أولاً: الفضاءات المتريَّة (*Metric Spaces*)

١-١. تعاريف:

لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير خالية، ولتكن: $d : \mathbb{X}\times\mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ دالة حقيقيَّة بمتغيرين.

$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

- نسمي d نصفَ مسافةٍ (شبهَ مسافةٍ) على $\mathbb{X}$ إذا حقَّقت الشروط التالية أياً كانت x,y,z من $\mathbb{X}$:

$$1.\, d(x,y) = d(y,x) \geq 0 \quad , \quad 2.\, d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad , \quad 3.\, d(x,x) = 0$$

- نسمِّي d مسافةً (متركاً) على $\mathbb{X}$ إذا حقَّقت إضافةً للشروط السابقة الشرط:

$$4.\, d(x,y) = 0 \;;\; x = y \;:\; \forall x,y \in \mathbb{X}$$

- نسمِّي d فوقَ مسافةٍ ($ultra$ – مسافة) على $\mathbb{X}$ إذا حققت إضافةً للشروط السابقة الشرط:

$$5.\, d(x,y) \leq \max\big(d(x,z), d(z,y)\big) \;:\; \forall x,y,z \in \mathbb{X}$$

نسمِّي الثنائية $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً نصفَ متري إذا كانت d نصف مسافةٍ على $\mathbb{X}$ ، ونسميها فضاءً مترياً إذا كانت d مسافةً على $\mathbb{X}$ ، ونسميها فضاءً فوقَ متري (*Ultrametric Space*) إذا كانت d فوقَ مسافةٍ على $\mathbb{X}$.

وهكذا نلاحظ أنَّ كل فضاءٍ فوقَ متري هو فضاءٌ متري، وكل فضاءٍ متري هو فضاءٌ نصفُ متري.

١-٢. أمثلة:

١-٢-١. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$، ولنأخذ $d(x,y) = |x^2 - y^2|$، فنلاحظ أنَّ d نصفُ مسافةٍ على $\mathbb{X}$ (برِّر)، ولكنها ليست مسافةً عليها، فلو أخذنا أي عنصرين متناظرين، مثل $x = a,\; y = -a$ بحيث $a \neq 0$، لوجدنا أنَّ $d(x,y) = 0$ ولكنَّ $x \neq y$. أي أنَّ الشرط 4 غير محقق.

١-٢-٢. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$، ولنأخذ $d(x,y) = |x - y|$، فنلاحظ أنَّ d نصفُ مسافةٍ على $\mathbb{X}$ وأيضاً مسافة عليها (برِّر)، إلَّا أنَّها ليست فوقَ مسافةٍ على $\mathbb{X}$، فلو أخذنا مثلاً $x = 1, y = 4, z = 3$ لوجدنا أنَّ:

$$d(x,y) = 3 \nleq \max\big(d(x,z), d(z,y)\big) = 2$$

أي أنَّ الشرط 5 غير محقق.

١-٢-٣. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$، ولنعرف عليها مسافةً d بالشكل التالي:

$$\forall x,y \in \mathbb{X} : d(x,y) = \begin{cases} 1 & : x \neq y \\ 0 & : x = y \end{cases}$$

فنلاحظ أنَّ d فوق مسافةٍ على $\mathbb{X}$ (برِّر)، فهي مسافة وتسمَّى المسافة المتقطِّعة على $\mathbb{X}$.

١-٢-٤. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$، ولنعرف عليها الدالة $|\,.\,|_2$ على النحو التالي:

$$|\,.\,|_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto |x|_2 = 2^{-\alpha} \quad : |x| = r.2^{\alpha}$$

بحيث r عدد طبيعي فردي و α عدد صحيح موجب. وسنضع: $|0|_2 = 0$.

مثال: أوجد $|16|_2$, $|98|_2$

$$98 = 49 \times 2^1 \Rightarrow |98|_2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$16 = 1 \times 2^4 \Rightarrow |16|_2 = 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$$

إنَّ $|\,.\,|_2$ فوق مسافة على $\mathbb{Z}$. أي أنَّ:

$$d_2(x,y) = |x-y|_2 = 2^{-\alpha} \quad : |x-y| = r.2^{\alpha} \quad ,x,y \in \mathbb{Z}$$

فوق مسافة على $\mathbb{Z}$ ، فهي مسافة. لاحظ أنَّ: $x \in \mathbb{Z}$: $d_2(x,x) = 0$.

١-٢-٥. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$، ولنعرِّف الدالَّة $|\,.\,|_2$ على النحو التالي:

$$|\,.\,|_2 : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
$$x \longmapsto |x|_2 = 2^{-\alpha} \quad : |x| = \frac{r}{s}.2^{\alpha}$$

بحيث r,s عددان طبيعيان فرديان أوليان فيما بينهما و α عدد صحيح موجب. وسنضع $|0|_2 = 0$.

مثال: أوجد $\left|\frac{450}{1418}\right|_2$, $|17|_2$

$$17 = 17 \times 2^0 \Rightarrow |17|_2 = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} = 1$$
$$\frac{450}{1418} = \frac{2.225}{2.405} = \frac{225}{405} \times 2^0 \Rightarrow \left|\frac{450}{1418}\right|_2 = 2^0 = 1$$

إنَّ $|\,.\,|_2$ فوق مسافةٍ على $\mathbb{Q}$. أي أنَّ:

$$d_2(x,y) = |x-y|_2 = 2^{-\alpha} \quad : |x-y| = \frac{r}{s}.2^{\alpha} \quad ,x,y \in \mathbb{Q}$$

فوق مسافة على $\mathbb{Q}$، فهي مسافة.

ملاحظة: من أجل $p = 3$ نعرف الدالة $|\,.\,|_3$ كما يلي:

$$\forall x \in \mathbb{Q} \; ; \; |x|_3 = 3^{-\alpha} \quad : |x| = \frac{r}{s}.3^{\alpha}$$

بحيث r,s عددان طبيعيان، أوليان فيما بينهما و كل منهما لا يقبل القسمة على 3.

وبالأسلوب نفسه نعرف المسافة لأجل بقية الأعداد الأولية p.

ملاحظة: من أجل أي عدد أولي p يكون الفضاء $(\mathbb{Q}, d_p)$ فضاء فوق متري (وغير تام).

١-٣. تذكرة:

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً و $r > 0$ عدداً حقيقياً و $a \in \mathbb{X}$، عندئذٍ نسمّي المجموعة:

$B(a,r) = \{x \in \mathbb{X} : d(x,a) < r\}$ **كرةً مفتوحةً** مركزها a ونصف قطرها r. (وقد يرمز لها أيضاً $N(a,r)$).

ونسمّي المجموعة $\bar{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{X} : d(x,a) \le r\}$ **كرةً مغلقةً** مركزها a ونصف قطرها r.

أما المجموعة $S(a,r) = \{x \in \mathbb{X} : d(x,a) = r\}$ فنسمّيها **كرةً** (أو قشرةً كرويَّة) مركزها a ونصف قطرها r.

ونسمّي **مجموعةً مفتوحة** كل مجموعةٍ يمكن أن تكتب على شكل اتحادٍ لكرات مفتوحة، ونسمّي **مجموعةً مغلقة** كل مجموعةٍ متممتها مجموعة مفتوحة.

١-٤. تمرين هام:

أثبت أنَّ $d_2(x,y)=|x-y|_2$ مسافةً فوق مترية على $\mathbb{Z}$. وأنَّ كُلَّ كرةٍ مفتوحة في الفضاء فوق المتري $(\mathbb{Z},d_2)$ تقبلُ مركزاً لها أية نقطةٍ من نقاطها، كما أنها ستكون مجموعةً مفتوحة ومغلقة في آنٍ معاً.

- **توجيه:** يُساعدكُ في إثبات ذلك أن تثبت صحة الخواص التالية:

$$|z|_2=0 \Leftrightarrow z=0\ ,\quad |z.z'|_2=|z|_2\,.|z'|_2\ ,\quad |z+z'|_2\le max(|z|_2\,,|z'|_2)$$

والعلاقة الأخيرة تصبح مساواة عندما $|z|_2\neq|z'|_2$.

نتيجة هامة: كُلُّ كرةٍ مفتوحةٍ في فضاءٍ فوقَ متري تكون مجموعةً مفتوحةً ومغلقةً في آنٍ معاً، وتقبلُ أية نقطةٍ من نقاطها مركزاً لها.

١-٥. مبرهنة هامة:

١. إنَّ أية مجموعة مغلقة في فضاءٍ متري هي تقاطع لمتتالية متناقصة من المجموعات المفتوحة.

٢. إنَّ أية مجموعة مفتوحة في فضاءٍ متري هي اتحاد لمتتالية متزايدة من المجموعات المغلقة.

١-٦. الفضاء المتري التام: (*Complete metric space*)

نقولُ عن فضاءٍ متري إنَّه فضاءٌ تام إذا كانت كل متتالية لكوشي من عناصره متقاربةً فيه.

أمثلة:

١. الفضاء $(\mathbb{Q},d)$ فضاءٌ غير تام، حيثُ d هي مقصور المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$ على $\mathbb{Q}$.

٢. الفضاء $(\mathbb{R},d)$ فضاءٌ تام.

٣. الفضاء $(\mathcal{C}[a,b],d_\infty)$ فضاءٌ تام، حيثُ:

$$d_\infty(f,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|\quad ,f,g\in\mathcal{C}[a,b]$$

بينما الفضاء $(\mathcal{C}[0,1],d_1)$ غيرُ تام، حيثُ:

$$d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|\;.dx\quad : x\in[0,1]\ \ ,f,g\in\mathcal{C}[0,1]$$

(برِّر ذلك). (استفد من معلوماتك في التحليل الدالي (١))

ملاحظة: كل فضاء متري غير تام يُمكن إتمامه. فمتمم الفضاء $\mathbb{Q}$ هو الفضاء $\mathbb{R}$، ومتمم الفضاء $(\mathcal{C}[0,1],d_1)$ هو الفضاء $\mathcal{L}^1[a,b]$ فضاء الدوال الكمولة لوبيغيّاً.

١-٧. مبرهنة بير (*Baire Theorem*):

ليكن $(\mathbb{X},d)$ فضاءً مترياً **تامّاً**، ولتكن $\{\mathcal{O}_n\}_{n\ge1}$ متتالية من المجموعات الجزئية من $\mathbb{X}$ والتي كل منها مفتوحة وكثيفة في $\mathbb{X}$. عندئذٍ فإنَّ: $\bigcap_{n\ge1}\mathcal{O}_n$ كثيفة في $\mathbb{X}$. **(أثبت صحة هذه المبرهنة).**

- تذكَّر أنَّنا نقول عن مجموعة $\mathcal{O}$ من فضاء متري $(\mathbb{X},d)$ إنَّها كثيفة في $\mathbb{X}$ إذا كان تقاطع $\mathcal{O}$ مع أية مجموعة مفتوحة (أساسية) في $\mathbb{X}$ وغير خالية ليس خالياً. (وهذا يُكافئ أنَّ $\bar{\mathcal{O}}=\mathbb{X}$ برّر ذلك).

١–٨. تتمات وتمارين:

١–٨–١. (بعد نقطة عن مجموعة):

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً و $a \in \mathbb{X}$ و B مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$، نعرِّف البعد بين النقطة a والمجموعة B كما يلي:

$$d(a, B) = \inf \{d(a, b) \ : b \in B\}$$

تطبيق(١): خُذ $\mathbb{X} = \mathbb{R}^3$، $a = (1,2,3)$ و B مجموعة نقاط المستقيم: $D : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{3}}$ ، احسب $d(a, B)$.

تطبيق(٢): خُذ $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$، $a = (0,1)$ و A مجموعة نقاط الدائرة: $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ،

احسب $d(a, A)$. ثُمَّ كيف نُنشئ مماساً للدائرة السابقة C من النقطة a؟ وما هو طول هذا المماس؟

١–٨–٢. (المسافة بين مجموعتين):

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً، ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، نعرِّف المسافة بين هاتين المجموعتين كما يلي:

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b) \ : a \in A \,, b \in B\}$$

تطبيق: لتكن A مجموعة نقاط المستقيم المار من النقطة $a = (0,1)$ والموازي لمنصِّف الربع الأول، و B هي مجموعة نقاط الدائرة $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ ، احسب $d(A, B)$.

١–٨–٣. (قطر مجموعة):

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً ولتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ وغير خالية، عندئذٍ نعرّف قطر المجموعة A بأنَّه:

$$\delta(\mathrm{A}) = \sup \{d(x, y) \ : x, y \in A\}$$

تطبيق: ما هو قطر القطع الناقص: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ : a > b$ ؟

١–٨–٤. (المجموعة المحدودة):

ليكن $(\mathbb{X}, d)$ فضاءً مترياً ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية منه، نقول عن A إنَّها محدودة في الفضاء $(\mathbb{X}, d)$ إذا كان $\delta(\mathrm{A}) < \infty$. وهذا يكافئ أنَّ A ستكون محتواة في كرة مفتوحة.

تمرين: أثبت أنَّ: $\delta(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. ماذا تستنتج؟

حيثُ A, B مجموعات جزئية محدودة من فضاء متري $(\mathbb{X}, d)$.

- قُم بحل جميع التمارين السابقة وإثبات ما ورد من مبرهنات.
- ابحث في الإنترنت عن *metric space , ultrametric space* (انظر ويكيبيديا).

ثانياً: التراص ($compactness$)

٢-١. تمهيد:

٢-١-١. التغطية، التغطية المفتوحة (*Cover, Open Cover*):

لتكن $\mathbb{X}$ مجموعةً غير خالية و $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in L}$ جماعةً من أجزائها، نقول عن هذه الجماعة إنَّها تغطيةٌ للمجموعة الجزئية K من $\mathbb{X}$ إذا تحقق: $K \subseteq \bigcup_{\alpha\in L} \mathcal{O}_\alpha$.

ثم إذا كانت $\mathbb{X}$ مزودة بطُبولوجيا τ فسنقول عن تغطيةٍ إنَّها تغطيةٌ مفتوحة إذا كان كل عنصر من عناصر هذه التغطية مجموعة مفتوحة.

٢-١-٢. التغطية المنتهية (*Finite Cover*):

إذا كانت $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in L}$ تغطية لمجموعة K فسنقول إنَّه يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية منها، إذا تحقق الآتي:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in L : K \subseteq \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_i}$$

٢-١-٣. خاصية التقاطع المنتهي (*Finite Intersection Property*):

لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير خالية و $\{F_\alpha\}_{\alpha\in L}$ جماعة من أجزائها، نقول عن هذه الجماعة إنَّها تتمتع بخاصية التقاطع المنتهي (أو إنَّها جماعة متمركزة) إذا كان تقاطع أية جماعة جزئية منتهية منها ليس خالياً، أي إذا تحقق الآتي:

$$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in L : F_{\alpha_1} \cap F_{\alpha_2} \cap \dots \cap F_{\alpha_n} = \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$$

وينتج عن ذلك أنَّه إذا كانت $\{F_\alpha\}_{\alpha\in L}$ جماعة متمتِّعة بخاصيَّة التقاطع المنتهي فإنَّ $F_\alpha \neq \emptyset$ وذلك أياً كانت α من L.

٢-١-٤. أمثلة:

١. ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، و a نقطةً من $\mathbb{X}$ وَ $\mathcal{O}_a$ جواراً لـ a، إنَّ الجماعة $\{\mathcal{O}_a\}_{a\in\mathbb{X}}$ تغطية للمجموعة $\mathbb{X}$.

٢. لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية، إنَّ الجماعة $\{B_p = [p, p+1] : p \in \mathbb{Q}\}$ تغطية للمجموعة $\mathbb{R}$، والجماعة $\{B_n = [n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$ تغطية جزئية منها.

٣. لنأخذ المجال $A =]0,1[$، إنَّ الجماعة $\left\{G_n = \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right[\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ تشكل تغطية مفتوحة للمجموعة A.

٤. لنأخذ الصف التالي من المجموعات المفتوحة في $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \left\{]0,1[, \left]0, \frac{1}{2}\right[, \left]0, \frac{1}{3}\right[, \dots\dots \right\} = \left\{A_n = \left]0, \frac{1}{n}\right[: n \in \mathbb{N}\right\}$$

إنَّ الصف $\mathcal{A}$ يتمتَّع بخاصية التقاطع المنتهي لأنَّ:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{N} :]0, a_1[\cap]0, a_2[\cap \dots\dots \cap]0, a_m[=]0, b[\neq \emptyset$$

حيث أنَّ: $b = min\{a_1, a_2, \dots, a_m\} > 0$. وبالتالي لأية جماعة جزئية منتهية تقاطع غير خالٍ.

٢-٢. الفضاء المتراص (*Compact Space*):

٢-٢-١. تعريف الفضاء المتراص:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، نقول عن هذا الفضاء إنَّه متراص إذا تحقق أحد الشروط الآتية المتكافئة:

١. من أية تغطية مفتوحة للمجموعة $\mathbb{X}$ يمكن استخراج تغطية جزئية منتهية للمجموعة $\mathbb{X}$.

٢. من أية شبكة (متتالية معممة) من عناصر $\mathbb{X}$ يمكن استخراج شبكة فرعية متقاربة.

٣. لأية شبكة (متتالية معممة) من عناصر $\mathbb{X}$ قيمة ملاصقة.

٤. كل مرشّحة أعظمية في الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ لها قيمة ملاصقة.

٥. لأية جماعة من المجموعات المغلقة في $\mathbb{X}$ والمتمتِّعة بخاصية التقاطع المنتهي تقاطع غير خالٍ. (أي أنَّه إذا كانت $\{F_\alpha\}_{\alpha\in L}$ جماعة من المجموعات المغلقة في $\mathbb{X}$ تتمتع بخاصية التقاطع المنتهي فإنَّ: $\bigcap_{\alpha\in L} F_\alpha \neq \emptyset$).

٢-٢-٢. تعريف المجموعة المتراصَّة:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{X}$، نقول عن المجموعة A إنَّها متراصة إذا كان الفضاء (A,τ_A) متراصَّاً.

لاحظ أنَّ الشرط اللازم والكافي لكي تكون الجماعة $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in L}$ من المجموعات المفتوحة في $\mathbb{X}$ تغطية مفتوحة للمجموعة A هو أن تكون الجماعة $\{A\cap\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha\in L}$ من المجموعات المفتوحة في A تغطية مفتوحة للفضاء (A,τ_A). **ماذا تستنتج؟**

٢-٢-٣. مبرهنة: إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً متوراً فإنَّ كل مجموعة متراصة تكون مغلقة ومحدودة.

إنَّ عكسَ هذه المبرهنة ليس صحيحاً بالضرورة، والمبرهنة الهامة التالية تقدِّمُ الشرطَ اللازم والكافي حتى يكون العكس صحيحاً.

٢-٢-٤. مبرهنة هاين – بوريل (*Heine – Borel*):

الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة ما في فضاءٍ منظَّمٍ منتهي البعد متراصة هو أن تكون مغلقة ومحدودة فيه.

لاحظ أنَّ الفضاء $\mathbb{R}^n$، حيثُ: $n \geq 1$، هو فضاءٌ منظمٌ منتهي الأبعاد، وعليه، تكون المجموعة $K\subseteq\mathbb{R}^n$ متراصَّةً إذا وفقط إذا كانت مغلقةً ومحدودة.

نتيجة: كل مجال مغلق ومحدود في $\mathbb{R}$، مثل $[a,b]$، يكون مجموعة متراصَّة.

٢-٢-٥. أمثلة:

١. لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير خالية، ولنزودها بالطُبولوجيا المتقطعة $\tau = \mathcal{P}(\mathbb{X})$، إذا كانت $\mathbb{X}$ منتهية فإنَّ الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ يكون متراصَّاً، ذلك أنَّ أية مجموعة منتهية تكون متراصَّة. أما إذا كانت $\mathbb{X}$ غير منتهية فإنَّ الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ لن يكون متراصَّاً، لأنَّ التغطية المفتوحة $\{\{a\} : a\in\mathbb{X}\}$ لـ $\mathbb{X}$ ، مثلاً، لا يمكن أن يُستخرج منها أية تغطية جزئية منتهية لـ $\mathbb{X}$.

٢. لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير خالية، ولنزودها بالطُبولوجيا التافهة $\tau = \{\mathbb{X},\emptyset\}$، عندئذٍ يكون الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ متراصَّاً، لأنَّ أية تغطية مفتوحة لـ $\mathbb{X}$ لا بُدَّ أن تكون من الشكل $\{\mathbb{X}\}$، وهي تغطية منتهية بحد ذاتها.

٣. لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير منتهية، ولنزودها بطُبولوجيا المتممات المنتهية:$\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{X} \ : |\mathbb{X} - A| < \infty\}$
حيث نقصد بـ $|\mathbb{X} - A|$ عِدَّة المجموعة $\mathbb{X} - A$، فنجد أنَّ الفضاء الناتج $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءٌ متراص، إذ أنَّه لو كانت $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ أية تغطية مفتوحة للمجموعة $\mathbb{X}$، وأخذنا أي عنصرٍ من هذه التغطية مختلفٍ عن $\emptyset$ وليكن $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ فإنَّ المجموعة الجزئية $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ تحوي جميع نقاط $\mathbb{X}$ باستثناء عددٍ منتهٍ منها، ولتكن هذه النقاط هي: $x_1, x_2, x_3, \dots \dots, x_n$
لما كانت $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ تغطية مفتوحة للمجموعة $\mathbb{X}$ فإنَّ كل نقطة من $\mathbb{X}$ تنتمي إلى واحد على الأقل من عناصر هذه التغطية، وبالتالي ثمَّة عناصر: $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \mathcal{O}_{\alpha_3}, \dots \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}$ من التغطية $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ بحيث تكون:

$$x_1 \in \mathcal{O}_{\alpha_1}, x_2 \in \mathcal{O}_{\alpha_2}, x_3 \in \mathcal{O}_{\alpha_3}, \dots \dots, x_n \in \mathcal{O}_{\alpha_n}$$

لذا فإنَّ:

$$\mathbb{X} = \boldsymbol{\mathcal{O}_{\alpha_0}} \cup \mathcal{O}_{\alpha_1} \cup \mathcal{O}_{\alpha_2} \cup \mathcal{O}_{\alpha_3} \cup \dots \dots \cup \mathcal{O}_{\alpha_n}$$

وهكذا فإنَّ الجماعة: $\{\mathcal{O}_{\alpha_0}, \mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}, \mathcal{O}_{\alpha_3}, \dots \dots, \mathcal{O}_{\alpha_n}\}$ تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الكيفية $\{\mathcal{O}_\alpha\}_{\alpha \in L}$ ، وبذلك نجد أنَّ الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءٌ متراص بالفعل.

٤. لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مزوَّدةً بطُبولوجيا المتممات المنتهية τ_{c_f}، فنجد أنَّ الفضاء الناتج $\left(\mathbb{R}, \tau_{c_f}\right)$ فضاءٌ متراص بالاستناد للمثال السابق.

٥. لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مزوَّدةً بالطُبولوجيا المألوفة، ولتكن $A =]0,1[$، إنَّ المجموعة A ليست متراصَّة في هذا الفضاء وذلك لأنَّها ليست مغلقة.(أو بملاحظة أنَّ الجماعة $\left\{ \left]\frac{1}{n}, 1\right[\ : n \geq 1 \right\}$ ، مثلاً، تغطية لـ A ولكن أية جماعة جزئية منتهية منها ليست تغطية لـ A).

٢-٢-٦. مبرهنة:

إذا كان $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً وكانت $\{K_i\}_{1 \leq i \leq n}$ جماعة منتهية من المجموعات المتراصة في $\mathbb{X}$ فإنَّ اتحاد هذه المجموعات، أي: $\bigcup_{i=1}^{n} K_i$ ، هو مجموعة متراصة في $\mathbb{X}$ أيضاً.

إنَّ كون الفضاء الطُبولوجي متراصاً لا يعني بالضرورة أنَّ المجموعات الجزئية منه ستكون متراصة، أي أنَّ الفضاء الطُبولوجي لا يُورِث المجموعات الجزئية منه صفة التراص، ولتحقق ذلك ينبغي توفُّر شرط مُعيَّن تبينه لنا المبرهنة التالية

٢-٢-٧. مبرهنة:

إذا كان $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً متراصاً وكانت K مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{X}$ فإنَّ K مجموعة متراصة.

وينتج عن ذلك أنَّ كلَّ فضاء جزئي مغلق من فضاءٍ متراص لا بدَّ أن يكون متراصاً.

٢-٢-٨. مبرهنة:

إذا كان $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً هاوسدورفياً وَ F مجموعة مغلقة فيه، وكانت K مجموعة متراصة، فإنَّ $F \cap K$ متراصَّة.

٢-٢-٩. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، عندئذٍ فإنَّ الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة B جزئية من $\mathbb{X}$ ومحتواة في مجموعة $A \subseteq \mathbb{X}$، متراصة في A هو أن تكون B متراصة في $\mathbb{X}$.

للتطبيقات المستمرة بين فضاءين طُبولوجيين خواصّ هامَّة، إذ نقول عن تطبيقٍ بين فضاءين طُبولوجيين إنَّه مُستمر إذا كانت الصورة العكسية لكل مجموعة مفتوحة في المستقر مجموعة مفتوحة في المنطلق. (ويُكافئ ذلك أن تكون الصورة العكسية لكل مجموعة مغلقة في المستقر مجموعة مغلقة في المنطلق (**برِّر ذلك**)).

وحول الاستمرار والتراص، سنقدِّم المبرهنتين التاليتين:

٢-٢-١٠. مبرهنة:

إذا كان f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتراص $(\mathbb{X},\tau)$ في الفضاء الطُبولوجي $(\mathbb{Y},\tau')$، فإنَّ $f(\mathbb{X})$ مجموعة جزئية متراصَّة في الفضاء $(\mathbb{Y},\tau')$.

٢-٢-١١. مبرهنة: الصورة المباشرة لأية مجموعة متراصة وفق تطبيقٍ مستمر هي مجموعة متراصة.

٢-٢-١٢. نتيجة:

إذا كان f تطبيقاً مستمراً للفضاء المتراص $(\mathbb{X},\tau)$ في الفضاء الحقيقي المألوف $\mathbb{R}$ فإنَّه محدود ويبلُغ حدَّيه الأعلى والأدنى.

٢-٣. الفضاءات المتراصَّة موضعياً (*Locally Compact Spaces*):

٢-٣-١. تعريف:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً **هاوسدورفياً**، نقول عن هذا الفضاء إنَّه متراصٌ موضعياً إذا تحقق أحد الشرطين الآتيين المتكافئين:

١. لكل نقطة x من $\mathbb{X}$ قاعدة جوارات متراصَّة، أي أنَّ:

$$\forall x \in \mathbb{X}\,, \forall\, V \in \mathcal{v}_x \;\; ; \; \exists W \in \mathcal{v}_x \;: x \in W \subseteq \underbrace{\overline{W}}_{\text{متراصة}} \subseteq V$$

٢. لكل نقطة x من $\mathbb{X}$ جوارٌ متراص، أو لكل نقطة x من $\mathbb{X}$ جوارٌ لصاقته متراصَّة.

هذا، ويقال عن مجموعة جزئية A من $\mathbb{X}$ إنَّها متراصَّة موضعياً إذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) متراصَّاً موضعياً.

ملاحظة: إنَّ كلَّ فضاءٍ هاوسدورفي ومتراص هو فضاءٌ متراص موضعياً إلَّا أنَّ العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

٢-٣-٢. أمثلة:

١. لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مزوَّدةً بالطُبولوجيا المألوفة، يُلاحظ أنَّ الفضاء الناتج غير متراص لكنَّه متراص موضعياً، وإليك التفاصيل:

الجماعة $\{\,]n,n+2[\; : n \in \mathbb{Z}\}$ تغطية مفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$ ولكنَّ أية جماعة جزئية منتهية من هذه التغطية لا تشكل تغطية لـ $\mathbb{X}$، وبالتالي الفضاء المدروس ليس متراصَّاً. ولكنَّه متراصٌّ موضعياً إذ أنَّه أياً كانت النقطة x من $\mathbb{R}$ فإنَّ المجال المفتوح $]x-1,x+1[$ جوارٌ للنقطة x لصاقته هي المجال المغلق والمحدود $[x-1,x+1]$ والذي هو متراص (حسب هاين – بوريل).

٢–٤. التراص ومسلَّمات الفصل:

٢–٤–١. مبرهنة: كلُّ فضاءٍ طُبولوجي هاوسدورفي ومتراص هو فضاء T_3.

٢–٤–٢. مبرهنة: كلُّ فضاءٍ طُبولوجي هاوسدورفي ومتراص هو فضاء T_4.

- تذكَّر أنَّ **الفضاء** الطُبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ يُدعى:

– فضاءً T_2 (هاوسدورفي) إذا تحقق الشرط:

$$\forall x,y \in \mathbb{X} : x \neq y \; ; \; \exists \mathcal{O}_x, \mathcal{O}_y \in \tau : x \in \mathcal{O}_x \,, y \in \mathcal{O}_y \;\; and \;\; \mathcal{O}_x \cap \mathcal{O}_y = \emptyset$$

– فضاءً T_3 إذا تحقق الشرط:

$$\forall \underbrace{F}_{\text{مغلقة}} \subseteq \mathbb{X}, \forall x \in \mathbb{X} : x \notin F \; ; \; \exists \mathcal{O}_F \,, \mathcal{O}_x \in \tau \;: F \subseteq \mathcal{O}_F \,, x \in \mathcal{O}_x \;\; and \;\; \mathcal{O}_F \cap \mathcal{O}_x = \emptyset$$

– فضاءً T_4 إذا تحقق الشرط:

$$\forall \underbrace{A,B}_{\text{مغلقتين}} \subseteq \mathbb{X} : A \neq \emptyset, B \neq \emptyset \,, A \cap B = \emptyset \,; \exists \mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B \in \tau : A \subseteq \mathcal{O}_A \,, B \subseteq \mathcal{O}_B \;\; and \;\; \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \emptyset$$

٢–٥. بعض أنماط التراص وفضاءات ليندليوف:

٢–٥–١. التراص عدَّاً (*countable Compactness*):

يُقال عن فضاءٍ طُبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّه متراصٌ عدَّاً إذا حوت كل تغطية مفتوحة وقابلة للعد لـ $\mathbb{X}$ تغطية جزئية منتهية.

مبرهنة: كل فضاءٍ متراص هو متراص عدَّاً. والعكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

٢–٥–٢. التراص بالتوالي (متتالياتياً) (*Sequential Compactness*):

يُقال عن فضاءٍ طُبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّه متراصٌ بالتوالي إذا حوت كل متتالية من عناصر $\mathbb{X}$ متتالية فرعية متقاربة.

مبرهنة: كل فضاءٍ متراصٍ بالتوالي هو متراصٌ عدَّاً . والعكس ليس صحيحاً في الحالة العامة.

٢–٥–٣. فضاء ليندليوف (*Lindelof Space*):

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، نقول عن $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّه فضاء ليندليوف إذا حوت كل تغطية مفتوحة لـ $\mathbb{X}$ تغطية قابلة للعد.

نتيجة: كل فضاء طُبولوجي يتمتع '' **بقابلية العد الثانية** $\mathcal{C}_2$ '' هو فضاء ليندليوف.

- تذكَّر أنَّه يُقال عن فضاء طُبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّه يتمتع بقابلية العد الثانية إذا امتلكت τ قاعدة قابلة للعد.

مبرهنة: كل فضاء طُبولوجي متراص هو فضاء ليندليوف.

عكس المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة، والمثال التالي يبين لنا ذلك:

لنأخذ الفضاء الطُبولوجي الحقيقي المألوف $(\mathbb{R},\tau)$ ولتكن $A =]0,1[$ ، لما كان الفضاء $(\mathbb{R},\tau)$ متمتعاً بقابلية العد الثانية كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) كذلك، ومن ثمَّ فإنَّ هذا الفضاء الجزئي فضاء ليندليوف. ولكنَّ هذا الفضاء غير متراص إذ إنَّ التغطية $\left\{ \left]\frac{1}{n+1} \,, 1\right[\,: n \geq 1 \right\}$ تغطية مفتوحة لـ A وأية تغطية جزئية منها لن تكون منتهية.

٢-٥-٤. أمثلة:

١. لنأخذ الفضاء الطُبولوجي السابق، إنَّ المجموعة $A = [0,1]$ متراصة بالتوالي في هذا الفضاء، ذلك أنَّ كل متتالية من عناصر هذه المجموعة تتقارب من الواحد، لذا فإنَّ كل متتالية فرعية من أية متتالية من عناصر المجموعة A لا بُدَّ وأن تكون متقاربة.

٢. كل مجموعة منتهية في فضاء طُبولوجي تكون متراصَّة بالتوالي.

٢-٦. رص الفضاءات الطُبولوجية: (*Compactification*)

كل فضاءٍ طُبولوجي متراصٍ موضعيَّاً يُمكنُ رصُّه، وتفاصيل ذلك فيما يلي:

٢-٦-١. تعريف خطير:

يُقال عن فضاءٍ طُبولوجي متراص $(\mathbb{Y}, S)$ إنَّه رصٌّ لفضاءٍ طُبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ إذا وجد هوميومورفيزم (تصاكل) بين الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ وفضاء جزئي كثيف من الفضاء $(\mathbb{Y}, S)$.

ويتم في الغالب رصُّ الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ بإضافة نقطة أو نقطتين أو أكثر إلى $\mathbb{X}$، ثمَّ بتزويد المجموعة الموسعة $\mathbb{Y}$ بطُبولوجيا S بحيث يغدو الفضاء الموسَّع $(\mathbb{Y}, S)$ متراصَّاً ويكون الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً جزئياً كثيفاً فيه.

٢-٦-٢. رصُّ الكسندروف (*Alexandroff Compactification*):

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً هاوسدورفياً متراصاً موضعياً وغير متراص، وليكن ∞ شيئاً ما غير منتمٍ إلى $\mathbb{X}$. لنشكِّل المجموعة: $\mathbb{X}_\infty = \mathbb{X} \cup \{\infty\}$ ، ولتكن الجماعة τ_∞ من أجزاء $\mathbb{X}_\infty$ مؤلَّفة من المجموعات التالية:

١. عناصر τ.

٢. المتممات في $\mathbb{X}_\infty$ للمجموعات الجزئية المتراصة في الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$.

٣. المجموعة $\mathbb{X}_\infty$ بأكملها.

عندئذٍ تكون τ_∞ طُبولوجيا على $\mathbb{X}_\infty$ ويكون الفضاء $(\mathbb{X}_\infty, \tau_\infty)$ فضاءً هاوسدورفياً ومتراصاً ويحوي الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ كفضاءٍ جزئيٍّ كثيفٍ فيه.

نسمِّي هذا الفضاء رصّ الكسندروف أو رصَّاً وحيد النقطة لـ $\mathbb{X}$، ونسمي ∞ النقطة المثالية (*Ideal point*) أو النقطة في اللانهاية (*Point at infinity*).

- أثبت صحة جميع المبرهنات والنتائج السابقة. (**استفد من الانترنت**)
- هاتِ لمحة عن العالم الكسندروف.

ثالثاً: الترابط ($connectedness$)

٣-١. الفضاء المترابط ($connected\ space$):

٣-١-١. تعريف:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجيّاً، نقول عن هذا الفضاء إنَّه مُترابط إذا تحقق أحد الشروط الآتية المتكافئة:

١. لا توجد تجزئة للمجموعة $\mathbb{X}$ مؤلفة من مجموعتين مفتوحتين. أي:

$$\nexists \mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2 \in \tau :\ \mathcal{O}_1 \neq \emptyset\ ,\mathcal{O}_2 \neq \emptyset\ ,\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \mathbb{X}\ ,\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$$

٢. لا توجد تجزئة للمجموعة $\mathbb{X}$ مؤلفة من مجموعتين مغلقتين. أي:

$$\nexists F_1,F_2 \in \mathcal{C} :\ F_1 \neq \emptyset\ ,F_2 \neq \emptyset\ ,F_1 \cup F_2 = \mathbb{X}\ ,F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

(حيثُ نعني بـ $\mathcal{C}$ جماعة المجموعات المغلقة في الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$).

٣. المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آنٍ معاً في الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ هما $\mathbb{X},\emptyset$ فقط.

٤. كل مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ ومختلفة عن $\mathbb{X}$ و $\emptyset$ جبهتها ليست خالية. أي: $\forall A \subsetneq \mathbb{X}\ : A \neq \emptyset\ \ ;\ \ Fr(A) \neq \emptyset$

٥. كل تطبيق مستمر $f : (\mathbb{X},\tau) \longrightarrow (D,\tau_D)$ يكونُ **ثابتاً**. حيثُ $D=\{0,1\}$ و τ_D هي الطُبولوجيا المتقطِّعة.

٣-١-٢. تعريف المجموعة المترابطة:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، ولتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{X}$، نقول عن المجموعة A إنَّها مترابطة إذا كان الفضاء (A,τ_A) مترابطاً.

تعريف آخر للمجموعة المترابطة:

يُقال عن مجموعة H من فضاءٍ طُبولوجي $(\mathbb{X},\tau)$ إنَّها مترابطة إذا تحقق ما يلي:

$$\nexists \mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2 \in \tau :\ \mathcal{O}_1 \neq \emptyset\ ,\mathcal{O}_2 \neq \emptyset\ ;$$
$$\mathcal{O}_1 \cap H \neq \emptyset,\quad \mathcal{O}_2 \cap H \neq \emptyset,\quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap H = \emptyset,\quad H \subseteq \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$$

٣-١-٣. أمثلة:

١. أي فضاء طُبولوجي مؤلف من نقطة وحيدة هو فضاء مترابط.

٢. لتكن $\mathbb{X}$ أية مجموعة غير خالية ولنزوِّدها بالطُبولوجيا المتقطعة $\tau=\mathcal{P}(\mathbb{X})$، إذا كانت $\mathbb{X}$ مؤلفة من عنصر وحيد فإنَّ الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ يكون مترابطاً. أما إذا كانت $\mathbb{X}$ مؤلفة من أكثر من عنصر فإنَّ الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ لن يكون مترابطاً ذلك أنَّ المجموعة $\{a\}$ مثلاً، حيثُ $a \in \mathbb{X}$، مجموعة مفتوحة ومغلقة في آنٍ معاً وذلك لأنَّ: $\{a\}\ ,\ \mathbb{X}-\{a\} \in \tau$. ويُلاحظ أنَّ أية مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ مؤلفة من أكثر من عنصر لن تكون مترابطة ذلك أنَّ الطُبولوجيا النسبيَّة عليها ستكون هي الطُبولوجيا المتقطعة.

٣. لتكن $\mathbb{X}$ أية مجموعة غير خالية ولنزوِّدها بالطُبولوجيا التافهة $\tau=\{\mathbb{X},\emptyset\}$ ، عندئذٍ يكون الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ مترابطاً، ذلك أنَّ المجموعتين المفتوحتين والمغلقتين في آنٍ معاً هما $\mathbb{X},\emptyset$ فقط. ويُلاحظ أنَّ أية مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ مزودة بالطُبولوجيا النسبيَّة عليها ستكون مترابطة.

٤. لتكن $\mathbb{X}$ مجموعة غير منتهية، ولنزودها بطُبولوجيا المتممات المنتهية: $\tau = \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq \mathbb{X} : |\mathbb{X} - A| < \infty\}$ حيث نقصد بـ $|\mathbb{X} - A|$ عِدَّة المجموعة $\mathbb{X} - A$، عندئذٍ يكون الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ مترابطاً، وذلك لعدم وجود أية مجموعتين مفتوحتين غير متقاطعتين. ويُلاحظ هنا أنَّ أية مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{X}$ ومنتهية لن تكون مترابطة لأن الطُبولوجيا النسبية عليها هي الطُبولوجيا المتقطعة، أما المجموعات الجزئية من $\mathbb{X}$ وغير المنتهية فستكون مترابطة لأن الطُبولوجيا النسبية عليها هي طُبولوجيا المتممات المنتهية.

٥. لنأخذ $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ ولنزودها بالطُبولوجيا المألوفة، إنَّ مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ غير مترابطة في $\mathbb{R}$، إذ لو أخذنا المجموعتين المفتوحتين: $\mathcal{O}_1 = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right[\ , \ \mathcal{O}_2 = \left]\frac{1}{2}, \infty\right[$ لوجدنا أنَّ:

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathbb{N} = \{0\} \neq \emptyset \,, \quad \mathcal{O}_2 \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}^* \neq \emptyset \,, \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \mathbb{N} = \emptyset \,, \quad \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \mathbb{R} \supseteq \mathbb{N}$$

وبالتالي $\mathbb{N}$ ليست مترابطة. وبالأسلوب نفسه نجد أنَّ مجموعة الأعداد العادية $\mathbb{Q}$ غير مترابطة في $\mathbb{R}$.

٣–١–٤. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، ولتكن H مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ وغير خالية، إنَّ الشرط اللازم والكافي كي تكون H مترابطة هو أن يتحقق الآتي:

$$\exists A, B \subseteq \mathbb{X} \ : A \neq \emptyset \,, B \neq \emptyset \ , \quad \bar{A} \cap B = \emptyset \ , \quad A \cap \bar{B} = \emptyset \ , \quad A \cup B = H$$

٣–١–٥. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$ غير خاليتين ومنفصلتين، فإنَّ $A \cup B$ مجموعة غير مترابطة.

٣–١–٦. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$ غير منفصلتين ومترابطتين، فإنَّ $A \cup B$ مجموعة مترابطة.

٣–١–٧. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، ولتكن $\{A_i\}_{i \in I}$ جماعة من المجموعات المترابطة فيه، إذا كانت هذه الجماعة تحقق: $\forall i, j \in I \ ; \ A_i \cap A_j \neq \emptyset$ ، فإنَّ اتحادها $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ مجموعة مترابطة.

٣–٢. الترابط والاستمرار:

٣–٢–١. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، ولتكن $D = \{0,1\}$ مزوَّدةً بالطُبولوجيا المتقطِّعة τ_D، عندئذٍ يكون الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ **غير مترابطٍ** إذا وفقط إذا وُجِدَ تطبيق **مستمر** و **غامر** بالشكل: $f : (\mathbb{X}, \tau) \longrightarrow (D, \tau_D)$.

٣–٢–٢. مبرهنة:

الصورة المباشرة لأية مجموعة مترابطة وفق تطبيقٍ مستمر مجموعة مترابطة.

٣–٢–٣. نتيجة:

ليكن f تطبيقاً مستمراً من الفضاء الطُبولوجي $(\mathbb{X}, \tau)$ **على** الفضاء الطُبولوجي $(\mathbb{Y}, S)$، إذا كان الفضاء $(\mathbb{X}, \tau)$ مترابطاً يكون الفضاء $(\mathbb{Y}, S)$ كذلك.

٣–٢–٤. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً ولتكن A, B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{X}$، إذا كانت A مترابطة في $\mathbb{X}$ و B تحقق: $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$، فإنَّ B تكون أيضاً مترابطة.

٣–٢–٥. نتيجة:

ينتج مباشرةً من المبرهنة السابقة أنَّ لصاقة مجموعة مترابطة هي مجموعة مترابطة أيضاً، وعكس ذلك غير صحيح.

٣–٢–٦. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، يكون هذا الفضاء مترابطاً إذا وجدت فيه مجموعة كثيفة فيه ومترابطة.

٣–٣. الترابط في $\mathbb{R}$:

٣–٣–١. مبرهنة: مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مزودةً بالطُبولوجيا المألوفة فضاء مترابط.

٣–٢–٢. مبرهنة: الشرط اللازم والكافي كي تكون مجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ مترابطة هو أن تكون مجالاً.

ملاحظات:

١. اتحاد مجموعتين مترابطتين في $\mathbb{R}$ ليس مجموعةً مترابطةً بالضرورة.

٢. تقاطع مجموعتين مترابطتين في $\mathbb{R}$ هو مجموعة مترابطة.

٣. داخل ولصاقة أية مجموعة مترابطة في $\mathbb{R}$ مجموعتان مترابطتان.

(برِّر ذلك).

٣–٣–٣. مبرهنة: (مبرهنة القيم الوسطى)

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً مترابطاً، وليكن $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيقاً مستمراً. إذا كان f يأخذ القيمتين α, β (وبفرض أنَّ $\alpha < \beta$) فإنَّه يأخذ جميع القيم المحصورة بينهما.

٣–٣–٤. نتيجة:

ليكن $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ تطبيقاً مستمراً، بحيث $f(a).f(b) < 0$، عندئذٍ ثمَّة نقطة $x \in [a,b]$ بحيث $f(x) = 0$.

٣–٥. مبرهنة النقطة الثابتة: (*Fixed point theorem*)

ليكن $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ تطبيقاً مستمراً، عندئذٍ ثمَّة نقطة $x \in [a,b]$ بحيث: $f(x) = x$. **(برِّر ذلك)**

٣–٤. الترابط في $\mathbb{R}^2$:

٣–٤–١. مبرهنة:

الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة **مفتوحة** في $\mathbb{R}^2$ مترابطة هو أن نتمكن من الوصل بين أية نقطتين منها بخط منكسر محتوى بأكمله في المجموعة.

ملاحظتان:

١. الأقراص في $\mathbb{R}^2$ مجموعات مترابطة.

٢. اتحاد مجموعتين مترابطتين في $\mathbb{R}^2$ ليس بالضرورة مجموعة مترابطة، وكذلك التقاطع.

(برِّر ذلك).

٣–٥. المركّبات المترابطة: ($Components$)

٣–٥–١. تعريف:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً و A مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$، نقول عن A إنَّها مركِّبة مترابطة لـ $\mathbb{X}$ (أو مركبة لـ $\mathbb{X}$) إذا كانت مترابطة أعظمية (أي ليست محتواة في أية مجموعة مترابطة أخرى في $\mathbb{X}$).

أي إنَّ A أكبر مجموعة جزئية مترابطة في $\mathbb{X}$.

٣–٥–٢. أمثلة:

١. إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً مترابطاً فإنَّه يمتلك مركبة مترابطة واحدة فقط هي $\mathbb{X}$.

٢. إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً وكانت τ هي الطُبولوجيا المتقطِّعة، فإنَّ كل مركبة مترابطة في هذا الفضاء تحوي نقطة واحدة فقط.

٣–٥–٣. مبرهنة:

إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، فإنَّ القضايا التالية صحيحة:

١. كل نقطة من $\mathbb{X}$ تنتمي إلى مركبة واحدة فقط لـ $\mathbb{X}$.

٢. كل مجموعة جزئية غير خالية ومترابطة في $\mathbb{X}$ محتواة في مركبة مترابطة واحدة فقط لـ $\mathbb{X}$.

٣. كل مركبة لـ $\mathbb{X}$ مجموعة مغلقة.

٤. جماعة كل المركبات في $(\mathbb{X},\tau)$ تشكل تجزئة لـ $\mathbb{X}$.

٣–٦. الترابط موضعياً (محلياً) ـ ($Locally\ Connectedness$)

٣–٦–١. تعريف:

ليكن $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً، نقول عن هذا الفضاء إنَّه مترابط موضعياً (محلياً) في نقطة x منه إذا وجد لكل جوار U لـ x جواراً مترابطاً V محتوى في U. أي:

$$\forall x \in \mathbb{X}\,, \forall U \in \mathcal{v}_x \;\; ; \; \exists V \in \mathcal{v}_x \;\; : x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

وإذا كان الفضاء $(\mathbb{X},\tau)$ مترابطاً موضعياً في كل نقطة من نقاطه دعوناه مترابطاً موضعياً.

ونقول عن مجموعة جزئية A من $\mathbb{X}$ إنَّها مترابطة موضعياً إذا كان الفضاء (A,τ_A) مترابطاً موضعياً.

٣–٦–٢. ملاحظات:

١. الفضاء الطُبولوجي المتقطع مترابط موضعياً وغير مترابط.

٢. إذا كان $(\mathbb{X},\tau)$ فضاءً طُبولوجياً مترابطاً موضعياً وكانت A مجموعة جزئية من $\mathbb{X}$ ومفتوحة، فإنَّ الفضاء الجزئي (A,τ_A) يكون مترابطاً موضعياً.

٣. كل مركبة مترابطة لفضاء مترابط موضعياً هي مجموعة مفتوحة فيه.

٣-٦-٣. مبرهنة:

ليكن $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً، إنَّ القضايا التالية متكافئة:

١. $\mathbb{X}$ مترابطة موضعياً.

٢. مركبة أي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{X}$ هي مجموعة مفتوحة في $\mathbb{X}$.

٣. المركبات المترابطة لـ $\mathbb{X}$ تشكل قاعدة للطُبولوجيا τ.

٣-٦-٤. نتيجة:

إذا كان $(\mathbb{X}, \tau)$ فضاءً طُبولوجياً مترابطاً موضعياً، فإنَّه بالاستناد إلى المبرهنة السابقة، كلُّ مركبة لـ $\mathbb{X}$ تكون مجموعة مفتوحة، وبحسب المبرهنة ٣-٥-٣ كلُّ مركبة لـ $\mathbb{X}$ مغلقة، وهكذا فإنَّ كل مركبة في فضاءٍ مترابطٍ موضعياً تكون مفتوحة ومغلقة في آنٍ معاً.

- أثبت صحة جميع المبرهنات والنتائج السابقة. (**استفد من الإنترنت**)

المراجع:

١. محاضرات العام الدراسي (٢٠١٥ – ٢٠١٦).

٢. كتاب الطُبولوجيا (١) للدكاترة: صلاح أحمد – عبد الواحد أبو حمدة – محمد بشير قابيل.

٣. كتاب مبادئ الطُبولوجيا العامة للدكتور: خضر الأحمد.

٤. كتاب مقدمة في الطُبولوجيا للدكتور: غفار حسين موسى.

٥. كتب ومحاضرات أخرى في الطُبولوجيا باللغتين العربية والإنجليزية.