الفصل الأول

فضاءات باناخ

نتعرف في هذا الفصل على المفاهيم الرياضية التي تلزمنا في الفصول اللاحقة من هذا الكتاب. من المؤكد أن الطالب تعرض سابقاً لهذه المفاهيم أو أغلبها لكن من المفيد التذكير بما سنحتاج. في هذه الحالة يمكن العودة فوراً إلى المفهوم المدروس أو التعرف عليه أكثر لمن يريد.

(١ – ١) الفضاءات الخطية المنظمة

تعتبر الفضاءات الخطية المنظمة من المفاهيم التي ساهمت كثيرا في تطور العديد من فروع الرياضيات المعاصرة. وقد استخدمها عدد كبير من العلماء في الرياضيات والفيزياء لحل العديد من المسائل الرياضية والفيزيائية والتقنية.

(١–١–١) **تعريف:** لتكن X مجموعة غير خالية ، ولنرمز بـ $\boldsymbol{K}$ لمجموعة الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}$ أو لمجموعة الأعداد العقدية $\boldsymbol{C}$ ولنفرض أنه يمكن تعريف عمليتين جبريتين على عناصر X (تطبيقين):

$$+ : X \times X \to X \quad ; \quad (x, y) \mapsto x + y,$$
$$\cdot : \boldsymbol{K} \times X \to X \quad ; \quad (\lambda, y) \mapsto \lambda \cdot y.$$

الأولى نسميها الجمع والثانية نسميها الضرب بعدد من $\boldsymbol{K}$ بحيث يتحقق ما يلي:

$(+1) \quad x + y = y + x \quad ; \quad \forall\, x , y \in X.$

$(+2) \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad ; \quad \forall\, x, y, z \in X.$

$(+3) \quad \exists\, \theta \in X : x + \theta = x \quad ; \quad \forall\, x \in X.$

$(+4) \quad \forall\, x \in X \;;\; \exists\, (-x) \in X : \; x + (-x) = \theta.$

$(\cdot 1) \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \quad ; \quad \forall\, x \in X \,,\, \forall\, \lambda , \mu \in \boldsymbol{K}.$

$(\cdot 2) \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \quad ; \quad \forall\, x \in X \,,\, \forall\, \lambda , \mu \in \boldsymbol{K}.$

$(\cdot 3) \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad ; \quad \forall\, x , y \in X \,,\, \forall\, \lambda \in \boldsymbol{K}.$

$(\cdot 4) \quad 1 \cdot x = x \quad ; \quad \forall\, x \in X.$

عندئذ نسمي الثلاثية $(X, +, \cdot)$ فضاء خطيا .

إذا كان $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ فنسمي $(X, +, \cdot)$ فضاءً خطياً حقيقياً ،

إذا كان $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ فنسمي $(X, +, \cdot)$ فضاءً خطياً عقدياً .

للاختصار سنكتب فقط X للدلالة على الفضاء الخطي ، وبدلا من $\lambda \cdot x$ سنكتب فقط $\lambda\, x$.

فيما يلي ، وكذلك في الفصول اللاحقة، سنعتبر أن الفضاءات الخطية هي فضاءات خطية عقدية ما لم يرد صراحة خلاف ذلك.

(١–١–٢) ملاحظة: العنصر θ الوارد في (3 +) يسمى العنصر الصفري (أو صفر الفضاء) ، وهو وحيد في حال وجوده.
العنصر $(-x)$ في (4+) يسمي العنصر النظير لـ x وهو وحيد من أجل كل x.
بحسب (2 +) سنكتب $x+y+z$ للدلالة على أحد طرفي المساواة ، ومن أجل n عنصرا من X سنكتب

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \ .$$

سنسمي كل علاقة من الشكل

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

تركيباً خطياً للعناصر $x_1 , x_2 , \dots , x_n$.

(١–١–٣) ملاحظة: يمكن التحقق انه في كل فضاء خطي X يصح ما يلي:

(أ) $0 \cdot x = \theta \quad ; \quad \forall\ x \in X .$

(ب) $\lambda \cdot \theta = \theta \quad ; \quad \forall\ \lambda \in \boldsymbol{K} .$

(ج) إذا كان $X \ni x \neq \theta$ و $\lambda x = \mu x$ فإن $\lambda = \mu$.

(١–١–٤) تعريف: نقول عن جملة عناصر $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ من الفضاء الخطي X إنها مستقلة خطيا إذا كانت العلاقة

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = \theta \qquad (1)$$

تتحقق فقط من أجل $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. عدا ذلك تسمى العناصر مرتبطة خطيا (أي أنه يوجد على الأقل عدد $\lambda_k \neq 0$ بحيث تكون (1) محققة).

(١–١–٥) ملاحظة: إذا كانت العناصر $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ مرتبطة خطيا في X فيوجد على الأقل عدد λ_k مغاير للصفر ، ولنفرض بدون تحديد العموميات أن $\lambda_n \neq 0$. عندئذ من العلاقة (1) نجد

$$x_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} x_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} x_2 - \cdots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} x_{n-1} \ .$$

وإذا فرضنا $\alpha_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_n}$ من أجل $k = 1, 2, \dots , n-1$ فيكون

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1} x_{n-1}$$

والتي تعني بدورها أن العنصر x_n عبارة عن تركيب خطي للعناصر الأخرى.

(١-١-٦) **تعريف:** نقول إن الفضاء الخطي X ذو n بعداً (أو إن X منته الأبعاد وله n بعداً) إذا كان فيه n عنصراً مستقلة خطياً وكل $(n+1)$ عنصراً منه تكون مرتبطة خطياً ، ونكتب في هذه الحالة $\dim(X) = n$.

نقول أيضاً إن X غير منته الأبعاد (أو له البعد ∞) إذا كان من أجل أي عدد طبيعي n يوجد فيه n عنصراً مستقلة خطياً ، ونكتب في هذه الحالة $\dim(X) = \infty$.

(١-١-٧) **ملاحظة:** إذا كان الفضاء الخطي X ذو n بعدا ، أي يوجد فيه n عنصرا مستقلة خطيا $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ، فكل عنصر $x \in X$ يمكن تمثيله بشكل تركيب خطي لهذه العناصر ، أي

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n .$$

في هذه الحالة نقول أيضا إن العناصر $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ تشكل قاعدة للفضاء الخطي X ، أو إن هذه العناصر تولد الفضاء X.

تجدر الإشارة هنا بأن كل n عنصراً مستقلة خطياً في الفضاء الخطي X تصلح لأن تكون قاعدة له عندما يكون $\dim(X) = n$.

إذا كان $\dim(X) = \infty$ فيختلف تعريف القاعدة. لكننا سنعود لاحقاً لهذا الأمر.

(١-١-٨) **تعريف:** لتكن M مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء الخطي X.

(أ) نسمي M فضاءً خطياً جزئياً في X إذا كان

$$\lambda x + \mu y \in M \quad ; \quad \forall\ x , y \in M \ , \ \forall\ \lambda , \mu \in \boldsymbol{K}.$$

(ب) نسمي المجموعة

$$\operatorname{span}(M) = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad ; \quad x_i \in M \quad , \quad \alpha_i \in \boldsymbol{K} \right\}$$

الفضاء الجزئي المولَد بالمجموعة M (وهو أصغر فضاء جزئي في X يحوي المجموعة M).

إذا كان $\operatorname{span}(M) = X$ فنقول إن M تولد الفضاء X.

(ج) إذا كانت عناصر المجموعة M مستقلة خطياً و $\operatorname{span}(M) = X$ فنقول إن M تشكل قاعدة هامل (**Hamel basis**) للفضاء X.

(١-١-٩) **ملاحظة:** في كل فضاء خطي X يوجد على الأقل فضاءان خطيان جزئيان هما $\{\theta\}$ و X نفسه.

نتعرف الآن على مفهوم النظيم ، الذي يعتبر تعميماً لمفهوم القيمة المطلقة ، والذي يعطي بنية خاصة لبعض الفضاءات الخطية.

(١-١-١٠) **تعريف:** نقول عن فضاء خطي X إنه منظم إذا أمكن تعريف تابع

$$\|\ \| : X \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad ; \quad x \mapsto \|x\|,$$

بحيث يتحقق ما يلي:

$$\text{(N1)} \qquad \|x\| \geq 0 \quad ; \quad \forall\ x \in X\ ,$$
$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \theta.$$
$$\text{(N2)} \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad ; \quad \forall\ x \in X\ ,\ \forall\ \lambda \in \boldsymbol{K}.$$
$$\text{(N3)} \qquad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad ; \quad \forall\ x\ ,\ y \in X.$$

أما العدد $\|x\|$ فنسميه نظيم العنصر x.

نشير هنا بأنه يمكن تعريف أكثر من نظيم على نفس الفضاء الخطي X.

نشير أيضاً أننا سنكتب أحياناً $\|x\|_X$ بدلاً من $\|x\|$ للدلالة على نظيم العنصر $x \in X$ وخاصة عند التعامل في وقت واحد مع أكثر من فضاء خطي منظم.

(١-١-١١) **ملاحظة:** من تعريف النظيم ينتج فورا أن (أثبت ذلك):

(أ) $\|\theta\| = 0.$

(ب) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \quad ; \quad \forall\ x\ ,\ y \in X.$

(ج) $\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$

ذكرنا قبل قليل أنه يمكن تعريف أكثر من نظيم على نفس الفضاء الخطي. ولكن فد توجد علاقات مابين هذه النظم ، كأن يمكن تقدير إحداها بآخر.

نقول عن نظيمين $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ على نفس الفضاء X إنهما متكافئان إذا وجد عددان حقيقيان موجبان α و β بحيث أن

$$\|x\|_1 \leq \alpha\,\|x\|_2 \ \ \&\ \ \|x\|_2 \leq \beta\,\|x\|_1 \quad ; \quad \forall\ x \in X.$$

(أو بشكل مكافئ $\alpha\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\,\|x\|_1$).

من الواضح هنا أنه إذا كان النظيمان $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ يكافئان نظيم ثالث أو أكثر فتكون جميع هذه النظم متكافئة فيما بينها. بشكل خاص فإن جميع النظم في الفضاء الخطي المنته الأبعاد متكافئة فيما بينها.

أمثلة على الفضاءات الخطية المنظمة

(١-١-١٢) **مثال:** مجموعة الأعداد الحقيقية $\boldsymbol{R}$ (العقدية $\boldsymbol{C}$) مع العمليتين المألوفتين لجمع الأعداد الحقيقية (العقدية) وضربها بعدد تشكل فضاءً خطياً حقيقياً (عقدياً) ، ويكون منظماً مع النظيم المعرف بالقيمة المطلقة (بالطويلة)

$$\|x\| = |x| \quad ; \quad x \in \boldsymbol{R}. \quad \left(\|z\| = |z| \quad ; \quad z \in \boldsymbol{C}. \right)$$

(١-١-١٣) مثال: المجموعة $\boldsymbol{K}^n=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}\times\cdots\times\boldsymbol{K}$ تشكل فضاءً خطياً مع العمليتين:

$$x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\quad;\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{K}^n,$$
$$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\in\boldsymbol{K}^n.$$
$$\lambda\cdot x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)\quad;\quad\lambda\in\boldsymbol{K}\ ,\ x\in\boldsymbol{K}^n.$$

حيث يرمز $\boldsymbol{K}$ إما لـ $\boldsymbol{R}$ أو لـ $\boldsymbol{C}$. فإذا كان $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ نحصل على الفضاء الإقليدي الحقيقي $\boldsymbol{R}^n$ ، وإذا كان $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ نحصل على الفضاء العقدي $\boldsymbol{C}^n$.

إن $\boldsymbol{K}^n$ فضاء منظم مع كل من النظم التالية (أثبت ذلك)

$$\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|x_j|\quad;\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{K}^n,$$
$$\|x\|_p=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad;\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{K}^n\ ,\ 1<p<\infty.$$
$$\|x\|_\infty=\max_j|x_j|\quad;\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{K}^n.$$

بشكل خاص من أجل $p=2$ نحصل على النظيم الإقليدي المعروف

$$\|x\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\quad;\quad x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\boldsymbol{K}^n.$$

نشير هنا أن النظم السابقة متكافئة فيما بينها لأنها تحقق المتراجحات التالية:

$$\|x\|_\infty\le\|x\|_p\le\|x\|_1\le n\,\|x\|_\infty\quad;\quad x\in\boldsymbol{K}^n\ ,\ 1\le p<\infty.$$

(١-١-١٤) مثال: مجموعة كل التوابع ذات القيم العقدية (الحقيقية) المعرفة والمستمرة على المجال $[a,b]$ ، والتي سنرمز لها بـ $C[a,b]$ ، تشكل فضاءً خطياً عقدياً (حقيقياً) مع العمليتين المألوفتين لجمع التوابع وضربها بعدد ، أي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\quad;\quad\forall\,x\in[a,b]\ ,\ f,g\in C[a,b],$$
$$(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)\quad;\quad\forall\,x\in[a,b]\ ,\ f\in C[a,b]\ ,\lambda\in\boldsymbol{K}.$$

إن $C[a,b]$ فضاء منظم مع

$$(1)\ \|f\|_{C[a,b]}=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\quad;\quad f\in C[a,b].$$

(١-١-١٥) مثال: ليكن p عدداً حقيقياً، $1\le p<\infty$ ، ولنرمز بـ $L_p[a,b]$ لمجموعة كل التوابع $f(x)$ ذات القيم العقدية (الحقيقية) القيوسة حسب ليبيغ على المجال $[a,b]$ بحيث أن التكامل $\int_a^b|f(x)|^p\,dx$ موجود ومحدود.

يمكن التحقق أنه مع عمليتي جمع التوابع وضربها بعدد ، المذكورتين في المثال السابق ، يصبح $L_p[a,b]$ فضاءً خطياً ، وهو منظم مع

$$(2) \qquad \| f \|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad f \in L_p[a,b].$$

لإثبات أن العلاقة (2) تعرف نظيماً يلزمنا ما يسمى بمتراجحة مينكوفسكي ، وللحصول عليها يلزم ما يسمى بمتراجحة هولدر ، وكلاهما من المتراجحات الهامة جداً في التحليل التابعي نظراً لتعدد استخداماتهما.

(أ) تنص **متراجحة هولدر للتكاملات** على أنه إذا كان

$$f \in L_p[a,b] \ , \ g \in L_q[a,b] \quad ; \ 1 < p < \infty \ , \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

فيكون عندئذ:

$$(3) \qquad \int_a^b | f(x) g(x) | dx \le \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b | g(x) |^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

والتي تكتب بالشكل

$$(4) \qquad \| f g \|_{L_1[a,b]} \le \| f \|_{L_p[a,b]} \| g \|_{L_q[a,b]}$$

من المتراجحة (3) ينتج أن $f g \in L_1[a,b]$).

(ب) تنص **متراجحة مينكوفسكي** للتكاملات على أنه إذا كان f و g تابعين من $L_p[a,b]$ فيكون $(f+g)$ تابعاً من $L_p[a,b]$ ، كما أن

$$\textbf{(4)} \quad \left(\int_a^b | f(x) + g(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b | g(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

والتي تكتب بالشكل

$$\textbf{(4)'} \qquad \| f + g \|_{L_p[a,b]} \le \| f \|_{L_p[a,b]} + \| g \|_{L_p[a,b]} \quad ; \quad 1 \le p < \infty.$$

نود الإشارة هنا إلى التابعين المتساويين تقريباً في كل مكان على $[a,b]$ ينظر إليهما كعنصر واحد في الفضاء $L_p[a,b]$. وبشكل أدق يتألف $L_p[a,b]$ من صفوف تكافؤ يحوي كل منها التوابع المتساوية تقريباً في كل مكان على المجال $[a,b]$. وعند القول إن f تابع من الفضاء $L_p[a,b]$ فنقصد ضمناً أن f ممثل لصف تكافؤ $[f]$. نفس الشيء بالنسبة للفضاء $L_\infty[a,b]$ الذي ستعرف عليه في المثال التالي.

(١-١-١٦) **مثال:** لنرمز بـ $L_\infty[a,b]$ لمجموعة كل التوابع $f(x)$ ذات القيم العقدية (الحقيقية) القيوسة حسب ليبيغ على المجال $[a,b]$ بحيث أن $\underset{x \in [a,b]}{ess\sup} | f(x) | < \infty$.

يمكن التحقق أنه مع عمليتي جمع التوابع وضربها بعدد المذكورتين في المثال (١-١-١٤) يصبح $L_\infty[a,b]$ فضاءً خطياً ، وهو منظم مع

$$(5) \qquad \| f \|_{L_\infty[a,b]} = ess\sup_{x\in[a,b]} | f(x) | \quad ; \quad f \in L_\infty[a,b].$$

نشير هنا أن متراجحتي هولدر ومينكوفسكي (3) و (4) تصحان في الفضاء $L_\infty[a,b]$ وذلك إذا اعتبرنا أن $q=\infty$ عندما $p=1$ و $q=1$ عندما $p=\infty$.

(١-١-١٧) مثال: ليكن $1 \le p < \infty$ ، ولنرمز بـ ℓ_p لمجموعة كل االمتتاليات العددية العقدية (الحقيقية) $x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty}$ المحققة للشرط

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p < \infty .$$

ولنرمز بـ ℓ_∞ لمجموعة كل االمتتاليات العددية $x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty}$ بحيث أن:

$$\sup_n | \xi_n | < \infty.$$

إذا عرفنا عمليتي جمع المتتاليات وضربها بعدد بالشكل:

$$x + y = \{ \xi_n + \eta_n \}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \ , \ y = \{ \eta_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$
$$\lambda x = \{ \lambda \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \ , \ \lambda \in \boldsymbol{K},$$

يصبح ℓ_p فضاءً خطياً من أجل $1 \le p \le \infty$ ، ويكون منظماً مع

$$\| x \|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \ , 1 \le p \le \infty,$$
$$\| x \|_{\ell_\infty} = \sup_n | \xi_n | \quad ; \quad x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty .$$

إضافة لمتراجحتي هولدر ومينكوفسكي للتكاملات (3) و (4) الواردتين في المثال (١-١-١٥) توجد متراجحات هولدر ومينكوفسكي للمجاميع ولهما الشكل التالي (حيث أن $x = \{ \xi_n \}_{n=1}^{\infty} \ni \ell_p$ و $y = \{ \eta_n \}_{n=1}^{\infty} \ni \ell_q$):

$$\textbf{(6)} \sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n \eta_n | \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \eta_n |^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

$$\textbf{(7)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n + \eta_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} | \eta_n |^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

كما يمكن التعبير عنهما بالشكل:

$$(6)' \qquad \|xy\|_{\ell_1} \le \|x\|_{\ell_p} \|y\|_{\ell_q} \;;\; x\in \ell_p \,,\; y\in \ell_q \,,\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$
$$\|x+y\|_{\ell_p} \le \|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p} \;;\; x\,,y\in \ell_p .(7)'$$

(١-١-١٨) **مثال:** بالاستفادة من متراجحة مينكوفسكي (4) يمكن اثبات أن $C[a,b]$ فضاء خطي منظم مع

$$\| f \|_{L_p[a,b]} = \left(\int_a^b | f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \;;\; f \in C[a,b] \,, 1\le p<\infty .$$

هذا يصح أيضاً من أجل مجموعة كثيرات الحدود $P[a,b]$ التي تشكل فضاءً خطياً جزئياً من الفضاء $C[a,b]$.

(١-١-١٩) **مثال:** ليكن X فضاءً خطياً ذو n بعداً و $u_1 , u_2 , \dots , u_n$ قاعدة فيه. عندئذ يمكن كتابة كل عنصر $x \ni X$ وبشكل وحيد كما يلي:

$$x=\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n .$$

يمكن التحقق أن X فضاء منظم مع كل من النظم التالية (المتكافئة فيما بينها):

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \quad ; \quad x\in X ,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ; \quad x\in X \;,\; 1\le p<\infty ,$$

$$\|x\|_\infty = \sup_j |\lambda_j| \quad ; \quad x\in X$$

من هذا ومن المثال (١-١-١٣) ينتج أنه يمكن إنشاء مقابلة ما بين الفضاء X (الإختياري) ذو n بعداً والفضاء $\boldsymbol{K}^n$ لها الشكل:

$$\boldsymbol{K}^n \ni (\lambda_1 , \lambda_2 , \dots , \lambda_n) \longleftrightarrow x=\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \in X$$

وهذه المقابلة خطية وتحفظ النظيم ، وبموجبها يمكن المطابقة بين $\boldsymbol{K}^n$ وبين أي فضاء خطي ذو n بعداً. سنرمز بـ $\boldsymbol{E}^n$ للدلالة على أي من هذه الفضاءات.

(١-١-٢٠) **مثال:** لنرمز بـ$C^m[a,b]$ لمجموعة التوابع $f(x)$ ذات القيم العقدية (الحقيقية) المحدودة والمستمرة على المجال $[a,b]$ والتي لها مشتقات مستمرة ومحدودة على $[a,b]$. تشكل هذه المجموعة فضاءً خطياً عقدياً (حقيقيا) مع العمليتين المألوفتين لجمع التوابع وضربها بعدد المذكورة في المثال (١-١-١٤). إن $C^m[a,b]$ فضاء منظم مع

$$(8) \| f \|_{C^m[a,b]} = \sum_{k=1}^{m} \| f^{(k)} \|_{C[a,b]} \quad ; \quad f \in C^m[a,b],$$

حيث يرمز $\|\cdot\|_{C[a,b]}$ للنظيم المعطى في (1) بينما يرمز $f^{(k)}(x)$ لمشتق التابع $f(x)$ من المرتبة k.

اعتماداً على النظيم يمكن تعريف مفهوم للتقارب في الفضاء الخطي المنظم.

(١-١-٢١) تعريف: نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر الفضاء الخطي المنظم X أنها متقاربة من العنصر x إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$ ، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ أو $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.
نسمي x نهاية المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
(هذا التعريف يعني أنه من أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون $\| x_n - x \| < \varepsilon$ من أجل $n_0(\varepsilon) < n$).

تجدر الإشارة هنا أنه إذا كان $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ نظيمين متكافئين في الفضاء X فتكون المتتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ إما متقاربة بكليهما أو غير متقاربة بكليهما.

(١-١-٢٢) ملاحظة: يمكن التحقق بسهولة من صحة المقولات التالية:
(أ) إذا كانت المتتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.
(ب) إذا كانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتاليتين متقاربتين من x و y على الترتيب فيكون

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y \quad ; \quad \lambda \;, \mu \in \boldsymbol{K}.$$

(ج) من التقارب $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ ينتج التقارب $\| x_n \| \xrightarrow[n\to\infty]{} \| x \|$.
(د) إذا كانت $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية عددية متقاربة من العدد λ وكانت $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر الفضاء X ومتقاربة من x ، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda_n x_n) = \lambda x$.

اعتماداً على مفهوم النهاية يمكن تعريف مفاهيم أخرى في الفضاءات الخطية المنظمة ، مثل المجموعة الكثيفة ومن ثم الفضاء الفصول ، السلسلة وتقاربها ومن ثم القاعدة في الفضاءات الغير منتهية الأبعاد ، الخ.

(١-١-٢٣) تعريف: (أ) نقول عن مجموعة جزئية $X \supset M$ أنها كثيفة في الفضاء X إذا كان كل عنصر $x \in X$ هو نهاية لمتتالية من عناصر M (هذا يكافئ القول أنه من أجل كل عنصر $x \in X$ ومن أجل أي عدد مفروض $\varepsilon > 0$ يوجد عنصر $y \in M$ بحيث يكون $\| x - y \| < \varepsilon$).
(ب) نقول عن الفضاء X أنه فصول إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة وعدودة.

(١-١-٢٤) ملاحظـة: الفضـاءات $\boldsymbol{R}$ و $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{E}^n$ و $C[a,b]$ و $C^m[a,b]$ الـواردة فـي الأمثلـة أعلاه فصولة (أثبت ذلك).
الفضاءات $L_p[a,b]$ و ℓ_p فصولة من أجل $1\le p<\infty$ بينما $L_\infty[a,b]$ و ℓ_∞ غير فصولين.

فيما بعد وخاصـة في الفصـل الثـاني عند دراسـة المؤثرات التكاملية سنحتاج لخاصـة هامـة تتعلق بكون الفضـاء $C\,[a,b]$ يشكل مجموعة جزئية كثيفة في الفضـاء $L_p[a,b]$. وبما أن هذه الخاصـة تلـزم لـيس فقط من أجل مجال $[a,b]$ بل أيضـاً من أجل مستطيل $R=[a\,,\,b]\times[c\,,\,d]$ أو أيـة مجموعة جزئية Ω من الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^n$ ، حيث $n\ge 1$ ، فسوف نعرض إثبات هذه الخاصـة من أجل الحالة العامة.

في البداية لنعرف الفضاءات $L_p(\Omega)$ من أجل مجموعة جزئية $\Omega\subset\boldsymbol{R}^n$ قيوسة بحسب ليبيـغ (حيث نتعامل مع قياس ليبيغ).
من أجل $1\le p<\infty$ ترمز $L_p(\Omega)$ لمجموعة كل التوابع ذات القيم العقدية (بمتحول حقيقي)

$$f:\Omega\to\boldsymbol{C}\quad;\qquad x\mapsto f(x)\,,$$

التي تحقق $\int_\Omega |\,f(x)|^p dx<\infty$ ، كما ترمز $L_\infty(\Omega)$ لمجموعة كل التوابع من الشكل السابق والتي تحقق $\underset{x\in\Omega}{ess\sup}\,|\,f(x)|<\infty$.

(١-١-٢٥) ملاحظة: كما هو الحال في الفضاءات $L_p[a,b]$ سنعتبر أن التابعين المتساويين تقريباً في كل مكان على Ω متساويان في الفضاء $L_p(\Omega)$. بشكل خاص فإن التابع الذي يساوي الصفر تقريباً في كل مكان على Ω يمثل صفر الفضاء $L_p(\Omega)$. بشكل مشابه تماماً لحالة الفضاءات $L_p[a,b]$ يمكن التأكد أن $L_p(\Omega)$ فضاء باناخ مع النظيم

$$\|\,f\,\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |\,f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\;;\quad f\in L_p(\Omega)\;,\;1\le p<\infty\,,$$
$$\|\,f\,\|_{L_\infty(\Omega)}=\underset{x\in\Omega}{ess\sup}\,|\,f(x)|\quad;\quad f\in L_\infty(\Omega)\,.$$

(١-١-٢٦) مبرهنـة: مجموعـة التوابـع المستمرة الموجودة فـي الفضـاء $L_p(\Omega)$ تشكل مجموعـة جزئيـة كثيفة في $L_p(\Omega)$ من أجل $1\le p<\infty$.
الإثبات: سنعرضه على أربعة مراحل.
١ً- لتكن $B\subset\boldsymbol{R}^n$ مجموعة مغلقة ومحدودة ، ولتكن الدالة المميزة لها

$$I_B(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in B\\ 0 & ; \quad x\notin B,\end{cases}$$

ولنرمز بـ $d(x,B)$ للمسافة بين النقطة $x \in \boldsymbol{R}^n$ والمجموعة B ، ولنبين أن

$$I_B(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+N\ d(x\ ,\ B)} \qquad ; \quad \forall\ x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{9}$$

في الواقع إذا كان $x \in B$ فإن $d(x,B)=0$ وكذلك $I_B(x)=1$ ، وبالتالي

$$I_B(x) = 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+0} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+N\ d(x\ ,\ B)} \qquad ; \quad \forall\ x \in B.$$

و إذا كان $x \notin B$ فإن $d(x,B) \geq 0$ وكذلك $I_B(x)=0$ ، وبالتالي

$$I_B(x) = 0 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1+N\ d(x\ ,\ B)} \qquad ; \quad \forall\ x \notin B.$$

بذلك تكون (9) صحيحة . وبما أن

$$0 \leq \frac{1}{1+N\ d(x,B)} \leq 1 \qquad ; \quad \forall\ x \in \boldsymbol{R}^n \ , \quad N = 1, 2, \ldots$$

فمن أجل أية مجموعة قيوسة ومحدودة $E \subset \boldsymbol{R}^n$ يكون لدينا بحسب مبرهنة ليبيغ :

$$\lim_{N\to\infty} \int_E \left| \frac{1}{1+N\ d(x,B)} - I_B(x) \right|^p dx = 0. \tag{10}$$

٢ً- ليكن $b > a > 0$ ، ولنعرف تابعاً حقيقياً $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ بالشكل:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t-b} - \frac{1}{t-a}} & ; \qquad t \in (a,b) \\ 0 & ; \qquad t \notin [a,b]. \end{cases}$$

فنجد أن $f(t)$ مستمر وقابل للاشتقاق عدداً لانهائياً من المرات على $\boldsymbol{R}$.

اعتماداً على التابع $f(t)$ سنعرف تابعاً $F(t)$ بالشكل

$$F(t) = \frac{\int_t^b f(\tau)\,d\tau}{\int_a^b f(t)\,dt}$$

فيكون لدينا

$$F(t) = \begin{cases} 1 & ; \qquad t \leq a \\ 0 & ; \qquad t \geq b. \end{cases} \tag{11}$$

لنضع كالعادة:

$$|\,x\,|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \qquad ; \qquad x = (x_1\,,\, x_2\,,\, \ldots\,,\, x_n) \in \boldsymbol{R}^n\,,$$

ولنعرف على $\boldsymbol{R}^n$ تابعاً Φ بالشكل

$$\Phi(x)=F\left(|x|^2\right)=\begin{cases}1 & ; \quad |x|^2\le a\\ 0 & ; \quad |x|^2\ge b.\end{cases} \tag{12}$$

٣ً- ليكن f في $L_p(\Omega)$ ، ولنعتبر بداية أن $\lambda(\Omega)<\infty$.

بدون تحديد العموميات سنعتبر $f\ge 0$. عندئذ (بحسب خواص تكامل ليبيغ) من أجل أي $\varepsilon>0$ يوجد تابع بسيط φ بحيث يكون

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i\, I_{\Omega_i}(x)\le f \quad \text{و} \quad \|f-\varphi\|_{L_p(\Omega)}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

ولكن (بحسب خواص قياس ليبيغ) توجد مجموعات مغلقة $B_i\subset\Omega_i$ بحيث أن

$$\lambda(\Omega_i\setminus B_i)\le\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{3\left(1+\sum_{i=1}^{k}c_i\right)} \quad ; \quad i=1,2,\dots,k.$$

بما أن Ω محدودة (كما اعتبرناها) فيوجد عدد طبيعي N بحيث أن الدوال

$$h_N^i(x)=\frac{1}{1+N\,d(x,B_i)} \quad ; \quad i=1,2,\dots,k$$

تحقق المتراجحات

$$\|h_N^i-I_{B_i}\|_{L_p(\Omega)}=\left(\int_\Omega\left|\frac{1}{1+N\,d(x,B_i)}-I_{B_i}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon'.$$

من أجل الدالة $\psi=\sum_{i=1}^{k}c_i\,h_N^i$ المستمرة على $\boldsymbol{R}^n$ يكون

$$\begin{aligned}\|f-\psi\|_{L_p(\Omega)}&\le\|f-\varphi\|_{L_p(\Omega)}+\left\|\varphi-\sum_{i=1}^{k}c_i\,I_{B_i}\right\|_{L_p(\Omega)}+\\&\quad+\left\|\sum_{i=1}^{k}c_i\,I_{B_i}-\sum_{i=1}^{k}c_i\,h_N^i\right\|_{L_p(\Omega)}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{i=1}^{k}c_i\left\|I_{\Omega_i}-I_{B_i}\right\|+\sum_{i=1}^{k}c_i\left\|I_{B_i}-h_N^i\right\|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\sum_{i=1}^{k}c_i\,\lambda(\Omega_i\setminus B_i)+\sum_{i=1}^{k}c_i\,\frac{\varepsilon}{3\left(1+\sum_{i=1}^{k}c_i\right)}<\varepsilon.\end{aligned}$$

لذلك تكون المبرهنة صحيحة من أجل نطاق محدود Ω .

٤ً- نعتبر الآن أن النطاق Ω غير محدود ، $\lambda(\Omega)=+\infty$ ، ونضع

$$\Omega_r = \Omega \bigcap \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : |x| < r \right\} \quad ; \quad r > 0.$$

سنستفيد من الخاصة التالية:

" إذا كانت $E_1 , E_2 , E_3 , \ldots$ مجموعات قيوسة وتحقق

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \quad \text{و} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \ ,$$

عندئذ من أجل $f \ni L_p(E)$ يكون $\lim\limits_{N \to \infty} \| f \|_{L_p(E_N)} = \| f \|_{L_p(E)}$ ".

لذلك من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon > 0$ وتابع $f \ni L_p(E)$ يكون

$$\| f \|_{L_p(\Omega \setminus \Omega_r)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad ; \quad r \geq r_0(\varepsilon).$$

بحسب ما تقدم يوجد تابع مستمر g بحيث يكون $\| f - g \|_{L_p(\Omega_r)} < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

نضع الآن

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad |x| < r - \eta \\ 0 & ; \quad |x| \geq r \end{cases} \quad , \quad (\eta > 0).$$

عندئذ بحسب العلاقات

$$\lim_{r \to 0+} \| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega_r)} = \| f - g \|_{L_p(\Omega_r)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

يمكن إيجاد $\eta > 0$ بحيث يكون

$$\| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega_r)} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

لدينا الآن

$$\begin{aligned} \| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega)} &\leq \| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega_r)} + \| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega \setminus \Omega_r)} \\ &= \| f - \Psi g \|_{L_p(\Omega_r)} + \| f \|_{L_p(\Omega \setminus \Omega_r)} < \varepsilon . \end{aligned}$$

ومنه نحصل على المطلوب.

إذا رمزنا بـ $C(\Omega)$ لمجموعة التوابع المستمرة على Ω فيمكن التعبير عن المبرهنة السابقة بالقول إن المجموعة $\left(C(\Omega) \bigcap L_p(\Omega) \right)$ كثيفة في $L_p(\Omega)$ من أجل $1 \leq p < \infty$.

بشكل خاص فإنه من أجل كل مجال مغلق ومحدود $[a,b]$ يكون $C[a,b]$ فضاء خطي جزئي كثيف في $L_p[a,b]$ من أجل $1 \leq p < \infty$.

سنحتاج لاحقاً لمفهوم السلسلة في الفضاء الخطي المنظم والذي سيفيدنا في أماكن عدة ، حيث نتعرف الآن على هذا المفهوم ثم نعود إليه ثانية في الفقرة التالية وفي أماكن أخرى.

(١-١-٢٧) **تعريف:** لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر الفضاء الخطي المنظم X. عندئذ:

(أ) كل تركيب من الشكل

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

نسميه سلسلة (لانهائية) في X حدودها $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

(ب) المتتالية $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ التي حدودها

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ s_N &= x_1 + x_2 + \cdots + x_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

نسميها متتالية المجاميع الجزئية للسلسلة.

(ج) نقول إن السلسلة متقاربة في X إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية متقاربة في X ، وفي هذه الحالة نسمي $\lim_{N\to\infty} s_N = s$ مجموع السلسلة ، ونكتب

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$$

(د) نقول إن السلسلة متقاربة مطلقاً إذا تقاربت السلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \| = \| x_1 \| + \| x_2 \| + \| x_3 \| + \cdots$$

(١-١-٢٨) **تعريف:** لتكن $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ متتالية من عناصر الفضاء الخطي المنظم X. عندئذ:

(أ) نقول إن عناصر هذه المتتالية تشكل قاعدة شاودر للفضاء X إذا كان من أجل كل عنصر $x \in X$ توجد متتالية وحيدة $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ من $\boldsymbol{K}$ بحيث أن:

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n(x) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) u_n .$$

(ب) نسمي السلسلة في الطرف الأيمن منشور العنصر x وفق القاعدة $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ (أو بالنسبة لهذه القاعدة) ، كما نسمي الأعداد $a_n(x)$ أمثال النشر.

للاختصار سنكتب فقط $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$.

(١-١-٢٩) **ملاحظة:** إذا وجدت قاعدة شاودر $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ في فضاء خطي منظم X فيكون هذا الفضاء فصولاً ، وذلك لأن المجموعة

$$\left\{ \alpha_1 x_{n_1} + \alpha_2 x_{n_2} + \cdots + \alpha_m x_{n_m} \ : \alpha_j \in \boldsymbol{K} , \right. \\ \left. \operatorname{Re}(\alpha_j) \in \boldsymbol{Q} , \operatorname{Im}(\alpha_j) \in \boldsymbol{Q} \ ; \ j = 1, 2, \ldots , m \right\}_{m=1}^{\infty}$$

كثيفة في X وعدودة ، حيث ترمز $\boldsymbol{Q}$ لمجموعة الأعداد العادية.

(١-١-٣٠) تعريف: ليكن X فضاءً خطياً منظماً و $x_0 \in X$ عنصراً مثبتاً وليكن r عدداً حقيقياً موجباً. عندئذ نسمي المجموعات التالية:

$$\overline{K}(x_0 , r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| \le r \},$$
$$K(x_0 , r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| < r \},$$
$$S(x_0 , r) = \{ x \in X : \| x - x_0 \| = r \},$$

وعلى الترتيب ، كرة مغلقة ، كرة مفتوحة ، سطح كرة ، مركزها x_0 ونصف قطرها r . بشكل خاص (من أجل $x_0 = \theta$ و $r = 1$) نسمي $\overline{K}(\theta,1)$ و $K(\theta,1)$ و $S(\theta,1)$ على الترتيب ، كرة الواحدة المغلقة والمفتوحة وسطح كرة الواحدة.

(١-١-٢٩) تعريف: ليكن x و y عنصرين من الفضاء الخطي المنظم X ، ولتكن M مجموعة جزئية في X . عندئذ:

(أ) نسمي المجموعة

$$S_{[x,y]} = \{ s \in X : s = t\,x + (1-t)\,y \quad ; \quad t \in [0 , 1] \}$$

قطعة مستقيمة في X واصلة بين النقطتين (العنصرين) x و y .

(ب) نسمي M مجموعة محدبة إذا كانت كل قطعة مستقيمة واصلة بين أي عنصرين من M تقع بكاملها في M.

(ج) نسمي المجموعة

$$\operatorname{cohu}(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ ; \alpha_i \ge 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

الغلاف المحدب (**convex hull**) للمجموعة M (وهي أصغر مجموعة محدبة تحوي M).

(١-١-٣٠) تعريف: لتكن M مجموعة جزئية من الفضاء الخطي المنظم X .

(أ) نسمي M مجموعة مغلقة إذا كانت نهاية كل متتالية (متقاربة) من عناصر M تنتمي إلى M (هذا يكافئ القول أن $\overline{M} = M$).

(ب) نسمي M مجموعة محدودة إذا وجد عدد ثابت $0 < c$ بحيث يكون

$$\| x \| \le c \quad ; \quad \forall \ x \in M .$$

ستفيدنا المفاهيم السابقة في أماكن عدة من هذا الكتاب. مثلاً: عند إثبات تراص مؤثر خطي في الفضاء $L_p[a,b]$ سنحتاج لخاصة كثافة $C[a,b]$ في $L_p[a,b]$ من أجل $1 \le p < \infty$.

في هذا الصدد سنعتمد أيضاً على مفهوم الكرات لتعريف الشبكة $\varepsilon-$ التي تفيد في اختبارات التراص. تجدر الإشارة أيضاً أن للفضاءات الفصولة ميزات خاصة من حيث بنيتها أو إمكانية تشكيل قاعدة فيها و نذكرعلى وجه الخصوص الفضاءات $L_p[a,b]$ و ℓ_p ، حيث سنتعامل معها كثيراً.

نشير أيضاً أن الفضاءات المنتهية الأبعاد لها ميزاتها الخاصة جداً ، حيث أن دراستها ومجموعاتها الجزئية تلعب دوراً هاماً في فقرات عديدة.

(١ – ٢) فضاءات باناخ

(١–٢–١) **تعريف:** نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ من عناصر فضاء خطي منظم X أنها أساسية (أو متتالية كوشي) في X إذا كان

$$\lim_{n,m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0.$$

(هذا يعني أنه من أجل كل عدد مفروض $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $n_0(\varepsilon)$ بحيث يكون

$$\|x_n-x_m\|<\varepsilon \qquad ; \qquad n\,,\,m>n_0(\varepsilon)\,.$$

(١–٢–٢) **ملاحظة:** كل متتالية متقاربة $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ تكون أساسية، لأنه لو فرضنا أن $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ، فيكون لدينا

$$\|x_n-x_m\|\le\|x_n-x\|+\|x-x_m\|\xrightarrow[n,m\to\infty]{}0.$$

لكن العكس غير صحيح في الحالة العامة، أي ليس بالضرورة أن تكون المتتالية الأساسية متقاربة . لذا نذكر التعريف التالي:

(١–٢–٣) **تعريف:** نقول عن فضاء خطي منظم X أنه تام (أو فضاء باناخ) إذا كانت كل متتالية أساسية فيه هي متتالية متقاربة ونهايتها تنتمي إلى X .

(١–٢–٤) **ملاحظة:** كل فضاء خطي منته الأبعاد يكون تاماً ، أما الفضاءات غير المنتهية الأبعاد فلا يمكن الحكم عليها دفعة واحدة ، فمنها التام ومنها غير التام. نضيف أيضا أنه من كل فضاء خطي منظم يمكن الحصول على فضاء تام وهذه العملية تسمى إتمام الفضاء. في الواقع للحصول على هذا الإتمام نحتاج لمفهوم الإيزومورفيزم.