المعادلات التكاملية - مفاهيم أولية

تعاريف أولية:

المعادلة التكاملية: هي أي معادلة تظهر فيها الدالة المجهولة $u(x)$ تحت إشارة التكامل في المعادلة. و تعتبر المعادلة التالية أحد نماذج المعادلات التكاملية

$$u(x)=f(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}K(x,t)u(t)dt \qquad (1)$$

حيث أن $K(x,t)$, $f(x)$, $\beta(x)$, $\alpha(x)$ هي دوال معلومة, و ندعو $K(x,t)$ نواة المعادلة التكاملية و يطلب تعيين الدالة المجهولة $u(x)$.

تظهر المعادلات التكاملية عادةً في الدراسات الفيزيائية و الكيميائية و البيولوجية و التطبيقات الهندسية التي يمكن وضع نماذج رياضية لها موصوفة بمسائل قيم ابتدائية أو حدية.

مثال (1): لنعتبر مسألة القيمة الابتدائية التالية

$$u'(x)=2x\ u(x)\quad ;\quad x\geq 0 \qquad (2)$$

المزودة بالشرط الابتدائي

$$u(0)=1 \qquad (3)$$

يمكن بسهولة حل المعادلة (2) من خلال فصل المتحولات و استخدام الشرط الابتدائي. إلا أننا و بالمكاملة المباشرة لطرفي العلاقة (2) بعد تبديل الرمز x بالرمز t على المجال $[0,x]$ نجد أن

$$\int_0^x u'(t)dt=\int_0^x 2t\ u(t)dt \qquad (4)$$

و بتعويض الشرط الابتدائي تصبح المعادلة السابقة بالشكل

$$u(x)=1+\int_0^x 2t\ u(t)dt \qquad (5)$$

و هي معادلة مشابهة للمعادلة (1) فيها $\alpha(x)=0$ و $\beta(x)=x$ و $f(x)=1$ و $K(x,t)=2t$.

المعادلة التكاملية الخطية: نقول عن المعادلة التكاملية أنها خطية إذا و فقط إذا ظهرت الدالة المجهولة u تحت إشارة التكامل بشكلٍ خطي, أما إذا استبدلت الدالة المجهولة u بدوال من الشكل

$$u^2 \ , \ u^3 \ , \ \dots \ , \ Sin(u) \ , \ e^u \ , \ \dots \ etc$$

فإننا نقول أن المعادلة التكاملية غير خطية.

تنقسم المعادلات التكاملية الخطية بشكلٍ أساسي ضمن فئتين أساسيتين هما, معادلات فريدهولم (Fredholm) التكاملية ومعادلات فولتيرا (Volterra) التكاملية. إلا أننا سنميز أربع أصناف أخرى بالإضافة إلى الصنفين الأساسيين و هي

1. معادلات فريدهولم التكاملية
2. معادلات فولتيرا التكاملية
3. المعادلات التكاملية – التفاضلية
4. المعادلات التكاملية الشاذة
5. معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية
6. معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية – التفاضلية

و سنبين فيما يلي التعاريف و الخواص الأساسية لكل صنف من الأصناف السابقة.

معادلات فريدهولم التكاملية الخطية: نبين في العلاقة التالية الشكل القياسي لمعادلات فريدهولم التكاملية الخطية

$$\phi(x)\ u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\ u(t)dt \qquad (7)$$

حيث أن $a \le x,t \le b$ و حدود التكامل a و b هي ثوابت و λ هو وسيط في المعادلة.

معادلات فولتيرا التكاملية الخطية: يعطى الشكل القياسي لمعادلات فولتيرا التكاملية الخطية بالشكل

$$\phi(x)\ u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\ u(t)dt \qquad (8)$$

لاحظ أن معادلة فولتيرا هي حالة خاصة من معادلة فريدهولم التكاملية الخطية, و ذلك في حال اعتبرنا أن

$$K(x,t)=0\ ;\ x<t\le b$$

إن قيمة الدالة $\phi(x)$ في المعادلات السابقة تحدد الأصناف الإضافية التالية للمعادلات التكاملية الخطية وهي:

1. إذا كان $\phi(x)=0$, فإننا سنحصل على معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الأول و التي لها الشكل

$$f(x)+\lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)dt=0 \qquad (9)$$

و معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الأول و التي لها الشكل التالي

$$f(x)+\lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)dt=0 \qquad (10)$$

2. إذا كان $\phi(x)=1$, فإننا سنحصل على معادلة فريدهولم التكاملية الخطية من النوع الثاني و التي لها الشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda \int_a^b K(x,t)\, u(t)dt \qquad (11)$$

و معادلة فولتيرا التكاملية الخطية من النوع الثاني و التي لها الشكل

$$u(x)=f(x)+\lambda \int_a^x K(x,t)\, u(t)dt \qquad (12)$$

تعريف: نقول عن المعادلات التكاملية الخطية السابقة أنها متجانسة إذا و فقط إذا كانت $f(x)=0$. كما نقول أن المعادلات التكاملية شاذة إذا و فقط إذا كان التكامل الموجود ضمن المعادلة معتلاً.

المعادلات التكاملية – التفاضلية: و هي المعادلات التي يظهر فيها مشتق الدالة المجهولة في طرف من المعادلة و الدالة المجهولة في الطرف الآخر تحت إشارة التكامل. و يمكن لهذا النوع من المعادلات التكاملية أن تكون من نمط معادلات فريدهولم أو معادلات فولتيرا.

المعادلات التكاملية الشاذة: نقول عن معادلة تكاملية أنها شاذة إذا كان أحد حدود التكامل أو كليهما لانهاية, أو إذا كانت قيمة نواة المعادلة غير منتهية في نقطة أو أكثر من نقاط مجال التكامل. و تعتبر معادلة آبل (Abel)

$$x^2=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\, u(t)dt \qquad (13)$$

و معادلة آبل المعممة

$$x=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\alpha}}\, u(t)dt \quad ; \quad 0<\alpha<1 \qquad (14)$$

و معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الثاني ضعيفة الشذوذ

$$u(x)=1-2\sqrt{x}-\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\,u(t)dt \qquad (15)$$

أمثلة للمعادلات التكاملية الشاذة.

معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية: الشكل القياسي لهذه المعادلات هو من الشكل

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K_1(x,t)\,u(t)dt+\int_a^b K_2(x,t)\,u(t)dt \qquad (16)$$

معادلات فولتيرا – فريدهولم التكاملية – التفاضلية: و الشكل القياسي لهذه المعادلات هو

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\int_a^x K_1(x,t)\,u(t)dt+\int_a^b K_2(x,t)\,u(t)dt \qquad (17)$$

مثال (2): صنف المعادلات التكاملية التالية

$$u(x)=x-\frac{1}{6}x^3+\int_0^x (x-t)\,u(t)dt$$

$$u(x)=\frac{1}{2}+x-\int_0^x (x-t)\,u^2(t)dt$$

$$u'(x)=1-\frac{1}{3}x^3+\int_0^x t\,u(t)dt \quad ; \quad u(0)=0$$

$$u(x)=1+\int_0^x t\,u(t)dt+\int_0^\pi Sin(u(t))\,u(t)dt$$

حل المعادلة التكاملية:

نقول عن دالة $u(x)$ أنها حل لمعالة تكاملية إذا و فقط إذا حققت هذه المعادلة التكاملية.

مثال (3): أثبت أن الدوال المعطاة بجانب كل معادلة من المعادلة التكاملية التالية هي حل لها

$$u(x)=1+\int_0^x u(t)dt \quad ; \quad u(x)=e^x$$

$$u(x)=\frac{5}{6}x-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\int_0^x (x+t)\,u(t)dt \quad ; \quad u(x)=x$$

$$u'(x)=\frac{2}{3}+\int_0^1 t\,u(t)dt \quad ; \quad u(x)=x$$

$$u''(x)=e^x-\frac{4}{3}x+\int_0^1 x\,t\,u(t)dt \quad ; \quad u(x)=x+e^x$$

تمارين: عين قيم الثوابت a في المعادلات التكاملية التالية إذا علمت أن الدوال المعطاة بجانبها هي حلول لها

$$u(x)=1-a\int_0^x t\,u(t)dt \quad ; \quad u(x)=e^{-x^2}$$

$$u(x)=x^3-x^2-2x+a\int_{-1}^{1}\left(x\,t^2+x^2\,t\right)u(t)dt \quad ; \quad u(x)=x^2+x^3$$

تحويل معادلة فولتيرا إلى مسألة قيمة ابتدائية:

سنحتاج عند إجراء هذا التحويل لاستخدام قانون لبنتز التالي المستخدم في اشتقاق التكاملات

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}G(x,t)dt=G(x,\beta(x))\beta'(x)-G(x,\alpha(x))\alpha'(x)+\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}\frac{\partial G}{\partial x}dt \qquad (18)$$

مثال: أحسب المشتق $\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^2u(t)dt$ ؟

الحل: بملاحظة أن $\alpha(x)=0$ و $\beta(x)=x$ و $G(x,t)=(x-t)^2u(t)$, فإن $\alpha'(x)=0$ و $\beta'(x)=1$ و $\frac{\partial G}{\partial x}=2(x-t)u(t)$. و باستخدام قانون ليبنتز نجد أن

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^2u(t)dt=(x-x)^2u(x)\times 1-(x-0)^2u(0)\times 0+\int_0^x 2(x-t)u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^2u(t)dt=2\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

مثال: أحسب المشتق $\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)u(t)dt$ ؟

الحل: بنفس الأسلوب نجد أن

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)u(t)dt=(x-x)u(x)\times 1-(x-0)u(0)\times 0+\int_0^x u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)u(t)dt=\int_0^x u(t)dt$$

مثال: أحسب المشتق $\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt$ ؟

الحل: بنفس الأسلوب نجد أن

$$\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt = u(x)\times 1 - u(0)\times 0 + \int_0^x 0dt \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt = u(x)$$

تمارين: أحسب مشتقات التكاملات التالية بالنسبة للمتحول x

$$\int_0^x (x-t)^3 u(t)dt \quad , \quad \int_x^{x^2} e^{2t}dt \quad , \quad \int_0^x (x-t)^4 u(t)dt \quad , \quad \int_0^x Sin(x+t)dt$$

تجدر الملاحظة هنا إلى أنه يكفي لتحويل معادلة فولتيرا إلى معادلة تفاضلية, اشتقاق طرفي معادلة فولتيرا مرات متتالية حتى الحصول على معادلة تفاضلية صرفة (لا تحتوي على تكاملات). و للحصول على الشروط الابتدائية نقوم بتعويض $x=0$ في المعادلات الناتجة لنحصل على القيم الابتدائية للدالة u و مشتقاتها.

مثال: عين مسألة القيمة الابتدائية المكافئة لمعادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt$$

الحل: باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتحول x, نجد أن

$$u'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt \quad \Rightarrow \quad u'(x) = u(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) - u(x) = 0$$

و هي المعادلة التفاضلية المطلوبة. و لإيجاد الشرط الابتدائي الموافق للمعادلة التكاملية, نعوض $x=0$ في المعادلة التكاملية المعطاة لنجد أن

$$u(0) = 1 + \int_0^0 u(t)dt = 1 + 0 \quad \Rightarrow \quad u(0) = 1$$

و تصبح مسألة القيمة الابتدائية المكافئة بالشكل

$$u'(x) - u(x) = 0 \quad ; \quad u(0) = 1$$

مثال: عين مسألة القيمة الابتدائية المكافئة لمعادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x) = x + \int_0^x (t-x)u(t)dt$$

الحل: باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتحول x, نجد أن

$$u'(x)=1+\frac{d}{dx}\int_0^x (t-x)u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$u'(x)=1+(x-x)u(x)\times 1-(0-x)u(0)\times 0-\int_0^x u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$u'(x)=1-\int_0^x u(t)dt$$

وباشتقاق طرفي المعادلة الأخيرة مرة ثانية بالنسبة للمتحول x, نجد أن

$$u''(x)=0-\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)dt=u(x) \quad \Rightarrow \quad u''(x)-u(x)=0$$

و هي المعادلة التفاضلية المطلوبة. و لإيجاد الشروط الابتدائية الموافقة للمعادلة التكاملية, نعوض $x=0$ في المعادلة التكاملية المعطاة و المعادلة الناتجة عن الاشتقاق الأول, لنجد أن

$$u(0)=0+\int_0^0 (t-0)u(t)dt=0+0 \quad \Rightarrow \quad u(0)=0$$

$$u'(0)=1-\int_0^0 u(t)dt=1-0 \quad \Rightarrow \quad u'(0)=1$$

و تصبح مسألة القيمة الابتدائية المكافئة بالشكل

$$u''(x)-u(x)=0 \quad ; \quad u(0)=0 \ , \ u'(0)=1$$

مثال: عين مسألة القيمة الابتدائية المكافئة لمعادلة فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x)=x^3+\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

الحل: باشتقاق طرفي المعادلة ثلاث مرات متتالية بالنسبة للمتحول x كما فعلنا سابقاً, نجد أن

$$u'(x)=3x^2+2\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u''(x)=6x+2\int_0^x u(t)dt$$

$$u'''(x)=6+2u(x)$$

و لإيجاد الشروط الابتدائية الموافقة للمعادلة التكاملية, نعوض $x=0$ في عبارات u و u' و u'' لنجد أن

$$u(0)=u'(0)=u''(0)=0$$

و تصبح مسألة القيمة الابتدائية المكافئة بالشكل

$$u'''(x)-2u(x)-6=0 \quad ; \quad u(0)=u'(0)=u''(0)=0$$

تمارين: عين مسائل القيم الابتدائية المكافئة لمعادلات فولتيرا التكاملية التالية

$$u(x)=1+x+\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \quad , \quad u(x)=e^x-\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(x)=x+\int_0^x (x-t)u(t)dt \quad , \quad u(x)=x-Cos(x)-\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$u(x)=2+3x+5x^2+\int_0^x \left[1+2(x-t)\right]u(t)dt \quad , \quad u(x)=-5+6x+\int_0^x (5-6x+6t)u(t)dt$$

$$u(x)=Tan(x)-\int_0^x u(t)dt \quad ; \quad x<\pi/2$$

$$u(x)=1+x+\frac{5}{2}x^2+\int_0^x \left[3+6(x-t)-\frac{5}{2}(x-t)^2\right]u(t)dt$$

$$u(x)=x^4+x^2+2\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \quad , \quad u(x)=x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 u(t)dt$$

تحويل مسألة قيمة ابتدائية إلى معادلة فولتيرا:

سنحتاج عند إجراء هذا التحويل لاستخدام صيغة التحويل التكاملي التالية التي يمكن من خلالها تحويل أي تكامل مضاعف إلى تكامل محدد وحيد

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n\cdots dx_2dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad (19)$$

و ذلك بفرض ان التكامل الموجود في الطرف الأيسر من العلاقة السابقة مضاعف n مرة. و باستخدام العلاقة السابقة و بوضع $x_1=x_2=\cdots=x_n=t$ سنجد مثلاً أن

$$\int_0^x\int_0^t f(t)dtdt=\int_0^x (x-t)f(t)dt$$

$$\int_0^x\int_0^t\int_0^t f(t)\,dt\,dt\,dt=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$$

حيث سنقوم باستخدام هاتين العلاقتين بشكل متكرر في الأمثلة اللاحقة (أثبت صحة هاتين العلاقتين؟).

لتحويل مسألة قيمة إبتدائية بمعادلة تفاضلية خطية من المرتبة n من الشكل

$$\begin{cases} y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_1(x)\,y'(x)+a_0(x)\,y(x)=b(x) \\ y(0)=c_0\ ,\ y'(0)=c_1\ ,\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(0)=c_{n-1} \end{cases}$$

إلى معادلة تكاملية, نقوم بفرض أن أعلى مرتبة اشتقاق في المعادلة التفاضلية هو الدالة u, أي أن

$$y^{(n)}(t)=u(t) \tag{20}$$

و بالتالي يكون علينا إيجاد صيغ مناسبة للدالة y و مشتقاتها على شكل تكامل محدد وحيد يحتوي الدالة u, و يتم ذلك ببساطة من خلال مكاملة طرفي العلاقة (20) بين الحدين 0 و x لنحصل على صيغة تكاملية للمشتق $y^{(n-1)}(x)$. ثم نقوم من جديد بمكاملة العلاقة الناتجة و نستمر بذلك حتى نحصل على صيغة تاكملية للدالة y. أخيراً نعوض جميع الصيغ التكاملية التي قد حصلنا عليها للدالة y و مشتقاتها في المعادلة التفاضلية المعطاة لنحصل على المعادلة التكاملية المطلوبة.

مثال: عين المعادلة التكاملية المكافئة لمسألة القيمة الابتدائية التالية

$$\begin{cases} y'''(x)+p(x)\,y''(x)+q(x)\,y'(x)+r(x)\,y(x)=g(x) \\ y(0)=\alpha\ ,\ y'(0)=\beta\ ,\ y''(0)=\gamma \end{cases}$$

الحل: نفرض أن

$$y'''(x)=u(x) \tag{21}$$

باستبدال المتحول x بالمتحول t في العلاقة السابقة, و المكاملة بين الحدين 0 و x نجد أن

$$\int_0^x y'''(t)\,dt=\int_0^x u(t)\,dt \quad\Rightarrow\quad y''(x)-y''(0)=\int_0^x u(t)\,dt \quad\Rightarrow$$

$$y''(x)=\gamma+\int_0^x u(t)\,dt \tag{22}$$

و باستبدال المتحول x بالمتحول t في العلاقة السابقة, و المكاملة من جديد بين الحدين 0 و x نجد أن

$$\int_0^x y''(t)dt = \int_0^x \left[\gamma + \int_0^t u(t)dt \right] dt \quad \Rightarrow \quad y'(x) - y'(0) = \gamma x + \int_0^x \int_0^t u(t)dtdt \quad \Rightarrow$$

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_0^x \int_0^t u(t)dtdt \tag{23}$$

و باستبدال المتحول x بالمتحول t في العلاقة السابقة, و المكاملة من جديد بين الحدين 0 و x نجد أن

$$\int_0^x y'(t)dt = \int_0^x \left[\beta + \gamma t + \int_0^t \int_0^t u(t)dtdt \right] dt \quad \Rightarrow$$

$$y(x) - y(0) = \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \int_0^x \int_0^t \int_0^t u(t)dtdtdt \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \int_0^x \int_0^t \int_0^t u(t)dtdtdt \tag{24}$$

و باستبدال التكاملات المضاعفة في العلاقات (23) و (24) بما يساويها من التكاملات المحددة حسب صيغة التحويل التكاملي (19), نجد أن

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_0^x (x-t)u(t)dt$$

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt$$

بتعويض العلاقتين الأخيرتين بالإضافة للعلاقتين (21) و (22) في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن

$$u(x) + p(x)\left[\gamma + \int_0^x u(t)dt \right] + q(x)\left[\beta + \gamma x + \int_0^x (x-t)u(t)dt \right] +$$

$$+ r(x)\left[\alpha + \beta x + \frac{1}{2}\gamma x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 u(t)dt \right] = g(x)$$

و التي تعطي بعد الإصلاح و التجميع المعادلة التكاملية المكافئة المطلوبة التالية

$$u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

حيث أن

$$f(x)=g(x)-\gamma p(x)-\beta q(x)-\alpha r(x)-\gamma x q(x)-r(x)\left(\beta x+\frac{1}{2}\gamma x^{2}\right)$$

$$K(x,t)=p(x)+q(x)(x-t)+\frac{1}{2}r(x)(x-t)^{2}$$

تمارين: حول مسائل القيم الابتدائية التالية إلى معادلات تكاملية

$$y'''(x)+-3y''(x)-6y'(x)+5y(x)=0 \quad ; \quad y''(0)=y'(0)=y(0)=1$$

$$y''(x)+y(x)=Cos(x) \quad ; \quad y'(0)=1\,,\; y(0)=0$$

تحويل مسألة قيم حدية إلى معادلة فريدهولم:

سنحاول شرح هذه الطريقة من خلال المثال التالي الذي سنقوم من خلاله بإيجاد معالة فريدهولم التكاملية المكافئة لمسألة القيم الحدية التالية

$$y''(x)+y(x)=x \quad ; \quad y(0)=1\,,\; y(\pi)=\pi-1 \qquad (25)$$

و ذلك ضمن المجال $0<x<\pi$. لنفرض أولاً أن

$$y''(x)=u(x) \qquad (26)$$

و بمكاملة طرفي العلاقة السابقة بين الحدين 0 و x, نجد أن

$$\int_0^x y''(t)dt=\int_0^x u(t)dt \quad \Rightarrow \quad y'(x)-y'(0)=\int_0^x u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$y'(x)=y'(0)+\int_0^x u(t)dt \qquad (27)$$

المسألة الأساسية هنا هو تعيين قيمة $y'(0)$ لكونها غير معطاة ضمن شروط المسألة, و التي سنقوم بتعيينها لاحقاً على كل حال باستخدام الشرط الحدي في الموضع $x=\pi$.

و بمكاملة طرفي العلاقة (27) بين الحدين 0 و x, نجد أن

$$\int_0^x y'(t)dt=y'(0)x+\int_0^x\int_0^t u(t)dtdt \quad \Rightarrow \quad y(x)-y(0)=y'(0)x+\int_0^x (x-t)u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$y(x)=1+x\ y'(0)+\int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{28}$$

بوضع $x=\pi$ في المعادلة السابقة, نجد أن

$$y(\pi)=1+\pi y'(0)+\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt \quad \Rightarrow \quad \pi-1=1+\pi y'(0)+\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$y'(0)=\frac{1}{\pi}\left[\pi-2-\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right] \tag{29}$$

بالتعويض في العلاقتين (27) و (28), نجد أن

$$y'(x)=\frac{1}{\pi}\left[\pi-2-\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right]+\int_0^x u(t)dt$$

$$y(x)=1+\frac{x}{\pi}\left[\pi-2-\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right]+\int_0^x (x-t)u(t)dt$$

و بتعويض هاتين العلاقتين مع العلاقة (26) في مسألة القيم الحدية المعطاة (25), نجد أن

$$u(x)+1+\frac{x}{\pi}\left[\pi-2-\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt\right]+\int_0^x (x-t)u(t)dt=x \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
u(x)&=\frac{2}{\pi}x-1+\frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\pi-t)u(t)dt-\int_0^x (x-t)u(t)dt\\
&=\frac{2x-\pi}{\pi}+\int_0^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi}u(t)dt-\int_0^x (x-t)u(t)dt\\
&=\frac{2x-\pi}{\pi}+\int_0^x \frac{x(\pi-t)}{\pi}u(t)dt+\int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi}u(t)dt-\int_0^x (x-t)u(t)dt\\
&=\frac{2x-\pi}{\pi}+\int_0^x \frac{t(\pi-x)}{\pi}u(t)dt+\int_x^\pi \frac{x(\pi-t)}{\pi}u(t)dt \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$u(x)=\frac{2x-\pi}{\pi}+\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

حيث أن

$$K(x,t)=\begin{cases}\dfrac{t(\pi-x)}{\pi} & ;\quad 0\le t\le x\\[2ex] \dfrac{t(\pi-x)}{\pi} & ;\quad x\le t\le \pi\end{cases}$$

تجدر الملاحظة هنا إلى أن حل مسائل القيم الحدية أسهل بكثير من حل معادلات فريدهولم التكاملية المكافئة لها. لذلك لن نهتم بتحويل مسائل القيم الحدية إلى معادلات فريدهولم التكاملية, إلا أنه من الأسهل في معظم الأحيان حل معادلات فولتيرا التكاملية الناتجة عن مسائل القيم الابتدائية المكافئة لها.

تمارين: عين معادلات فريدهولم التكاملية المكافئة لمسائل القيم الحدية التالية

$$y'' + 4y = Sin(x) \quad ; \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$y'' + 2xy = 1 \quad ; \quad y(0) = y(1) = 0$$

$$y'' + y = x \quad ; \quad y(0) = 1 \, , \, y(1) = 0$$

$$y'' + y = x \quad ; \quad y(0) = 1 \, , \, y'(1) = 0$$

ملاحظة: سنقدم خلال هذه الدراسة طريقتين لحل العديد من المعادلات التكاملية, حيث تقدم هاتين الطريقتين الحل على شكل متسلسلات قوى أو متسلسلات هندسية غير منتهية. لذلك سيكون من المفيد مراجعة أبحاث متسلسلات القوى (منشور تايلور) و المتسلسلات الهندسية.