وبحسب النتيجة (١–١–٢٨) فإن $C[a,b]$ كثيف في $L_p[a,b]$ من أجل $1 \le p \le \infty$. وبحسب مبرهنة الإتمام (١–٢–٩) يمكن اعتبار $L_p[a,b]$ إتمام للفضاء $C[a,b]$ بالنظيم $\| f \|_{L_p[a,b]}$ المعطى في المثال (١–١–١٥). وهنا نكتب

$$\overline{C[a,b]}^{\,L_p[a,b]} = L_p[a,b] \quad ; \quad 1 \le p < \infty.$$

(١–٢–١٨) **مثال:** الفضاء $C^m[a,b]$ المذكور في المثال (١–١–٢٠) تام مع النظيم المذكور هناك فهو فضاء باناخ.

## ( ١ – ٣ ) فضاءات هيلبرت

في بعض الفضاءات الخطية يمكن تعريف عمليات أخرى على عناصرها إلى جانب عمليتي جمع العناصر وضربها بعدد الواردتين في تعريف الفضاء الخطي. من هذه العمليات ما يسمى بالجداء الداخلي ( أو السلمي ) الذي يعتبر تعميماً لمفهوم الجداء الداخلي لمتجهين لكنه يسهل دراسة العديد من المسائل لأنه يعطي الفضاء صفات مميزة وفعالة.

(١–٣–١) **تعريف:** نقول عن فضاء خطي $X$ أنه فضاء جداء داخلي إذا أمكن إنشاء تطبيق من الشكل

$$\langle \; , \; \rangle : X \times X \to \boldsymbol{K} \quad ; \quad (x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$$

بحيث يتحقق ما يلي:

$$\langle x,x \rangle \ge 0 \quad ; \quad \forall\, x \in H,$$
$$\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta.$$

$$\langle x,y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad ; \quad \forall\, x\,,\, y \in H.$$ ( الخط يعني المرافق )

$$\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{K} \quad \langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 , y \rangle = \lambda_1 \langle x_1 , y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 , y \rangle \; ; \forall x_1, x_2, y \in H,$$

أما العدد $\langle x,y \rangle$ فنسميه الجداء الداخلي للعنصرين $x$ و $y$.

(١–٣–٢) **ملاحظة:** ليكن $X$ فضاء جداء داخلي. عندئذ يكون:

( أ ) $\langle \theta, x \rangle = 0 \quad ; \quad \forall\, x \in X$.

(ب ) من أجل أية عناصر $x, y_1, y_2 \in X$ وأية أعداد $\mu_1, \mu_2 \in \boldsymbol{K}$ يكون

$$\langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \rangle = \overline{\mu_1}\, \langle x, y_1 \rangle + \overline{\mu_2}\, \langle x, y_2 \rangle .$$

(ج) $$\left| \langle x, y \rangle \right| \le \sqrt{\langle x, x \rangle}\, \sqrt{\langle y, y \rangle} \; ; \forall\, x,y \in X$$

تسمى هذه العلاقة **متراجحة شفارتز** ، وتصح المساواة فيها عندما $x=\theta$ أو $y=\theta$ أو $x$ و $y$ مرتبطان خطيا .

تفيدنا متراجحة شفارتز السابقة في إثبات أنه يمكن تعريف نظيم بواسطة الجداء الداخلي ، كما تبين لنا المبرهنة التالية:

**(١-٣-٣) مبرهنة:** كل فضاء جداء داخلي $X$ يكون فضاءً منظماً مع

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,\, x\rangle} \quad ; \quad x\in X\ .$$

**الإثبات:** يترك كتمرين.

**(١-٣-٤) مبرهنة:** ليكن $X$ فضاء جداء داخلي. عندئذ:

( أ ) تصح المساواة التالية ( المسماة مساواة متوازي الأضلاع ):

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\,\|x\|^2+2\,\|y\|^2 \ ;\ \forall\ x,y\in X\,.$$

(ب) يكون

$$\langle x,y\rangle=\left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)+i\left(\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2\right)$$

**الإثبات:** تنتج ( أ ) مباشرة من جمع العلاقتين

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle,\\ \|x-y\|^2&=\langle x-y,x-y\rangle=\langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle-\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle\end{aligned}$$

وملاحظة أن $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$. أما (ب) فتنتج من فك الطرف الأيمن بشكل مشابه للعلاقات السابقة.

**(١-٣-٥) ملاحظة:** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين متقاربتين في فضاء جداء داخلي $X$ من $x$ و $y$ على الترتيب. عندئذ يكون ( أثبت ذلك )

$$\langle x_n\,,\,y_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle x\,,\,y\rangle$$

أي أن الجداء الداخلي يعرف تابعاً مستمراً على $X\times X$ .

من المفاهيم الهامة في فضاء الجداء الداخلي مفهوم التعامد (حيث نعرفه بعد قليل) والذي يعتبر تعميماً لمفهوم تعامد متجهين في الفضاء $\boldsymbol{R}^3$ .

**(١-٣-٦) تعريف:** ليكن $X$ فضاء جداء داخلي . عندئذ :

( أ ) نقول عن عنصرين $x\,,\,y \in X$ إنهما متعامدان إذا كان الجداء الداخلي لهما معدوما ، ونكتب $x\perp y$ ، أي أن

$$x\perp y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle=0\,.$$

(ب) نقول إن العنصر $x \in X$ يعامد المجموعة الجزئية $M \subset X$ إذا كان $x$ يعامد جميع عناصر $M$ ، ونكتب $x \perp M$ . أي

$$x \perp M \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \; y \in M .$$

(ج) نقول عن مجموعتين جزئيتين $M \subset X$ و $K \subset X$ إنهما متعامدتان في $X$ إذا كان كل عنصر من الأولى يعامد جميع عناصر الثانية ( وبالعكس )

ونكتب $K \perp M$ ، أي

$$K \perp M \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad ; \quad \forall \; x \in K \;, \forall \, y \in M .$$

واضح من التعريف بأن القول $x \perp y$ يكافئ القول $y \perp x$ ، لذلك قلنا منذ البداية أن $x$ و $y$ متعامدان.

بحسب المبرهنة (١–٣–٣) فإن كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم ، حيث يعرف النظيم بواسطة جداء داخلي. هذا الفضاء المنظم قد يكون تاماً وقد لا يكون. انطلاقاً من ذلك يمكن تعريف فضاء هيلبرت.

(١–٣–٧) **تعريف:** إذا كان فضاء الجداء الداخلي تاما فيسمى فضاء هيلبرت.

( سنرمز بـ $H$ لفضاء هيلبرت مالم يرد خلاف ذلك ).

**أمثلة على فضاءات الجداء الداخلي وفضاءات هيلبرت**

(١–٣–٨) **مثال:** $\boldsymbol{R}^n$ فضاء هيلبرت ( حقيقي ) مع الجداء الداخلي المألوف

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i \;,$$

حيث أن

$$x = (x_1 , \, x_2 , \dots , x_n) \in \boldsymbol{R}^n \quad , \quad y = (y_1 , \, y_2 , \dots , y_n) \in \boldsymbol{R}^n .$$

(١–٣–٩) **مثال:** $\boldsymbol{C}^n$ فضاء هيلبرت ( عقدي ) مع الجداء الداخلي المألوف

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \, \overline{w_i} \quad ; \quad z = (z_1 , \, z_2 , \dots , z_n) \in \boldsymbol{C}^n ,$$
$$w = (w_1 , \, w_2 , \dots , w_n) \in \boldsymbol{C}^n .$$

(١–٣–١٠) **مثال:** الفضاء $L_2[a,b]$ ، الوارد في المثال (١–٢–١٥) ، فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} \, dx \quad ; \quad f , \, g \in L_2[a,b].$$

ولكن من أجل $p \neq 2$ فإن $L_p[a,b]$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي ليس فضاء هيلبرت ( أعط مثالاً ).

**(١-٣-١١) مثال:** الفضاء $\ell_2$ ، الوارد في المثال (١-٢-١٦) ، فضاء هيلبرت مع الجداء الداخلي

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \quad ; \quad x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \ , \ y = \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \,.$$

ولكن من أجل $p \neq 2$ فإن $\ell_p$ ليس فضاء جداء داخلي ، وبالتالي ليس فضاء هيلبرت ( أعط مثالاً ).

**(١-٣-١٢) مثال:** الفضاء $C[a,b]$، الوارد في المثال (١-٢-١٧) ، فضاء جداء داخلي مع الجداء الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx \quad ; \quad f, g \in C[a,b],$$

لكنه ليس فضاء هيلبرت لأنه غير تام مع النظيم ( المعطى بالجداء الداخلي ):

$$\| f \| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b | f(x) |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad f \in C[a,b].$$

**(١-٣-١٣) مثال:** الفضاء $C^m[a,b]$ ، الوارد في المثال (١-٢-١٨) ، فضاء جداء داخلي مع الجداء الداخلي

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{m} \int_a^b f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}dx \quad ; \quad f, g \in C^m[a,b],$$

لكنه ليس فضاء هيلبرت لأنه غير تام ، حيث أن $f^{(k)}(x)$ يرمز لمشتق التابع $f(x)$ من المرتبة $k$ ، مع اعتبار $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

عند دراسة التمثيل الطيفي للمؤثرات سنحتاج كثيراً لمفهوم المساقط ( أو الإسقاط العمودي ) في فضاء هيلبرت ، وهذا يعتمد بدوره على ما يسمى تجزئة فضاء هيلبرت لفضائين جزئيين متعامدين ، حيث نتعرف عليهما فيما يلي.

**(١-٣-١٤) تعريف:** لتكن $M$ مجموعة جزئية من فضاء هيلبرت $H$. عندئذ يعرف المتمم المعامد لـ $M$ على أنه المجموعة

$$.M^{\perp} = \{ x \in H : x \perp M \}$$

**(١-٣-١٥) ملاحظة:** ( أ ) من التعريف السابق ينتج فوراً أن المجموعتين $M$ و $M^{\perp}$ متعامدتان.

(ب) من أجل أي فضاء خطي جزئي $M \subset H$ يكون $M^{\perp}$ فضاءً خطياً جزئياً مغلقاً في $H$ ( أثبت ذلك ).

( ج ) ليكن $M \subset H$ فضاءً خطياً جزئياً و $M^{\perp\perp} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp}$ المتمم المعامد للمجموعة $M^{\perp}$. عندئذ يكون $M \subset M^{\perp\perp}$. وإذا كان $M$ مغلقاً فيكون عندئذ $M^{\perp\perp} = M$ ( أثبت ذلك ). يكون أيضاً $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

لدينا الآن الاختبارات التالية ، حيث عرفنا $\operatorname{span}(M)$ في (١–١–٨).

(١–٣–١٦) **تمهيدية:** من أجل أية مجموعة جزئية $M \subset H$ يكون $M^{\perp} \perp \operatorname{span}(M)$.

**الإثبات:** إذا كان $y \in \operatorname{span}(M)$ فتوجد عناصر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ من $M$ كما توجد أعداد $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ من $\boldsymbol{K}$ بحيث يكون $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. لذلك من أجل أي $x \in M^{\perp}$ يكون

$$\langle y, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, x_i \rangle = 0.$$

ومنه نحصل على المطلوب.

(١–٣–١٧) **مبرهنة:** لتكن $M$ مجموعة جزئية في فضاء هيلبرت $H$. عندئذ تكون $\mathbf{span}(M)$ كثيفة في $H$ إذا وفقط إذا كان $M^{\perp} = \{\theta\}$.

**الإثبات:** نعتبر أن $\mathbf{span}(M)$ كثيفة في $H$. عندئذ يكون $\overline{\operatorname{span}(M)} = H$ وكل عنصر $x \in H$ هو نهاية لمتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر $\mathbf{span}(M)$.

ليكن $y \in M^{\perp} \subset H$ ولتكن المتتالية $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{span}(M)$ بحيث أن $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

وبحسب التمهيدية السابقة يكون لدينا

$$\langle y_n, y \rangle = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots.$$

بجعل $n \to \infty$ نحصل على $\langle y, y \rangle = 0$ ، ومن ثم $y = \theta$.

نعتبر الآن أن $M^{\perp} = \{\theta\}$.

ليكن $x \in H$ بحيث أن $x \perp \operatorname{span}(M)$. عندئذ $x \perp M$ ، أي أن $x \in M^{\perp}$. لذلك يكون $x = \theta$ بحسب ما فرضناه. من ذلك ينتج أن $(\operatorname{span}(M))^{\perp} = \{\theta\}$.

بما أن $\overline{\operatorname{span}(M)}$ فضاء خطي جزئي ومغلق في $H$ فيكون لدينا ( انظر المبرهنة (١–٣–١٨) والملاحظة (١–٣–١٩) أدناه ):

$$H = \overline{\operatorname{span}(M)} \oplus \overline{\operatorname{span}(M)}^{\perp} = \overline{\operatorname{span}(M)} \oplus \{\theta\} = \overline{\operatorname{span}(M)}.$$

وهذا يعني أن $\operatorname{span}(M)$ كثيفة في $H$. وبذلك يتم المطلوب.

نأتي الآن على المبرهنة الهامة التالية التي تبين لنا أن فضاء هيلبرت $H$ هو مجموع مباشر لفضائين خطيين جزئيين ومغلقين ومتعامدين.

**(١-٣-١٨) مبرهنة:** إذا كان $H_1$ فضاءً خطياً جزئياً ومغلقاً في فضاء هيلبرت $H$ فيمكن كتابة كل عنصر $x \in H$ بالشكل

$$(1) \qquad x = x_1 + x_2 \quad ; \quad x_1 \in H_1 \ , \ x_2 \in H_1^{\perp} .$$

وهذا التمثيل وحيد. يكون أيضاً $\| x - x_1 \| = d(x, H_1)$ ، أي أن المسافة بين $x$ و $x_1$ تساوي بعد $x$ عن $H_1$.

**الإثبات:** ليكن $x \in H$ ولنضع:

$$d = d(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \| x - y \| .$$

عندئذ توجد متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_1$ بحيث يكون

$$(2) \qquad \| x - x_n \|^2 < d^2 + \frac{1}{n^2} \quad ; \quad n = 1, 2, ....$$

بحسب مساواة متوازي الأضلاع يكون

$$(3) \qquad 2\| x - x_n \|^2 + 2\| x - x_m \|^2 = \| x_n - x_m \|^2 + \| (x - x_n) + (x - x_m) \|^2 .$$

أي أن

$$\| x_n - x_m \|^2 + \| 2x - (x_n + x_m) \|^2 = 2\| x - x_n \|^2 + 2\| x - x_m \|^2 .$$

وبما أن $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$ و

$$\| (x - x_n) + (x - x_m) \|^2 = \| 2x - (x_n + x_m) \|^2$$
$$= 4\left\| x - \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\|^2 \geq 4d^2 ,$$

فيكون لدينا بحسب ( 3 ):

$$\| x_n - x_m \|^2 \leq 2\left( d^2 + \frac{1}{n^2} \right) + 2\left( d^2 + \frac{1}{m^2} \right) - 4d^2 =$$
$$= 2\left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \xrightarrow[n,m \to \infty]{} 0.$$

من ذلك ينتج أن المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ أساسية في $H$ فهي متقاربة. لنفرض

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x_1$$

عندئذ يكون $x_1 \in H_1$ لأن $H_1$ مغلق بالفرض.

من العلاقة ( 2 ) نجد عندما $n \to \infty$ أن $\| x - x_1 \|^2 \leq d^2$ ، وبالتالي يكون

$$\| x - x_1 \| \leq d .$$

من ناحية ثانية يكون $\| x-x_1\| \geq d$ لأن $x_1 \in H_1$. لذلك يكون

$$\| x-x_1\| = d = d(x,H_1). \qquad (4)$$

نفرض الآن $x_2 = x-x_1$ ونبين أن $x_2$ يعامد $H_1$. من أجل ذلك نأخذ عنصراً $y \neq 0 \in H_1$. فيكون $x_1+\lambda y \in H_1$ من أجل أي $\lambda \in \boldsymbol{K}$. وبالتالي يكون:

$$\| x_2-\lambda y\|^2 = \| x-(x_1+\lambda y)\|^2 \geq d^2 \quad ; \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{K}.$$

وهذا يعني أن

$$\langle (x-x_1)-\lambda y , (x-x_1)-\lambda y \rangle \geq d^2 \quad ; \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{K},$$

أي أن

$$\| x-x_1 \|^2 - \bar{\lambda} \langle (x-x_1) , y \rangle - \lambda \langle y,(x-x_1) \rangle + |\lambda|^2 \| y \|^2 \geq d^2 .$$

وبما أن $\| x-x_1 \| = d$ بحسب ( 4 ) فيكون

$$-\bar{\lambda} \langle x_2 , y \rangle - \lambda \langle y, x_2 \rangle + |\lambda|^2 \| y \|^2 \geq 0 \quad ; \quad \forall \lambda \in \boldsymbol{K}.$$

نأخذ $\lambda = \dfrac{\langle x_2 , y \rangle}{\| y \|^2}$ فنحصل على

$$-\frac{|\langle x_2 , y \rangle|^2}{\| y \|^2} - \frac{|\langle x_2 , x \rangle|^2}{\| y \|^2} + \frac{|\langle x_2 , y \rangle|^2}{\| y \|^2} \geq 0. \qquad (5)$$

بذلك يكون $|\langle x_2 , x \rangle|^2 \leq 0$. أي أن $\langle x_2 , x \rangle = 0$. وهذا بدوره يعني أن $x_2 \perp y$. من ذلك ينتج أن $x_2 \perp H_1$ ، أي $x_2 \in H_1^{\perp}$. بذلك نكون قد حصلنا على التمثيل ( 1 ).

لإثبات وحدانية هذا التمثيل سنفرض جدلاً وجود تمثيل آخر للعنصر $x \in H$ يحقق

$$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \quad ; \quad x_1' \in H_1 \quad , \quad x_2' \in H_1^{\perp},$$

فيكون $x_1 - x_1' = x_2' - x_2$.

بملاحظة أن $(x_1 - x_1') \in H_1$ و $(x_2' - x_2) \in H_1^{\perp}$ يكون لدينا

$$\| x_1 - x_1' \|^2 = \langle x_1 - x_1' , x_1 - x_1' \rangle = \langle x_1 - x_1' , x_2' - x_2 \rangle = 0.$$

من ذلك ينتج أن $x_1' = x_1$ ومن ثم $x_2' = x_2$. وبذلك يتم المطلوب.

**(١–٣–١٩) ملاحظة:** تعني المبرهنة السابقة أن الفضاء $H$ هو مجموع مباشر للفضائين الجزئيين المغلقين فيه $H_1$ و $H_1^{\perp}$ ، ويعبر عن ذلك بالشكل

$$H = H_1 \oplus H_1^{\perp}. \qquad (6)$$

نضيف هنا أنه يمكن تعميم العلاقة ( 6 ) من أجل $n$ من الفضاءات الخطية الجزئية المغلقة والمتعامدة مثنى مثنى

$$(7) \; H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \quad ; \quad H_k \perp H_j \;\; ; \; k \neq j.$$