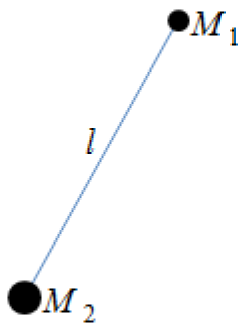
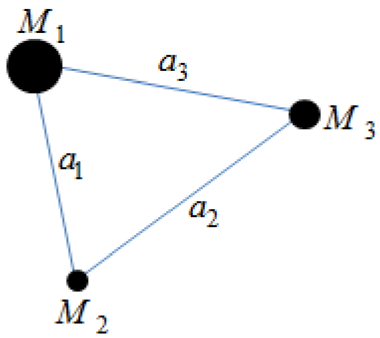
هندسة الكتل للمجموعات المادية المتماسكة و الأجسام الصلبة

تعريف: نسمي أي نقطة لها كتلة نقطة مادية, أما النقاط التي ليس لها كتلة فتسمى نقاطاً هندسية. كما نسمي أي مجموعة مؤلفة من عدد من النقاط المادية مجموعة مادية.

تعريف: نقول عن مجموعة مادية أنها متماسكة إذا و فقط إذا بقيت المسافة بين أي نقطتين من نقاط هذه المجموعة ثابتة دائماً.

مثال: أي مجموعة مادية مؤلفة من نقطتين ماديتين M_1 و M_2 مثبتتين في طرفي قضيب مهمل الكتلة ثابت الطول هي مجموعة مادية متماسكة, و كذلك أي مجموعة مادية مؤلفة من ثلاث نقاط مادية M_1 و M_2 و M_3 مثبتة في رؤوس مثلث أطوال أضلاعه ثابتة هي مجموعة مادية متماسكة أيضاً.





تعريف (مركز القوى المتوازية)**:**

لتكن $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots , \vec{F}_n$ مجموعة قوى متوازية تؤثر على الترتيب في مجموعة نقاط $P_1, P_2, \dots , P_n$ منسوبة إلى جملة إحداثية $OXYZ$, و لنضع

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{F} \quad , \quad \overrightarrow{OP_i} = \vec{r_i} \ ; \ i = 1, \ 2, \ \dots , \ n$$

نسمي النقطة C التي يعطى نصف القطر الشعاعي لها بالعلاقة

$$\vec{r_C} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^{n} F_i \ \vec{r_i} \quad ; \quad F = \left\| \vec{F} \right\| \ , \ F_i = \left\| \vec{F_i} \right\|$$

مركز القوى المتوازية $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots , \vec{F}_n$.

□الة خاصة (مركز كتل مجموعة مادية)**:**

لتكن $P_1, P_2, \dots , P_n$ مجموعة من النقاط المادية التي كتلة كل منها على الترتيب $m_1, m_2, \dots , m_n$ و الموجودة ضمن حيز هندسي محدود و صغير نسبياً على سطح الأرض و المنسوب إلى جملة إحداثية $OXYZ$.
بسبب جاذبية الأرض, ستؤثر على مجموعة النقاط المادية هذه قوى ثقالتها $\overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{W_2}, \dots , \overrightarrow{W_n}$ على الترتيب, و التي يمكن اعتبارها قوىً متوازية (لصغر الحيز الهندسي التي توجد فيه هذه النقاط). و بالتالي تملك قوى الثقالة هذه مركز قوىً يتحدد نصف القطر الشعاعي له في الجملة $OXYZ$ بالعلاقة

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{W}\sum_{i=1}^{n} W_i\ \overrightarrow{r_i} \quad ; \quad \overrightarrow{W} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{W_i}\ ,\ W = \left\|\overrightarrow{W}\right\|\ ,\ W_i = \left\|\overrightarrow{W_i}\right\|$$

و بما أن

$$\overrightarrow{W_i} = m_i\,\vec{g}\ ;\ i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

فإن

$$\overrightarrow{W} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{W_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\vec{g} \quad \Rightarrow \quad W = mg \quad ; \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

و بالتعويض يصبح نصف القطر الشعاعي لمركز قوى الثقالة المتوازية للمجموعة بالشكل

$$\boxed{\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\ \overrightarrow{r_i} \quad ; \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i}$$

يسمى المركز C الذي يتعين نصف قطره الشعاعي في هذه الحالة بالعلاقة السابقة مركز كتل المجموعة المادية.

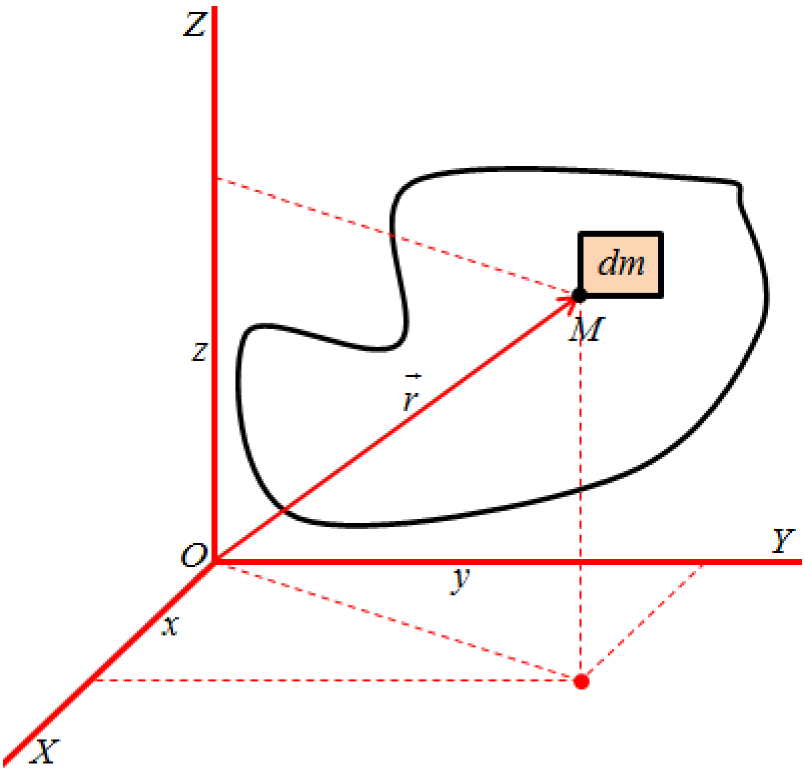
ملاحظة: بعد إسقاط العبارة الشعاعية لنصف القطر الشعاعي لمركز كتل مجموعة مادية على محاور الجملة الإحداثية الثلاثة نحصل على إحداثيات مركز كتل المجموعة المادية التي تصبح بالشكل

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\ x_i \\ y_C = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\ y_i \quad ; \quad m = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \\ z_C = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i\ z_i \end{cases}$$

و ذلك بفرض أن

$$\overrightarrow{r_i} = x_i\ \vec{i} + y_i\ \vec{j} + z_i\ \vec{k} \quad ; \quad i = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ n$$

تعريف: نقول عن مجموعة مادية متماسكة أنها تشكل جسماً صلباً إذا و فقط إذا أمكن وصل أي نقطتين من المجموعة بمنحنٍ جميع نقاطه تنتمي إلى المجموعة المادية ذاتها. أي أن الجسم الصلب هو عبارة عن وسط مادي متصل و متماسك.



للتعامل مع جسم صلب (S) في الحالة العامة و كما هو مبين في الشكل المجاور, نقوم بتجزئة الجسم إلى كتل عنصرية dm متناهية في الصغر خطية أو سطحية أو حجمية, حسب توزع نقاط الجسم الصلب, موجودة في موضع M من الجسم نصف قطره الشعاعي بالنسبة لجملة إحداثية ديكارتية $OXYZ$ معرف بالمتجه

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$$

في هذه الحالة و بدلاً من الجمع على جميع الكتل العنصرية التي تجزأ إليها الجسم نقوم بالمكاملة ضمن حدود الجسم المعطى.

مركز كتلة جسم صلب: باتباع الأسلوب الموصوف أعلاه, يمكن أن نستنتج بشكل مباشر أن نصف القطر الشعاعي لمركز الكتلة C لجسم صلب (S) كتلته m يعطى بالعبارة التالية

$$\overrightarrow{r_C} = \frac{1}{m} \int_{(S)} \vec{r}\ dm$$

و بإسقاط العبارة السابقة على محاور الجملة الإحداثية الثلاثة نجد أن إحداثيات مركز الكتل تعطى بالعلاقات

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{(S)} x\ dm \quad , \quad y_C = \frac{1}{m} \int_{(S)} y\ dm \quad , \quad z_C = \frac{1}{m} \int_{(S)} z\ dm$$

ملاحظة: تنقسم الأجسام الصلبة التي سنقوم بدراستها إلى ثلاث أصناف حسب التوزع الهندسي لنقاط الجسم:

1. أجسام خطية: و هي الأجسام التي تنتشر نقاطها على طول منحنٍ أو جزء من منحنٍ ما في الفراغ, كالقضبان و الأسلاك التي تحافظ على شكلها أثناء دراسة حركتها و تحريكها.
2. أجسام سطحية: وهي الأجسام التي تنتشر نقاطها على سطح أو جزء من سطح ما في الفراغ, كالصفائح المستوية و القشر الكروية و الأسطوانية و المخروطية و غيرها.

3. أجسام حجمية: وهي الأجسام التي تنتشر نقاطها داخل حجم أو جزء من حجم ما في الفراغ, كالكرات و الأسطوانات و المخاريط و المكعبات المصمتة و غيرها.

تعريف: نقول عن جسم صلب أنه متجانس إذا توزعت كتلة الجسم الكلية بشكلٍ متساوٍ ضمن الحيز الهندسي الذي تتوزع فيه نقاط هذا الجسم.

ملا□ظة: في حال كان الجسم الصلب متجانساً, يمكن دائماً تعريف كثافة توزع كتلة الجسم ضمن الحيز الهندسي الذي يشغله هذا الجسم و التي سنرمز لها بالرمز σ. و بالتالي يمكن أن نميز الحا□ت الثلاثة التالية

<u>الـ□الة الأولى:</u> في حال كان الجسم خطياً نعرف الكثافة الخطية لتوزع كتلة الجسم بالعلاقة

$$\sigma = \frac{m}{L}$$

حيث أن m هي كتلة الجسم و L هو طول الجسم. و يكون في هذه الحالة $dm = \sigma\, dl$, حيث أن dl هو طول عنصري مأخوذ بشكل اختياري من الجسم الصلب المدروس.

مثال (سلك على شكل مـ□يط مثلث متساوي الأضلاع): عين مركز كتلة سلك متجانس كتلته m على شكل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه a.

الـ□ل: بملاحظة أن المستقيمات المنطبقة على متوسطات المثلث هي محاور تناظر لهذا السلك, نستنتج أن مركز كتلة السلك هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث متساوي الأضلاع.

<u>الـ□الة الثانية:</u> في حال كان الجسم سطحياً, نعرف الكثافة السطحية لتوزع كتلة الجسم بالعلاقة

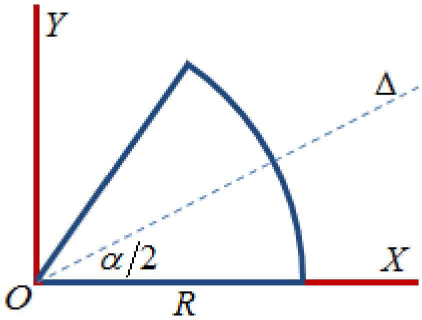
$$\sigma = \frac{m}{S}$$

حيث أن m هي كتلة الجسم و S هي مساحة الجسم, و يكون في هذه الحالة $dm = \sigma\, ds$, حيث أن ds هو سطح عنصري مأخوذ بشكل اختياري من الجسم الصلب المدروس. وهنا نجد أنه من المفيد التذكير بالعبارات الرياضية الثابتة للسطوح العنصرية ds في المستوي و التي نبينها في الجدول التالي

	في الا□داثيات الديكارتية	في الا□داثيات القطبية
السطح العنصري ds في المستوي XOY	$dx\ dy$	$\rho\, d\rho\, d\varphi$

في حال كانت نقاط الجسم متوزعة على سطح فراغي, فيجب اختيار الإحداثيات الملائمة لشكل الجسم و استنتاج عبارة ds من خلال إعطاء زيادات متناهية في الصغر لإحداثيين فقط من الإحداثيات الملائمة, كما هو مبين في الأمثلة النموذجية التي سنقدمها للطالب.

مثال (قطاع زاوي من صفيحة دائرية): عين مركز كتلة صفيحة مستوية متجانسة كتلتها m على شكل قطاع زاوي زاوية رأسه α مقتطع من قرص دائري نصف قطره R.



الحل: بملاحظة الشكل المجاور, نلاحظ أن المستقيم Δ الذي يميل عن المحور OX بزاوية $\alpha/2$ هو محور تناظر للجسم المعطى, و بالتالي نستنتج أن مركز كتلة الجسم يقع على هذا المستقيم. و بالتالي نستنتج أن

$$Tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{y_C}{x_C} \quad \Rightarrow \quad y_C=x_C \; Tan(\alpha/2) \; ; \; \alpha\neq\pi$$

باستخدام الإحداثيات القطبية في مستوي الصفيحة, نجد أن

$$x=\rho\; Cos\varphi \quad , \quad y=\rho\; Sin\varphi$$

و بملاحظة أن حدود الصفيحة المعطاة تتحدد بالمتراجحات التالية

$$0\leq\rho\leq R \quad \& \quad 0\leq\varphi\leq\alpha$$

و بفرض أن الكثافة السطحية لتوزع كتلة الجسم هي σ, يكون لدينا

$$m=\sigma\; S=\sigma\frac{\alpha\pi R^2}{2\pi}=\sigma R^2\frac{\alpha}{2} \quad \& \quad dm=\sigma\; ds=\sigma\;\rho\; d\rho\; d\varphi$$

حيث أن S هي مساحة الصفيحة. و بالتالي فإن

$$x_C=\frac{1}{m}\int_{(S)} x\;dm=\frac{1}{\sigma R^2\frac{\alpha}{2}}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\alpha}\rho\;Cos\varphi\;\sigma\;\rho\;d\rho\;d\varphi=\frac{2}{R^2\alpha}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\alpha}\rho^2 Cos\varphi\;d\rho\;d\varphi$$

$$=\frac{2}{R^2\alpha}\left(\int_{\rho=0}^{R}\rho^2 d\rho\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\alpha}Cos\varphi\;d\varphi\right)=\frac{2}{3R^2\alpha}\left[\rho^3\right]_{\rho=0}^{R}\left[Sin\varphi\right]_{\varphi=0}^{\alpha}=\frac{2R}{3\alpha}Sin\alpha$$

و بالتالي فإن

$$y_C=\frac{2R}{3\alpha}Sin\alpha\;Tan(\alpha/2)=\frac{4R}{3\alpha}Sin(\alpha/2)Cos(\alpha/2)\;\frac{Sin(\alpha/2)}{Cos(\alpha/2)}$$

$$=\frac{4R}{3\alpha}Sin^2(\alpha/2)=\frac{2R}{3\alpha}(1-Cos\,\alpha)$$

أي أن إحداثيات مركز كتلة الصفيحة في حال كانت $\alpha \neq \pi$ هي $C\left(\frac{2R}{3\alpha}Sin\alpha,\frac{2R}{3\alpha}(1-Cos\,\alpha)\right)$.

أما في الحالة التي يكون فيها $\alpha=\pi$, فنلاحظ أن محور تناظر الصفيحة هو المحور OY و بالتالي فإن مركز الكتلة يقع على هذا المحور مما يعني أن $x_C=0$. و بحساب y_C نجد أن

$$y_C=\frac{1}{m}\int_{(S)} y\ dm=\frac{1}{\sigma R^2\frac{\pi}{2}}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi}\rho\ Sin\varphi\ \sigma\ \rho\ d\rho\ d\varphi=\frac{2}{R^2\pi}\int_{\rho=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{\pi}\rho^2 Sin\varphi\ d\rho\ d\varphi$$

$$=\frac{2}{R^2\pi}\left(\int_{\rho=0}^{R}\rho^2 d\rho\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\pi}Sin\varphi\ d\varphi\right)=\frac{2}{3R^2\pi}\left[\rho^3\right]_{\rho=0}^{R}\left[-Cos\,\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi}=\frac{4R}{3\pi}$$

أي أن إحداثيات مركز كتلة الصفيحة في حال كانت $\alpha=\pi$ هي $C\left(0,\frac{4R}{3\pi}\right)$. و هذا يعني أن القانون السابق الذي قمنا باستنتاجه في حال كانت $\alpha\neq\pi$ يصلح في حال كانت $\alpha=\pi$ أيضاً.

تمارين إضافية: عين مركز كتلة صفيحة مستوية متجانسة كتلتها m على شكل مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين طول ساقه a.

الحالة الثالثة: في حال كان الجسم حجمياً, فنعرف الكثافة الحجمية لتوزع كتلة الجسم بالعلاقة

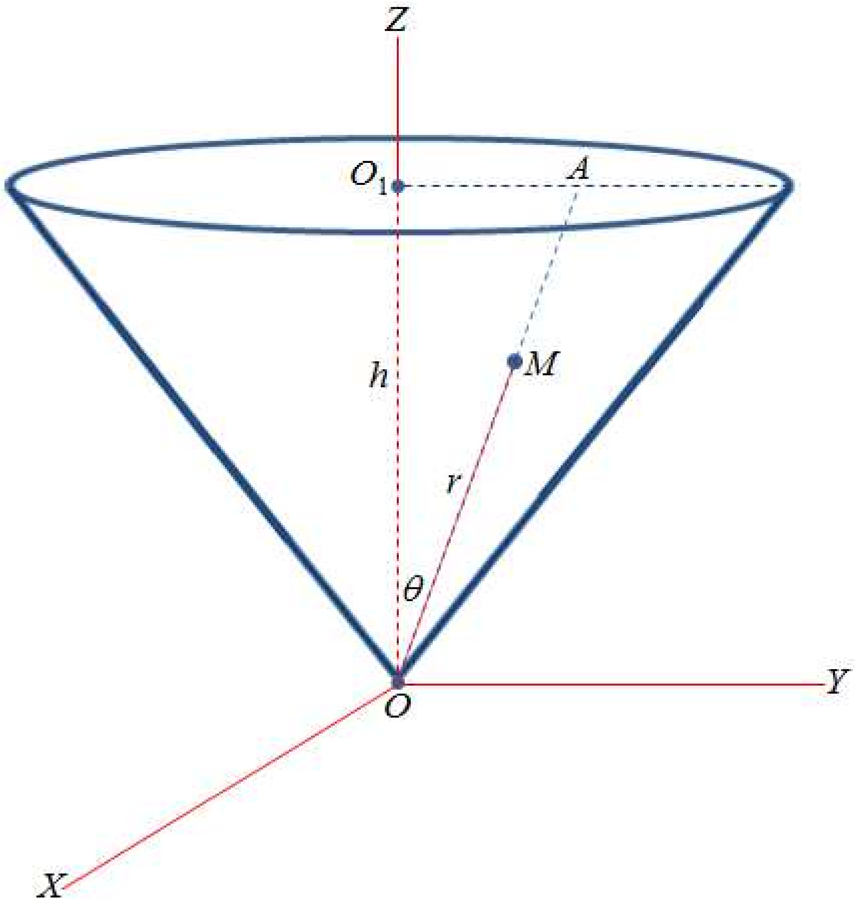
$$\sigma=\frac{m}{V}$$

حيث أن m هي كتلة الجسم و V هو حجم الجسم, و يكون في هذه الحالة $dm=\sigma\ dv$, حيث أن dv هو حجم عنصري مأخوذ بشكل اختياري من الجسم الصلب المدروس. وهنا نجد أنه من المفيد التذكير بالعبارات الرياضية الثابتة للحجوم العنصرية dv في الفراغ و التي نبينها في الجدول التالي

	الاحداثيات الديكارتية	الاحداثيات الأسطوانية	الاحداثيات الكروية
الحجم العنصري dv في الفراغ	$dx\ dy\ dz$	$\rho\ d\rho\ d\varphi\ dz$	$r^2\ Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$

مثال (مخروط دوراني مصمت): عين مركز كتلة مخروط دوراني مصمت متجانس كتلته m و ارتفاعه h و نصف زاوية رأسه α.

الحل: نعتبر جملة إحداثية متعامدة و مباشرة و نظامية $OXYZ$ مركزها رأس المخروط O و محورها OZ هو محور تناظر المخروط, كما هو مبين بالشكل التالي.



بما أن المحور OZ هو محور تناظر للمخروط, فإن مركز كتلته C يقع على هذا المحور و بالتالي نستنتج أن

$$x_C = y_C = 0$$

و لحساب z_C نستخدم العلاقة

$$z_C = \frac{1}{m}\int_{(S)} z\ dm$$

و بفرض أن الكثافة الحجمية لتوزع كتلة المخروط هي σ و باستخدام الإحداثيات الكروية, نجد أن

$$z = r\ Cos\theta \quad , \quad dm = \sigma\ dv = \sigma\ r^2 Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi \quad , \quad m = \sigma\ V$$

حيث أن V هو حجم المخروط. كما يتحدد المخروط المصمت بالمتراجحات التالية

$$0 \le \theta \le \alpha \quad \& \quad 0 \le r \le \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \frac{h}{Cos\theta} \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

و بالتعويض في عبارة z_C, نجد أن

$$z_C = \frac{1}{\sigma\, V} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{h/Cos\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r\ Cos\theta\ \sigma\ r^2 Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

$$= \frac{1}{V} \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{h/Cos\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^3 Sin\theta\ Cos\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi$$

$$= \frac{1}{V} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\ Cos\theta \left(\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^3 dr \right) d\theta \right) = \frac{2\pi}{V} \int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\ Cos\theta \left(\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^3 dr \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2V} \int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\ Cos\theta \left[r^4 \right]_{r=0}^{h/Cos\theta} d\theta = \frac{\pi}{2V} \int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta\ Cos\theta \frac{h^4}{Cos^4\theta} d\theta$$

$$= \frac{\pi h^4}{2V} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{Sin\theta}{Cos^3\theta} d\theta = \frac{\pi h^4}{2V} \int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta\ Sin\theta d\theta = -\frac{\pi h^4}{2V} \int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta\ (-Sin\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi h^4}{4V} \left[Cos^{-2}\theta \right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{\pi h^4}{4V} \left[\frac{1}{Cos^2\theta} \right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{\pi h^4}{4V} \left[\frac{1}{Cos^2\alpha} - 1 \right] = \frac{\pi h^4}{4V} \left(\frac{1 - Cos^2\alpha}{Cos^2\alpha} \right)$$

$$= \frac{\pi h^4}{4V} \left(\frac{Sin^2\alpha}{Cos^2\alpha} \right) \qquad \Rightarrow \qquad z_C = \frac{\pi h^4}{4V} Tan^2\alpha$$

لنحسب الآن حجم المخروط المصمت V كما يلي

$$V = \int_{(S)} dv = \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{h/Cos\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 Sin\theta\ dr\ d\theta\ d\varphi = \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^2 Sin\theta\ dr\ d\theta \right)$$

$$= 2\pi \int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta \left(\int_{r=0}^{h/Cos\theta} r^2\ dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \int_{\theta=0}^{\alpha} Sin\theta \left[r^3 \right]_{r=0}^{h/Cos\theta} d\theta = \frac{2\pi h^3}{3} \int_{\theta=0}^{\alpha} \frac{Sin\theta}{Cos^3\theta} d\theta$$

$$= \frac{2\pi h^3}{3} \int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta\ Sin\theta d\theta = -\frac{2\pi h^3}{3} \int_{\theta=0}^{\alpha} Cos^{-3}\theta\ (-Sin\theta) d\theta$$

$$= \frac{\pi h^3}{3} \left[Cos^{-2}\theta \right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{\pi h^3}{3} \left[\frac{1}{Cos^2\theta} \right]_{\theta=0}^{\alpha} = \frac{\pi h^3}{3} \left(\frac{1}{Cos^2\alpha} - 1 \right) = \frac{\pi h^3}{3} \left(\frac{1 - Cos^2\alpha}{Cos^2\alpha} \right)$$

$$= \frac{\pi h^3}{3} \frac{Sin^2\alpha}{Cos^2\alpha} = \frac{\pi h^3}{3} Tan^2\alpha = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

حيث أن $a = h\ Tan(\alpha)$ هو نصف قطر قاعدة المخروط. و بالتعويض في عبارة z_C الأخيرة, نجد أن

$$z_C = \frac{\pi h^4}{4\frac{\pi h^3}{3} Tan^2\alpha} Tan^2\alpha = \frac{3}{4}h$$

أي أن إحداثيات مركز كتلة المخروط هي $C\left(0,0,\frac{3}{4}h\right)$, و هذا يعني أن مركز كتلة المخروط الدوراني المصمت تقع على محور تناظر المخروط و تبعد عن رأس المخروط مسافة تساوي $\frac{3}{4}h$ وعن قاعدة المخروط مسافة تساوي $\frac{1}{4}h$ حيث أن h هو ارتفاع المخروط.

ملاحظة: يمكن حل المثال السابق باستخدام الإحداثيات الأسطوانية بعد ملاحظة ان حدود المخروط المصمت في هذه الحالة تعطى بالمتراجحات التالية

$$0 \le z \le h \quad \& \quad 0 \le \rho \le z\ Tan(\alpha) \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

أو بالمتراجحات التالية

$$0 \le \rho \le a = h\ Tan(\alpha) \quad \& \quad \frac{\rho}{Tan(\alpha)} \le z \le h \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

تمارين إضافية: عين مركز كتلة كلٍ من الأجسام التالية و ذلك بفرض أن كتلة كلٍ منها هي m

1. قبة كروية مصمتة متجانسة ارتفاعها h مقتطعة من كرة مصمتة نصف قطرها R, حيث أن $h \le R$, ثم استنتج مركز كتلة نصف الكرة المصمتة و مركز كتلة القبة الكروية في حال كانت $h \ge R$.
2. أسطوانة دائرية مصمتة متجانسة ارتفاعها h و نصف قطر قاعدتها a.