(١ – ٧) تمديد المؤثرات الخطية المحدودة

من الممكن في بعض الأحيان توسيع مجموعة تعريف مؤثر مفروض A مع المحافظة على بعض خواصه (مثل: الخطية ، المحدودية ، النظيم ، الخ). لذلك من المفيد التذكير بتعريف تمديد مؤثر.

(١–٧–١) **تعريف**: نقول عن مؤثر $T:D(T)\to Y$ أنه تمديد (توسيع) للمؤثر $A:D(A)\to Y$ من المجموعة $D(A)$ إلى المجموعة $D(T)$ إذا كان

$$D(A)\subset D(T) \quad , \quad Tx=Ax \quad ; \quad \forall x\in D(A).$$

ونكتب $T=\widetilde{A}$.

نقول أيضاً بأن A مقصور T من $D(T)$ على $D(A)$ ونكتب $T\,|_{D(A)}=A$.

(١–٧–٢) **ملاحظة**: إذا كانت $D(A)$ محتواة تماماً في $D(T)$ فيكون التمديد غير وحيد بشكل عام.

نهتم الآن بالتمديدات التي تحفظ الخواص الأساسية للمؤثر A ونبدأ مع:

(١–٧–٣) **مبرهنة**: ليكن X فضاء خطياً منظماً و B فضاء باناخ ، وليكن

$$A:D(A)\to B \quad ; \quad (D(A)\subset X)$$

مؤثراً خطياً محدوداً. عندئذ يوجد لـ A تمديد $\widetilde{A}$ خطي ومحدود من الشكل

$$\widetilde{A}:\overline{D(A)}\to B$$

ويحقق $\|\widetilde{A}\|=\|A\|$ ، حيث أن $\overline{D(A)}$ غلاقة المجموعة $D(A)$ في X.

الإثبات: ليكن $x\in\overline{D(A)}$. عندئذ توجد متتالية $D(A)\supset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x$.

وبما أن A مؤثر خطي محدود بالفرض فيكون

$$\|Ax_n-Ax_m\|=\|A(x_n-x_m)\|\le\|A\|\,\|x_n-x_m\|\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

وبالتالي $\{Ax_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية أساسية في B ، فهي متقاربة. لنضع

$$\lim_{n\to\infty}Ax_n=y\in B.$$

الآن لنعرف المؤثر $\widetilde{A}$ بالشكل

$$\widetilde{A}:\overline{D(A)}\to B \quad ; \quad x\mapsto\widetilde{A}x=y=\lim_{n\to\infty}Ax_n\,,$$

ولنبين أن هذا التعريف مستقل عن اختيار المتتالية المتقاربة من x.

في الواقع إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين من $D(A)$ بحيث

$$x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x \quad , \quad x'_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x.$$

عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\| Ax_n - Ax'_n \| &\le \| A \| \, \| x_n - x'_n \| \\ &\le \| A \| \left(\| x_n - x \| + \| x - x'_n \| \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن $\lim\limits_{n\to\infty} \left(Ax_n - Ax'_n \right) = 0$. لدينا الآن:

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Ax'_n .$$

وهذا يعني بدوره أن المؤثر $\widetilde{A}$ معرف بشكل وحيد من أجل أي $x \ni \overline{D(A)}$.

بما أن A خطي فينتج فوراً أن $\widetilde{A}$ خطي (أثبت ذلك).

إذا كان $x \ni D(A)$ فنأخذ $\{ x_n = x \}_{n=1}^{\infty}$ وبالتالي:

$$\widetilde{A} x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax \quad ; \quad x \in D(A).$$

وهذا يعني أن $\widetilde{A}$ تمديد لـ A .

ولكن من أجل أي $x \ni \overline{D(A)}$ توجد متتالية $D(A) \supset \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ، وبالتالي:

$$\| \widetilde{A} x \| = \lim_{n\to\infty} \| Ax_n \| \le \lim_{n\to\infty} \| A \| \, \| x_n \| = \| A \| \, \| x \| \quad ; \quad x \in \overline{D(A)}.$$

من ذلك ينتج أن المؤثر $\widetilde{A}$ محدود كما أن

$$\| \widetilde{A} \| \le \| A \|$$

وبما أن

$$\begin{aligned}\| \widetilde{A} \| = \sup_{x \in \overline{D(A)}, \| x \| = 1} \| \widetilde{A} x \| &\ge \sup_{x \in D(A), \| x \| = 1} \| \widetilde{A} x \| \\ &= \sup_{x \in D(A), \| x \| = 1} \| Ax \| = \| A \|,\end{aligned}$$

فيكون $\| \widetilde{A} \| = \| A \|$. وبذلك يتم المطلوب.

(١-٧-٤) **نتيجة:** إذا كان X فضاءً خطياً منظماً و B فضاء باناخ وكان

$$A : D(A) \to B \quad ; \quad (D(A) \subset X)$$

مؤثراً خطياً محدوداً بحيث أن $D(A)$ كثيفة في X فيمكن تمديد المؤثر A إلى كل X مع المحافظة على الخطية والنظيم ، أي:

$$(1) \qquad \widetilde{A} : X \to B \quad , \quad \| \widetilde{A} \| = \| A \| .$$

ينتج ذلك مباشرة من المبرهنة الأخيرة بملاحظة أن $\overline{D(A)} = X$ ، وهذا التمديد وحيد ، لأنه في الواقع لو وجد تمديدان $\widetilde{A}$ و $\widetilde{A}'$ للمؤثر A من الشكل (1) فإنه من أجل كل $x \ni X$ توجد متتالية $D(A) \supset \{ x_n \}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يكون