(١–٢–٥) تعريف: نقول عن فضائين خطيين منظمين (حقيقيين معاً أو عقديين معاً) X و Y إنهما إيزومورفيين مع بعضهما إذا أمكن إنشاء تطبيق من الشكل

$$F : X \longrightarrow Y \quad ; \quad x \mapsto F(x) = y$$

يكون خطياً ومتبايناً وغامراً وإيزومتريا (محافظاً على النظيم). وهذه الخواص تعني على الترتيب:

(أ) $F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \quad ; \quad \forall\, x_1, x_2 \in X,$
$\forall\, \lambda_1 , \lambda_2 \in \boldsymbol{K}.$

(ب) من أجل أي عنصرين x_1 و x_2 من X و $F(x_1) = F(x_2)$ ، ينتج أن $x_1 = x_2$ (هذا يكافئ القول أنه من $x_1 \neq x_2$ ينتج $F(x_1) \neq F(x_2)$).

(ج) من أجل كل عنصر $y \ni Y$ يوجد عنصر (واحد على الأقل) $x \ni X$ بحيث يكون $F(x) = y$.

(د) $\| F(x) \|_Y = \| x \|_X \quad ; \quad \forall\ x \in X.$

أما التطبيق F نفسه فنسميه إيزومورفيزماً من الفضاء X على الفضاء Y.

(١–٢–٦) ملاحظة: إذا كان $F : X \to Y$ إيزومورفيزماً بحسب التعريف السابق فيمكن إثبات أن التطبيق العكسي $F^{-1} : Y \to X$ هو إيزومورفيزم من Y على X .

(١–٢–٧) ملاحظة: إذا كان X_1 و X_2 إيزومورفيين مع فضاء ثالث Y (أو أكثر) فيكونا أيضاً إيزومورفيين مع بعضهما ، وبالتالي كل هذه الفضاءات إيزومورفية مع بعضها البعض.

قبل التعرض لمبرهنة الإتمام لنذكر المبرهنة التالية حول الفضاءات الخطية المنتهية الأبعاد ، حيث يمكن إيجاد إثباتها في المراجع المذكورة في آخر الكتاب.

(١–٢–٨) مبرهنة: جميع الفضاءات الخطية ذات n بعداً تكون إيزومورفية للفضاء الإقليدي ذو n بعداً $\boldsymbol{E}^n$ ، وبالتالي جميع هذه الفضاءات إيزومورفية مع بعضها البعض.

نستعرض الآن مبرهنة الإتمام لفضاء خطي منظم X وننوه أنه يمكن إيجاد الإثبات في أغلب المراجع المذكورة في آخر الكتاب.

(١–٢–٩) مبرهنة: من أجل كل فضاء خطي منظم X يوجد فضاء باناخ B_X وفضاء خطي جزئي $B_X \supset X_1$ بحيث أن:

(أ) X_1 كثيفة في B_X.

(ب) يوجد إيزومورفيزم $F : X \to X_1$.

(ج) الفضاء B_X وحيد بغض النظر عن الإيزومورفية (أي عند وجود أكثر من فضاء باناخ يحقق الخاصتين (أ) و (ب) فتكون هذه الفضاءات إيزومورفية مع بعضها).

(١-٢-١٠) **تعريف:** فضاء باناخ B_X الوارد في المبرهنة السابقة يسمى إتمام الفضاء الخطي المنظم X ، وسوف نكتب $B_X = \overline{X}$.

المبرهنة التالية تعطينا شرطاً مكافئاً لتمام فضاء خطي منظم X ، وسوف نعتمد عليها لاحقاً في مواضع عدة. بهذا الخصوص يفضل العودة إلى التعريف (١-١-٢٧) لتذكر المقصود بتقارب سلسلة وتقاربها المطلق.

(١-٢-١١) **مبرهنة:** يكون الفضاء الخطي المنظم X تاماً إذا وفقط إذا كانت كل سلسلة متقاربة مطلقاً هي سلسلة متقاربة (حدود السلسلة عناصر من X).

(١-٢-١٢) **ملاحظة:** فيما يتعلق بتمام الفضاء الجزئي لدينا ما يلي:
إذا كان E فضاءً خطياً جزئياً من فضاء باناخ B فيكون E تاماً إذا وفقط إذا كان E مغلقاً في B. أي أن E هو بحد ذاته فضاء باناخ مع نفس نظيم B .

أمثلة على الفضاءات التامة وغير التامة

(١-٢-١٣) **مثال:** الفضاءات $\boldsymbol{R}$ و $\boldsymbol{C}$ المذكورة في المثال (١-١-١٢) تامة فهي فضاءات باناخ.

(١-٢-١٤) **مثال:** كل فضاء خطي منته الأبعاد يكون تاماً وبالتالي فضاء باناخ.

(١-٢-١٥) **مثال:** الفضاءات $L_p[a,b]$، حيث $1 \le p \le \infty$ ، المذكورة في المثالين (١-١-١٥) و (١-١-١٦) تامة فهي فضاءات باناخ.

(١-٢-١٦) **مثال:** الفضاءات ℓ_p ، حيث $1 \le p \le \infty$ ، المذكورة في المثال (١-١-١٧) تامة فهي فضاءات باناخ.

(١-٢-١٧) **مثال:** الفضاء $C[a,b]$ المذكور في المثال (١-١-١٤) تام مع النظيم المعرف هناك فهو فضاء باناخ.
نضيف لذلك بأن الفضاء الخطي $C[a,b]$ يكون منظماً مع النظيم

$$\| f \|_{C[a,b],\, p} = \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad f \in C[a,b] \ , 1 \le p < \infty.$$

لكنه غير تام مع هذا النظيم وبالتالي ليس فضاء باناخ.
إضافة لذلك فإن $C[a,b]$ فضاء خطي جزئي في $L_p[a,b]$ من أجل أي مجال محدود $[a,b]$.