عزوم و جداءات العطالة

تعريف: لتكن M نقطة مادية كتلتها m و لتكن O نقطة ما من الفراغ, نسمي حاصل جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن النقطة O عزم عطالة هذه النقطة بالنسبة للنقطة M ونرمز له بالرمز $I_O(M)$, أي أن

$$I_O(M) = m \left\| \overrightarrow{OM} \right\|^2$$

بنفس الأسلوب نعرف $I_\Delta(M)$ عزم عطالة النقطة M بالنسبة لمستقيمٍ ما Δ في الفراغ على أنه حاصل جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن المحور Δ. و كذلك نعرف $I_\prod(M)$ عزم عطالة النقطة M بالنسبة لمستوٍ ما $\prod$ في الفراغ على أنه حاصل جداء كتلة النقطة بمربع بعدها عن المستوي $\prod$.

مثال: عين عزوم عطالة نقطة مادية $M(x,y,z)$ كتلتها m بالنسبة لمركز الاحداثيات و بالنسبة لمحاور الجملة الاحداثية و بالنسبة للمستويات الاحداثية, ماذا تستنتج ؟

الحل: بملاحظة أن بعد النقطة $M(x,y,z)$ عن مركز الاحداثيات O يعطى بالعلاقة

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

نستنتج أن

$$I_O(M) = m\ r^2 = m\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

و بملاحظة أن بعد النقطة M عن المحاور الاحداثية OX و OY و OZ هي على الترتيب $\sqrt{y^2+z^2}$ و $\sqrt{x^2+z^2}$ و $\sqrt{x^2+y^2}$, نستنتج أن

$$I_X(M) = m\left(y^2 + z^2\right) \quad , \quad I_Y(M) = m\left(x^2 + z^2\right) \quad , \quad I_Z(M) = m\left(x^2 + y^2\right)$$

و بملاحظة أن بعد النقطة M عن المستويات الاحداثية OXY و OYZ و OXZ هي على الترتيب $|z|$ و $|x|$ و $|y|$, نستنتج أن

$$I_{XY}(M) = m\ z^2 \quad , \quad I_{YZ}(M) = m\ x^2 \quad , \quad I_{XZ}(M) = m\ y^2$$

و نستنتج مما سبق العلاقات التالية التي تبقى صحيحة دائماً

$$I_O(M)=I_{XY}(M)+I_{YZ}(M)+I_{XZ}(M)$$

$$I_O(M)=\frac{1}{2}\left[I_X(M)+I_Y(M)+I_Z(M)\right]$$

$$I_O(M)=I_X(M)+I_{YZ}(M)=I_Y(M)+I_{XZ}(M)=I_Z(M)+I_{XY}(M)$$

$$I_X(M)=I_{XY}(M)+I_{XZ}(M)\quad,\quad I_Y(M)=I_{XY}(M)+I_{YZ}(M)$$

$$I_Z(M)=I_{XZ}(M)+I_{YZ}(M)$$

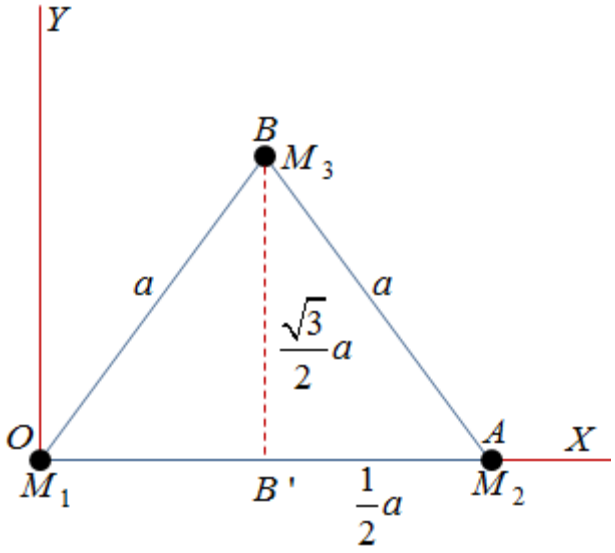
تعريف: نعرف عزم عطالة مجموعة مادية $S=\{M_1,M_2,\ldots,M_n\}$ بالنسبة لنقطة O أو مستقيم Δ أو مستوٍ $\prod$ في الفراغ على أنه مجموع عزوم عطالة نقاط المجموعة S بالنسبة لهذه للنقطة أو المستقيم أو المستوي. أي أن

$$I_O(S)=\sum_{i=1}^{n}I_O(M_i)\quad,\quad I_\Delta(S)=\sum_{i=1}^{n}I_\Delta(M_i)\quad,\quad I_\prod(S)=\sum_{i=1}^{n}I_\prod(M_i)$$

ملاحظة: يمكن بسهولة إثبات أن العلاقات التي تم استنتاجها من أجل نقطة مادية M في المثال السابق تبقى صحيحة من أجل أي مجموعة مادية S منسوبة إلى جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$ في الفراغ.

مثال: مجموعة مادية S مؤلفة من ثلاث نقاط مادية M_1,M_2,M_3 مثبتة على الترتيب في رؤوس مثلث OAB متساوي الأضلاع طول ضلعة a و كتلة كلٍ منها m. أحسب عزم عطالة هذه المجموعة بالنسبة لأحد رؤوس المثلث (و ليكن O مثلاً), ثم احسب عزم عطالة المجموعة المادية بالنسبة لأحد أضلاع المثلث (و ليكن OA مثلاً) و لأحد محاوره (و ليكن المحور المتعلق بالرأس B)؟

الحل: بالنظر إلى الشكل المجاور نلاحظ أن



$$I_O(S)=I_O(M_1)+I_O(M_2)+I_O(M_3)$$

$$=m\ \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{OM_2}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{OM_3}\right\|^2$$

$$=m\times 0^2+m\times a^2+m\times a^2=2m\ a^2$$

$$I_{OA}(S)=I_{OA}(M_1)+I_{OA}(M_2)+I_{OA}(M_3)$$

$$=m\ \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{AM_2}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{B'M_3}\right\|^2$$

$$=m\times 0^2+m\times 0^2+m\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\frac{3}{4}m\ a^2$$

$$I_{B'B}(S)=I_{B'B}(M_1)+I_{B'B}(M_2)+I_{B'B}(M_3)$$

$$=m\ \left\|\overrightarrow{B'M_1}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{B'M_2}\right\|^2+m\ \left\|\overrightarrow{BM_3}\right\|^2$$

$$=m\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2+m\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2+m\times 0^2=\frac{1}{2}m\ a^2$$

تعريف: نعرف عزم عطالة جسم صلب $[S]$ بالنسبة لنقطة O أو مستقيم Δ أو مستوٍ $\prod$ في الفراغ بالعلاقات

$$I_O([S])=\int_{[S]} I_O(dm)\ \ ,\ \ I_\Delta([S])=\int_{[S]} I_\Delta(dm)\ \ ,\ \ I_\prod([S])=\int_{[S]} I_\prod(dm)$$

حيث أن dm هي كتلة عنصرية يتم اختيارها بشكلٍ عشوائي من الجسم الصلب $[S]$.

ملاحظة: في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و نظامية و مباشرة $OXYZ$, إذا فرضنا أن الكتلة العنصرية dm من الجسم $[S]$ موجودة في الموضع (x,y,z) عندئذٍ يكون

$$I_O([S])=\int_{[S]}\left(x^2+y^2+z^2\right)dm$$

$$I_X([S])=\int_{[S]}\left(y^2+z^2\right)dm\ \ ,\ \ I_Y([S])=\int_{[S]}\left(x^2+z^2\right)dm\ \ ,\ \ I_Z([S])=\int_{[S]}\left(x^2+y^2\right)dm$$

$$I_{XY}([S])=\int_{[S]} z^2dm\ \ ,\ \ I_{XZ}([S])=\int_{[S]} y^2dm\ \ ,\ \ I_{YZ}([S])=\int_{[S]} x^2dm$$

و يمكن بسهولة عندئذٍ إثبات صحة العلاقات التالية

$$I_O([S])=I_{XY}([S])+I_{YZ}([S])+I_{XZ}([S])$$

$$I_O([S])=\frac{1}{2}\left[I_X([S])+I_Y([S])+I_Z([S])\right]$$

$$I_O([S])=I_X([S])+I_{YZ}([S])=I_Y([S])+I_{XZ}([S])=I_Z([S])+I_{XY}([S])$$

$$I_X([S])=I_{XY}([S])+I_{XZ}([S])\ \ ,\ \ I_Y([S])=I_{XY}([S])+I_{YZ}([S])$$

$$I_Z([S])=I_{XZ}([S])+I_{YZ}([S])$$

نتائج و خواص عامة: بما أن العلاقات السابقة محققة من أجل النقطة المادية و المجموعة المادية و الجسم الصلب, فإنه يمكننا استنتاج الخواص التالية لعزوم العطالة:

1. إن عزم العطالة بالنسبة لنقطة في الفراغ يساوي مجموع عزوم العطالة بالنسبة لثلاث مستويات متعامدة و متقاطعة في هذه النقطة.
2. إن عزم العطالة بالنسبة لنقطة في الفراغ يساوي نصف مجموع عزوم العطالة بالنسبة لثلاثة محاور متعامدة و متقاطعة في هذه النقطة.
3. إن عزم العطالة بالنسبة لنقطة في الفراغ يساوي مجموع عزم العطالة بالنسبة لمستوٍ و عزم العطالة بالنسبة لمحور يعامد هذا المستوي و يتقاطع معه في هذه النقطة.
4. إن عزم العطالة بالنسبة لمحورٍ ما في الفراغ يساوي مجموع عزمي العطالة بالنسبة لمستويين متعامدين فصلهما المشترك هو هذا المحور.

حالة خاصة: في حال كان توزع نقاط المجموعة المادية أو الجسم الصلب في مستوٍ فراغي (كالصفائح المستوية مثلاً), عندئذٍ يمكن و بدون المساس بعمومية المسألة أن نفرض أن هذا المستوي هو المستوي OXY فتكون $z=0$ لجميع نقاط المجموعة المادية أو الجسم الصلب و يكون في هذه الحالة

$$I_O = I_Z = I_X + I_Y \quad , \quad I_{XZ} = I_X \quad , \quad I_{YZ} = I_Y \quad , \quad I_{XZ} = 0$$

تعريف: بملاحظة أن عزم العطالة I لنقطة مادية أو مجموعة مادية أو جسم صلب بالنسبة لنقطة أو مستقيم أو مستوٍ في الفراغ هو مقدار موجب دائماً فإننا نسمي العدد الموجب K الذي يحقق أن $I = m\ K^2$ نصف قطر عطالة النقطة أو المجموعة أو الجسم بالنسبة للنقطة أو المستقيم أو المستوي المعطى, حيث أن m هي كتلة النقطة أو المجموعة أو الجسم.

ملاحظة: لاحظ أن نصف قطر عطالة نقطة مادية بالنسبة لنقطة أو مستقيم أو مستوٍ في الفراغ يمثل بعد هذه النقطة المادية عن النقطة أو المستقيم أو المستوي المعطى في الفراغ.

نظرية هويجينز الأولى: هناك ثلاثة نصوص لهذه النظرية

1. إن عزم عطالة مجموعة مادية أو جسم صلب S بالنسبة لنقطة O في الفراغ يساوي عزم عطالة المجموعة أو الجسم بالنسبة لمركز الكتلة C مضافاً إليه عزم عطالة مركز الكتلة C كنقطة لها كتلة المجموعة أو الجسم بالنسبة للنقطة O. أي أن $I_O(S) = I_C(S) + I_O(C)$.
2. إن عزم عطالة مجموعة مادية أو جسم صلب S بالنسبة لمحورٍ Δ في الفراغ يساوي عزم عطالة المجموعة أو الجسم بالنسبة لمحورٍ Δ_C يوازي المحور Δ و يمر من مركز الكتلة C مضافاً إليه عزم عطالة مركز الكتلة C كنقطة لها كتلة المجموعة أو الجسم بالنسبة للمحور Δ, أي أن $I_\Delta(S) = I_{\Delta_C}(S) + I_\Delta(C)$.

3. إن عزم عطالة مجموعة مادية أو جسم صلب S بالنسبة لمستوٍ $\prod$ في الفراغ يساوي عزم عطالة المجموعة أو الجسم بالنسبة لمستوٍ $\prod_C$ يوازي المستوي $\prod$ و يمر من مركز الكتلة C مضافاً إليه عزم عطالة مركز الكتلة C كنقطة لها كتلة المجموعة أو الجسم بالنسبة للمحور $\prod$, أي أن $I_{\prod}(S)=I_{\prod_C}(S)+I_{\prod}(C)$.

تعريف: في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$, لتكن M نقطة مادية كتلتها m و ليكن $\prod_1$ و $\prod_2$ أي مستويين موازيين لمستويين إحداثيين في هذه الجملة. لنرمز للبعد الجبري للنقطة M عن المستويين $\prod_1$ و $\prod_2$ بالرمز $\overline{d_1}$ و $\overline{d_2}$ على الترتيب, عندئذٍ نعرف $P_{\prod_1,\prod_2}(M)$ جداء عطالة النقطة بالنسبة للمستويين $\prod_1$ و $\prod_2$ بالعلاقة

$$P_{\prod_1,\prod_2}(M)=m\ \overline{d_1}\ \overline{d_2}$$

أما إذا كانت $S=\{M_1,M_2,\ldots,M_n\}$ مجموعة مادية, فإننا نعرف $P_{\prod_1,\prod_2}(S)$ جداء عطالة المجموعة المادية S بالنسبة للمستويين $\prod_1$ و $\prod_2$ على أنها مجموع جداءات عطالة نقاط المجموعة S بالنسبة للمستويين $\prod_1$ و $\prod_2$, أي أن

$$P_{\prod_1,\prod_2}(S)=\sum_{i=1}^{n}P_{\prod_1,\prod_2}(M_i)$$

أما بالنسبة لجسم صلب $[S]$, فإننا نعرف $P_{\prod_1,\prod_2}([S])$ جداء عطالة الجسم بالنسبة للمستويين $\prod_1$ و $\prod_2$ من خلال التكامل التالي

$$P_{\prod_1,\prod_2}([S])=\int_{[S]}P_{\prod_1,\prod_2}(dm)$$

حيث أن dm هي كتلة عنصرية مأخوذة بشكل اختياري من الجسم $[S]$.

حالات خاصة: في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$ و لسهولة الترميز سنرمز لجداء العطالة $P_{OXY\ ,OXZ}$ بالنسبة للمستويين الإحداثيين OXY و OXZ بالرمز P_{YZ}, أي أننا قمنا بحذف الوسيط x الذي يمثل الوسيط المشترك بين هذين المستويين و الإبقاء على الوسيطين الآخرين y و z في الترميز الجديد.

فإذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة مادية كتلتها m منسوبة إلى الجملة الإحداثية $OXYZ$, يكون الإحداثي y للنقطة M هو البعد الجبري لهذه النقطة عن المستوي OXZ و الإحداثي z للنقطة M هو البعد الجبري لهذه النقطة عن المستوي OXY و يصبح جداء عطالة هذه النقطة بالنسبة للمستويين الإحداثيين OXY و OXZ بالشكل

$$P_{YZ}\left(M\right)=m\ y\ z$$

بنفس الأسلوب سنجد أن جداء عطالة مجموعة مادية $S=\{M_i\left(x_i,y_i,z_i\right)\ :\ i=1,2,\ldots,n\}$ منسوبة إلى الجملة الإحداثية $OXYZ$ بالنسبة للمستويين الإحداثيين OXY و OXZ يكتب بالشكل

$$P_{YZ}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ y_i\ z_i$$

أما جداء عطالة جسم صلب $\left[S\right]$ منسوب إلى الجملة الإحداثية $OXYZ$ بالنسبة للمستويين الإحداثيين OXY و OXZ فيعطى بالعلاقة

$$P_{YZ}\left(\left[S\right]\right)=\int_{[S]}y\ z\ dm$$

وذلك بفرض أن الكتلة العنصرية dm الاختيارية من الجسم الصلب $\left[S\right]$ موجودة في النقطة التي إحداثياتها $\left(x,y,z\right)$ في الفراغ المنسوب للجملة الإحداثية $OXYZ$.

بنفس الأسلوب نستنتج أن جداءات العطالة P_{XZ} بالنسبة للمستويين OXY و OYZ, و P_{XY} بالنسبة للمستويين OXZ و OYZ للنقطة المادية M و المجموعة المادية S و الجسم الصلب $\left[S\right]$ تعطى بالعلاقات

$$P_{XZ}\left(M\right)=m\ x\ z\quad\&\quad P_{XY}\left(M\right)=m\ x\ y$$

$$P_{XZ}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ x_i\ z_i\quad\&\quad P_{XY}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ x_i\ y_i$$

$$P_{XZ}\left(\left[S\right]\right)=\int_{[S]}x\ z\ dm\quad\&\quad P_{XY}\left(\left[S\right]\right)=\int_{[S]}x\ y\ dm$$

خواص جداءات العطالة:

1. جداءات العطالة هي مقادير جبرية يمكن أن تكون قيمتها سالبة أو موجبة أو معدومة, بينما عزوم العطالة هي مقادير موجبة دائماً.
2. في حال كانت المجموعة المادية أو الجسم الصلب متناظراً بالنسبة لأحد المستويات الإحداثية, فإن جداءات العطالة بالنسبة لأي مستويين إحداثيين أحدهما هو هذا المستوي الإحداثي تكون معدومة. فمثلاً, في حال كانت المجموعة المادية أو الجسم الصلب متناظراً بالنسبة للمستوي الإحداثي OXY, فإن $P_{YZ}=0\quad\&\quad P_{XZ}=0$.

الإثبات: لنفرض أن المجموعة المادية S متناظرة بالنسبة للمستوي OXY, عندئذٍ لكل نقطة مادية $M_i^{(1)}(x_i,y_i,z_i)$ كتلتها m_i في المجموعة المادية S لا تنتمي إلى المستوي OXY نظيرة بالنسبة للمستوي OXY هي النقطة المادية $M_i^{(2)}(x_i,y_i,-z_i)$ لها نفس الكتلة m_i في هذه المجموعة. و بالتالي يمكن تجزئة المجموعة المادية S إلى ثلاث مجموعات مادية بالشكل $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, حيث أن S_3 هي مجموعة نقاط المجموعة المادية الواقعة في المستوي OXY, أي أن

$$S_3=\left\{M_i^{(3)}\left(x_i^{(3)},y_i^{(3)},0\right)\ :\ i=1,2,\ldots,l\right\}$$

$$S_1=\left\{M_i^{(1)}(x_i,y_i,z_i)\ :\ i=1,2,\ldots,\frac{n-l}{2}\right\}$$

$$S_2=\left\{M_i^{(2)}(x_i,y_i,-z_i)\ :\ i=1,2,\ldots,\frac{n-l}{2}\right\}$$

و يصبح في هذه الحالة

$$P_{XZ}(S)=P_{XZ}(S_1)+P_{XZ}(S_2)+P_{XZ}(S_3)$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,x_i\,z_i+\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,x_i(-z_i)+\sum_{i=1}^{l}m_i^{(3)}\,x_i^{(3)}\times 0$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,x_i\,z_i-\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,x_i\,z_i+0=0$$

$$P_{YZ}(S)=P_{YZ}(S_1)+P_{YZ}(S_2)+P_{YZ}(S_3)$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,y_i\,z_i+\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,y_i(-z_i)+\sum_{i=1}^{l}m_i^{(3)}\,y_i^{(3)}\times 0$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,y_i\,z_i-\sum_{i=1}^{(n-l)/2}m_i\,y_i\,z_i+0=0$$

يمكن بنفس الأسلوب إثبات صحة الخاصة من أجل أي جسم صلب $[S]$.

3. في حال كانت المجموعة المادية أو الجسم الصلب متناظراً بالنسبة لأحد المحاور الإحداثية, فإن جداءات العطالة بالنسبة لأي مستويين إحداثيين يحوي كل منهما هذا المحور تكون معدومة. فمثلاً, في حال كانت المجموعة المادية أو الجسم الصلب متناظراً بالنسبة للمحور الإحداثي OX, فإن $P_{XZ}=0 \quad \& \quad P_{XY}=0$.

الإثبات: لنفرض أن المجموعة المادية S متناظرة بالنسبة للمحور OX, عندئذٍ لكل نقطة مادية $M_i^{(1)}(x_i,y_i,z_i)$ كتلتها m_i في المجموعة المادية S لا تقع على المحور OX نظيرة بالنسبة للمحور OX هي النقطة المادية $M_i^{(2)}(x_i,-y_i,-z_i)$ لها نفس الكتلة m_i في هذه المجموعة. و بالتالي يمكن تجزئة المجموعة المادية S إلى ثلاث مجموعات مادية بالشكل $S=S_1\cup S_2\cup S_3$, حيث أن S_3 هي مجموعة نقاط المجموعة المادية S التي تقع على المحور OX

$$S_3=\left\{M_i^{(3)}\left(x_i^{(3)},0,0\right) \quad : \quad i=1,2,\ldots,l\right\}$$

$$S_1=\left\{M_i^{(1)}(x_i,y_i,z_i) \quad : \quad i=1,2,\ldots,\frac{n-l}{2}\right\}$$

$$S_2=\left\{M_i^{(2)}(x_i,-y_i,-z_i) \quad : \quad i=1,2,\ldots,\frac{n-l}{2}\right\}$$

و يصبح في هذه الحالة

$$P_{XY}(S)=P_{XY}(S_1)+P_{XY}(S_2)+P_{XY}(S_3)$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,y_i+\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i(-y_i)+\sum_{i=1}^{l} m_i^{(3)}\,x_i^{(3)}\times 0$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,y_i-\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,y_i+0=0$$

$$P_{XZ}(S)=P_{XZ}(S_1)+P_{XZ}(S_2)+P_{XZ}(S_3)$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,z_i+\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i(-z_i)+\sum_{i=1}^{l} m_i^{(3)}\,x_i^{(3)}\times 0$$

$$=\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,z_i-\sum_{i=1}^{(n-l)/2} m_i\,x_i\,z_i+0=0$$

و يمكن بنفس الأسلوب إثبات صحة الخاصة من أجل أي جسم صلب $[S]$.

4. في حال كانت المجموعة المادية أو الجسم الصلب مستوياً و تتوزع نقاطه في أحد المستويات الإحداثية, فإن جداءات العطالة بالنسبة لأي مستويين إحداثيين أحدهما هو هذا المستوي الإحداثي تكون معدومة. فمثلاً, في حال كانت نقاط المجموعة المادية أو الجسم الصلب متوزعة في المستوي الإحداثي OXY, فإن $P_{XZ}=0 \quad \& \quad P_{YZ}=0$.

الإثبات: لنفرض أن المجموعة المادية S مستوية و تتوزع نقاطها في المستوي OXY, عندئذٍ يكون

$$S=\left\{M_i\left(x_i,y_i,z_i=0\right) \quad : \quad i=1,2,\ldots,n\right\}$$

و يصبح في هذه الحالة

$$P_{XZ}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ x_i\ z_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\ x_i\times 0=0$$

$$P_{YZ}\left(S\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\ y_i\ z_i=\sum_{i=1}^{n}m_i\ y_i\times 0=0$$

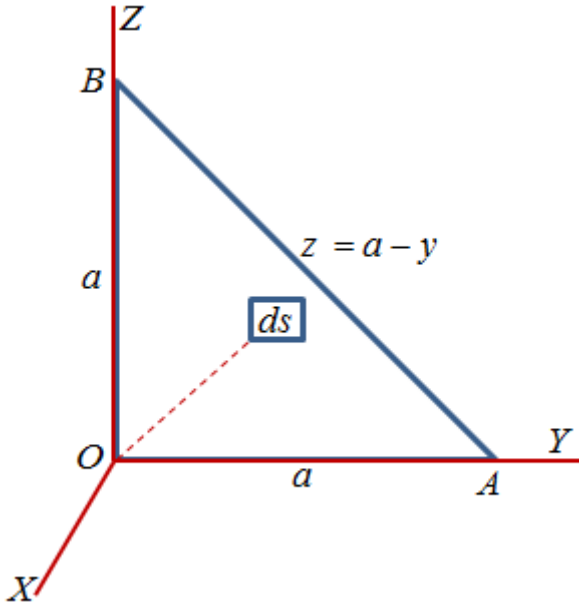
و يمكن بنفس الأسلوب إثبات صحة الخاصة من أجل أي جسم صلب $[S]$.

تعريف: من أجل أي مجموعة مادية S أو جسم صلب $[S]$ منسوبة إلى جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و نظامية $OXYZ$, نقول عن محور إحداثي ما أنه محور أساسي للعطالة إذا و فقط إذا انعدمت جداءات العطالة بالنسبة لأي مستويين إحداثيين كل منهما يحوي هذا المحور. فإذا انعدمت جميع جداءات العطالة للمجموعة أو الجسم قلنا أن محاور الجملة الإحداثية هي محاور أساسية للعطالة.

نتيجة: حسب الخاصة الثالثة من خواص جداءات العطالة المذكورة أعلاه, نستنتج أن أي محور تناظر لمجموعة مادية أو جسم صلب هو محور أساسي لعطالة هذه المجموعة المادية أو الجسم الصلب إلا أن العكس غير صحيح في الحالة العامة.

مثال: OAB صفيحة متجانسة على شكل مثلث قائم الزاوية في O و متساوية الساقين طول ساقها a وكتلتها m و منسوبة إلى جملة إحداثية ديكارتية $OXYZ$ فيها OY منطبق على الساق OA و OZ منطبق على الساق OB و OX يعامد مستوي الصفيحة. و المطلوب

1. احسب عزوم عطالة الصفيحة بالنسبة لمركز الإحداثيات و المستويات و المحاور الإحداثية
2. احسب جداءات عطالة الصفيحة



الحل: بما أن الصفيحة مستوية و تقع في المستوي OYZ, نستنتج أن

$$I_Y = I_{XY} \quad , \quad I_Z = I_{XZ} \quad , \quad I_{YZ} = 0$$

$$I_O = I_X = I_{XY} + I_{XZ}$$

$$P_{XY} = P_{XZ} = 0$$

و بسبب تبادلية المحورين OY و OZ بالنسبة للصفيحة, نستنتج أن

$$I_Y = I_Z$$

و بالتالي نستنتج أن

$$I_Y = I_Z = I_{XY} = I_{XZ} \quad , \quad I_{YZ} = 0 \quad , \quad I_O = I_X = 2I_{XY} \quad , \quad P_{XY} = P_{XZ} = 0$$

و لحساب I_{XZ} و P_{YZ}, نلاحظ أن حدود الصفيحة المعطاة تتحدد في المستوي OYZ بالمتراجحات

$$0 \le y \le a \quad \& \quad 0 \le z \le a - y$$

حيث أن $z = a - y$ هي معادلة المستقيم المنطبق على الضلع AB. و بالتالي يكون

$$I_{XZ} = \int_{[S]} y^2 dm = \int_{[S]} y^2 \rho \, ds = \rho \int_{[S]} y^2 ds = \rho \int_{y=0}^{y=a} \int_{z=0}^{z=a-y} y^2 dy \, dz = \rho \int_{y=0}^{y=a} y^2 \left(\int_{z=0}^{z=a-y} dz \right) dy$$

$$= \rho \int_{y=0}^{y=a} y^2 [z]_{z=0}^{z=a-y} dy = \rho \int_{y=0}^{y=a} y^2 (a-y) dy = \rho \int_{y=0}^{y=a} \left(a y^2 - y^3 \right) dy$$

$$= \rho \left[\frac{a}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 \right]_{y=0}^{y=a} = \rho \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\rho}{12} a^4 = \frac{\rho}{6} \frac{a^2}{2} a^2 = \frac{\rho S}{6} a^2 = \frac{m}{6} a^2$$

حيث أن $S = \frac{a^2}{2}$ هي مساحة سطح المثلث و $m = \rho S$ هي كتلة الصفيحة. و كذلك يكون

$$P_{YZ} = \int_{[S]} y \, z \, dm = \int_{[S]} y \, z \, \rho \, ds = \rho \int_{[S]} y \, z \, ds = \rho \int_{y=0}^{y=a} \int_{z=0}^{z=a-y} y \, z \, dy \, dz$$

$$= \rho \int_{y=0}^{y=a} y \left(\int_{z=0}^{z=a-y} z \, dz \right) dy = \frac{\rho}{2} \int_{y=0}^{y=a} y \left[z^2 \right]_{z=0}^{z=a-y} dy = \frac{\rho}{2} \int_{y=0}^{y=a} y (a-y)^2 dy$$

$$= \frac{\rho}{2}\int_{y=0}^{y=a}\left(a^2 y - 2a\,y^2 + y^3\right)dy = \frac{\rho}{2}\left[\frac{a^2}{2}y^2 - \frac{2a}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{y=a}$$

$$= \frac{\rho}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4}\right) = \rho\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)a^2 = \rho S\,\frac{1}{12}a^2 = \frac{m}{12}a^2$$

و بالتالي تصبح عزوم و جداءات عطالة الصفيحة المعطاة بالشكل

$$I_{XY} = \frac{m}{6}a^2 \quad , \quad I_{XZ} = \frac{m}{6}a^2 \quad , \quad I_{YZ} = 0$$

$$I_X = \frac{m}{3}a^2 \quad , \quad I_Y = \frac{m}{6}a^2 \quad , \quad I_Z = \frac{m}{6}a^2$$

$$I_O = \frac{m}{3}a^2$$

$$P_{XY} = 0 \quad , \quad P_{XZ} = 0 \quad , \quad P_{YZ} = \frac{m}{12}a^2$$

ملاحظة: لاحظ أن المحور OX هو محور أساسي لعطالة الصفيحة مع أنه ليس محور تناظر لها.

نظرية هويجينز الثانية:

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$, إن جداء عطالة مجموعة مادية S (أو جسم صلب $[S]$) بالنسبة لأي مستويين إحداثيين Π_1,Π_2 يساوي جداء عطالة المجموعة (أو الجسم) بالنسبة لمستويين موازيين للمستويين الإحداثيين Π_1,Π_2 و يمران من مركز كتلة المجموعة (أو الجسم) C مضافاً إليه جداء عطالة مركز الكتلة C بالنسبة للمستويين الإحداثيين Π_1,Π_2 كنقطة كتلتها تساوي كتلة المجموعة المادية (أو الجسم الصلب) Π_{1C},Π_{2C}. و نكتب رياضياً في الحلة العامة

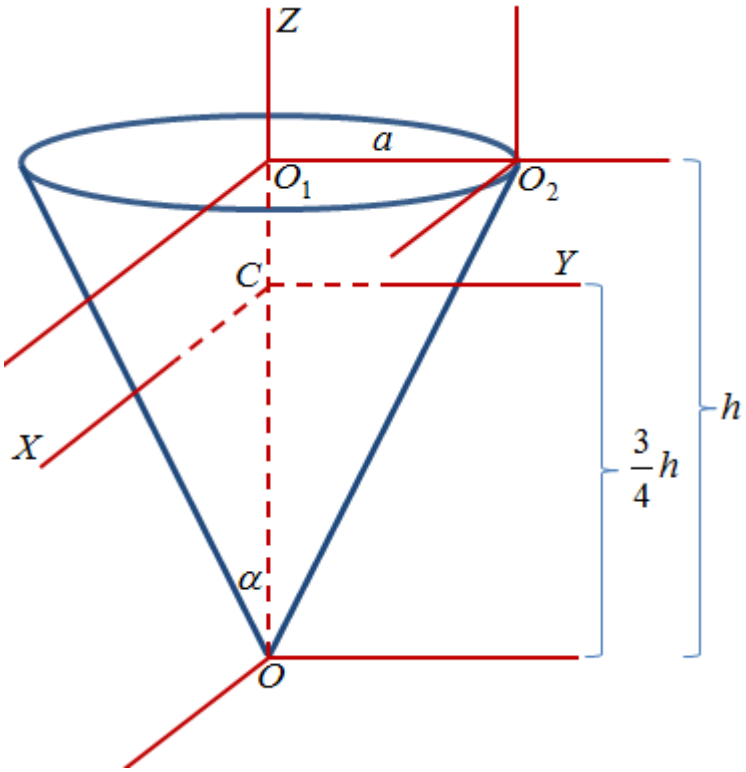
$$P_{\Pi_1,\Pi_2}(S) = P_{\Pi_{1C},\Pi_{2C}}(S) + P_{\Pi_1,\Pi_2}(C)$$

مثال: عين مركز الكتلة C لمخروط دوراني مصمت و متجانس $[S]$ كتلته m و ارتفاعه h و نصف قطر قاعدته a ثم أحسب P_{XY}, P_{XZ}, P_{YZ} في كلٍ من الحالات التالية

1. جملة الإحداثيات $CXYZ$ حيث أن C هي مركز كتلة المخروط و CZ هو محور المخروط.
2. جملة الإحداثيات $OXYZ$ حيث أن O هي رأس المخروط.

3. جملة الإحداثيات O_1XYZ حيث أن O_1 هي مركز قاعدة المخروط.

4. جملة الإحداثيات O_2XYZ حيث أن O_2 هي نقطة من محيط قاعدة المخروط تقع في القسم الموجب من المحور O_1Y.



الحل: بفرض أن α هي نصف زاوية رأس المخروط و باستخدام الاحداثيات الكروية, يكون

$$x = r\ Sin\theta\ Cos\varphi$$

$$y = r\ Sin\theta\ Sin\varphi$$

$$z = r\ Cos\theta$$

كما يتحدد المخروط المصمت بالمتراجحات التالية

$$0 \le \theta \le \alpha$$

$$0 \le r \le h/Cos\theta$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

نعتبر نقطة ما M من المخروط المصمت إحداثياتها الكروية (r,θ,φ) و نعين كتلة عنصرية dm من المخروط.

إن الحجم العنصري dv للكتلة العنصرية dm يتعين في الإحداثيات الكروية بالعلاقة

$$dv = r^2\ Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

لنحسب أولاً حجم المخروط كما يلي

$$V = \int_{[S]} dv = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^2\ Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi = \left(\int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\left[\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^2 dr\right]d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\left[r^3\right]_{r=0}^{h/Cos\theta} d\theta = \frac{2}{3}\pi\int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\frac{h^3}{Cos^3\theta}d\theta = -\frac{2}{3}\pi h^3\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta(-Sin\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^3\left[Cos^{-2}\theta\right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{1}{3}\pi h^3\left[\frac{1}{Cos^2\theta}\right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{1}{3}\pi h^3\left[\frac{1}{Cos^2\alpha}-1\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^3\left[\frac{1}{Cos^2\alpha}-1\right] = \frac{1}{3}\pi h^3 Tan^2\alpha = \frac{1}{3}\pi h\left(h\ Tan\alpha\right)^2 = \frac{1}{3}\pi a^2 h \quad ; \quad h\ Tan\alpha = a$$

مركز كتلة المخروط:

تعطى الكثافة الحجمية للمخروط بالعلاقة

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi a^2 h}$$

فيكون $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$ و تصبح كتلة الحجم العنصري من المخروط بالشكل

$$dm = \rho\, dv = \rho\, r^2 Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

و بملاحظة أن المحور OZ هو محور تناظر للمخروط, فإن مركز كتلة المخروط يقع على المحور OZ و بالتالي نستنتج أن $x_C = y_C = 0$. و بالتالي يبقى علينا حساب z_C كما يلي

$$z_C = \frac{1}{m}\int_{(S)} z\ dm = \frac{3}{\rho\pi a^2 h}\int_{(S)} r\ Cos\theta\ \rho\, r^2 Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{\pi a^2 h}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\alpha}\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^3 Cos\theta\, Sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{\pi a^2 h}\left(\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos\theta\, Sin\theta\left(\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^3 dr\right)d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi\right)$$

$$= \frac{3}{2a^2 h}\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos\theta\, Sin\theta\left[r^4\right]_{r=0}^{h/Cos\theta} d\theta = \frac{3}{2a^2 h}\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos\theta\, Sin\theta\frac{h^4}{Cos^4\theta}d\theta$$

$$= \frac{3h^3}{2a^2}\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta\, Sin\theta\, d\theta = -\frac{3h^3}{2a^2}\int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta(-Sin\theta)d\theta = \frac{3h^3}{4a^2}\left[Cos^{-2}\theta\right]_{\theta=0}^{\alpha}$$

$$= \frac{3h^3}{4a^2}\left[\frac{1}{Cos^2\theta}\right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{3h^3}{4a^2}\left(\frac{1}{Cos^2\alpha} - 1\right) = \frac{3h^3}{4a^2}Tan^2\alpha = \frac{3h^3}{4a^2}\frac{a^2}{h^2} = \frac{3}{4}h$$

أي أن إحداثيات مركز كتلة المخروط هي $C\left(0,0,\frac{3}{4}h\right)$.

1. بما أن المخروط متناظر بالنسبة للمستوي CXZ يكون

$$P_{CXY\,,CXZ}\left([S]\right)=0 \quad , \quad P_{CXZ\,,CYZ}\left([S]\right)=0$$

و بما أن المخروط متناظر بالنسبة للمستوي CYZ يكون

$$P_{CXY\,,CYZ}\left([S]\right)=0 \quad , \quad P_{CXZ\,,CYZ}\left([S]\right)=0$$

و بالتالي نستنتج أنه في هذه الحالة

$$P_{CXY\,,CXZ}\left([S]\right)=P_{CXY\,,CYZ}\left([S]\right)=P_{CXZ\,,CYZ}\left([S]\right)=0$$

2. بنفس الأسلوب نثبت أن

$$P_{OXY\,,OXZ}\left([S]\right)=P_{OXY\,,OYZ}\left([S]\right)=P_{OXZ\,,OYZ}\left([S]\right)=0$$

3. بنفس الأسلوب نثبت أن

$$P_{O_1XY\,,O_1XZ}\left([S]\right)=P_{O_1XY\,,O_1YZ}\left([S]\right)=P_{O_1XZ\,,O_1YZ}\left([S]\right)=0$$

4. بملاحظة أن المخروط متناظر بالنسبة للمستوي O_2YZ يكون

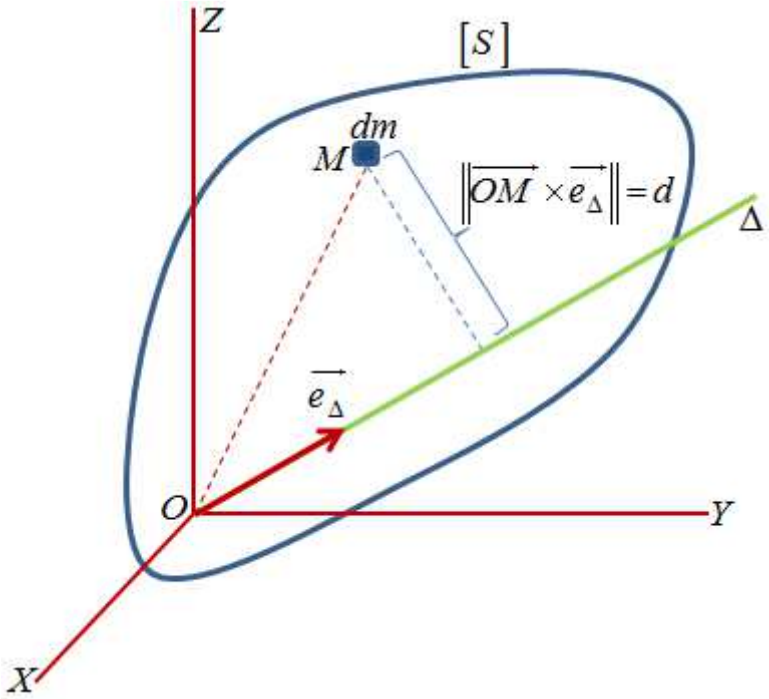
$$P_{O_2XZ\,,O_2YZ}\left([S]\right)=0 \quad , \quad P_{O_2XY\,,O_2YZ}\left([S]\right)=0$$

و لحساب $P_{O_2XY\,,O_2XZ}$ نلاحظ أن إحداثيات مركز الكتلة C بالنسبة للجملة O_2XYZ هي $C\left(0,-a,-\frac{1}{4}h\right)$, فيكون $P_{O_2XY\,,O_2XZ}\left(C\right)=m\left(-a\right)\left(-\frac{1}{4}h\right)=\frac{1}{4}mah$. و حسب نظرية هويجينز يكون

$$P_{O_2XY\,,O_2XZ}\left([S]\right)=P_{CXY\,,CXZ}\left([S]\right)+P_{O_2XY\,,O_2XZ}\left(C\right)=0+\frac{1}{4}mah=\frac{1}{4}mah$$

عزم عطالة جسم صلب (أو مجموعة مادية) بالنسبة لمحور مائل و يمر من مبدأ الإحداثيات:

في جملة إحداثية ديكارتية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$, ليكن $[S]$ جسماً صلباً منسوباً إلى هذه الجملة و ليكن Δ محور ما في الفراغ يمر من مبدأ الإحداثيات O و ليكن $\overrightarrow{e_\Delta}(\alpha,\beta,\gamma)$ هو متجه واحدة توجيه هذا المحور, كما هو موضح في الشكل. و لتكن dm كتلة عنصرية مأخوذة بشكل اختياري من الجسم الصلب $[S]$ وموجودة في النقطة $M\left(x,y,z\right)$ من الفراغ. يعطى عزم عطالة الجسم الصلب $[S]$ بالنسبة للمحور Δ بالعلاقة



$$I_\Delta = \int_{[S]} d^2\, dm$$

حيث أن d هو بعد M عن المحور Δ.

و لكن نعلم أن

$$d = \left\| \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{e_\Delta} \right\| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= (\gamma y - \beta z)\vec{i} + (\alpha z - \gamma x)\vec{j} + (\beta x - \alpha y)\vec{k}$$

و بالتالي يصبح لدينا

$$I_\Delta = \int_{[S]} \left[(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 \right] dm$$

$$= \int_{[S]} \left[\gamma^2 y^2 + \beta^2 z^2 - 2\gamma\beta yz + \alpha^2 z^2 + \gamma^2 x^2 - 2\alpha\gamma xz + \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 - 2\alpha\beta xy \right] dm$$

$$= \int_{[S]} \left[\alpha^2 (z^2 + y^2) + \beta^2 (z^2 + x^2) + \gamma^2 (x^2 + y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz \right] dm$$

$$= \alpha^2 \int_{[S]} (y^2 + z^2) dm + \beta^2 \int_{[S]} (x^2 + z^2) dm + \gamma^2 \int_{[S]} (x^2 + y^2) dm +$$

$$-2\alpha\beta \int_{[S]} xy\, dm - 2\alpha\gamma \int_{[S]} xz\, dm - 2\beta\gamma \int_{[S]} yz\, dm \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{I_\Delta = \alpha^2 I_X + \beta^2 I_Y + \gamma^2 I_Z - 2\alpha\beta P_{XY} - 2\alpha\gamma P_{XZ} - 2\beta\gamma P_{YZ}}$$

ملاحظة: نسمي المصفوفة

$$\begin{pmatrix} I_X & P_{XY} & P_{XZ} \\ P_{XY} & I_Y & P_{YZ} \\ P_{XZ} & P_{YZ} & I_Z \end{pmatrix}$$

تنسور أو موتر عطالة الجسم الصلب أو المجموعة المادية.

مثال: بالعودة إلى مثال الصفيحة المتجانسة التي هي على شكل مثلث قائم متساوي الساقين الذي درسناه سابقاً, أحسب عزم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لمنصف الزاوية القائمة في المثلث (منصف الربع الأول) ؟

وجدنا سابقاً أن

$$I_X = \frac{m}{3}a^2 \quad , \quad I_Y = \frac{m}{6}a^2 \quad , \quad I_Z = \frac{m}{6}a^2$$

$$P_{XY} = 0 \quad , \quad P_{XZ} = 0 \quad , \quad P_{YZ} = \frac{m}{12}a^2$$

و بملاحظة أن جيوب تمام توجيه منصف الربع الأول هي $\overrightarrow{e_\Delta}\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, نجد أن

$$I_\Delta = \alpha^2 I_X + \beta^2 I_Y + \gamma^2 I_Z - 2\alpha\beta P_{XY} - 2\alpha\gamma P_{XZ} - 2\beta\gamma P_{YZ}$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{m}{6}a^2\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{m}{6}a^2\right) - 0 - 0 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{m}{12}a^2\right)$$

$$= \frac{m}{12}a^2 + \frac{m}{12}a^2 - \frac{m}{12}a^2 = \frac{m}{12}a^2$$

سطح مجسم عطالة جسم صلب أو مجموعة مادية:

ليكن $[S]$ جسم صلب (أو S مجموعة مادية) منسوب لجملة إحداثية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$, و ليكن Δ مستقيم ما مار من مركز الإحداثيات O متجه واحدة توجيهه هو $\overrightarrow{e_\Delta}(\alpha,\beta,\gamma)$. وجدنا سابقاً أن عزم عطالة الجسم بالنسبة للمستقيم Δ يتعين بالعلاقة

$$I_\Delta = \alpha^2 I_X + \beta^2 I_Y + \gamma^2 I_Z - 2\alpha\beta P_{XY} - 2\alpha\gamma P_{XZ} - 2\beta\gamma P_{YZ} \qquad (1)$$

بتغير قيم α,β,γ جيوب تمام توجيه المحور Δ ستتغير قيمة I_Δ عزم عطالة هذا الجسم (أو المجموعة المادية) بالنسبة للمحور Δ. و لدراسة كيفية تغير قيمة I_Δ سنقوم بتعيين نقطة $Q(x,y,z)$ على المحور Δ في اتجاه $\overrightarrow{e_\Delta}$ تبعد عن مركز الإحداثيات O مسافة $\left\|\overrightarrow{OQ}\right\| = 1/\sqrt{I_\Delta}$, أي أن

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}\overrightarrow{e_\Delta} \qquad (2)$$

و نلاحظ هنا أنه بتغير قيم α,β,γ جيوب تمام توجيه المحور Δ, بحيث يمسح المحور Δ كامل الفراغ, ستمسح النقطة Q سطحاً محدوداً و مغلقاً في الفراغ (لأن $0<I_\Delta<\infty$) يسمى سطح مجسم عطالة الجسم الصلب (أو المجموعة المادية). و لإيجاد المعادلات التحليلية لسطح مجسم العطالة نقوم بإسقاط العلاقة (2) على المحاور الإحداثية لنجد أن

$$x=\frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}}\quad,\quad y=\frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}}\quad,\quad z=\frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}$$

و بالتالي فإن

$$\alpha=x\sqrt{I_\Delta}\quad,\quad \beta=y\sqrt{I_\Delta}\quad,\quad \gamma=z\sqrt{I_\Delta}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن

$$I_\Delta=\left(x\sqrt{I_\Delta}\right)^2 I_X+\left(y\sqrt{I_\Delta}\right)^2 I_Y+\left(z\sqrt{I_\Delta}\right)^2 I_Z-2\left(x\sqrt{I_\Delta}\right)\left(y\sqrt{I_\Delta}\right)P_{XY}$$

$$-2\left(x\sqrt{I_\Delta}\right)\left(z\sqrt{I_\Delta}\right)P_{XZ}-2\left(y\sqrt{I_\Delta}\right)\left(z\sqrt{I_\Delta}\right)P_{YZ}\quad\Rightarrow$$

$$I_\Delta=x^2\,I_\Delta I_X+y^2\,I_\Delta I_Y+z^2\,I_\Delta I_Z-2x\;y\;I_\Delta P_{XY}-2x\;z\;I_\Delta P_{XZ}-2y\;z\;I_\Delta P_{YZ}\quad\Rightarrow$$

$$\boxed{I_X\;x^2+I_Y\;y^2+I_Z\;z^2-2P_{XY}\;x\;y-2P_{XZ}\;x\;z-2P_{YZ}\;y\;z=1}$$

و هي معادلة مجسم عطالة الجسم الصلب (أو المجموعة المادية).

ملاحظة: نلاحظ أنه باستبدال المتحولات x,y,z في معادلة مجسم العطالة بالمتحولات $-x,-y,-z$ على الترتيب فإن معادلة مجسم العطالة لا تتغير, و بالتالي نستنتج أن سطح مجسم العطالة هو سطح متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات O. و بالتالي في حال كانت جميع عزوم العطالة I_X,I_Y,I_Z غير معدومة, تكون معادلة مجسم العطالة هي معادلة من الدرجة الثانية و تمثل مجسم لسطح مغلق ناقصي (إهليلجي).

نستنتج مما سبق أن مجسم العطالة لأي جسم صلب (أو مجموعة مادية) في الحالة العامة هو مجسم إهليلجي ناقصي مركز تناظره هو مبدأ الإحداثيات O. و بالتالي فإن مجسم العطالة يملك ثلاث مستويات تناظر تسمى المستويات الأساسية للعطالة, كما أنه يملك ثلاث محاور تناظر تسمى المحاور الأساسية للعطالة. فإذا اعتبرنا جملة إحداثية جديدة $OX_1Y_1Z_1$ محاورها الإحداثية هي المحاور الأساسية للعطالة و مستوياتها الإحداثية هي المستويات الأساسية

للعطالة, تصبح جداءات العطالة بالنسبة للجملة الإحداثية الجديدة معدومة, و نسمي عزوم العطالة $I_{X_1}, I_{Y_1}, I_{Z_1}$ بالنسبة لمحاور الجملة الجديدة العزوم الأساسية للعطالة, و تصبح معادلة مجسم العطالة في الجملة الجديدة بالشكل

$$\boxed{I_{X_1}\, x_1^2 + I_{Y_1}\, y_1^2 + I_{Z_1}\, z_1^2 = 1}$$

حيث أن x_1, y_1, z_1 هي إحداثيات النقطة Q في الجملة الإحداثية الجديدة.

تعيين المحاور الأساسية للعطالة و العزوم الأساسية للعطالة:

بملاحظة أنه في الجملة الإحداثية $OXYZ$ لدينا

$$I_\Delta\, \overrightarrow{OQ}^2 = 1 \;\Rightarrow\; I_\Delta\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 1 \;\Rightarrow\; I_\Delta\, x^2 + I_\Delta\, y^2 + I_\Delta\, z^2 = 1$$

يمكن أن نكتب معادلة مجسم العطالة في الجملة $OXYZ$ بالشكل

$$I_X\, x^2 + I_Y\, y^2 + I_Z\, z^2 - 2P_{XY}\, x\, y - 2P_{XZ}\, x\, z - 2P_{YZ}\, y\, z = 1 = I_\Delta\, x^2 + I_\Delta\, y^2 + I_\Delta\, z^2$$

و التي يمكن كتابتها بعد الإصلاح بالشكل

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

حيث أن

$$\varphi(x, y, z) = (I_X - I_\Delta)x^2 + (I_Y - I_\Delta)y^2 + (I_Z - I_\Delta)z^2 - 2P_{XY}\, x\, y - 2P_{XZ}\, x\, z - 2P_{YZ}\, y\, z$$

و بملاحظة أن قيم العزوم الأساسية للعطالة تقابل نقاط النهايات المحلية العظمى على سطح مجسم العطالة, نستنتج أن العزوم الأساسية للعطالة تقابل قيم I_Δ التي تحقق أن

$$\begin{cases} \partial\varphi/\partial x = 0 \\ \partial\varphi/\partial y = 0 \\ \partial\varphi/\partial z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(I_X - I_\Delta)x - 2P_{XY}\, y - 2P_{XZ}\, z = 0 \\ 2(I_Y - I_\Delta)y - 2P_{XY}\, x - 2P_{YZ}\, z = 0 \\ 2(I_z - I_\Delta)z - 2P_{XZ}\, x - 2P_{YZ}\, y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (I_X - I_\Delta)x - P_{XY}\, y - P_{XZ}\, z = 0 \\ -P_{XY}\, x + (I_Y - I_\Delta)y - P_{YZ}\, z = 0 \\ -P_{XZ}\, x - P_{YZ}\, y + (I_z - I_\Delta)z = 0 \end{cases}$$

إن المعادلات الثلاثة السابقة تمثل جملة ثلاث معادلات خطية بثلاثة مجاهيل, و لكي تملك حلاً غير الحل الصفري يجب أن يكون محدد الأمثال معدوماً. أي أن

$$\begin{vmatrix} (I_X - I_\Delta) & -P_{XY} & -P_{XZ} \\ -P_{XY} & (I_Y - I_\Delta) & -P_{YZ} \\ -P_{XZ} & -P_{YZ} & (I_Z - I_\Delta) \end{vmatrix} = 0$$

و التي يمكن كتابتها بالشكل

$$\boxed{|\lambda I - A| = 0}$$

تسمى المعادلة السابقة المعادلة المميزة لمصفوفة تنسور (موتر) العطالة, حيث أن

$$A = \begin{pmatrix} I_X & P_{XY} & P_{XZ} \\ P_{XY} & I_Y & P_{YZ} \\ P_{XZ} & P_{YZ} & I_Z \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda = I_\Delta$$

لاحظ أن A هو تنسور (موتر) العطالة الذي تم تعريفه سابقاً و I هي المصفوفة الواحدية و λ هي العزوم الأساسية للعطالة.

نتيجة: نستنتج مما سبق أن العزوم الأساسية للعطالة هي القيم الذاتية لمصفوفة تنسور (موتر) العطالة و أن المحاور الأساسية للعطالة تنطبق على الأشعة الذاتية لمصفوفة تنسور (موتر) العطالة.

بما أن تنسور (موتر) العطالة هو مصفوفة مربعة من المرتبة الثالثة فإنه يملك ثلاث قيم ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ يقابلها ثلاثة أشعة ذاتية $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ على الترتيب. بإستنتاج أشعة الواحدة

$$\vec{e_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} \quad , \quad \vec{e_2} = \frac{\vec{v_2}}{\|\vec{v_2}\|} \quad , \quad \vec{e_3} = \frac{\vec{v_3}}{\|\vec{v_3}\|}$$

نحصل على جيوب تمام توجيه المحاور الأساسية للعطالة الثلاثة و يتم ترتيب أشعة الواحدة هذه بحيث تشكل الثلاثية $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ثلاثية متعامدة و مباشرة, و نضع عندئذٍ

$$\vec{e_{X_1}} = \vec{e_1} \quad , \quad \vec{e_{Y_1}} = \vec{e_2} \quad , \quad \vec{e_{Z_1}} = \vec{e_3}$$

و تكون العزوم الأساسية للعطالة هي

$$I_{X_1} = \lambda_1 \quad , \quad I_{Y_1} = \lambda_2 \quad , \quad I_{Z_1} = \lambda_3$$

ملاحظات عامة:

1. كل محور من المحاور الأساسية للعطالة هو محور تناظر لمجسم العطالة, إلا أنه ليس بالضرورة أن يكون محور تناظر للجسم الصلب أو المجموعة المادية.
2. ليس بالضرورة أن يكون المحور الأساسي للعطالة في نقطة ما O محوراً أساسياً للعطالة في نقطة أخرى من هذا المحور مختلفة عن O.
3. المحور المركزي للعطالة هو محور أساسي للعطالة في أي نقطة من نقاط هذا المحور.
4. في حال كان الجسم الصلب أو المجموعة المادية متناظراً بالنسبة لمستوٍ ما, فإن كل محور يعامد هذا المستوي هو محور أساسي للعطالة في نقطة تقاطع المحور مع المستوي.

مثال: بالعودة إلى مثال الصفيحة المتجانسة التي هي على شكل مثلث قائم متساوي الساقين التي درسناها سابقاً, عين تنسور عطالة الصفيحة, ثم عين المحاور الأساسية لعطالتها و استنتج العزوم الأساسية للعطالة ؟

الحل: وجدنا سابقاً أن

$$I_X = \frac{m}{3}a^2 \quad , \quad I_Y = \frac{m}{6}a^2 \quad , \quad I_Z = \frac{m}{6}a^2$$

$$P_{XY} = 0 \quad , \quad P_{XZ} = 0 \quad , \quad P_{YZ} = \frac{m}{12}a^2$$

و بالتالي يصبح تنسور عطالة الصفيحة بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} I_X & P_{XY} & P_{XZ} \\ P_{XY} & I_Y & P_{YZ} \\ P_{XZ} & P_{YZ} & I_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{3}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{6}a^2 & \frac{m}{12}a^2 \\ 0 & \frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{6}a^2 \end{pmatrix}$$

و لإيجاد العزوم الأساسية و المحاور الأساسية للعطالة, نشكل المعادلة المميزة لمصفوفة تنسور العطالة و نحلها

$$\left|\lambda I - A\right| = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \lambda - \frac{m}{3}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}a^2 \\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \lambda - \frac{m}{6}a^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda-\frac{m}{3}a^2\right)\left[\left(\lambda-\frac{m}{6}a^2\right)^2-\left(-\frac{m}{12}a^2\right)^2\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda-\frac{m}{3}a^2\right)\left[\left(\lambda-\frac{m}{6}a^2\right)^2-\left(\frac{m}{12}a^2\right)^2\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda-\frac{m}{3}a^2\right)\left[\lambda-\frac{m}{6}a^2-\frac{m}{12}a^2\right]\left[\lambda-\frac{m}{6}a^2+\frac{m}{12}a^2\right]=0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda-\frac{m}{3}a^2\right)\left(\lambda-\frac{m}{4}a^2\right)\left(\lambda-\frac{m}{12}a^2\right)=0$$

<u>إما أن:</u> $\lambda-\frac{m}{3}a^2=0$ فتكون القيمة المميزة الأولى $\lambda_1=\frac{m}{3}a^2$, و لإيجاد الشعاع الذاتي $\overrightarrow{v_1}$ الموافق لهذه القيمة الذاتية نحل جملة المعادلات التالية الموافقة لهذه القيمة الذاتية

$$\left(\lambda_1 I-A\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\frac{m}{3}a^2-\frac{m}{3}a^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{3}a^2-\frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}a^2\\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{3}a^2-\frac{m}{6}a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}a^2\\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{6}a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}0=0\\ \frac{m}{6}a^2y-\frac{m}{12}a^2z=0\\ -\frac{m}{12}a^2y+\frac{m}{6}a^2z=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}2y-z=0\\ -y+2z=0\end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=x\\ y=0\\ z=0\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v_1}=(x,0,0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{e_1}=\frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|}=(1,0,0)$$

أي أن المحور الأساسي الأول للعطالة هو المحور OX, و هذا الأمر متوقع لكون جدائي العطالة المتعلقين بهذا المحور معدومين وهما $P_{XY}=P_{XZ}=0$. كما أنه يمكن اعتبار المستوي OYZ هو مستوي تناظر للصفيحة و بالتالي حسب الملاحظات السابقة يكون المحور المعامد لهذا المستوي في النقطة O هومحور أساسي للعطالة.

أو أن: $\lambda-\frac{m}{4}a^2=0$ فتكون القيمة المميزة الثانية $\lambda_2=\frac{m}{4}a^2$, و لإيجاد الشعاع الذاتي $\overrightarrow{v_2}$ الموافق لهذه القيمة الذاتية نحل جملة المعادلات التالية الموافقة لهذه القيمة الذاتية

$$\left(\lambda_2 I-A\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}\frac{m}{4}a^2-\frac{m}{3}a^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{4}a^2-\frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}a^2\\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{4}a^2-\frac{m}{6}a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{m}{12}a^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}a^2 & -\frac{m}{12}a^2\\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{12}a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}-\frac{m}{12}a^2x=0\\ \frac{m}{12}a^2y-\frac{m}{12}a^2z=0\\ -\frac{m}{12}a^2y+\frac{m}{12}a^2z=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}x=0\\ y-z=0\\ -y+z=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad \begin{cases}x=0\\ y=y\\ z=y\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{v_2}=(0,y,y) \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{e_2}=\frac{\overrightarrow{v_2}}{\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و بالتالي فإن منصف الزاوية القائمة في المثلث (منصف الربع الأول في المستوي OYZ) هو المحور الأساسي الثاني لعطالة الصفيحة, و العزم الأساسي للعطالة بالنسبة لهذا المحور هو $\lambda_2=\frac{m}{4}a^2$, و هذا يتوافق مع ما قد تم استنتاجه سابقاً.

أو أن: $\lambda-\frac{m}{12}a^2=0$ فتكون القيمة المميزة الثالثة $\lambda_3=\frac{m}{12}a^2$, و لإيجاد الشعاع الذاتي $\overrightarrow{v_3}$ الموافق لهذه القيمة الذاتية نحل جملة المعادلات التالية الموافقة لهذه القيمة الذاتية

$$\left(\lambda_3 I-A\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}\frac{m}{12}a^2-\frac{m}{3}a^2 & 0 & 0\\ 0 & \frac{m}{12}a^2-\frac{m}{6}a^2 & -\frac{m}{12}a^2\\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & \frac{m}{12}a^2-\frac{m}{6}a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3m}{12}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & -\frac{m}{12}a^2 \\ 0 & -\frac{m}{12}a^2 & -\frac{m}{12}a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3m}{12}a^2x=0 \\ -\frac{m}{12}a^2y-\frac{m}{12}a^2z=0 \\ -\frac{m}{12}a^2y-\frac{m}{12}a^2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y-z=0 \\ -y-z=0 \end{cases}$$

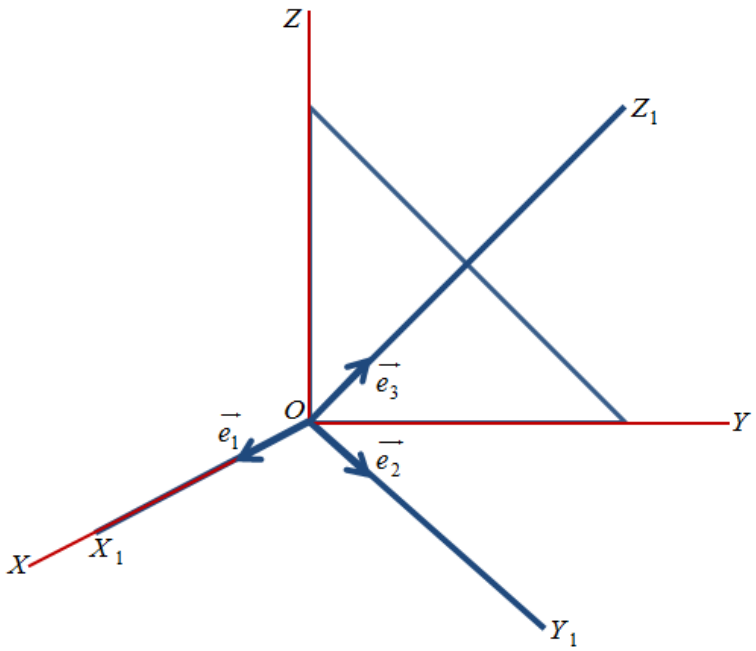
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=y \\ z=-y \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_3}=(0,y,-y) \Rightarrow \overrightarrow{e_3}=\frac{\overrightarrow{v_3}}{\left\|\overrightarrow{v_3}\right\|}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

و بالتالي فإن المحور الأساسي الثالث للعطالة هو منصف الربع الرابع في المستوي OYZ, و العزم الأساسي لعطالة الصفيحة بالنسبة لهذا المحور هو $\lambda_3=\frac{m}{12}a^2$.

بملاحظة أن الثلاثية $\left(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_2}\right)$ هي ثلاثية متعامدة ومباشرة, يمكن اختيار الجملة الأساسية $OX_1Y_1Z_1$ لعطالة الصفيحة بحيث يكون

$$\overrightarrow{e_{X_1}}=\overrightarrow{e_1}=(1,0,0) \quad , \quad \overrightarrow{e_{Y_1}}=\overrightarrow{e_3}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad , \quad \overrightarrow{e_{Z_1}}=\overrightarrow{e_2}=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

كما هو موضح في الشكل التالي



تمرين (وظيفة رسمية): عين المحاور الأساسية للعطالة و العزوم الأساسية للأجسام التي تمت دراستها من قبل ؟