(ج) إذا كان $A_1 , A_2 : X \to Y$ مؤثرين خطيين محدودين ، فمن أجل أي عددين α_1 و α_2 يكون
$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)' = \alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 .$$
(د) إذا كان $A : X \to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً و له مؤثر عكسي
$$A^{-1} : Y \to X$$
خطي ومحدود ، فيكون المؤثر العكسي
$$(A')^{-1} : X' \to Y'$$
موجوداً أيضاً وهو خطي ومحدود ، كما أن $(A')^{-1} = (A^{-1})'$.

الإثبات: نتركه كتمرين.

(١–٥–٢٢) تمرين: بفرض X و Y فضاءات باناخ ، أثبت أن التطبيق التالي إيزومورفيزم:
$$\Phi : \mathcal{LB}(X \to Y) \to \mathcal{LB}(Y' \to X') \quad ; \quad \Phi(A) = A'.$$
الإثبات: نتركه كتمرين.

(١–٥–٢٢) تمرين: بفرض X و Y فضاءات باناخ ، أثبت أن التطبيق التالي إيزومورفيزم:
$$\Phi : \mathcal{LB}(X \to Y) \to \mathcal{LB}(Y' \to X') \quad ; \quad \Phi(A) = A'.$$

(١ – ٦) المؤثرات الخطية المحدودة في فضاءات هيلبرت

درسنا في الفقرة (١–٥) المؤثرات الخطية المحدودة في الفضاءات الخطية المنظمة. ونريد الآن أن ندرس أنواعاً لمؤثرات خطية محدودة في فضاء هيلبرت ، حيث أن بنية فضاء هيلبرت تسهل هذه الدراسة وخاصة الجداء الداخلي.

سنتناول في دراستنا التالية المؤثر المرافق الهيلبرتي A^* لمؤثر خطي محدود A (وقد كتبنا هنا A^* للتمييز عن المؤثر المرافق A' المدروس سابقاً) والمؤثر الواحدي والمؤثر الناظمي.

نشير هنا بأننا نتعامل مع فضاءات هيلبرت عقدية.

(١–٦–١) تعريف: ليكن $A : H_1 \to H_2$ مؤثراً خطياً محدوداً ، حيث H_1 و H_2 فضاءات هيلبرت مع الجداءات الداخلية $\langle \cdot , \cdot \rangle_{H_1}$ و $\langle \cdot , \cdot \rangle_{H_2}$ على الترتيب. عندئذ يعرف المؤثر المرافق الهيلبرتي A^* للمؤثر A على أنه المؤثر
$$A^* : H_2 \to H_1$$
الذي يحقق:
$$(1) \qquad \langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1} \quad ; \quad \forall x \in H_1 \ , \ y \in H_2 .$$

إذا كان $H_1 = H_2$ سنكتب اختصاراً $\langle \cdot , \cdot \rangle$ للدلالة على الجداء الداخلي.
للاختصار أيضاً سنكتفي بعبارة المؤثر المرافق عند عدم وجود التباس.

(١-٦-٢) مبرهنة: ليكن A و H_1 و H_2 كما هي في التعريف (١-٦-١). عندئذ المؤثر A^* موجود دوماً وهو وحيد ويحقق

$$\| A^* \| = \| A \| \quad \text{و} \quad (A^*)^* = A.$$

الإثبات: ليكن $y \in H_2$ عنصراً مثبتاً ولنعرف دالياً f بالشكل:

$$f : H_1 \to \boldsymbol{C} \quad ; \quad x \mapsto f(x) = \langle Ax, y \rangle_{H_2} .$$

بما أن A مؤثر خطي فينتج فوراً أن f دالي خطي. يكون أيضاً

$$| f(x) | = \left| \langle Ax, y \rangle_{H_2} \right| \le \| Ax \| \, \| y \| \le \| A \| \, \| x \| \, \| y \| \quad ; \quad \forall x \in H_1 .$$

من ذلك ينتج أن الدالي f محدود على H_1. وبحسب ما رأيناه في المثال (١-٥-٢٠) يوجد عنصر معين بشكل وحيد $z \in H_1$ بحيث يكون

$$f(x) = \langle x, z \rangle_{H_1} \quad ; \quad \forall x \in H_1 .$$

بما أن العنصر $y \in H_2$ كان اختيارياً فيمكن تعريف المؤثر:

$$A^* : H_2 \to H_1 \quad ; \quad y \mapsto A^* y = z \quad , \quad (z \in H_1). \tag{2}$$

بذلك يكون لدينا (وهي العلاقة (1)):

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = f(x) = \langle x, z \rangle_{H_2} = \left\langle x, A^* y \right\rangle_{H_1} .$$

لنبين الآن أن المؤثر A^* خطي ومحدود. في الواقع من أجل أي $x \in H_1$ وأي عنصرين y_1 , y_2 من H_2 وأي عددين $\mu_1 , \mu_2 \in \boldsymbol{C}$ يكون لدينا بحسب (1):

$$\begin{aligned}
\left\langle x , A^*(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) \right\rangle_{H_1} &= \langle Ax, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \rangle_{H_2} \\
&= \overline{\mu_1} \, \langle Ax, y_1 \rangle_{H_2} + \overline{\mu_2} \, \langle Ax, y_2 \rangle_{H_2} \\
&= \overline{\mu_1} \left\langle x, A^* y_1 \right\rangle_{H_1} + \overline{\mu_2} \left\langle x, A^* y_2 \right\rangle_{H_1} \\
&= \left\langle x, \mu_1 A^* y_1 + \mu_2 A^* y_2 \right\rangle_{H_1} .
\end{aligned}$$

من ذلك تنتج خطية A^* ، أي:

$$A^*(\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \mu_1 A^* y_1 + \mu_2 A^* y_2 \quad ; \quad \forall y_1 , y_2 \in H_2 .$$

لدينا الآن بحسب (1) من أجل $y \in H_2$:

$$\begin{aligned}
\| A^* y \|_{H_1}^2 &= \left\langle A^* y, A^* y \right\rangle_{H_1} \\
&= \left\langle A A^* y, y \right\rangle \le \| A A^* y \| \, \| y \| \le \| A \| \, \| A^* y \| \, \| y \| .
\end{aligned}$$

إذا كان $\| A^* y \|_{H_1} = 0$ فمن الواضح أن:

$$0 = \| A^* y \|_{H_1} \le \| A \| \, \| y \|_{H_2} \quad ; \quad \forall \, y \in H_2 .$$

أما إذا كان $\| A^* y \|_{H_1} > 0$ فيكون لدينا:

$$\| A^* y \|_{H_1} \le \| A \| \, \| y \|_{H_2} \quad ; \quad \forall \, y \in H_2 .$$

بذلك يكون المؤثر A^* محدوداً ، كما أن $\| A^* \| \le \| A \|$.

لدينا الآن من أجل $x \in H_1$ و $y \in H_2$:

$$\begin{aligned} \langle (A^*)^* x , y \rangle_{H_2} &= \langle x , A^* y \rangle_{H_1} \\ &= \overline{\langle A^* y , x \rangle_{H_1}} = \overline{\langle y , A x \rangle_{H_2}} = \langle A x , y \rangle_{H_2} . \end{aligned}$$

من ذلك ينتج أن $(A^*)^* x = A x$ من أجل أي $x \in H_1$ ومن ثم $(A^*)^* = A$.

بما أن:

$$\| A \| = \| (A^*)^* \| \le \| A^* \| \le \| A \|$$

فيكون $\| A^* \| = \| A \|$. بقي إثبات وحدانية A^* .

نفرض جدلاً وجود مؤثرين مرافقين A^* و B^* . عندئذ يكون:

$$\langle A x , y \rangle_{H_2} = \langle x , A^* y \rangle_{H_1} = \langle x , B^* y \rangle_{H_1} \quad ; \quad \forall \, x \in H_1 \, , \, y \in H_2 .$$

وبالتالي يكون:

$$\langle x , A^* y - B^* y \rangle_{H_1} = 0 \quad ; \quad \forall \, x \in H_1 \, , \, y \in H_2 .$$

من ذلك ينتج $B^* = A^*$ وبالتالي وحدانية A^* . بذلك يتم المطلوب.

(١–٦–٣) مبرهنة: لتكن H_1 و H_2 و H_3 فضاءات هيلبرت ولتكن المؤثرات الخطية المحدودة:

$$A , B : H_1 \to H_2 \quad , \quad T : H_2 \to H_3 .$$

عندئذ يكون:

(أ) $(\alpha A + \beta B)^* = \bar{\alpha} A^* + \bar{\beta} B \quad ; \quad \alpha , \beta \in \mathbb{C}$.

(ب) $(T A)^* = A^* T^*$.

(ج) $\| A^* A \| = \| A \|^2$.

(د) $T^* T = 0$ إذا وفقط إذا كان $T = 0$.

(هـ) التطبيق : $F : \mathcal{LB}(H_1 \to H_2) \longrightarrow \mathcal{LB}(H_2 \to H_1)$

المعرف بالشكل $A \mapsto F(A) = A^*$ مستمر.

الإثبات: يترك كتمرين.

لنتذكر أننا في الفقرة (١-٣) أوجدنا تجزئة لفضاء هيلبرت H بالشكل $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$ حيث H_1 فضاء خطي جزئي ومغلق في H. نعلم أيضاً أن $N(A)$ فضاء خطي جزئي مغلق من أجل أي مؤثر خطي محدود A.

(١-٦-٤) مبرهنـة: ليكن $A : H_1 \to H_2$ مؤثراً خطياً محدوداً ، حيث أن H_1 و H_2 فضاءات هيلبرت. عندئذ:

(أ) تصح العلاقات

$$H_1 = R(A^*) \oplus N(A), \qquad (3)$$

$$H_2 = R(A) \oplus N(A^*). \qquad (4)$$

(ب) يكون $N(A^*) = \{0\}$ إذا وفقط إذا كانت $R(A)$ كثيفة في H_2.

الإثبات: (أ) بحسب الملاحظة (١-٣-١٩) يكفي إثبات أن

$$N(A) = R(A^*)^{\perp} \quad و \quad N(A^*) = R(A)^{\perp}.$$

في الواقع من أجل $x \in N(A)$ و $z \in R(A^*)$ يوجد عنصر $y \in H_2$ بحيث يكون $z = A^* y$ ، وبالتالي يكون

$$\langle x, z \rangle_{H_1} = \langle x, A^* y \rangle_{H_1} = \langle Ax, y \rangle_{H_2} = 0.$$

أي أن $x \perp z$ ومن ثم $x \in R(A^*)^{\perp}$ ، وبالتالي $N(A) \subset R(A^*)^{\perp}$.

من ناحية ثانية من أجل $u \in R(A^*)^{\perp}$ يكون $A^* Au \in R(A^*)$ ، وبالتالي:

$$\langle Au, Au \rangle_{H_2} = \langle u, A^* Au \rangle_{H_2} = 0.$$

أي أن $Au = 0$ ، وبالتالي $u \in N(A)$ ، ومن ثم $R(A^*)^{\perp} \subset N(A)$.

بذلك يكون $N(A) = R(A^*)^{\perp}$. أي أن (3) صحيحة. لدينا الآن:

$$N(A^*) = R\left((A^*)^*\right)^{\perp} = R(A)^{\perp}.$$

ومنه نحصل على صحة (4).

(ب) نعتبر أن $N(A^*) = \{0\}$. عندئذ يكون بحسب الملاحظة (١-٣-١٥):

$$\overline{R(A)} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(N(A^*)\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H_2.$$

وبذلك تكون $R(A)$ كثيفة في H_2.

وبالعكس إذا ما اعتبرنا أن $R(A)$ كثيفة في H_2 فيكون

$$H_2 = \overline{R(A)} = \left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp},$$

وذلك بحسب الملاحظة آنفة الذكر. لذلك فإن:

$$N(A^*) = R(A)^{\perp} = \left(\left(R(A)^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = H_2^{\perp} = \{0\}.$$

وبذلك يتم المطلوب.

من أجل المبرهنة التالية نأخذ $H_1 = H_2 = H$. في هذه الحالة يكون:

$$A : H \to H \quad , \quad A^* : H \to H \ ,$$
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad ; \quad \forall x , y \in H,$$

حيث يرمز $\langle \cdot , \cdot \rangle$ للجداء الداخلي في H. ومن أجل مؤثر المطابقة $I : H \to H$ يكون لدينا

$$\langle x, I^* x \rangle = \langle I x, x \rangle = \langle x, x \rangle = \langle x, I x \rangle \quad ; \quad \forall x \in H,$$

والذي يعني أن $I^* = I$.

في المبرهنة التالية سنحتاج لمفهوم المؤثر العكسي. لذلك من المفيد التعريف به ولو بشكل بسيط مع التنويه أننا سندرس هذا المفهوم بشكل مفصل في الفقرة (١–١٤).

ليكن المؤثر الخطي

$$(*) \qquad A : D(A) \to Y \quad ; \quad x \mapsto Ax = y \ ,$$

حيث $X \supset D(A)$ و X و Y فضائين خطيين منظمين. عندئذ نقول إن A متباين (أو تطبيق واحد . واحد) إذا كان من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من $D(A)$ بحيث $Ax_1 = Ax_2$ ينتج أن $x_1 = x_2$. هذا يكافئ القول بأنه إذا كان $x_1 \neq x_2$ ينتج أن $Ax_1 \neq Ax_2$.

نقول إن المؤثر A غامر إذا كان من أجل كل عنصر $y \in Y$ يوجد على الأقل عنصر $x \in D(A)$ بحيث يكون $Ax = y$.

إذا كان المؤثر A متبايناً فيوجد مؤثر A^{-1} له الشكل

$$(**) \qquad A^{-1} : R(A) \to D(A) \quad ; \quad y \mapsto A^{-1} y = x$$

نسميه المؤثر العكسي لـ A ، وهو مؤثر خطي و يحقق $A^{-1} A = A A^{-1} = I$. هذا يعني

$$A^{-1} A x = x \quad ; \quad \forall x \in D(A),$$
$$A A^{-1} y = y \quad ; \quad \forall y \in R(A).$$

(١–٦–٥) مبرهنة: (أ) إذا كانت $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة ومتقاربة من مؤثر خطي محدود A فتكون المتتالية $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة من المؤثر A^* .

(ب) إذا كان $A : H \to H$ مؤثراً خطياً محدوداً وله مؤثر عكسي خطي ومحدود $A^{-1} : H \to H$ فيكون كذلك مؤثره المرافق $A^* : H \to H$ كما أن $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

الإثبات: (أ) بحسب الفرضيات لدينا $\lim_{n\to\infty} \| A_n - A \| = 0$ (التقارب في $\mathcal{LB}(H \to H)$).

لدينا الآن:

$$\| A_n^* - A^* \| = \| (A_n - A)^* \| = \| A_n - A \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(ب) نعتبر أن المؤثر العكسي $A^{-1} : H \to H$ موجود ومحدود. عندئذ يكون:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

وبأخذ المرافق يكون

$$(A^{-1})^{*}A^{*}=A^{*}(A^{-1})^{*}=I^{*}=I.$$

وهذا يعني أن المؤثر العكسي $(A^{*})^{-1}$ موجود ويساوي $(A^{-1})^{*}$. وبذلك يتم المطلوب.

(١-٦-٧) **ملاحظة:** نتساءل الآن إن كانت هناك علاقة ما بين المؤثر المرافق الهيلبرتي A^{*} والمؤثر المرافق A' المدروس في الفقرة (١-٥). الإجابة نعم ، ونوضح هذه العلاقة فيما يلي:

لنتذكر أن المؤثر المرافق للمؤثر الخطي المحدود $A:X\to Y$ هو المؤثر:

$$A':Y'\to X' \quad ; \quad g\mapsto A'g=f,$$

حيث $f(x)=(A'g)(x)=g(Ax)$ من أجل $x\ni X$، حيث X و Y فضاءات خطية منظمة و X' و Y' الفضاءات الثنوية لها.

إذا كانت X و Y فضاءات هيلبرت ، ولنسمهما $X=H_1$ و $Y=H_2$. عندئذ بحسب ما وجدناه في المثال (١-٥-٢٠) فإنه من أجل كل دالي f خطي محدود على H يوجد عنصر $u\ni H$ معين بشكل وحيد بحيث يكون

$$f(x)=\langle x,u\rangle \quad ; \quad \forall\ x\in H \ , \ \|f\|=\|u\|.$$

الآن ليكن المؤثر الخطي المحدود $A:H_1\to H_2$ ومرافقه

$$A':H'_2\to H'_1 \quad ; \quad g\mapsto A'g=f,$$

حيث أن

$$f(x)=(A'g)(x)=g(Ax) \quad ; \quad f\in H'_1 \ , \ g\in H'_2,$$

وذلك من أجل $x\ni H_1$. لدينا الآن

$$f(x)=\langle x,x_0\rangle \quad ; \quad \forall\ x\in H_1 \ , \ (x_0\in H_1),$$
$$g(y)=\langle y,y_0\rangle \quad ; \quad \forall\ y\in H_2 \ , \ (y_0\in H_2).$$

لنعرف الآن المؤثرين T_1 و T_2 بالشكل

$$T_1:H'_1\to H_1 \quad ; \quad f\mapsto T_1 f=x_0,$$
$$T_2:H'_2\to H_2 \quad ; \quad g\mapsto T_2 g=y_0.$$

فيكون لدينا

$$\|f\|=\|x_0\|=\|T_1 f\| \quad ; \quad f\in H'_1,$$
$$\|g\|=\|y_0\|=\|T_2 g\| \quad ; \quad g\in H'_2.$$

من ذلك ينتج أن كلاً من T_1 و T_2 إيزومورفيزم.

ليكن الآن f_1 و f_2 داليين من H'_1. عندئذ يوجد عنصران مناسبان x_1 و x_2 من H_1 بحيث يكون

$$f_1(x)=\langle x,x_1\rangle \ , \ f_2(x)=\langle x,x_2\rangle \quad ; \quad \forall\ x\in H_1.$$

وبالتالي من أجل عددين عقديين λ_1 و λ_2 يكون

$$\begin{aligned}(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x) &= \lambda_1 f_1(x)+\lambda_2 f_2(x)\\ &=\lambda_1\langle x , x_1\rangle+\lambda_2\langle x , x_2\rangle\\ &=\langle x , \overline{\lambda_1} x_1+\overline{\lambda_2} x_2\rangle .\end{aligned}$$

وبذلك يكون

$$T_1(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\overline{\lambda_1}\, T_1 f_1+\overline{\lambda_2}\, T_1 f_2 .$$

وبشكل مشابه نحصل على

$$T_2(\mu_1 g_1+\mu_2 g_2)=\overline{\mu_1}\, T_2 g_1+\overline{\mu_2}\, T_2 g_2 .$$

ولكن المؤثر المرافق الهيلبرتي للمؤثر الخطي المحدود $A: H_1 \to H_2$ هو

$$A^* : H_2 \to H_1$$

ويتعين من العلاقات

$$\langle Ax , y\rangle_{H_2}=\langle x , A^* y\rangle_{H_1} \quad ; \quad x\in H_1 \quad , \quad y\in H_2 .$$

مما تقدم نحصل على تمثيل للمؤثر المرافق الهيلبرتي بدلالة المؤثر المرافق وهو

$$A^* = T_1\, A'\, T_2^{-1} : \ H_2 \to H_1 \quad ; \quad y \mapsto A^* y_0 = x_0 \ .$$

$$\begin{tikzcd} H_1 \arrow[r, shift left, "A"] & H_2 \arrow[l, shift left, "A^*"] \\ H'_1 \arrow[u, "T_1"] & H'_2 \arrow[u, "T_2"'] \arrow[l, "A'"] \end{tikzcd}$$

المؤثرات المترافقة ذاتياً

ننتقل الآن لدراسة المؤثرات المترافقة ذاتياً وهي من الأهمية بمكان نظراً لتمتعها بصفات خاصة مميزة.

(١–٦–٨) **تعريف:** نقول إن المؤثر الخطي المحدود $A: H \to H$ مترافق ذاتياً إذا كان $A^* = A$.

(١–٦–٩) **ملاحظة:** من التعريفين (١–٦–٨) و (١–٦–١) نجد فوراً أن المؤثر المترافق ذاتياً يحقق

$$\langle Ax, y\rangle=\langle x, Ay\rangle \quad ; \quad \forall x , y\in H .$$

ويعبر عن ذلك بالقول أن المؤثر المترافق ذاتياً A هو مؤثر تناظري.

(١-٦-١٠) **مبرهنة:** ليكن $A:H\to H$ مؤثراً خطياً محدوداً. عندئذ:

(أ) AA^* و A^*A مؤثرات مترافقة ذاتياً.

(ب) إذا كان A مترافقاً ذاتياً فيكون $\langle Ax,x\rangle$ عدداً حقيقياً من أجل أي $x \ni H$.

(ج) إذا كان $\langle Ax,x\rangle$ عدداً حقيقياً من أجل أي $x \ni H$ فيكون المؤثر A مترافق ذاتياً .

(د) يمكن تمثيل المؤثر A بالشكل $A=A_1+i\,A_2$ ، حيث A_1 و A_2 مؤثرين مترافقين ذاتياً ، وهذا التمثيل وحيد كما أن $A^*=A_1-i\,A_2$.

(هـ) إذا كان $B:H\to H$ مؤثراً خطياً محدوداً ، عندئذ يكون المؤثر AB مترافق ذاتياً إذا وفقط إذا كان $AB=BA$.

الإثبات: نتركه كتمرين.

(١-٦-١١) **مبرهنة:** لتكن $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من المؤثرات الخطية المحدودة والمترافقة ذاتياً ،

$$A_n=A_n^*:H\to H$$

ومتقاربة من مؤثر خطي محدود A. عندئذ يكون A مترافق ذاتياً.

الإثبات: بما أن $A_n\xrightarrow[n\to\infty]{}A$ وكذلك $A_n^*\xrightarrow[n\to\infty]{}A^*$ فيكون لدينا:

$$\begin{aligned}\|A-A^*\| &\le \|A-A_n\|+\|A_n-A_n^*\|+\|A_n^*-A^*\|\\ &<\varepsilon+0+\varepsilon=2\varepsilon \qquad ; \qquad n\ge n_0(\varepsilon)\end{aligned}$$

وبما أن العدد $\varepsilon>0$ كان كيفياً فينتج أن $A=A^*$ ، أي أن المؤثر A مترافق ذاتياً. وهو المطلوب.

نستعرض الآن بعض الأمثلة.

(١-٦-١٢) **مثال:** من أجل المؤثر الصفري

$$0:H\to H \qquad ; \qquad x\mapsto 0x=\theta\,,$$

يكون لدينا من أجل أي $x\,,\,y \ni H$:

$$\langle x,0^*y\rangle=\langle 0x,y\rangle=0=\langle x,0y\rangle.$$

لذلك يكون $0=0^*$. أي أن 0 مترافق ذاتياً.

(١-٦-١٢) **مثال:** مؤثر المطابقة $I:H\to H$ مترافق ذاتياً ، $I^*=I$ ، حيث أثبتنا هذا أعلاه.

(١-٦-١٣) **مثال:** ليكن $\varphi(x)$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ ، وليكن المؤثر:

$$A:L_2[a,b]\to L_2[a,b] \qquad ; \qquad f\mapsto Af=\varphi f\,.$$

يمكن التحقق بسهولة أن A مؤثر خطي محدود . نوجد A^* من العلاقة

$$\langle Af, g \rangle_{L_2[a,b]} = \langle f, A^* g \rangle_{L_2[a,b]} \quad ; \quad f, g \in L_2[a,b].$$

هذا يعني:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) \overline{g(x)} dx = \int_a^b f(x) \overline{A^* g(x)} dx.$$

من ذلك ينتج أن

$$A^* g(x) = \overline{\varphi(x)} g(x) \quad ; \quad \forall g \in L_2[a,b],$$

حيث $\overline{\varphi(x)}$ المرافق العقدي للتابع $\varphi(x)$. بذلك يكون

$$A^* : L_2[a,b] \to L_2[a,b] \quad ; \quad f \mapsto A^* f = \bar{\varphi} f.$$

إذا كان التابع $\varphi(x)$ ذو قيم حقيقية أي $\overline{\varphi(x)} = \varphi(x)$ ، فإن المؤثر A مترافق ذاتياً ، عدا ذلك لا يكون.

(١–٦–١٤) مثال: ليكن المؤثر

$$A : \ell_2 \to \ell_2 \quad ; \quad x \mapsto Ax,$$

حيث أن $x = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ و $Ax = \{0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$.

واضح أن A مؤثر خطي. يكون أيضاً:

$$\| Ax \|_{\ell_2}^2 = 0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = \| x \|^2 \quad ; \quad \forall x \in \ell_2.$$

نوجد المرافق A^* من العلاقة

$$\langle Ax, y \rangle_{\ell_2} = \langle x, A^* y \rangle_{\ell_2} \quad ; \quad x, y \in \ell_2.$$

فإذا فرضنا $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $A^* y = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ يكون لدينا:

$$0\overline{\eta_1} + \xi_1 \overline{\eta_2} + \xi_2 \overline{\eta_3} + \cdots = \xi_1 \overline{\alpha_1} + \xi_2 \overline{\alpha_2} + \xi_3 \overline{\alpha_3} + \cdots$$

بما أن $0\overline{\eta_1} = 0$ فنلاحظ أن المساواة تتحقق من أجل

$$\alpha_1 = \eta_2 \ , \ \alpha_2 = \eta_3 \ , \ \dots \ , \alpha_n = \eta_{n+1} \ , \dots$$

وبالتالي يكون $A^* y = \{\eta_2, \eta_3, \eta_4, \dots\}$

نلاحظ هنا أن $A^* \neq A$ ، وبالتالي A غير مترافق ذاتياً. نضيف أيضاً بأن A ليس غامراً .

(١–٦–١٥) مثال: ليكن u و v عنصرين (مثبتين) من فضاء هيلبرت H ، وليكن المؤثر

$$A : H \to H \quad ; \quad x \mapsto Ax = \langle x, u \rangle v.$$

إن A مؤثر خطي (ينتج ذلك من خطية الجداء الداخلي) ، وهو محدود لأن:

$$\| Ax \| = |\langle x, u \rangle| \| v \| \le \| x \| \| u \| \| v \| \quad ; \quad \forall x \in H.$$

يمكننا إيجاد المرافق A^* من العلاقة:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \quad ; \quad x\,,\, y \in H.$$

هذا يعني أن

$$\langle \langle x, u \rangle v, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \,.$$

أي أن

$$\langle x, u \rangle \langle v, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \,.$$

من ذلك ينتج أن

$$\langle x, \overline{\langle v, y \rangle} u \rangle = \langle x, A^* y \rangle \,.$$

وبالتالي يكون

$$A^* y = \overline{\langle v, y \rangle} u = \langle y, v \rangle u \quad ; \quad \forall\, y \in H.$$

المؤثرات الواحدية والناظمية

(١-٦-١٦) **تعريف:** ليكن $A : H \to H$ مؤثراً خطياً محدوداً. عندئذ:
(أ) نسمي A مؤثراً واحدياً إذا كان تقابلاً ويحقق $AA^* = A^* A = I$.
(ب) نسمي A مؤثراً ناظمياً إذا كان $AA^* = A^* A$.

(١-٦-١٧) **ملاحظة:** (أ) من التعريف السابق نلاحظ فوراً أن المؤثر الواحدي A يجب أن يكون تقابلاً (متباين وغامر) ويحقق:

$$A^* = A^{-1} \quad , \quad D(A) = H \quad , \quad R(A) = H.$$

(ب) نلاحظ أيضاً أن كل مؤثر واحدي هو مؤثر ناظمي لكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة ، لأنه لو أخذنا المؤثر $A = 3iI$ لوجدنا بحسب المبرهنة (١-٦-٣) أن:

$$A^* = -3iI \quad , \quad AA^* = 9I = A^* A.$$

أي أن A مؤثر ناظمي لكنه ليس واحدياً.
(ج) نلاحظ أيضاً أن كل مؤثر مترافق ذاتياً هو مؤثر ناظمي لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة ، ويبدو ذلك واضحاً بأخذ $A = 3iI$ آنف الذكر.
(د) إذا كان المؤثر A واحدياً فيكون $\|A\| = 1$ ، وينتج ذلك من:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^* Ax \rangle = \langle x, Ix \rangle = \|x\|^2 \quad ; \quad \forall\, x \in H.$$

ومنه ينتج أيضاً أن المؤثر الواحدي هو مؤثر إيزومتري.

(١-٦-١٨) **مثال:** ليكن المؤثر A والتابع φ كما هما في المثال (١-٦-١٣) . عندئذ يكون من أجل

أي $f \ni L_2[a,b]$:

$$AA^* f = A(A^* f) = A(\bar{\varphi} f) = \varphi\bar{\varphi} f = |\varphi|^2 f,$$
$$A^* A f = A^*(A f) = A^*(\varphi f) = \bar{\varphi}\varphi f = |\varphi|^2 f.$$

أي أن $AA^* = A^* A$ وبالتالي A مؤثر ناظمي (لكنه ليس واحدياً من أجل أي تابع مستمر $(\varphi(x))$.

إذا كان $|\varphi(x)| = 1$ فيكون $AA^* = A^* A = I$ وبالتالي A واحدي من أجل هكذا تابع.

(١–٦–١٩) مثال: المؤثر A المذكور في المثال (١–٦–١٤) ليس ناظمياً لأنه من أجل أي عنصر $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\} \ni \ell_2$ يكون:

$$AA^* x = A(\{\xi_2, \xi_3, \ldots\}) = \{0, \xi_2, \xi_3, \ldots\},$$
$$A^* Ax = A^*(\{0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}.$$

أي أن $AA^* \neq A^* A$.

(١–٦–٢٠) ملاحظة: مؤثر المطابقة $I : H \to H$ واحدي وناظمي (ومترافق ذاتياً كما ذكرنا أعلاه).

(١–٦–٢١) مبرهنة: ليكن $A : H \to H$ مؤثراً ناظمياً. عندئذ يكون:

(أ) $\forall x \in H \quad ; \quad \|Ax\| = \|A^* x\|$.

(ب) المؤثر $(A - \lambda I)$ ناظمي من أجل أي عدد عقدي λ .

الإثبات: نتركه كتمرين.

(١–٦–٢٢) مبرهنة: يكون المؤثر الخطي المحدود $A : H \to H$ واحدياً إذا وفقط إذا كان غامراً وإيزومترياً.

الإثبات: نعتبر أن A واحدي ، عندئذ يكون $A^* A = AA^* = I$ ، وبالتالي من أجل أي $x \ni H$ يكون لدينا

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^* Ax \rangle = \langle x, I x \rangle = \|x\|^2.$$

بذلك يكون A إيزومتري. وينتج من ذلك أن A متباين.

الآن ليكن $y \ni H$. عندئذ يكون $y = I y = A(A^* y)$ ، وبالتالي فإن y صورة العنصر $(A^* y)$.

أي أن A غامر. بذلك تكون (ب) محققة.

نعتبر الآن أن المؤثر A إيزومتري وغامر. عندئذ من كون A إيزومتري فإنه من أجل أي $x \ni H$ يكون:

$$\langle A^* Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = \langle I x, x \rangle.$$

بذلك يكون $A^* A = I$.

بما أن A غامر فإنه من أجل كل $y \in H$ يوجد $x \in H$ بحيث أن $y = Ax$. لذلك يكون:

$$AA^* y = AA^*(Ax) = A(A^* A)x = AI\,x = Ax = y = I\,y.$$

بذلك يكون $AA^* = I$ ، ومن ثم A واحدي. بذلك يتم المطلوب.

(١-٦-٢٣) ملاحظة: رأينا في المبرهنة السابقة أنه ليكون المؤثر A واحدياً يجب أن يكون غامراً وإيزومترياً. وفي الواقع فإن الإيزومترية لوحدها لا تكفي ليكون المؤثر واحدياً، فمثلاً المؤثر A المذكور في المثال (١-٦-١٤) هو مؤثر إيزومتري لكنه ليس غامراً ، وبالتالي ليس واحدياً (وليس ناظمياً وهذا ما رأيناه في المثال (١-٦-١٩)). نضيف لذلك أنه إذا كان $A : X \to X$ مؤثراً خطياً وإيزومترياً و X فضاء جداء داخلي ومنته الأبعاد ، عندئذ يكون A واحدياً.

(١-٦-٢٤) مبرهنة: ليكن $A : H \to H$ مؤثراً خطياً محدوداً. عندئذ:

(أ) يكون A ناظمياً إذا وفقط إذا كان:

$$\| Ax \| = \| A^* x \| \qquad ; \qquad \forall x \in H. \tag{3}$$

(ب) إذا كان A ناظمياً فيكون $\| A^2 \| = \| A \|^2$.

الإثبات: (أ) نعتبر أن A ناظمي. عندئذ يكون $AA^* = A^* A$ ، وبالتالي:

$$\begin{aligned} \| Ax \|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^* Ax \rangle, \\ \| A^* x \|^2 &= \langle A^* x, A^* x \rangle = \langle x, AA^* x \rangle = \langle x, A^* Ax \rangle. \end{aligned}$$

بذلك يكون:

$$\| Ax \|^2 = \| A^* x \|^2 \qquad ; \qquad \forall x \in H. \tag{4}$$

نعتبر الآن أن (3) محققة. عندئذ تكون (4) محققة. هذا يعني أن:

$$\langle Ax, Ax \rangle = \langle A^* x, A^* x \rangle \qquad ; \qquad \forall x \in H.$$

أي أن:

$$\langle x, A^* Ax \rangle = \langle x, AA^* x \rangle \qquad ; \qquad \forall x \in H.$$

من ذلك ينتج أن $AA^* = A^* A$. أي أن A ناظمي.

(ب) نفرض أن المؤثر A ناظمي. عندئذ تكون (3) محققة. وبحسب المبرهنة (١-٦-٣) /(ج) فإن $\| A^* A \| = \| A \|^2$. لذلك يكون:

$$\begin{aligned} \| A \|^2 &= \| A^* A \| = \sup_{\| x \| = 1} \| A^* Ax \| = \sup_{\| x \| = 1} \| A^*(Ax) \| = \sup_{\| x \| = 1} \| A(Ax) \| = \\ &= \sup_{\| x \| = 1} \| A^2 x \| = \| A^2 \|. \end{aligned}$$