$$\langle x, u_n \rangle = \lambda_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

لكن هذا الـ x ليس بالضرورة أن يكون العنصر الوحيد في H الذي يحقق هذه الخاصة ، لأنه لو أخذنا عنصراً $z \ni H$ بحيث أن

$$z \neq \theta \ , \ \langle z, u_n \rangle = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

لوجدنا أن $(x+z) \ni H$ ويكون

$$\langle x+z, u_n \rangle = \langle x, u_n \rangle + \langle z, u_n \rangle = \lambda_n \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

طبعاً يوجد هكذا $z \ni H$ طالما لم نفرض أن الجملة تامة. لنأخذ مثلاً:

$$, H = L_2[-\pi, +\pi] \quad , \quad \left\{ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \ , \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \ , \quad \lambda_n = \frac{1}{n}$$

فنجد أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ متقاربة ، ونعلم من المثال (١-٤-١٣) أن الجملة منظمة ومتعامدة. لذلك فإن $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ عنصراً من H كما أن

$$\left\langle f \ , \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

لتكن الآن المتتالية العددية $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 < \infty$ ولنضع

$$. g = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$

عندئذ يكون $(f+g) \ni H$ ، كما أن

$$\left\langle f+g \ , \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{n} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

(١-٤-٢٥) **مبرهنة:** يكون فضاء هيلبرت فصولا إذا وفقط إذا كان فيه جملة متعامدة منظمة وتامة.

الإثبات: نتركه كتمرين.

(١ – ٥) المؤثرات والداليات الخطية المحدودة

ليكن X و Y فضائين خطيين منظمين ولتكن M مجموعة جزئية من X. إذا أمكن ربط كل عنصر $x \ni M$ وبشكل وحيد بعنصر $y \ni Y$ فنقول إن لدينا مؤثر (تطبيق) من M إلى Y (أو مؤثر من M في Y) ، ونكتب

$$(1) \qquad A: M \to Y \quad ; \quad x \mapsto A(x).$$

نسمي M مجموعة تعريف المؤثر A (أو ساحة A) ونرمز لها بـ$D(A)$.

قد يكون $D(A)=X$. في هذه الحالة نكتب

$$(1)' \qquad A: X \to Y \quad ; \quad x \mapsto A(x).$$

هذا النوع من المؤثرات هو الذي سنتعامل معه في الفصول القادمة من هذا الكتاب ، أما في الفصول الأخيرة فنتعامل مع مؤثرات من الشكل (1).

نسمي المجموعة

$$(2) \qquad R(A)=\{\, y\in Y:\ \exists\, x\in D(A) \quad ; \quad y=A(x)\}$$

مجموعة قيم A أو مدى A ، كما نسمي المجموعة

$$(3) \qquad N(A)=\{x\in D(A)\ :A(x)=\theta\}$$

الفضاء الصفري للمؤثر A أو نواة A.

فيما يلي سنكتب $A: D(A)\to Y$ ، أو A فقط ، للدلالة على المؤثر ونكتب Ax بدلاً من $A(x)$ إلا إذا اقتضى الأمر خلاف ذلك.

(١–٥–١) **تعريف:** نقول عن المؤثر $A: D(A)\to Y$ إنه:

(أ) خطي: إذا كان

$$(4) \qquad A(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)=\lambda_1 Ax_1+\lambda_2 Ax_2 \quad ; \quad \forall x_1, x_2\in D(A), \ \forall\, \lambda_1,\lambda_2\in \boldsymbol{K}.$$

(ب) محدود: إذا وجد عدد ثابت $0<c$ بحيث يكون

$$(5) \qquad \|Ax\|_Y\le c\,\|x\|_X \quad ; \quad \forall x\in D(A).$$

عدا ذلك نقول إن المؤثر غير محدود.

(ج) إذا كان المؤثر A محدوداً فنسمي أصغر عدد c يحقق (5) بنظيم المؤثر A ونرمز له بالرمز $\|A\|$. في هذه الحالة يكون

$$(6) \qquad \|Ax\|_Y\le\|A\|\ \|x\|_X \quad ; \quad \forall x\in D(A).$$

(د) نقول إن المؤثر A مستمر في النقطة $x_0 \ni D(A)$ إذا كان من أجل كل متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $D(A)$ بحيث أن $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ (التقارب في X)

فإن $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax_0$ (التقارب في Y).

(هـ) نقول إن المؤثر A مستمر (على $D(A)$) إذا كان مستمراً في كل نقطة $x \ni D(A)$.

(و) نقول إن المؤثر A إيزومورفيزم إذا حقق شروط التعريف (١–٢–٥).

(١–٥–٢) **ملاحظة:** ليكن $A: D(A)\to Y$ مؤثراً خطياً . عندئذ يكون:

(أ) $A(\theta)=\theta$.

(ب) إذا كان المؤثر A خطياً ومحدوداً فيمكن حساب نظيمه بالشكل:

$$(7)' \qquad \|A\| = \sup_{0\neq x\in D(A)} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}.$$

$$(7)'' \qquad \|A\| = \sup_{\substack{0\neq x\in D(A),\\ \|x\|_X\leq 1}} \|Ax\|_Y .$$

$$(7)''' \qquad \|A\| = \sup_{\substack{x\in D(A),\\ \|x\|_X = 1}} \|Ax\|_Y .$$

للمؤثر الخطي ميزات خاصة نذكرها في المبرهنة التالية التي نعرضها بدون إثبات لأنه موجود في أغلب المراجع وسوف نتركه كتمرين.

(١-٥-٣) **مبرهنة:** ليكن $A: D(A)\to Y$ مؤثراً خطياً. عندئذ:

(أ) يكون المؤثر A مستمراً إذا وفقط إذا كان A محدوداً.

(ب) إذا كان A مستمراً في نقطة $x_0 \in D(A)$ فيكون مستمراً على $D(A)$.

(ج) إذا كان A محدوداً (مستمراً) فيكون $N(A)$ فضاءً خطياً جزئياً مغلقاً في X.

فضاء المؤثرات الخطية المحدودة $\mathcal{LB}(X\to Y)$

ننتقل الآن للتعرف على فضاء المؤثرات الخطية المحدودة. وهنا سنعتبر أن $D(A)=X$، ذلك لأننا سنتعامل لاحقاً مع هكذا مؤثرات كما ذكرنا أعلاه.

(١-٥-٤) **تعريف:** سنرمز بـ $\mathcal{LB}(X\to Y)$ لمجموعة كل المؤثرات الخطية المحدودة من الشكل $A: X\to Y$ ، حيث X و Y فضائين خطيين منظمين .

(١-٥-٥) **ملاحظة:** في المجموعة $\mathcal{LB}(X\to Y)$ يمكننا تعريف عمليتي جمع وضرب بعدد بالشكل:

$$(A_1+A_2)\,x = A_1x + A_2x \quad ; \quad x\in X\ ,\ A_1, A_2\in \mathcal{LB}(X\to Y)$$
$$(\lambda\cdot A)x = \lambda\cdot Ax \quad ; \quad x\in X\ ,\ A\in \mathcal{LB}(X\to Y).$$

عندئذ تصبح $\mathcal{LB}(X\to Y)$ فضاء خطياً .

(١-٥-٦) **مبرهنة:** $\mathcal{LB}(X\to Y)$ فضاء خطي منظم مع النظيم (7) الذي يأخذ الشكل:

$$\|A\| = \sup_{0\neq x\in X}\frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \quad ; \quad A\in \mathcal{LB}(X\to Y),$$

$$\| A \| = \sup_{x \in X,\, \| x \|_X = 1} \| Ax \|_Y \quad ; \quad A \in .(X \to Y)\, \mathcal{LB}$$

وإذا كان Y فضاء باناخ فيكون كذلك $\mathcal{LB}(X \to Y)$ فضاء باناخ.
لن نذكر الإثبات لأنه موجود في أغلب المراجع.

ننتقل الآن للتعرف على الداليات الخطية وعلى الفضاء الثنوي لفضاء خطي منظم. في الواقع إن الداليات هي نوع خاص من المؤثرات ساحتها عبارة عن مجموعة جزئية من فضاء خطي ومداها في الحقل العددي $\boldsymbol{K}$ ، حيث $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ إذا كان الفضاء الخطي حقيقياً و $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ إذا كان الفضاء عقدياً.

إذا كان f دالياً مجموعة تعريفه $D(f)$ هي مجموعة جزئية من فضاء خطي X فله الشكل

$$(8) \qquad f : D(f) \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x \mapsto f(x).$$

نذكر بأن الدالي f يكون خطياً إذا حقق (4) ، ويكون محدوداً إذا وجد عدد ثابت $0 < c$ بحيث أن

$$(9) \qquad | f(x) | \le c \, \| x \|_X \quad ; \quad \forall x \in D(f).$$

إذا كان الدالي الخطي f محدوداً فيمكن حساب نظيمه $\| f \|$ من العلاقات (7) التي تأخذ الشكل

$$(10)' \qquad \| f \| = \sup_{0 \ne x \in D(f)} \frac{| f(x) |}{\| x \|_X} .$$

$$(10)'' \qquad \| f \| = \sup_{\substack{0 \ne x \in D(f) \\ \| x \|_X \le 1}} | f(x) | .$$

$$(10)''' \qquad \| f \| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \| x \|_X = 1}} | f(x) | .$$

يكون أيضاً

$$(11) \qquad | f(x) \| \le \| f \| \| x \| \quad ; \quad \forall\, x \in D(f).$$

جدير بالذكر هنا أن المبرهنة (١–٥–٣) تصح من أجل الدالي الخطي المحدود.

(١–٥–٧) **ملاحظة**: نعتبر الآن أن $D(f) = X$. عندئذ يكون $\mathcal{LB}(X \to Y)$ فضاء باناخ عندما يكون Y فضاء باناخ وذلك بحسب المبرهنة (١–٥–٦).
معلوم أن كلاً من $\boldsymbol{R}$ و $\boldsymbol{C}$ فضاء تام (فضاء باناخ). لذلك فإن $\mathcal{LB}(X \to \boldsymbol{K})$ فضاء باناخ ، حيث هنا $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ إذا كان الفضاء X حقيقياً و $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ إذا كان الفضاء X عقدياً. هذا يساعدنا في تعريف الفضاء الثنوي لفضاء خطي منظم.

(١–٥–٨) **تعريف**: ليكن X فضاء خطياً منظماً. عندئذ نضع

$$X' = \mathcal{LB}\,(X \to \boldsymbol{K}),$$

ونسمي X' الفضاء الثنوي (الأول) للفضاء X ، كما نسمي

$$X'' = (X')' = \mathcal{LB}\,(X' \to \boldsymbol{K})$$

الفضاء الثنوي الثاني للفضاء X .

(١-٥-١٠) ملاحظة: يجب الملاحظة أن عناصر X' عبارة عن داليات خطية محدودة لها الشكل

$$f : X \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x \mapsto f(x). \tag{12}$$

أما عناصر X'' فهي داليات خطية محدودة لها الشكل

$$F : X' \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad f \mapsto F(f). \tag{13}$$

يمكننا الحصول على دالي $G \in X''$ بأخذ عنصر مثبت $x \in X$ ووضع

$$G_x : X' \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad f \mapsto G_x(f) = f(x). \tag{14}$$

(هنا x عنصر مثبت من X في حين أن المتحول هو $f \in X'$).

من أجل $f_1, f_2 \in X'$ و $\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{K}$ يكون لدينا

$$\begin{aligned} G_x(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) \\ &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \\ &= \lambda_1 G_x(f_1) + \lambda_2 G_x(f_2), \end{aligned}$$

وهذا يعني أن G_x دالي خطي. وبما أن

$$|G_x(f)| = |f(x)| \le \|x\|\,\|f\| \quad ; \quad \forall f \in X',$$

فينتج أن G_x دالي خطي محدود على X' ، وبالتالي $G_x \in X''$. يكون أيضاً

$$\|G_x\| \le \|x\|. \tag{15}$$

مما ذكرناه آنفاً نلاحظ أنه من أجل كل عنصر $x \in X$ يوجد دالي $G_x \in X''$. لذلك يمكننا تعريف مؤثر C بالشكل

$$C : X \to X'' \quad ; \quad x \mapsto C(x) = G_x. \tag{16}$$

يسمى C التطبيق القانوني من X إلى X'' ، وهو خطي لأنه من أجل أي دالي $f \in X'$ يكون

$$\begin{aligned} \big(C(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big)(f) &= G_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(f) \\ &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 G_{x_1}(f) + \lambda_2 G_{x_2}(f) \\ &= \lambda_1 \big(C(x_1)\big)(f) + \lambda_2 \big(C(x_2)\big)(f). \end{aligned}$$

(١-٥-١١) مبرهنة: من اجل كل عنصر $x_0 \ne \theta$ من فضاء خطي منظم X يوجد دالي $f_1 \in X'$ ويحقق

$$\|f_1\| = 1 \quad , \quad f_1(x_0) = \|x_0\|.$$

الإثبات: لنأخذ الفضاء الجزئي من X :

$$M=\{x\in X : x=\lambda x_0 \ , \ \lambda\in \boldsymbol{K}\}$$

ولنعرف عليه دالياً خطياً بالشكل

$$f : M\to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x\mapsto f(x)=f(\lambda x_0)=\lambda \| x_0 \| ,$$

فيكون لدينا

$$| f(x)|=|\lambda| \| x_0 \|=\| \lambda x_0 \|=\| x\| \quad ; \ \forall x\in M .$$

بذلك يكون f دالياً محدوداً ونظيمه $\| f \|=1$. وبحسب مبرهنة هان – باناخ ، التي سنعرض إثباتها لاحقاً في (١–٨–٧) ، يوجد لـ f تمديد f_1 من M إلى X مع المحافظة على النظيم. أي

$$\| f_1 \|=\| f \|=1 \qquad , \qquad f_1(x_0)=f(x_0)=\| x_0 \|.$$

لذلك فإن الدالي f_1 يحقق المطلوب.

(١–٥–١٢) ملاحظة: اعتماداً على المبرهنة السابقة يمكن إثبات العلاقة:

$$\| x\|=\sup_{f\in X', f\neq 0}\frac{| f(x)|}{\| f \|}. \tag{17}$$

ويتم ذلك كما يلي:

$$\sup_{f\in X', f\neq 0}\frac{| f(x)|}{\| f \|}\geq \frac{| f_1(x)|}{\| f_1 \|}=\frac{\| x\|}{1}=\| x\|. \tag{18}$$

وبما أن $| f(x)|\leq \| f \| \| x\|$ فيكون

$$\sup_{f\in X', f\neq 0}\frac{| f(x)|}{\| f \|}\leq \| x\|. \tag{19}$$

من (18) و (19) نحصل على المطلوب.

مما تقدم نجد أنه إذا كانت $x_0 \ni X$ وكان $f(x_0)=0$ من أجل أي دالي $f \ni X'$ فيكون عندئذ $x_0=\theta$.

(١–٥–١٣) ملاحظة: بالاستفادة من (17) ومن تعريف نظيم الدالي لدينا الآن:

$$\| G_x \|=\sup_{f\in X', f\neq 0}\frac{| G_x(f)|}{\| f \|}=\sup_{f\in X', f\neq 0}\frac{| f(x)|}{\| f \|}=\| x\| \quad ; \ \forall x\in X. \tag{20}$$

من (16) و (20) نحصل على

$$\| C(x)\|=\| G_x \|=\| x\| \quad ; \quad \forall x\in X . \tag{21}$$

أي أن C تطبيق إيزومتري من الفضاء X إلى الفضاء X'' .

من (21) ينتج فوراً أن المؤثر C متباين، وهو غامر لمداه $R(C)$. بذلك يكون لدينا الإيزومورفيزم

(بين الفضاء X والمدى $X'' \supset R(C)$) :

$$C: X \to R(C) \subset X'' \quad ; \quad x \mapsto G_x$$

والذي بموجبه يمكن اعتبار X كفضاء خطي جزئي من X'' ، وهذا ما يسمى بالطمر (الغمر) القانوني. نسمي C التطبيق الغامر القانوني.

(١-٥-١٤) **ملاحظة:** اعتماداً على التطبيق القانوني C يمكن الحصول على إتمام الفضاء الخطي X المذكور في (١-٢-١٠) ، حيث يتم ذلك كما يلي:

في البداية لنضع بعض المصطلحات.

من أجل مؤثر $A: X \to Y$ و مجموعة جزئية $X \supset M$ نضع

$$,A(M) = \{ y \in Y : y = Ax \quad ; \quad x \in M \} (22)'$$

ونسمي $A(M)$ صورة المجموعة M وفق المؤثر A . بشكل خاص يكون

$$(22)'' \qquad A(X) = R(A).$$

الآن ليكن $X_c = \overline{C(X)}^{X''}$ إتمام $C(X)$ في X'' .

نلاحظ هنا أنه إذا كان الفضاء X تاماً فيكون $C(X)$ مغلقاً في X'' ، وبالتالي $X_c = C(X)$.

بما أن X'' فضاء باناخ و X_c فضاء خطي جزئي مغلق فيه فإن X_c فضاء باناخ وبنفس الوقت $C(X)$ كثيف فيه.

نسمي X_c إتمام الفضاء X ، وهو وحيد ضمن المفهوم التالي:

إذا كان X فضاء باناخ و $C_1 : X \to X_1$ إيزومتر خطي بحيث أن $C_1(X)$ كثيف في X_1 ، فيوجد إيزومورفيزم $F : X_c \to X_1$.

أشكال الداليات في بعض الفضاءات الخطية المنظمة

لنتعرف الآن على بعض الداليات الخطية وعلى الفضاء الثنوي الموافق لبعض الفضاءات الخطية المنظمة.

(١-٥-١٥) **مثال:** ليكن $\boldsymbol{R}^n$ الفضاء الإقليدي الحقيقي ذو $n-$ بعداً ، انظر المثال (١-١-١٣) ، وليكن $y \in \boldsymbol{R}^n$ عنصر مثبتاً ، ولنضع

$$f_y : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \quad ; \quad x \mapsto f_y(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \, ,$$

حيث هنا $x = (x_1, x_2, ..., x_3) \in \boldsymbol{R}^n$ و $y = (y_1, y_2, ..., y_3) \in \boldsymbol{R}^n$.

واضح أن f_y دالي خطي على $\boldsymbol{R}^n$. وبما أنه من أجل أي $x \in \boldsymbol{R}^n$ يكون لدينا

$$,|\, f_y(x)\,| = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| x \| \, \| y \|$$

فينتج أن f_y دالي خطي محدود على $\boldsymbol{R}^n$ ، أي أن $f_y \in \left(\boldsymbol{R}^n\right)'$. يكون أيضاً
$\| f_y \| \le \| y \|$.

يمكن إثبات أن $\| f_y \| = \| y \|$ من أجل كل $y \in \boldsymbol{R}^n$. وقد أخذنا هنا النظيم الإقليدي $\| x \| = \| x \|_2$ في $\boldsymbol{R}^n$ وكان يمكن أخذ أي نظيم مكافئ له من تلك المذكورة في المثال (١–١–١٣).

يمكن تعميم المثال السابق كما يلي:

(١–٥–١٦) مثال: لنأخذ الفضاء $\boldsymbol{K}^n = \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{K} \times \cdots \times \boldsymbol{K}$ المذكور في المثال (١–١–١٣). إنه فضاء منظم مع كل من النظم التالية (المتكافئة فيما بينها):

$$\| x \|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \boldsymbol{K}^n ,\ 1 \le p < \infty ,$$

$$\| x \|_\infty = \max_j |\lambda_j| \quad ; \quad x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \boldsymbol{K}^n .$$

ليكن $y = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \boldsymbol{K}^n$ عنصر مثبتاً ولنضع

$$f_y : \boldsymbol{K}^n \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x \mapsto f_y(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mu_j ,$$

فنجد أن f_y دالي خطي على $\boldsymbol{K}^n$. يكون أيضاً (من أجل $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$|\, f_y(x)\,| = \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mu_j \right| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\mu_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \| x \|_p \, \| y \|_q \quad ; \quad \forall\, x \in \boldsymbol{K}^n .$$

أي أن f_y دالي خطي محدود على $\boldsymbol{K}^n$ ، كما أن $\| f_y \| \le \| y \|_q$.

يمكن إثبات أن $\| f_y \| = \| y \|_q$ من أجل كل $y \in \boldsymbol{K}^n$.

هنا أخذنا النظيم $\| x \| = \| x \|_p$ في $\boldsymbol{K}^n$. لذلك يكون الفضاء الثنوي لـ $\boldsymbol{K}^n$ المزود بالنظيم $\| \cdot \|_p$ هو الفضاء $\boldsymbol{K}^n$ مزوداً بانظيم $\| \cdot \|_q$ ، حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

بشكل خاص عندما $p = q = 2$ نعود للنظيم الإقليدي ، وتكون الحالة مشابهة لما فعلناه في المثال السابق.

(١-٥-١٧) مثال: ليكن ℓ_p الفضاء المذكور في المثال (١-١-١٧) ، حيث $1 \le p \le \infty$ ، والنظيم معطى بالشكل

$$\| x \|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \ , \ 1 \le p \le \infty,$$
$$\| x \|_{\ell_\infty} = \sup_n | \xi_n | \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty .$$

ليكن $y = \{ \eta_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$ عنصر مثبتاً ، ولنضع

$$f_y : \ell_p \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x \mapsto f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n , \tag{23}$$

فنجد أن f_y دالي خطي على ℓ_p . يكون أيضاً (من أجل $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$):

$$| f_y(x) | = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n \right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \eta_n |^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad .$$
$$= \| x \|_{\ell_p} \| y \|_{\ell_q} \quad ; \quad \forall \ x \in \ell_p ,$$

أي أن f_y دالي خطي محدود على ℓ_p ، كما أن $\| f_y \| \le \| y \|_{\ell_q}$.

يمكن إثبات أن $\| f_y \| = \| y \|_q$ من أجل كل $y \in \ell_q$.

إضافة لذلك فإنه من أجل $1 \le p < \infty$ يمكن إنشاء إيزومورفيزم من الشكل

$$F : \ell_q \to \left(\ell_p \right)' \quad ; \quad y \mapsto f_y ,$$

وكل عنصر من $\left(\ell_p \right)'$ له الشكل (23). أي أن

$$\left(\ell_p \right)' \cong \ell_q \quad ; \quad 1 \le p < \infty \ , \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

الإشارة $\cong$ تعني أن الفضائين $\left(\ell_p \right)'$ و ℓ_q إيزومورفيين وغالباً ما تستبدل بإشارة المساواة $=$.

نشير هنا بأن عناصر $\left(\ell_\infty \right)'$ مختلفة تماماً عن عناصر $\left(\ell_p \right)'$ آنف الذكر كما أن طريقة إيجاده مختلفة.

(١-٥-١٨) مثال: لنأخذ الفضاء $L_p[a,b]$ المذكور في المثالين (١-١-١٥) و(١-١-١٦) ، حيث $1 \le p \le \infty$ ، والنظيم معطى بالشكل

$$\| f \|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad f \in L_p[a,b] ,$$

حيث $1 \le p < \infty$ ، و

$$\| f \|_{L_\infty[a,b]} = ess\sup_{x \in [a,b]} | f(x) | \quad ; \quad f \in L_\infty[a,b].$$

ليكن $g \in L_q[a,b]$ عنصر مثبتاً ولنضع

$$F_g : L_p[a,b] \to \boldsymbol{K} \;\; ; \;\; f \mapsto F_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)dx. \tag{24}$$

فنجد أن F_g دالي خطي على $L_p[a,b]$.

من أجل $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ يكون لدينا بحسب متراجحة هولدر:

$$\left| F_g(f) \right| \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \| g \|_{L_q[a,b]} \| f \|_{L_p[a,b]} \quad ; \quad \forall \; f \in L_p[a,b],$$

أي أن F_g دالي خطي محدود على $L_p[a,b]$ ، ويكون $\| F_g \| \le \| g \|_{L_q[a,b]}$.

يمكن إثبات أن $\| F_g \| = \| g \|_{L_q[a,b]}$ من أجل كل $g \in L_q[a,b]$.

إضافة لذلك فإنه من أجل $1 \le p < \infty$ يمكن إنشاء إيزومورفيزم من الشكل

$$F : L_q[a,b] \to \left(L_p[a,b] \right)' \quad ; \quad g \mapsto F_g \; ,$$

وكل عنصر من $\left(L_p[a,b] \right)'$ له الشكل (24). أي أن

$$\left(L_p[a,b] \right)' \cong L_q[a,b] \quad ; \quad 1 \le p < \infty \;\; , \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

الإشارة $\cong$ تعني أن الفضائين $\left(L_p[a,b] \right)'$ و $L_q[a,b]$ إيزومورفيين ، وغالباً ما تستبدل بإشارة المساواة $=$.

نشير هنا أن عناصر $\left(L_\infty[a,b] \right)'$ مختلفة تماماً عن عناصر $\left(L_p[a,b] \right)'$ كما أن طريقة إيجادها مختلفة.

(١–٥–١٩) مثال: لنوجد الفضاء الثنوي للفضاء الحقيقي $C[a,b]$ المذكور في المثال (١–١–١٤).
من أجل ذلك نحتاج لمفهومي التابع ذو التغير المحدود وتكامل ريمان– ستيلجس حيث نذكرهما فيما يلي بإيجاز مع التنويه أنه يوجد الكثير عن هذين المفهومين في المراجع [2] و [7] و [13] مثلاً.

نقول عن تابع f :

$$f : [a,b] \to \boldsymbol{R} \quad ; \quad x \mapsto f(x)$$

إنه ذو تغير محدود (أو محدود التغير) على المجال $[a,b]$ إذا كان المجموع

$$V(f,T) = \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|$$

محدوداً من أجل أي تجزئة T للمجال $[a,b]$:

$.T : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \;\; (*)$

إذا كان التابع f ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ فنسمي العدد

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sup_{T} V(f,T)$$

التغير الكلي للتابع f على المجال $[a,b]$ ، حيث يؤخذ الـ sup على جميع تجزئات المجال $[a,b]$ من الشكل (*).

لنرمز بـ $V[a,b]$ لمجموعة كل التوابع ذات التغيرات المحدودة على المجال $[a,b]$. عندئذ يمكن التحقق بسهولة أن هذه المجموعة تشكل فضاءً خطياً حقيقياً مع عمليتي جمع التوابع وضربها بعدد حقيقي المذكورتين في المثال (١-١-١٤). إضافة لذلك فإن $V[a,b]$ فضاء باناخ مع النظيم

$$\| f \|_{V[a,b]} = | f(a) | + \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \quad ; \quad f \in V[a,b].$$

والآن نعرف تكامل ستيلجس.

ليكن التابعين $f\ ,\ \varphi : [a,b] \to \boldsymbol{R}$ ولتكن T تجزئة للمجال $[a,b]$ من الشكل (*) ولنختار من كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نقطة t_k ثم نشكل المجموع (يسمى المجموع التكاملي):

$$S(f,T)=\sum_{k=1}^{n} \varphi(t_k)\big[f(x_k) - f(x_{k-1}) \big].$$

نضع الآن $\delta = \max_{k}(x_k - x_{k-1})$ ونحسب النهاية $\lim_{\delta \to 0} S(f,T)$.

فإذا كانت هذه النهاية موجودة ومستقلة عن طريقة تجزئة المجال $[a,b]$ وعن طريقة اختيار النقاط t_k من المجالات الجزئية فنسميها تكامل ريمان- ستيلجس للتابع f بالنسبة للتابع φ ونكتب

$$(S)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x).$$

ينص أحد اختبارات وجود هذا التكامل على أن التكامل السابق يكون موجوداً إذا كان التابع f مستمراً والتابع φ ذو تغير محدود على $[a,b]$. وفي الواقع هذا ما نحتاج إليه هنا. نضيف أيضاً أن العلاقة التالية صحيحة من أجل أي تابعين $f \in C[a,b]$ و $\varphi \in V[a,b]$:

$$\left| (S)\int_a^b f(x)\,d\varphi(x) \right| \le \max_{x\in[a,b]} | f(x) | \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$
$$\le \| f \|_{C[a,b]} \| \varphi \|_{V[a,b]} .$$

ليكن الآن $w \in V[a,b]$ عنصر مثبتاً ولنعرف دالياً F_w بالشكل

$$F_w : C[a,b] \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad f \mapsto F_w(f), \tag{25}$$

حيث $F_w(f) = (S)\int_a^b f(x)\,dw(x)$.

من الواضح أن F_w دالي خطي على $C[a,b]$ ، وهو محدود لأن

$$\left| F_w(f) \right| \le \| f \|_{C[a,b]} \| w \|_{V[a,b]} \quad ; \quad \forall\, f \in C[a,b].$$

بذلك يكون $F_w \in \left(C[a,b]\right)'$ كما أن

$$\| F_w \| \le \| w \|_{V[a,b]}.$$

يمكن إثبات أن كل دالي خطي F على $C[a,b]$ يمكن تمثيله بالشكل

$$F(f) = (S)\int_a^b f(x)\,dw(x) \quad ; \quad f \in C[a,b],$$

حيث w تابع ذو تغير محدود على المجال $[a,b]$ وتغيره الكلي هو

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(w) = \| F \|.$$

جدير بالذكر هنا أن التابع w ليس وحيداً ، ولكن يمكن جعله وحيداً بإضافة الشروط التالية عليه (التي تعني أن التابع ينعدم في بداية المجال ومستمر من اليمين بداخله):

$$w(a) = 0 \quad , \quad w(t+0) = w(t) \quad ; \quad a < t < b.$$

(انظر الفقرة 4 . 4 من [**4**] و [**10**]).

(١–٥–٢٠) مثال: ليكن H فضاء هيلبرت و $y \in H$ عنصراً مثبتاً ولنضع

$$f_y : H \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad x \mapsto f_y(x) = \langle x, y \rangle, \tag{26}$$

فيكون لدينا بحسب متراجحة شفارتز

$$\left| f_y(x) \right| = \left| \langle x, y \rangle \right| \le \| x \| \, \| y \| \quad ; \quad \forall x \in H.$$

أي أن f_y دالي خطي محدود على H ، ويكون $\| f_y \| \le \| y \|$.

لدينا الآن

$$\| y \|^2 = \langle y, y \rangle = f_y(y) \le \| f_y \| \, \| y \|.$$

وبالتالي $\| y \| \le \| f_y \|$. بذلك يكون $\| f_y \| = \| y \|$.

وبالعكس من أجل أي دالي $f \in H'$ يوجد عنصر وحيد $y \in H$ بحيث يكون

$$f(x) = \langle x, y \rangle \quad ; \quad \forall x \in H \ , \ \| f \| = \| y \|.$$

لذلك يكون $H \cong H'$ ، التي تعني أن H' و H إيزومورفيان.

نشير هنا أنه بدلاً من $H \cong H'$ يكتب غالباً $H = H'$.

تجدر الإشارة هنا بأن النتائج التي كتبناها في الأمثلة السابقة ، وبخاصة تلك التي كتبت دون إثبات ، يمكن إيجادها مع براهينها كاملة في المراجع [1] و [10] و [11] و [12] و [16] و [19] و [20] .

المؤثر المرافق

إذا كان X فضاء خطياً منظماً فنرمز بـ X' لفضاء الداليات الخطية المحدودة (المستمرة) على X ، انظر التعريف (١-٥-٨).

سنرمز بـ f و g و h و ... لعناصر الفضاء X' ، كما نرمز بـ $\| f \|$ لنظيم الدالي $f \in X'$.

معلوم أن X' فضاء باناخ مع النظيم

$$\| f \| = \sup_{\| x \|_X = 1} | f(x) | \qquad ; \quad f \in X'. \tag{27}$$

ومعلوم أنه من أجل كل $f \in X'$ يكون

$$| f(x) | \leq \| f \| \, \| x \|_X \qquad ; \quad \forall x \in X . \tag{28}$$

ليكن الآن $A : X \to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ، حيث X و Y فضائين خطيين منظمين.

يعرف المؤثر المرافق لـ A ، ونرمز له بـ A' ، على أنه المؤثر

$$A' : Y' \to X' \qquad ; \qquad g \mapsto A'g = f \ ,$$

حيث هنا $f(x) = (A'g)(x) = g(Ax)$ من أجل كل $x \in X$.

(١-٥-٢١) مبرهنة: ليكن $A : X \to Y$ مؤثراً خطياً محدوداً ، حيث X و Y فضائين خطيين منظمين ، وليكن $A' : Y' \to X'$ المؤثر المرافق لـ A . عندئذ يكون:

(أ) $\| A' \| = \| A \|$.

(ب) إذا كانت X و Y و Z فضاءات خطية منظمة و كانت

$$A_1 : X \to Y \qquad \text{و} \qquad A_2 : Y \to Z$$

مؤثرات خطية محدودة ، فيكون عندئذ $(A_2 A_1)' = A'_1 A'_2$.

هنا $A_2 A_1 : X \to Z$ بينما $(A_2 A_1)' = A'_1 A'_2 : Z' \to X'$.

انظر الشكل التالي

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A_1"] \arrow[r, bend left=60, "A_2 A_1"] & Y \arrow[r, "A_2"] & Z \\
X' & Y' \arrow[l, "A'_1"'] \arrow[l, bend left=60, "(A_2 A_1)' = A'_1 A'_2"] & Z' \arrow[l, "A'_2"']
\end{tikzcd}$$