &\leq \| f \| \, \| x' - x'' \| \quad ; \quad \left(\| f \| = \| f \|_{Y'} \right) \\ &\leq \| f \| \left(\| x' + x_0 \| + \| x'' + x_0 \| \right). \end{aligned}$$

وبالتالي يكون

$$f(x') - \| f \| \, \| x' + x_0 \| \leq f(x'') + \| f \| \, \| x'' + x_0 \|.$$

وبما أن x' و x'' كانا اختياريين من Y فيكون

$$\sup_{x \in Y} \left\{ f(x) - \| f \| \, \| x + x_0 \| \right\} \leq \inf_{x \in Y} \left\{ f(x) + \| f \| \, \| x + x_0 \| \right\}.$$

لذلك يوجد عدد حقيقي c يحقق

$$(3) \qquad \sup_{x \in Y} \left\{ f(x) - \| f \| \, \| x + x_0 \| \right\} \leq c \leq \inf_{x \in Y} \left\{ f(x) + \| f \| \, \| x + x_0 \| \right\}.$$

ليكن الآن $u \in M_1$ عنصراً كيفياً. عندئذ وبحسب ما تقدم يمكن كتابته بالشكل

$$u = x + t\,x_0 \quad ; \quad (x \in Y \;,\; t \in \boldsymbol{R}).$$

لنعرف دالياً F بالشكل

$$F : M_1 \to \boldsymbol{R} \quad ; \quad u \mapsto F(u) = f(x) - t\,c,$$

حيث c عدد حقيقي مثبت ويحقق المتراجحات (3).

من الواضح أن الدالي F خطي كما أن F و f يتساويان على Y. والآن لنبين أن الدالي F محدود.

بما أن Y فضاء خطي جزئي بالفرض فيكون

$$\frac{x}{t} \in Y \quad ; \quad \forall\, x \in Y \;,\; t \neq 0.$$

لذلك من أجل $0 < t$ يكون لدينا بالاستفادة من (3):

$$\begin{aligned} | F(u) | = | f(x) - t\,c | = t \left| f\left(\frac{x}{t} \right) - c \right| &\leq t \left(\| f \| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| \right) \\ &= \| f \| \, \| x + t\,x_0 \| = \| f \| \, \| u \|. \end{aligned}$$

بذلك يكون:

$$F(u) \le |F(u)| \le \| f \| \|u\| \quad ; \quad \forall\, u \in M_1 .$$

ومن أجل $0 > t$ يكون لدينا بالاستفادة من (3):

$$f\left(\frac{x}{t}\right) - c \ge -\| f \| \left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| = -\frac{1}{|t|} \| f \| \| x + t\, x_0 \|$$
$$= \frac{1}{t} \| f \| \|u\| \quad ; \quad u \in M_1 .$$

بذلك يكون

$$F(u) = t\left(f\left(\frac{x}{t}\right) - c \right) \le t . \frac{1}{t} \| f \| \|u\| = \| f \| \|u\| \quad ; \quad u \in M_1 .$$

أصبح الآن

$$(4) \qquad F(u) \le \| f \| \|u\| \quad ; \quad \forall u \in M_1 \ , \ \left(\| f \| = \| f \|_{Y'} \right).$$

نعوض الآن عن u بـ$(-u)$ في (4) فنجد:

$$-F(u) \le \| f \| \|u\| \quad ; \quad \forall u \in M_1 .$$

من العلاقتين الأخيرتين نجد أن

$$|F(u)| \le \| f \| \|u\| \quad ; \quad \forall u \in M_1 .$$

وهذا يعني أن الدالي F محدود كما أن $\| F \| \le \| f \|$.

وبما أن الدالي F تمديد للدالي f من Y إلى M_1 فإن $\| f \| \le \| F \|$. وبذلك يكون $\| F \| = \| f \|$ ، والذي يعني:

$$\| F \|_{M'_1} = \sup_{u \in M_1, \| u \| = 1} |F(u)| = \sup_{x \in Y, \| x \| = 1} | f(x) |.$$

وبذلك نكون قد أوجدنا تمديداً F للدالي المفروض f من مجموعة تعريفه Y إلى الفضاء M_1 مع المحافظة على النظيم.

لنرمز الآن بـ Φ لمجموعة كل التمديدات الممكنة للدالي f مع المحافظة على نظيمه (هذه المجموعة غير خالية بحسب ما تقدم) ، ولنرمز بـ $\varphi_1 , \varphi_2 , \ldots$ لعناصر Φ ، ولنرمز بـ $M_1 , M_2 , \ldots$ لمجموعات تعريف هذه الداليات. والآن لنعرف على Φ علاقة ترتيب جزئي وذلك بوضع:

$$f_1 \prec f_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2 \quad , \quad f_2(x) = f_1(x) \quad ; \quad \forall\, x \in M_1 .$$

(أثبت أن Φ مجموعة مرتبة جزئياً مع $\prec$ فعلاً).

الآن لنأخذ مجموعة جزئية كيفية ومرتبة كلياً $H_A \subset \Phi$:

$$; \quad H_\Lambda = \{ f_\lambda : \lambda \in \Lambda \} (\text{مجموعة أدلة كيفية } \Lambda) ,$$

ولنفرض أن $D(f_\lambda) = M_\lambda$.

لهذه المجموعة حد أعلى وهو دالي f_0 مجموعة تعريفه هي

$$M_0 = D(f_0) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \,.$$

وهنا يكون

$$f_0(x) = f_\lambda(x) \qquad ; \quad x \in M_\lambda \,.$$

كذلك فإن f_0 دالي خطي ويحقق $\| f_0 \| = \| f \|$. وهذا يعني أن $f_0 \ni \Phi$.

وبحسب تمهيدية زورن يوجد لـ Φ عنصر أعظمي f_*.

الدالي f_* معرف على كل الفضاء X ، لأنه عدا ذلك يوجد له ممدد $\tilde{f}_*$. وفي هذه الحالة لن يكون f_* عنصراً أعظمياً لـ Φ ، وهذا تناقض.

نأخذ الآن $\tilde{f} = f_*$ فنحصل على التمديد المطلوب. بذلك نكون قد أثبتنا صحة مبرهنة هان . باناخ من أجل فضاء خطي منظم حقيقي.

نعتبر الآن أن الفضاء X عقدي والدالي المفروض f له الشكل

$$f : Y \to \boldsymbol{C} \qquad ; \quad x \mapsto f(x),$$

حيث Y فضاء خطي جزئي عقدي.

هنا يمكننا اعتبار Y فضاءً خطياً حقيقياً لأن عملية ضرب عناصره بأعداد عقدية تكون محققة دوماً ، وبالتالي ومن باب أولى ، تكون عملية الضرب هذه محققة من أجل أعداد حقيقية (التي تعتبر بدورها أعداداً عقدية جزؤها التخيلي معدوم). لذلك يمكن الاستفادة من حالة الفضاء الحقيقي المثبتة أعلاه.

لنعرف على Y دالياً حقيقياً p بالشكل

$$p : Y \to \boldsymbol{R} \qquad ; \quad y \mapsto p(y) = \operatorname{Re} f(y).$$

إن p دالي خطي (أثبت ذلك) ، وهو محدود لأن

$$|\, p(y) \,| = |\operatorname{Re} f(y)| \le |\, f(y) \,| \le \| f \| \| y \| \qquad ; \quad \forall\, y \in Y.$$

ويكون

$$(5) \qquad \| p \| \le \| f \|.$$

لنعتبر الآن أن X فضاءً خطياً حقيقياً (وهذا ممكن بحسب ما شرحناه آنفاً عن Y) و Y فضاء خطي جزئي حقيقي من X. بذلك تكون شروط الجزء الأول من هذا الإثبات محققة من أجل الثلاثية X و Y و p. لذلك يمكن تمديد p إلى الفضاء X مع المحافظة على نظيمه ، ولنرمز بـ P لأحد هذه التمديدات ، ولنعرف على X دالياً Q بالشكل

$$(6) \qquad Q : X \to \boldsymbol{C} \qquad ; \quad x \mapsto Q(x) = P(x) - i\,P(i\,x).$$

إن Q دالي خطي (أثبت ذلك) وهو محدود لأن

$$\begin{aligned} |\, Q(x) \,| &\le |\, P(x) \,| + |\, P(i\,x) | \\ &\le \| P \| \| x \| + \| P \| \| i\,x \| \\ &\le 2 \| P \| \| x \| = 2 \| p \| \| x \| \qquad ; \quad \forall\, x \in X \,. \end{aligned}$$

سنبين الآن بأن $\| f \| = \| Q \|$. في الواقع بما أن

$$\| Q \| = \sup_{x \in X, \| x \| = 1} | Q(x) |$$

فإنه من أجل كل عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $x_\varepsilon \in X$ بحيث يكون

$$\| x_\varepsilon \| = 1 \quad , \quad \| Q \| < | Q(x_\varepsilon) | + \varepsilon. \qquad (7)$$

نعتبر هنا أن $Q \neq 0$، وبالتالي يمكن اعتبار $f(x_\varepsilon) \neq 0$.

نفرض الآن $\sigma = \operatorname{sgn} Q(x_\varepsilon)$ و $x_1 = \bar{\sigma}\, x_\varepsilon$ فيكون لدينا $\| x_1 \| = 1$ كما أن

$$Q(x_1) = Q(\bar{\sigma}\, x_\varepsilon) = \bar{\sigma}\, Q(x_\varepsilon) \qquad (8)$$

$$= \frac{\overline{Q(x_\varepsilon)}}{| Q(x_\varepsilon) |} Q(x_\varepsilon) = | Q(x_\varepsilon) |.$$

وهذا يعني أن $Q(x_1)$ عدد حقيقي. وبما أن $P(x) = \operatorname{Re} Q(x)$ فيكون أيضاً

$$P(x_1) = Q(x_1).$$

ولكن

$$P(x_1) \leq \| P \| \| x_1 \| = \| p \|. \qquad (9)$$

من (7) و(8) و (9) نجد أن

$$\| Q \| \leq \| P \| + \varepsilon. \qquad (10)$$

وبما أن $\varepsilon > 0$ كان اختيارياً ولدينا $\| P \| = \| p \| \leq \| f \|$ فيكون $\| Q \| \leq \| f \|$.

وبما أن Q تمديد لـ f فيكون $\| f \| \leq \| Q \|$ ، وبالتالي المساواة

$$\| Q \| = \| f \|. \qquad (11)$$

نفرض الآن أن $f(x) = a + i b$ ، حيث a و b أعداد حقيقية ، عندئذ يكون

$$f(i x) = i f(x) = -b + i a ,$$

وبالتالي يكون

$$-b = \operatorname{Re} f(i x) = p(i x).$$

وبما أن $a = \operatorname{Re} f(x) = p(x)$ فيكون لدينا

$$f(x) = p(x) - i p(i x).$$

نأخذ $\tilde{f} = Q$ فنحصل على المطلوب. وبذلك يتم الإثبات.

(١–٨–٨) ملاحظة: في مبرهنة هان– باناخ السابقة أخذنا الدالي الخطي المحدود f المعرف على الفضاء الجزئي $Y \subset X$ ، بالشكل:

$f : Y \to \boldsymbol{R}$ عندما يكون الفضاء X حقيقياً و

$f : Y \to \boldsymbol{C}$ عندما يكون الفضاء X عقدياً.