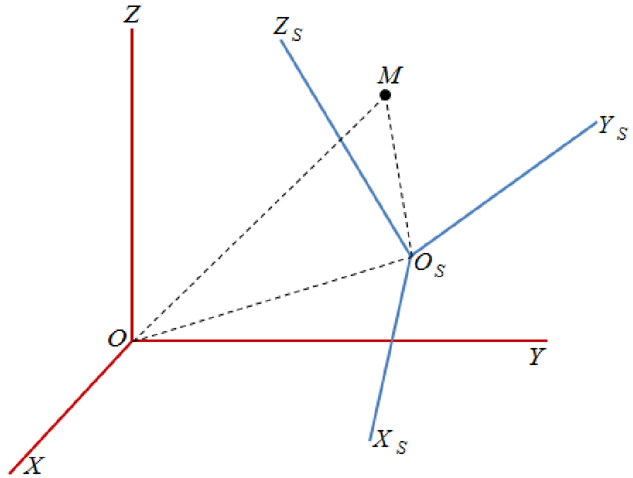
تركيب الحركات

نعلم أن مفاهيم الحركة و السكون هي مفاهيم نسبية، فالشخص الذي يقف على سطح القمر يعتبر ثابت بالنسبة لجملة متماسكة مع القمر و يعتبر متحركاً بالنسبة لجملة متماسكة مع الأرض. لذلك سنقوم في هذا البحث بدراسة عملية الربط بين حركتي الجسم المدروس بالنسبة لجملتين إحداثيتين مختلفتين أو أكثر.



لنفرض وجود نقطة M متحركة في الفراغ منسوبة إلى جملتين إحداثيتين $R/OXYZ$ و $R_S/O_SX_SY_SZ_S$، و لنفرض أن

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \\ \overrightarrow{O_SM} = x_S\,\vec{i_S} + y_S\,\vec{j_S} + z_S\,\vec{k_S} \\ \overrightarrow{OO_S} = x(O_S)\,\vec{i} + y(O_S)\,\vec{j} + z(O_S)\,\vec{k} \end{cases}$$

علاقة السرع:

لنكتب سرعة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة R بالشكل $\vec{V}(M/R)$ و التي تسمى السرعة المطلقة للنقطة ونرمز لها بالرمز $\vec{V_a}(M)$، فيكون

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V}(M/R) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO_S} + \overrightarrow{O_SM}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V}(O_S/R) + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM} \qquad (1)$$

حيث أن

$$\vec{V}(O_S/R) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO_S} = x^{\bullet}(O_S)\,\vec{i} + y^{\bullet}(O_S)\,\vec{j} + z^{\bullet}(O_S)\,\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM} = \frac{d}{dt}\left(x_S\,\vec{i_S} + y_S\,\vec{j_S} + z_S\,\vec{k_S}\right)$$

$$= \dot{x}_S\,\vec{i_S} + \dot{y}_S\,\vec{j_S} + \dot{z}_S\,\vec{k_S} + x_S\,\frac{d}{dt}\vec{i_S} + y_S\,\frac{d}{dt}\vec{j_S} + z_S\,\frac{d}{dt}\vec{k_S}$$

$$= \dot{x}_S\,\vec{i_S} + \dot{y}_S\,\vec{j_S} + \dot{z}_S\,\vec{k_S} + x_S\,\vec{\omega}\times\vec{i_S} + y_S\,\vec{\omega}\times\vec{j_S} + z_S\,\vec{\omega}\times\vec{k_S}$$

$$= \dot{x}_S\,\vec{i_S} + \dot{y}_S\,\vec{j_S} + \dot{z}_S\,\vec{k_S} + \vec{\omega}\times\left(x_S\,\vec{i_S} + y_S\,\vec{j_S} + z_S\,\vec{k_S}\right)$$

$$= \vec{V}(M/R_S) + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}$$

حيث أن $\vec{\omega}$ هو متجه دوران الجملة R_S حول النقطة O_S. كما نسمي المقدار

$$\vec{V}(M/R_S) = \dot{x}_S\,\vec{i_S} + \dot{y}_S\,\vec{j_S} + \dot{z}_S\,\vec{k_S}$$

السرعة النسبية للنقطة M و نرمز له بالرمز $\vec{V_r}(M)$. و بالتالي فإن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM} = \vec{V_r}(M) + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM} \qquad (2)$$

و بالتعويض في العلاقة (1) نجد أن

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V}(O_S/R) + \vec{V_r}(M) + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}$$

$$= \vec{V}(O_S/R) + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM} + \vec{V_r}(M)$$

نسمي المقدار $\vec{V}(O_S/R) + \vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}$ السرعة الجرية للنقطة M و نرمز لها بالرمز $\vec{V_e}(M)$ و يمثل سرعة النقطة M على اعتبارها متماسكة مع الجملة المتحركة R_S. و بالتالي تصبح علاقة السرعة الأخيرة بالشكل

$$\boxed{\overrightarrow{V_a}(M)=\overrightarrow{V_e}(M)+\overrightarrow{V_r}(M)}$$

نتيجة: من خلال المناقشة السابقة، يمكننا التمييز بين ثلاث حركات للنقطة M في الفراغ وهي

الحركة المطلقة للنقطة: و هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة R في الفراغ، و يوافق هذه الحركة سرعة مطلقة $\overrightarrow{V_a}(M)$ و تسارع مطلق $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$ للنقطة يعرفان بالعلاقتين التاليتين

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_a}(M)=\vec{V}(M/R)=\dot{x}\,\vec{i}+\dot{y}\,\vec{j}+\dot{z}\,\vec{k} \\ \overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\vec{\Gamma}(M/R)=\ddot{x}\,\vec{i}+\ddot{y}\,\vec{j}+\ddot{z}\,\vec{k} \end{cases}$$

الحركة النسبية للنقطة: و هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة المتحركة R_S وذلك على افتراض أن هذه الجملة قد أصبحت ثابتة في الفراغ، و يوافق هذه الحركة سرعة نسبية $\overrightarrow{V_r}(M)$ و تسارع نسبي $\overrightarrow{\Gamma_r}(M)$ للنقطة يعرفان بالعلاقتين التاليتين

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_r}(M)=\vec{V}(M/R_S)=\dot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\dot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\dot{z}_S\,\overrightarrow{k_S} \\ \overrightarrow{\Gamma_r}(M)=\vec{\Gamma}(M/R_S)=\ddot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\ddot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\ddot{z}_S\,\overrightarrow{k_S} \end{cases}$$

الحركة الجرية للنقطة: و هي حركة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة R وذلك على افتراض أن النقطة متماسكة مع الجملة المتحركة R_S، و يوافق هذه الحركة سرعة جرية $\overrightarrow{V_e}(M)$ و تسارع جري $\overrightarrow{\Gamma_e}(M)$ للنقطة يعرفان من خلال نقطة O_S من الجملة المتماسكة R_S و متجه الدوران $\vec{\omega}$ للجملة المتحركة بالعلاقتين التاليتين

$$\begin{cases} \overrightarrow{V_e}(M)=\vec{V}(M/R)\Big|_{M\in R_S}=\vec{V}(O_S/R)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM} \\ \overrightarrow{\Gamma_e}(M)=\vec{\Gamma}(M/R)\Big|_{M\in R_S}=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right) \end{cases}$$

ملاحظة: لقد بينت علاقة السرع التي قمنا باستنتاجها سابقاً أن السرعة المطلقة $\overrightarrow{V_a}(M)$ للنقطة هي عبارة عن مجموع للسرعتين الجرية $\overrightarrow{V_e}(M)$ و النسبية $\overrightarrow{V_r}(M)$ للنقطة M. و السؤال المطروح الآن و الذي سنجيب عليه في الفقرة التالية هو هل تبقى هذه العلاقة صحيحة من أجل التسارعات ؟

علاقة التسارعات:

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\vec{\Gamma}(M/R)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_a}(M)=\frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{V_e}(M)+\overrightarrow{V_r}(M)\right]\ \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_e}(M)+\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_r}(M) \tag{3}$$

و لكن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_r}(M)=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\dot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\dot{z}_S\,\overrightarrow{k_S}\right)$$

$$=\ddot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\ddot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\ddot{z}_S\,\overrightarrow{k_S}+\dot{x}_S\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{i_S}+\dot{y}_S\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{j_S}+\dot{z}_S\,\frac{d}{dt}\overrightarrow{k_S}$$

$$=\ddot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\ddot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\ddot{z}_S\,\overrightarrow{k_S}+\dot{x}_S\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{i_S}+\dot{y}_S\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{j_S}+\dot{z}_S\,\vec{\omega}\times\overrightarrow{k_S}$$

$$=\ddot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\ddot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\ddot{z}_S\,\overrightarrow{k_S}+\vec{\omega}\times\left(\dot{x}_S\,\overrightarrow{i_S}+\dot{y}_S\,\overrightarrow{j_S}+\dot{z}_S\,\overrightarrow{k_S}\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_r}(M)=\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M) \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_e}(M)=\frac{d}{dt}\left[\vec{V}(O_S/R)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right]=\frac{d}{dt}\vec{V}(O_S/R)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)$$

$$=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\frac{d}{dt}\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_SM}$$

و بوضع $\vec{\varepsilon}=\frac{d}{dt}\vec{\omega}$ و التعويض من العلاقة (2) نجد أن

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_e}(M)=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\left[\overrightarrow{V_r}(M)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right]$$

$$=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)$$

$$=\vec{\Gamma}(O_S/R)+\vec{\varepsilon}\times\overrightarrow{O_SM}+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{O_SM}\right)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)\ \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{V_e}(M)=\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M) \tag{5}$$

و بتعويض العلاقتين (4) و (5) في (3) نجد أن

$$\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)+\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)$$

$$=\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+2\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)$$

يسمى المقدار $2\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)$ التسارع المتمم للنقطة M و نرمز له بالرمز $\overrightarrow{\Gamma_c}(M)$، و بالتالي تصبح علاقة التسارعات بالشكل التالي

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_a}(M)=\overrightarrow{\Gamma_e}(M)+\overrightarrow{\Gamma_r}(M)+\overrightarrow{\Gamma_c}(M)}$$

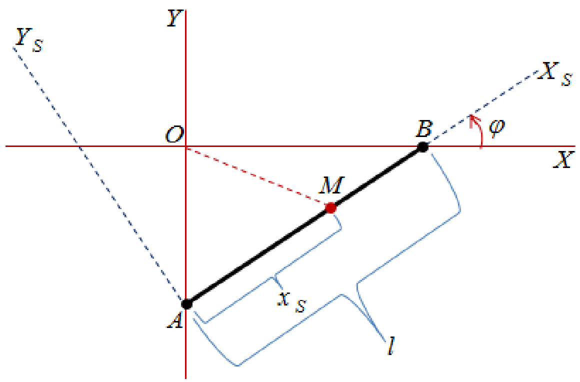
نتيجة: يمكن أن نتساءل هنا عن الحالات التي يمكن فيها ان ينعدم التسارع المتمم $\overrightarrow{\Gamma_c}(M)=2\vec{\omega}\times\overrightarrow{V_r}(M)$ للنقطة، بحيث يصبح التسارع المطلق $\overrightarrow{\Gamma_a}(M)$ للنقطة هو مجموع التسارعين الجري $\overrightarrow{\Gamma_e}(M)$ و النسبي $\overrightarrow{\Gamma_r}(M)$ فقط و هي الحالات الثلاثة التالية

١. في حال انعدمت السرعة النسبية للنقطة، أي أن $\overrightarrow{V_r}(M)=\vec{0}$، و هذا يعني أن النقطة في هذه اللحظة أصبحت متماسكة مع الجملة المتحركة R_S.

٢. في حال انعدم متجه دوران الجملة المتحركة R_S، أي أن $\vec{\omega}=\vec{0}$، و هذا يعني أن الجملة المتحركة تتحرك حركة مماسية لحركة إنسحابية في هذه اللحظة.

٣. في حال كان متجه السرعة النسبية للنقطة موازٍ لمتجه دوران الجملة المتحركة R_S في هذه اللحظة، أي أن $\overrightarrow{V_r}(M)//\vec{\omega}$.

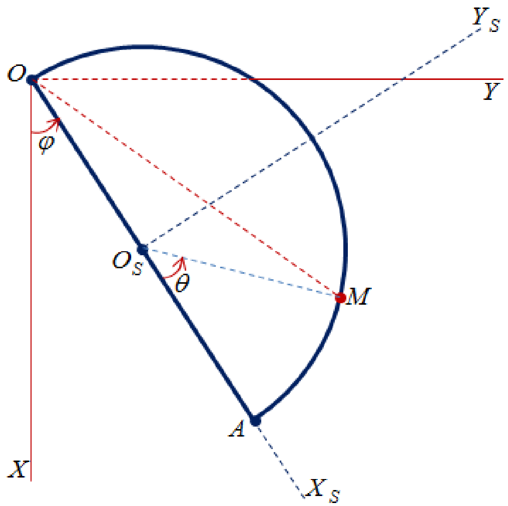
مثال (١): مجموعة مادية مؤلفة من نقطة M تتحرك على قضيب (S) طوله l يتحرك في المستوي الثابت OXY بحيث ينزلق طرفه A على المحور OY و ينزلق طرفه B على المحور OX. باعتبار جملة متماسكة مع القضيب AX_SY_S (الموضح جانباً في الشكل)



١. عين الوسطاء المستقلة لحركة المجموعة

٢. أحسب السرع النسبية و الجرية و المطلقة و التسارعات النسبية و الجرية و المتممة و المطلقة للنقطة M.

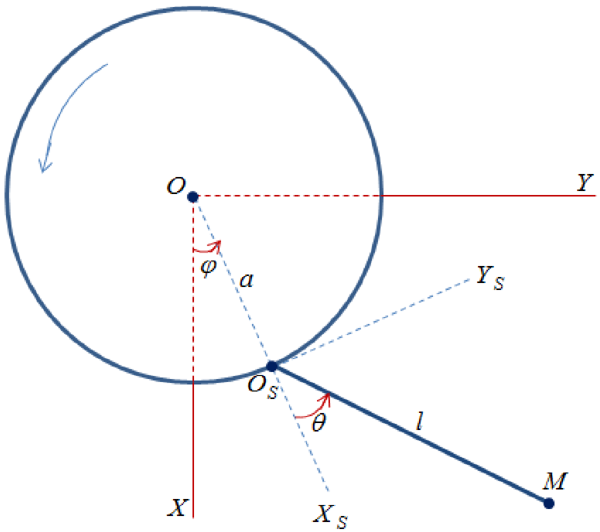
مثال (٢): مجموعة مادية مؤلفة من نقطة M تتحرك على المحيط الخارجي لقوس نصف قرص دائري (S) نصف قطره a يتحرك في المستوي الثابت OXY حول طرفه الثابت O. باعتبار جملة متماسكة مع القضيب OX_SY_S (الموضحة جانباً في الشكل)



١. عين الوسطاء المستقلة لحركة المجموعة

٢. أحسب السرع النسبية و الجرية و المطلقة و التسارعات النسبية و الجرية و المتممة و المطلقة للنقطة M.

مثال (٣): مجموعة مادية مؤلفة من نقطة M مثبتة في طرف قضيب طوله l يستطيع الدوران في المستوي الثابت OXY حول طرفه الآخر المثبت O_S على محيط قرص دائري (S) نصف قطره a و يستطيع الدوران في المستوي OXY حول مركزه الثابت O. باعتبار جملة متماسكة مع القضيب $O_SX_SY_S$ (الموضحة جانباً في الشكل)



١. عين الوسطاء المستقلة لحركة المجموعة

٢. أحسب السرع النسبية و الجرية و المطلقة و التسارعات النسبية و الجرية و المتممة و المطلقة للنقطة M.