في هذه الحالة يكون لكل عنصر $x \in H$ تمثيل وحيد من الشكل

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad ; \quad x_i \in H_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

والعناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ (المتعامدة مثنى مثنى) تحقق (تأكد من ذلك):

$$\| x \|^2 = \| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2 + \cdots + \| x_n \|^2 . \tag{9}$$

لنكتب للاختصار

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n = \sum_{k=1}^{n} \oplus H_k ,$$

ولنرمز بـ $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus H_k$ لأصغر فضاء خطي جزئي مغلق في H ويحوي كل الفضاءات $\sum_{k=1}^{n} \oplus H_k$ من أجل $n = 1, 2, \ldots$.

(١ – ٤) الجمل المتعامدة المنظمة وسلاسل فورييه في فضاءات هيلبرت

ندرس الآن إمكانية كتابة كل عنصر x من فضاء هيلبرت H الغير منته الأبعاد بشكل سلسلة لانهاية بدلالة عناصر معروفة ومتعامدة مثنى مثنى وبحيث تتقارب هذه السلسلة في H من نفس العنصر x ، ونوجد الشروط التي توفر تلك الإمكانية. هذه العملية تسمى النشر بسلسلة فورييه في فضاء هيلبرت. لذلك من المفيد هنا ذكر بعض التعاريف المساعدة ، حيث نعتبر فيما يلي أن H فضاء هيلبرت فصول وغير منتهي الأبعاد مع الجداء الداخلي $\langle \cdot , \cdot \rangle$ ما لم يرد خلاف ذلك.

(١-٤-١) تعريف: نقول عن متتالية $\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر H إنها:

(أ) تشكل جملة متعامدة في H إذا كان $\langle u_n , u_m \rangle = 0$ من أجل $n \neq m$.

(ب) منظمة إذا كان $\| u_n \| = 1$ من أجل $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(١-٤-٢) ملاحظة: باستخدام رمز كرونيكر $\delta_{n,m}$ الذي يساوي الواحد عندما $n = m$ ، ويساوي الصفر عندما $n \neq m$ ، يمكن القول إن $\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}$ تشكل جملة متعامدة منظمة في H إذا وفقط إذا كان $\langle u_n , u_m \rangle = \delta_{n,m}$.

(١-٤-٣) تعريف: إذا كانت $\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في H فنسمي الأعداد

$$\alpha_n = \langle x, u_n \rangle \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ , \ (x \in H)$$

عوامل فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة $\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}$ و نسمي $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ سلسلة فورييه للعنصر x بالنسبة للجملة $\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}$.

(١–٤–٤) مبرهنة: لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في H. عندئذ:

(أ) من أجل أي عنصر $x \in H$ تصح المتراجحة

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \le \|x\|^2. \qquad (1)$$

(متراجحة بيسيل)

(ب) المتتالية $\left\{\sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ أساسية في H ، وتتقارب من العنصر x إذا وفقط إذا تحققت المساواة التالية (التي تسمى علاقة الإغلاق):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2. \qquad (2)$$

(مساواة بارسيفال)

في هذه الحالة يكون

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n. \qquad (3)$$

الإثبات: يترك كتمرين.

(١–٤–٥) ملاحظة: لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في H.

وجدنا في المبرهنة السابقة أن الشرط اللازم والكافي لكي يكتب العنصر $x \in H$ بشكل سلسلة فوريه متقاربة في H من x نفسه هو أن تتحقق مساواة بارسيفال من أجل هذا الـ x. هذا الأمر يقود إلى التعريف التالي:

(١–٤–٦) تعريف: نقول عن جملة متعامدة منظمة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ إنها تامة (مغلقة) في H إذا تحققت مساواة بارسيفال (2) من أجل جميع عناصر H.

المبرهنة التالية تعطينا شرطا مكافئا للتمام (للإغلاق).

(١–٤–٧) مبرهنة: إذا كانت $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت H فتكون الشروط التالية متكافئة فيما بينها :

(أ) الجملة تامة في H.

(ب) الصفر θ هو العنصر الوحيد الذي يعامد جميع عناصر الجملة.

(ج) تتحقق مساواة بارسيفال من أجل مجموعة جزئية كثيفة $M \subset H$.

(د) الجملة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ تشكل قاعدة في H.

الإثبات: يترك كتمرين.

معلوم أن العناصر

$$e_1=(1,0,\dots,0)\ ,\ e_2=(0,1,0,\dots,0)\ ,\dots,e_n=(0,\dots,0,1)$$

تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة في فضاء هيلبرت المنته الأبعاد $\boldsymbol{R}^n$.

الآن وبالاستفادة من الإيزومورفية المذكورة في المثال(١-١-١٩) يمكن الحصول على جملة متعامدة منظمة وتامة في أي فضاء خطي منته الأبعاد $\boldsymbol{E}^n$ وذلك انطلاقاً من أية مجموعة عناصر مستقلة خطياً $x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,x_n\ \ni\ \boldsymbol{E}^n$. هذا الأمر له ما يماثله في فضاءات هيلبرت الفصولة الغير منتهية الأبعاد.

(١-٤-٨) **مبرهنة:** من أجل كل مجموعة عناصر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ مستقلة خطياً في فضاء هيلبرت الغير منته الأبعاد H توجد جملة متعامدة منظمة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ تحقق:

$$(4)\qquad u_n=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\,x_k\quad ;\quad \lambda_n^{(n)}\neq 0\ ,\ n=1,2\ ,\dots.$$

الإثبات: هنا يمكن اعتبار $x_n\neq 0$ من أجل $n=1,2\ ,\dots$ ، وسوف نشكل العناصر $u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\ ,\dots.$ بالاستقراء. لذلك نأخذ في البداية

$$u_1=\lambda_1^{(1)}\,x_1\quad ;\quad \lambda_1^{(1)}=\frac{1}{\|x_1\|}.$$

نعتبر الآن أنه تم تشكيل العناصر المتعامدة المنظمة $u_1\ ,\ u_2\ ,\dots.\ ,\ u_{n-1}$ المحققة للعلاقة (4) مع العناصر $x_1\ ,\ x_2\ ,\dots.\ ,\ x_{n-1}$. لنضع الآن

$$H_n=\operatorname{span}\{x_1\ ,\ x_2\ ,\dots.\ ,\ x_{n-1}\}.$$

بما أن x_n لا ينتمي إلى H_n فيمكن تمثيله بالشكل الوحيد التالي وذلك بحسب المبرهنة (١-٣-١٨)

$$x_n=x'_n+x''_n\quad ;\quad x'_n\in H_n\ ,\ x''_n\perp H_n\ ,\ x''_n\neq 0.$$

فإذا ما أخذنا $\lambda_n^{(n)}=\dfrac{1}{\|x''_n\|}$ و $u_n=\lambda_n^{(n)}\,x''_n$ لوجدنا أن $\|u_n\|=1$.

بما أن $u_n\perp H_n$ و $H_n\ \ni\ x_1\ ,\ x_2\ ,\dots.\ ,\ x_{n-1}$ فيكون أيضاً $u_n\perp x_k$ من أجل $k=1,2\ ,\dots.\ ,\ n-1$. لدينا الآن

$$u_n=\lambda_n^{(n)}\,x''_n=\lambda_n^{(n)}\,x_n-\lambda_n^{(n)}\,x'_n\ ,$$

ومن كون $x'_n\ \ni\ H_n$ فيكون $x'_n=\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k^{(n)}\,x_k$ ، حيث $\alpha_k^{(n)}$ أعداد مناسبة. نفرض

$$\lambda_k^{(n)}=-\alpha_k^{(n)}\,\lambda_n^{(n)}\quad ;\quad k=1,2\ ,\dots.\ ,\ n-1,$$

فنحصل على العلاقة المطلوبة (4).

(١–٤–٩) ملاحظة: بما أن $\lambda_n^{(n)} \neq 0$ في (4) فيمكن كتابة العناصر x_n بشكل تراكيب خطية بدلالة العناصر u_n ، أي

$$(5) \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)} u_k \quad ; \quad \mu_n^{(n)} = \frac{1}{\lambda_n^{(n)}} \ , \ n = 1,2 , ...$$

نضيف أيضاً أن العناصر u_n الواردة في (4) ليست وحيدة التمثيل بدلالة x_n . ولكن ضمن الشرط $\lambda_n^{(n)} > 0$ من أجل $n = 1,2 , ...$ تكون الجملة وحيدة.

(١–٤–١٠) مبرهنة: في كل فضاء هيلبرت فصول H توجد جملة متعامدة منظمة وتامة.

الإثبات: إذا كان H منته الأبعاد ، مثلاً $\dim H = n$ ، فيمكن تطبيق طريقة شميت (التالية) على أية عناصر مستقلة خطياً $H \ni x_1 , x_2 , ... , x_n$ لنحصل على جملة متعامدة منظمة وتامة في H.

لنعتبر الآن أن الفضاء H فصول وغير منته الأبعاد. هذا يعني أنه توجد فيه مجموعة كثيفة وعدودة $x_1 , x_2 , x_3 , ...$ ، ويمكن أخذ هذه العناصر مغايرة للصفر.

نفرض $u_1 = \dfrac{x_1}{\| x_1 \|}$ فيكون $\| u_1 \| = 1$.

نضع

$$u'_2 = x_2 - \langle x_2 , u_1 \rangle u_1$$

فيكون $u'_2 \perp u_1$ لأن

$$\langle u'_2 , u_1 \rangle = \langle x_2 , u_1 \rangle - \langle x_2 , u_1 \rangle \langle u_1 , u_1 \rangle = 0.$$

فإذا كان $u'_2 \neq \theta$ نأخذ $u_2 = \dfrac{u'_2}{\| u'_2 \|}$ فيكون $\| u_2 \| = 1$.

نضع الآن

$$u'_3 = x_3 - \langle x_3 , u_1 \rangle u_1 - \langle x_3 , u_2 \rangle u_2$$

فنجد أن $u'_3 \perp u_1$ و $u'_3 \perp u_2$ وذلك لأن

$$\langle u'_3 , u_1 \rangle = \langle x_3 , u_1 \rangle - \langle x_3 , u_1 \rangle \langle u_1 , u_1 \rangle - \langle x_3 , u_2 \rangle \langle u_1 , u_2 \rangle = 0.$$

وبشكل مشابه نثبت أن $\langle u'_3 , u_2 \rangle = 0$.

فإذا كان $u'_3 \neq \theta$ فنأخذ $u_3 = \dfrac{u'_3}{\| u'_3 \|}$ لنجد أن $\| u_3 \| = 1$.

وهكذا نتابع على نفس المنوال حيث نضع

$$u'_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle x_n , u_k \rangle u_k$$

فنجد أن

$$\left\langle u'_n , u_j \right\rangle = 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots , n-1.$$

فإذا كان $u'_n \neq \theta$ نأخذ $u_n = \dfrac{u'_n}{\left\| u'_n \right\|}$ لنجد أن $\left\| u_n \right\| = 1$.

إن ما تقدم صحيح من أجل أي عدد طبيعي n ، لأننا بوضع

$$u'_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_{n+1} , u_k \right\rangle u_k ,$$

نجد بالاستقراء (باعتبار العملية صحيحة من أجل n):

$$\begin{aligned} \left\langle u'_{n+1} , u_j \right\rangle &= \left\langle x_{n+1} , u_j \right\rangle - \sum_{k=1}^{n} \left\langle x_{n+1} , u_k \right\rangle \left\langle u_k , u_j \right\rangle \\ &= \left\langle x_{n+1} , u_j \right\rangle - \left\langle x_{n+1} , u_j \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

فإذا كان $u'_{n+1} \neq \theta$ نأخذ $u_{n+1} = \dfrac{u'_{n+1}}{\left\| u'_{n+1} \right\|}$ لنجد أن $\left\| u_{n+1} \right\| = 1$.

بذلك نكون قد حصلنا على الجملة المتعامدة المنظمة $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$.

تسمى هذه الطريقة بطريقة شميت (أو طريقة جرام – شميت).

لإثبات أن هذه الجملة تامة يكفي إثبات أنه إذا كان $y \in H$ و يحقق

$$\left\langle y, u_n \right\rangle = 0 \quad ; \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots .$$

فإن $y = \theta$ ، وذلك اعتمادا على المبرهنة (١-٤-٧). في الواقع من العلاقات السابقة نلاحظ بأن العناصر $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots$ عبارة عن تراكيب خطية منتهية للعناصر $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$ (والعكس صحيح أيضا) ، حيث يكون

$$\begin{aligned} x_1 &= \left\| x_1 \right\| u_1 \\ x_2 &= \left\langle x_2 , u_1 \right\rangle u_1 + \left\| u'_2 \right\| u_2 \\ x_3 &= \left\langle x_3 , u_1 \right\rangle u_1 + \left\langle x_3 , u_2 \right\rangle u_2 + \left\| u'_3 \right\| u_3 \\ &\vdots \quad \vdots \\ x_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\langle x_n , u_k \right\rangle u_k + \left\| u'_n \right\| u_n \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

وبما أن $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots$ مجموعة كثيفة في H بالفرض فتكون مجموعة التراكيب الخطية المنتهية للعناصر $u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots$ كثيفة في H، بالتالي كل عنصر $y \in H$ هو نهاية لمتتالية (مناسبة) من هذه التراكيب الخطية. فإذا فرضنا أن

$$y_N \xrightarrow[N \to \infty]{} y \quad ; \quad \left\{ y_N = \sum_{j=1}^{k(N)} \alpha_j^{(N)} u_j \right\}_{N=1}^{\infty} ,$$

يكون لدينا:

$$\| y \|^2 = \langle y, y \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle y_N , y \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{k(N)} \alpha_j^{(N)} \langle u_j , y \rangle = 0.$$

وبالتالي $y = \theta$. وبذلك يتم المطلوب.

(١–٤–١١) نتيجة: من الإثبات السابق ينتج فوراً أن

$$H = \overline{\text{span}\{ x_n \}_{n=1}^{\infty}} = \overline{\text{span}\{ u_n \}_{n=1}^{\infty}} \ .$$

(١–٤–١٢) ملاحظة: (أ) لتكن $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots$ المجموعة الكثيفة في H والمذكورة في بداية الإثبات السابق. فإذا كانت هذه العناصر مستقلة خطيا فيكون دوما $u'_n \neq \theta$.

(ب) من إثبات المبرهنة السابقة نلاحظ أن

$$\langle u'_n , u'_m \rangle = \begin{cases} 0 & ; \quad n \neq m \\ \| u'_n \|^2 & ; \quad n = m . \end{cases}$$

لذلك عند وجود جملة متعامدة (غير منظمة) $v_1 , v_2 , v_3 , \ldots$ نأخذ فورا

$$u_n = \frac{v_n}{\| v_n \|} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

للحصول على جملة متعامدة منظمة $u_1 , u_2 , u_3 , \ldots$ ، انظر المثال التالي:

(١–٤–١٣) مثال: سنبين بأن أسرة الدوال المثلثية

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots , \cos nx, \sin nx, \ldots .$$

تشكل جملة متعامدة (غير منظمة) على المجال $[-\pi , +\pi]$. في الواقع لدينا:

$$\langle 1 , \sin nx \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} 1 \sin nx \, dx = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

$$\langle \sin nx , \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \ ; \ n, m = 1, 2, \ldots .$$

$$\langle \cos nx , \cos mx \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \ n \neq m \\ \pi & ; \ n = m . \end{cases}$$

$$\langle \sin nx , \sin mx \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & ; \ n \neq m \\ \pi & ; \ n = m . \end{cases}$$

وبما أن:

$$\| 1 \|^2 = \langle 1 , 1 \rangle = \int_{-\pi}^{+\pi} 1^2 \, dx = 2\pi ,$$

$$\| \cos nx \|^2 = \langle \cos nx , \cos nx \rangle = \pi \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots .$$

$$\| \sin nx \|^2 = \langle \sin nx \, , \sin nx \rangle = \pi \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

فإننا وبحسب (ب) من الملاحظة السابقة نحصل على الجملة المتعامدة المنظمة:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, , \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} , \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} , \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}} , \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}} , \ldots , \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} , \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} , \ldots.$$

أمثلة على الجمل المتعامدة المنظمة

نتناول الآن بعض الأمثلة على الجمل المتعامدة التي يمكن الحصول عليها بتطبيق طريقة شميت المتبعة في إثبات المبرهنة (١-٤-١٠) وذلك انطلاقا من الدوال التالية المستقلة خطياً على كل مجال $[a,b]$:

$$(6)' \qquad 1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots.$$

لنضع

$$(6)'' \qquad \varphi_0(x) = 1 \, , \varphi_1(x) = x \, , \varphi_2(x) = x^2 \, , \ldots , \varphi_n(x) = x^n \, , \ldots.$$

نشير هنا أنه من يرغب معرفة المزيد عن التوابع المذكورة أدناه وغيرها من التوابع الخاصة يمكنه الرجوع إلى [3] و[14] و[16] في قائمة المراجع.

(١-٤-١٤) مثال (كثيرات حدود لوجندر): من المعلوم أن الجداء الداخلي في الفضاء $L_2[a,b]$ له الشكل

$$(7) \qquad \langle f , g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad ; \quad f \, , g \in L_2[a,b].$$

وبما أن الدوال التي نتعامل معها حقيقية فيمكن إهمال المرافق.

سنأخذ هنا المجال $[a,b] = [-1,+1]$. بما أن

$$\| \varphi_0 \|^2 = \int_{-1}^{+1} | \varphi_0(x) |^2 dx = \int_{-1}^{+1} 1^2 dx = 2,$$

فيمكن أن نأخذ

$$u_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\| \varphi_0 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \, .$$

من الواضح هنا أن $\| u_0 \| = 1$.

نضع الآن

$$u'_1(x) = \varphi_1(x) - \langle \varphi_1 , u_0 \rangle \, u_0(x).$$

ولكن

$$\langle \varphi_1 , u_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} x \, \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \, \frac{x^2}{2} \Big]_{-1}^{+1} = 0.$$

لذلك يكون $u'_1(x) = \varphi_1(x) = x$ ، وبالتالي

$$\| u'_1 \|^2 = \int_{-1}^{+1} | u'_1(x) |^2 \, dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \, dx = \frac{2}{3}.$$

نفرض $u_1(x) = \dfrac{u'_1(x)}{\| u'_1 \|}$ فيكون $u_1(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \; x$.

وهنا يكون $u_1(x) \perp u_0(x)$ لأن

$$\langle u_1 , u_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} u_1(x) u_0(x) \, dx = \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{3}{2}} \; x \; \frac{1}{\sqrt{2}} dx = 0.$$

نضع الآن

$$u'_2(x) = \varphi_2(x) - \langle \varphi_2 , u_0 \rangle u_0(x) - \langle \varphi_2 , u_1 \rangle u_1(x).$$

ولكن

$$\langle \varphi_2 , u_0 \rangle = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(x) u_0(x) \, dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \, \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \, \frac{2}{3}.$$

$$\langle \varphi_2 , u_1 \rangle = \int_{-1}^{+1} \varphi_2(x) u_1(x) \, dx = \int_{-1}^{+1} x^2 \sqrt{\frac{3}{2}} \; x \, dx = 0.$$

وهكذا يكون $u'_2(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}$ ، كما أن

$$\| u'_2 \|^2 = \int_{-1}^{+1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dx = \frac{8}{45}.$$

نفرض $u_2(x) = \dfrac{u'_2(x)}{\| u'_2 \|}$ فيكون لدينا

$$u_2(x) = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) = \sqrt{\frac{5}{8}} \left(3x^2 - 1 \right).$$

يمكن التحقق بسهولة أن $u_2(x) \perp u_0(x)$ و $u_2(x) \perp u_1(x)$.

بشكل مشابه نحصل على $u_3(x) = \sqrt{\dfrac{7}{8}} \left(5x^3 - 3x \right)$.

نتابع على نفس المنوال للحصول على $u_4(x)$ و $u_5(x)$ و ... ، وبالتالي الحصول على جملة متعامدة منظمة... $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$.

نفرض الآن

$$p_0(x)=1 \quad , \quad p_1(x)=x \quad , \quad p_2(x)=\frac{1\cdot 3}{2\,!}\left(x^2-\frac{1}{3}\right) ,$$

$$p_3(x)=\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\,!}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right) ,$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$p_n(x)=\frac{1}{2^n\, n!}\sum_{k=0}^{N}\ (-1)^k \binom{n}{k}\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}\ x^{n-2k} \quad ,$$

$$\vdots \quad \vdots$$

حيث $N=\frac{n}{2}$ عندما n عدد زوجي و $N=\frac{n-1}{2}$ عندما n عدد فردي.

عندئذ يمكن كتابة الدوال $u_0(x),\, u_1(x),\, u_2(x),\, u_3(x),\, \ldots$ بالشكل

$$u_0(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}\ p_0(x) \quad , \quad u_1(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}\ p_1(x) \quad ,$$

$$u_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\ p_2(x)$$

$$u_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\,!}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)=\sqrt{\frac{7}{2}}\ p_3(x) \quad ,$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$u_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\ p_n(x) \quad ,$$

$$\vdots \quad \vdots$$

تسمى $p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x),\, p_3(x),\, \ldots$ كثيرات حدود لوجندر ، وهي تشكل جملة متعامدة (غير منظمة) على المجال $[-1,+1]$. لاحظ بأن كثيرات حدود لوجندر عبارة عن تراكيب خطية للدوال (6) التي انطلقنا منها. هذا ينسجم طبعا مع ما ذكر في سياق إثبات المبرهنة (١-٤-١٠).

إن العكس صحيح أيضا ، أي أنه يمكن تمثيل الدوال $1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^n,\, \ldots$ بشكل تراكيب خطية لكثيرات حدود لوجندر كما يلي:

$$1=p_0(x)$$

$$x=p_1(x)$$

$$x^2=\frac{1}{3}\left[\, p_0(x)+2\ p_2(x)\,\right]$$

$$x^3=\frac{1}{5}\left[\, 3\ p_1(x)+2\ p_3(x)\,\right]$$

$$x^4=\frac{1}{35}\left[\, 7\ p_0(x)+20\ p_2(x)+8\ p_4(x)\,\right]$$

$$x^5 = \frac{1}{63}\left[27\ p_1(x) + 28\ p_3(x) + 8\ p_5(x)\right]$$
$$x^6 = \frac{1}{231}\left[33\ p_0(x) + 110\ p_2(x) + 72\ p_4(x) + 16\ p_6(x)\right]$$
$$\vdots \quad \vdots$$

وبشكل عام يكون $x^n = \sum_{k=0}^{n} c_k\ p_k(x)$. لذلك ما علينا إلا حساب الأمثال c_k .

ويتم ذلك بأخذ الجداء الداخلي مع الاستفادة من خاصة التعامد ، حيث نجد:

$$\left\langle x^n, p_j(x)\right\rangle = \sum_{k=0}^{n} c_k \left\langle p_k(x), p_j(x)\right\rangle = c_j\ ;\ j = 0,1,2,\ldots,n.$$

نشير أيضا بأن الدوال.... $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x),$ تشكل جملة متعامدة منظمة وتامة على المجال $[-1,+1]$ ، وهذا الأمر ينتج فورا من إثبات المبرهنة (١-٤-١٠).

(١-٤-١٥) مثال (توابع تشيبيشيف): ننطلق من الجملة المستقلة خطياً على المجال $[-1,+1]$:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \frac{x^2}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \ldots, \frac{x^n}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \ldots . \quad (8)'$$

للاختصار سنرمز لحدود هذه الجملة على التوالي بـ :

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots . \quad (8)''$$

حيث نجد مايلي بتطبيق طريقة شميت مع الجداء الداخلي:

$$\left\langle f, g\right\rangle = \int_{-1}^{+1} f(x)\,g(x)\,dx.$$

بما أن

$$\|\varphi_0\|^2 = \int_{-1}^{+1} \left|\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\right|^2 dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi.$$

فنأخذ $$\tau_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\|\varphi_0\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

نضع الآن

$$u'_1(x) = \varphi_1(x) - \left\langle \varphi_1, u_0\right\rangle u_0(x)$$

فنجد

$$\left\langle \varphi_1, u_0\right\rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-1}^{+1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0.$$

و بالتالي

$$u'_1(x)=\varphi_1(x)=\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}$$

ومن ثم

$$\|u'_1\|^2=\int_{-1}^{+1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2\pi}{4}.$$

لذلك نفرض

$$\tau_1(x)=\frac{u'_1(x)}{\|u'_1\|}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{\sqrt[4]{1-x^2}}\ .$$

وهكذا نتابع على نفس المنوال فنحصل على

$$\tau_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\ ,\ \tau_n(x)=\frac{2^n}{\sqrt{2\pi}}\frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}\quad ;\quad n=1,2,....$$

حيث $T_n(x)$ كثيرات حدود من الدرجة n ، وتسمى كثيرات حدود تشيبيشيف ، ولها الشكل

$$T_0(x)=1\quad ,\quad T_1(x)=x\quad ,\quad T_2(x)=x^2-\frac{1}{2}\quad ,$$
$$T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x\quad ,....,\quad T_n(x)=x^n-\cdots\quad ,....$$

بينما تسمى $\tau_n(x)$ توابع تشيبيشيف ، وهي تشكل جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت $L_2[-1,+1]$.

تجدر الإشارة هنا أنه يمكن الحصول على كثيرات حدود تشيبيشيف $T_n(x)$ بتطبيق طريقة شميت انطلاقا من التوابع $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ مع الجداء الداخلي المثقل

$$\langle f,g\rangle_w=\int_{-1}^{+1}w(x)f(x)g(x)dx\quad(9)\ ,$$

حيث $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

بشكل مشابه تماماً لما فعلناه في المثالين السابقين يمكننا الحصول على جمل متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت $L_2[a,b]$ وذلك:

١- إما انطلاقا من التوابع $1, x, x^2, ..., x^n, ...$ مع الجداء الداخلي المثقل

$$\langle f,g\rangle_w=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

لنحصل على كثيرات حدود متعامدة مع هذا الجداء الداخلي (في هذه الحالة نقول إن كثيرات الحدود متعامدة على المجال $[a,b]$ مع تابع الثقل $w(x)$) ،

٢ – أو انطلاقا من التوابع المستقلة خطياً

(10) $\sqrt{w(x)}\ ,\ x\sqrt{w(x)}\ ,\ x^2\sqrt{w(x)}\ ,\ \ldots\ ,\ x^n\sqrt{w(x)}\ ,\ \ldots.$

مع الجداء الداخلي غير المثقل

$$\langle f\ ,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

لنحصل على توابع متعامدة في الفضاء $L_2[a\ ,\ b]$. الأمر هنا متعلق بالمجال $[a,b]$ و بتابع الثقل $w(x)$.

لنتابع الأمثلة بإتباع الطريقة ٢-:

(١-٤-١٦) مثال (توابع جاكوبي): من أجل

$$[a,b]=[-1,+1]\ \ ,\ \ w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\ \ ;\ \ \alpha\ ,\beta>-1$$

نحصل على توابع جاكوبي $\left\{J_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$ ، وتعطى بالشكل

$$J_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)=\left(\kappa_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1}(1-x)^{\frac{\alpha}{2}}(1+x)^{\frac{\beta}{2}}P_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)\ ,$$

حيث $P_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)$ كثيرات حدود جاكوبي من الدرجة n والمرتبة $(\alpha\ ,\beta)$ ، حيث $-1<\alpha\ ,\beta$ ، ولها الشكل

$$P_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)=$$
$$\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right],$$

أما العدد $\kappa_n^{(\alpha,\beta)}$ فهو عامل تنظيم ، أي

$$\left\|J_n^{(\alpha\ ,\beta)}\right\|_{L_2[-1\ ,\ +1]}^2=\int_a^b\left|J_n^{(\alpha\ ,\beta)}(x)\right|^2dx$$
$$=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$
$$=\left(\kappa_n^{(\alpha,\beta)}\right)^2.$$

في حالة خاصة إذا أخذنا $\alpha=\beta=0$ نحصل على كثيرات حدود لوجندر

$$P_n(x)=P_n^{(0\ ,\ 0)}(x)$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right]\quad;\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots.$$

وفي حالة خاصة أخرى إذا أخذنا $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ نحصل على كثيرات حدود تشيبيشيف $T_n(x)$

$$T_n(x)=P_n^{\left(-\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)}(x)$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}\sqrt{1-x^2}\ \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right],$$

ومن ثم نحصل على توابع تشيبيشيف

$$\tau_n(x) = J_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x) = \kappa_n^{(1/2,1/2)} \frac{T_n(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}} .$$

التي تشكل جملة متعامدة منظمة في الفضاء $L_2[-1,+1]$.

(١-٤-١٧) مثال (توابع لاجير): من أجل

$$[a,b] = [0,+\infty) \quad , \quad w(x) = x^{\alpha} e^{-x}$$

نحصل على توابع لاجير $\{l_n^{\alpha}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ، وتعطى بالشكل

$$l_n^{\alpha}(x) = \left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^{\alpha}(x) ,$$

حيث $L_n^{\alpha}(x)$ كثيرات حدود لاجير من الدرجة n والمرتبة $\alpha > -1$ ، ولها الشكل

$$L_n^{\alpha}(x) = x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n} \left[x^{n+\alpha} e^{-x} \right].$$

(١-٤-١٨) مثال (توابع هرميت): من أجل

$$[a,b] = (-\infty,+\infty) \quad , \quad w(x) = e^{-x^2}$$

نحصل على توابع هرميت $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ، وتعطى بالشكل

$$h_n(x) = \left(2^n n! \sqrt{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) ,$$

حيث $H_n(x)$ كثيرات حدود هرميت من الدرجة n ، ولها الشكل

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2} \right].$$

(١-٤-١٩) ملاحظة: $w(x) \equiv 1$ هو تابع الثقل الموافق لكثيرات حدود لوجندر المذكورة في المثال (١-٤-١٥).

(١-٤-٢٠) مثال: في فضاء هيلبرت ℓ_2 وانطلاقاً من الجملة

$$x_1 = \{1, 0, \dots, 0, \dots\} ,$$
$$x_2 = \{1, 1, 0, 0, \dots\} ,$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$x_n = \{\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, 0, \dots\} ,$$
$$\vdots \quad \vdots$$

نحصل على الجملة المتعامدة المنظمة

$$e_1 = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}$$
$$e_2 = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$e_n = \{\underbrace{0, 0, \dots 0, 1}_{n}, 0, 0, \dots\}$$
$$\vdots \quad \vdots$$

وذلك بتطبيق طريقة شميت المذكورة في إثبات المبرهنة (١-٤-١٠).

(١-٤-٢١) ملاحظة: نتعرف الآن على خاصة أخرى تتعلق بالجمل المتعامدة المنظمة في فضاء هيلبرت H وهي: أن المجموع الجزئي S_N لسلسلة فوريه الموافقة لعنصر $x \in H$ يمثل مسقط هذا العنصر على الفضاء الجزئي:

$$H_N = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_N\} \quad ; \quad N = 1, 2, \dots.$$

حيث $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في H.

ليكن $S_N = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n$ المجموع الجزئي النوني لسلسلة فوريه $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ الموافقة لعنصر $x \in H$ بالنسبة للجملة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ، انظر التعريف (١-٤-٣).

بحسب المبرهنة (١-٣-١٨) يمكن تمثيل x بالشكل الوحيد

$$x = x_1 + x_2 \quad ; \quad x_1 \in H_N \ , \ x_2 \in H_N^{\perp} \ ,$$

وسوف نبين أن $x_1 = S_N$ و $x_2 = x - S_N$. في الواقع بملاحظة أن S_N ينتمي إلى H_N فيكفي إثبات أن $(x - S_N) \perp H_N$. لكن هذا ينتج مباشرة من

$$\langle x - S_N \ , u_k \rangle = \langle x \ , u_k \rangle - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \langle u_n \ , u_k \rangle = 0 \quad ; \quad k = 1, 2, \dots.$$

ومن التمهيدية (١-٣-١٦). هذا يعني بدوره أن مسقط العنصر x على الفضاء الجزئي H_N هو المجموع الجزئي S_N لسلسلة فوريه الموافقة.

يكون أيضاً من أجل كل عنصر $z = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n u_n \in H_N$:

$$\| x - S_N \| = d(x, S_N) \le \| x - z \| .$$

نتعرف الآن على خاصة أخرى تتعلق بالجمل المتعامدة المنظمة في فضاء هيلبرت الفصول وهي أن الجملة المتعامدة المنظمة تكون على الأكثر عدودة.

(١-٤-٢٢) مبرهنة: كل جملة متعامدة منظمة $\{u_i : i \in I\}$ في فضاء هيلبرت فصول H تكون على الأكثر عدودة.

الإثبات: بما أن H فصول فتوجد فيه مجموعة كثيفة وعدودة ، ولنسمها

$$D=\{y_1, y_2, y_3, ...\},$$

ومن أجل كل عنصر $x \in H$ يوجد عنصر $y_k \in D$ بحيث أن

$$\| x-y_k \| < \varepsilon .$$

ليكن الآن u_{i_1} و u_{i_2} عنصرين مختلفين من الجملة $\{u_i : i \in I\}$. عندئذ يوجد عنصران $y', y'' \in D$ بحيث يكون (بأخذ $\varepsilon = 1/2$):

$$\| u_{i_1} - y' \| < \frac{1}{2} \quad , \quad \| u_{i_2} - y'' \| < \frac{1}{2}.$$

وبما أن

$$\| u_{i_1} - u_{i_2} \|^2 = \langle u_{i_1} - u_{i_2}, u_{i_1} - u_{i_2} \rangle = \langle u_{i_1}, u_{i_1} \rangle + \langle u_{i_2}, u_{i_2} \rangle = 2 ,$$

و

$$\begin{aligned} \| y'-y'' \| &= \| (u_{i_1} - u_{i_2}) + (u_{i_2} - y'') + (y' - u_{i_1}) \| \\ &\geq \| u_{i_1} - u_{i_2} \| - (\| u_{i_2} - y'' \| + \| y' - u_{i_1} \|) \\ &> \sqrt{2} - 1 > 0 , \end{aligned}$$

فكل عنصرين مختلفين u_{i_1} و u_{i_2} من الجملة $\{u_i : i \in I\}$ يوافقهما عنصران مختلفان y' و y'' من D. لذلك يكون التطبيق

$$\Phi : \{u_i : i \in I\} \to D \quad ; \quad u_{i_k} \mapsto \Phi(u_{i_k}) = y_k .$$

متبايناً. أي أن الجملة $\{u_i : i \in I\}$ تقابل (تكافئ) مجموعة جزئية من المجموعة العدودة D ، وبالتالي الجملة على الأكثر عدودة. وبذلك يتم المطلوب.

(١-٤-٢٣) **مبرهنة:** لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ جملة متعامدة منظمة في فضاء هيلبرت H ولتكن $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عددية من $\boldsymbol{K}$. عندئذ:

(أ) إذا تقاربت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ من عنصر $x \in H$ فيكون

$$\langle x, u_n \rangle = \lambda_n \quad ; \quad n = 1, 2, ... \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty.$$

(ب) إذا كانت السلسلة العددية $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ متقاربة فتكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ متقاربة في H (هذا يعني أنه من أجل كل متتالية $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ من الفضاء ℓ_2 فإن $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$ تمثل عنصراً في H).

(ج) جميع فضاءات هيلبرت الفصولة والغير منتهية الأبعاد تكون إيزومورفية مع الفضاء ℓ_2 ، وبالتالي جميع هذه الفضاءات إيزومورفية مع بعضها البعض.

الإثبات: (أ) لنفرض أن $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n$ ، عندئذ يكون

$$\left\langle x, u_j\right\rangle=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left\langle u_n, u_j\right\rangle=\lambda_j \quad ; \quad j=1, 2, ...$$

وبحسب مساواة بارسيفال يكون

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x,u_n\rangle|^2=\|x\|^2.$$

وهذا يعني أن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2$ متقاربة.

(ب) لنضع $S_N=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n u_n$. عندئذ من أجل أي $\varepsilon>0$ يكون

$$\|S_M-S_N\|^2=\sum_{n=N+1}^{M}|\lambda_n|^2<\varepsilon \quad ; \quad M>N\geq N_0(\varepsilon).$$

وهذا يعني أن المتتالية $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ أساسية فهي متقاربة في H.

(ج) ليكن H فضاء هيلبرت فصول وغير منته الأبعاد، عندئذ وبحسب المبرهنة (١-٤-١٠) توجد فيه جملة متعامدة منظمة وتامة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$، والذي يعني بدوره أنه من أجل كل عنصر $H\ni x$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n \quad ; \quad \alpha_n=\langle x, u_n\rangle.$$

وبحسب (أ) فإن المتتالية $\alpha=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ تنتمي للفضاء ℓ_2. لذلك فالتطبيق

$$\Phi : H\to\ell_2 \quad ; \quad x\mapsto\Phi(x)=\alpha$$

معرف تماماً ، وهو خطي ويحقق

$$\|\Phi(x)\|_{\ell_2}^2=\|\alpha\|_{\ell_2}^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2=\|x\|^2 \quad ; \quad \forall x\in H.$$

من ذلك ينتج أن Φ إيزومتري ، ومنه ينتج أن Φ متباين.

بحسب (ب) فإنه من أجل كل متتالية $\ell_2\ni\beta=\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ يوجد عنصر مناسب $H\ni y$ بحيث يكون $\Phi(y)=\beta$. أي أن Φ غامر ، وبالتالي إيزومورفيزم.

(١-٤-٢٤) ملاحظة: وجدنا في المبرهنة السابقة أن العنصر $x=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n$ ينتمي إلى H إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2<\infty$ وبنفس الوقت يكون