المحاضرة الثامنة: الارتباط

Correlation

معنى الارتباط:

سوف نتعرف في هذه المحاضرة على أساليب تحليل جديدة نستطيع استخدامها في تحليل متغير ما، من خلال علاقته بمتغير آخر أو بمتغيرات عدة، إذ يوجد عدد كبير من الظواهر أو المتغيرات التي يوجد بينها علاقة، مثل العلاقة بين دخل الأسرة وانفاقها، الذكاء والتحصيل، القلق والتحصيل، مساحة الدائرة ونصف القطر، مساحة المربع وطول ضلعه، وبالتالي نستخدم أسلوب إحصائي يسمى **تحليل الارتباط**، لدراسة العلاقة بين متغيرين اثنين أو أكثر، ويجب التنبه إلى أن الارتباط بين متغيرين معناه أن التغير في أحدهما يكون عادة مصحوباً بتغير في الآخر إما إيجاباً أوسلباً.

يعرف الارتباط أنه: "علاقة بين متغيرين أو أكثر"، ويقاس الارتباط بمعامل الارتباط، إذ تتراوح قيمة معامل الارتباط بين (−1، +1) مروراً بالصفر.

أنواع الارتباط:

بناء على **عدد المتغيرات** التي تدخل في حساب الارتباط فإنه يمكن حصر أنواع الارتباط بما يأتي:

1−الارتباط الثنائي Simple corrolation:

ويدرس العلاقة بين متغير واحد مستقل (وهو المتغير الذي يؤثر في المتغير الآخر، أو الذي يحدث أولاً) ومتغير واحد تابع (وهو المتغير الذي يتأثر بالمتغير المستقل، أو الذي يحدث لاحقاً) وتمثل المعادلة على شكل خط مستقيم أي معادلة من الدرجة الأولى.

2−الارتباط المتعدد Multiple Corrolation:

وهو الارتباط الذي يدرس العلاقة بين متغير تابع واحد من جهة وعدد من المتغيرات المستقلة (اثنان أو أكثر) من جهة أخرى تدرس جملة واحدة، ويمثل بمعادلة من الدرجة الثانية فأكثر، أي خط منحني أو قطع كامل أو قطع ناقص.

مثلاً الراتب الشهري للموظف يعد متغيراً مستقلاً عند دراسة علاقته مع المصروف (ارتباط ثنائي) لأنه هو الذي يحدد بدرجة أساسية مقدار المصروف اليومي، بينما يعد الراتب الشهري متغيراً تابعاً يتأثر بمتغيرات مستقلة عدة كالمؤهل العلمي، سنوات الخبرة، طبيعة العمل (ارتباط متعدد إذا تم دراستها معاً).

ويمكن أن يتم دراسة الارتباط أو العلاقة بين متغيرات عدة من جهة (تحصيل الطالب في العلوم العامة) ومتغيرات عدة من جهة أخرى (تحصيل الطالب في المواد الاجتماعية)، أي دراسة العلاقة بين متغيرات عدة مستقلة ومتغيرات عدة تابعة، ويسمى الارتباط في هذه الحالة **بالارتباط القانوني**.

مؤشرات الارتباط:

يتم الكشف عن درجة الارتباط بين متغيرين بواسطة مؤشرين هما شكل الانتشار، ومعامل الارتباط.

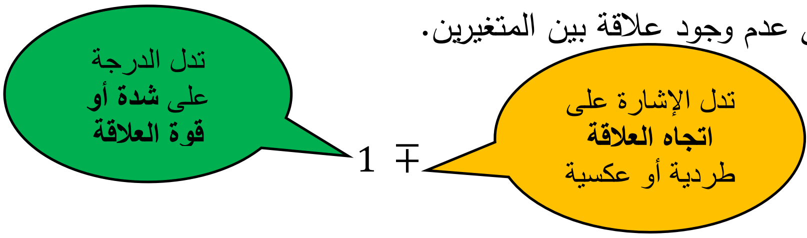
1-معامل الارتباط:

تتراوح قيمة معامل الارتباط بين (-1 و+1) **إذ تدل القيمة المطلقة (الدرجة) على قوة الارتباط/ العلاقة، وتدل الإشارة على اتجاه العلاقة**. ويمكن أن يكون الارتباط سالباً (عكسياً) أو موجباً (طردياً)، وكلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من الواحد كان الارتباط أقوى.

+1 تعني وجود ارتباط موجب (طردي)، أي أن الشخص الذي حاز على المرتبة الأولى في الاختبار الأول حصل على المرتبة الأولى في الاختبار الثاني (فالارتباط الموجب يعني زيادة قيم أحد المتغيرين مع زيادة قيم المتغير الآخر والعكس صحيح).

-1 تعني وجود ارتباط سالب (عكسي)، أي أن الشخص الذي حصل على المرتبة الأولى في الاختبار الأول حصل على المرتبة الأخيرة في الاختبار الثاني، والشخص الذي حصل على الثانية في الاختبار الأول كان ترتيبه الثاني قبل الأخير في الاختبار الثاني وهكذا... (فالارتباط السالب يعني نقصان قيم أحد المتغيرين مع زيادة قيم المتغير الآخر).

أما **الصفر** فيعني عدم وجود علاقة بين المتغيرين.



ويبين الجدول الآتي قيم معامل الارتباط:

الجدول (1) قوة معامل الارتباط بدلالة القيمة العددية له

قوة معامل الارتباط	مدى معامل الارتباط
تام	+1 أو -1
عال جداً	من 0.80 إلى 0.99
عال	من 0.60 إلى 0.79
متوسط	من 0.40 إلى 0.59
ضعيف	من 0.20 إلى 0.39
ضعيف جداً	من 0.01 إلى 0.19
لا توجد علاقة	صفر

2-شكل الانتشار Scatter Plot:

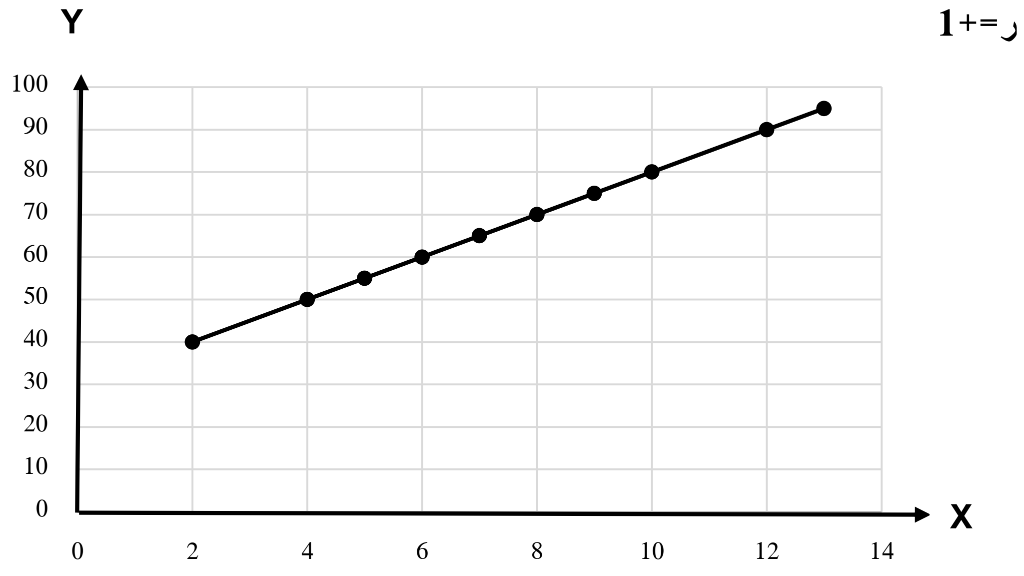
يقصد بشكل الانتشار تمثيل البيانات عن الظاهرتين أو المتغيرين على المحاور الإحداثية، إذ يمثل المتغير المستقل X على محور السينات الأفقي، ويمثل المتغير التابع Y على محور العينات العمودي، وتمثل كل ثنائية (X, Y) بنقطة على المستوى الإحداثي، ويمكن الحصول على شكل الانتشار مباشرة من جدول المتغيرين لنفس المفحوصين.

مثال 1: يمثل الجدول الآتي درجات 10 أطفال في كل من العمر والذكاء.

الجدول (2) درجات 10 أطفال في كل من العمر والذكاء

الأطفال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
العمرX	2	4	5	6	7	8	9	10	12	13
الذكاءY	40	50	55	60	65	70	75	80	90	95

ويمكن تحويل درجات الأطفال في هذا الجدول إلى شكل انتشار كما في الشكل الآتي:



الشكل (1) علاقة موجبة كاملة بين متغيرين

يلاحظ من بيانات الجدول والرسم البياني السابقين أن نقاط الانتشار تقع على مستقيم واحد، وبالتالي فالارتباط خطي تام، وهذا الخط يدل على علاقة موجبة كاملة تدل على أن الزيادة في المتغير x تناظرها زيادة بنفس النسبة في المتغير (y) والنقص في المتغير (x) يناظره نقص بنفس النسبة في المتغير (y) وهذه العلاقة يعبر عنها بمعامل الارتباط +1 وهو أقصى معامل يمكن الحصول عليه. فلا يمكن لمعامل الارتباط أن يتجاوز الواحد الصحيح سلباً أو إيجاباً، ويعبر عن علاقة حتمية، أي أن المفحوص الذي يكون له عمر معين فإن من المحتم أن يكون ذكاؤه محدداً. وكذلك يمكن استنتاج العمر من الذكاء. إلا أنه تجدر

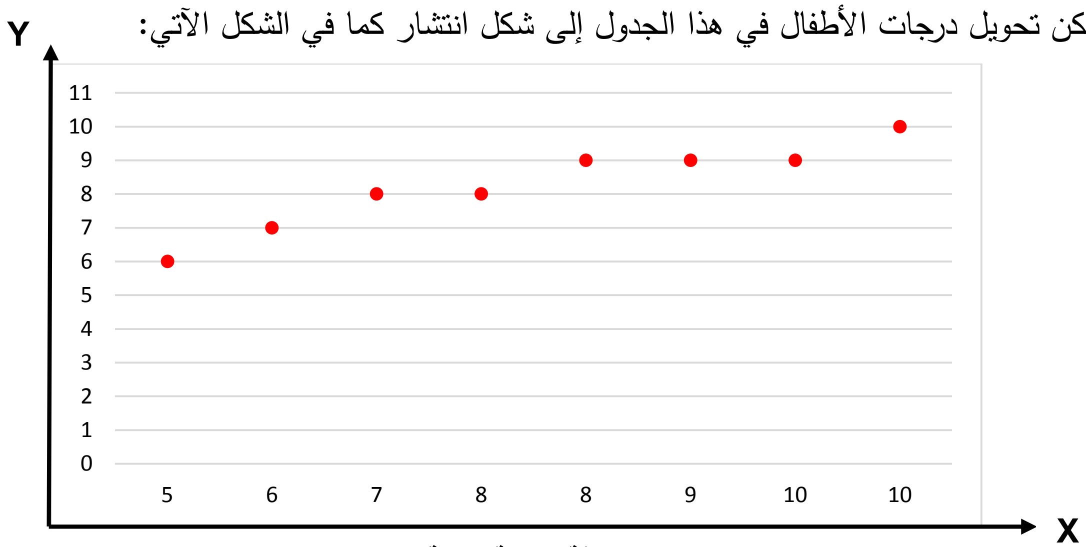
الإشارة أن هذا المثال هو مثال افتراضي ويندر وجوده في العلوم الإنسانية والاجتماعية، فمعاملات الارتباط دائماً فيها أقل من الواحد الصحيح.

مثال 2: يمثل الجدول الآتي درجات 8 تلاميذ في مادتي الحساب والعلوم.

الجدول (3) درجات 10 تلاميذ في كل من ماددتي الحساب والعلوم

التلميذ	1	2	3	4	5	6	7	8
الحساب X	5	6	7	8	8	9	10	10
العلوم Y	6	7	8	8	9	9	9	10

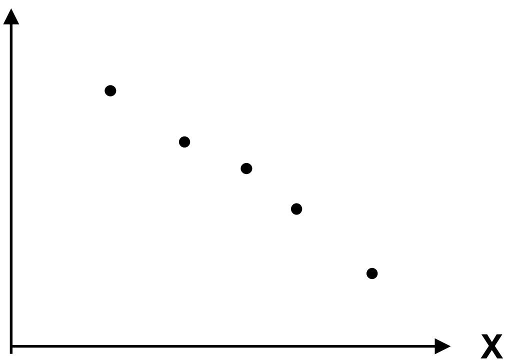
ويمكن تحويل درجات الأطفال في هذا الجدول إلى شكل انتشار كما في الشكل الآتي:



الشكل (2) علاقة موجبة جزئية بين متغيرين

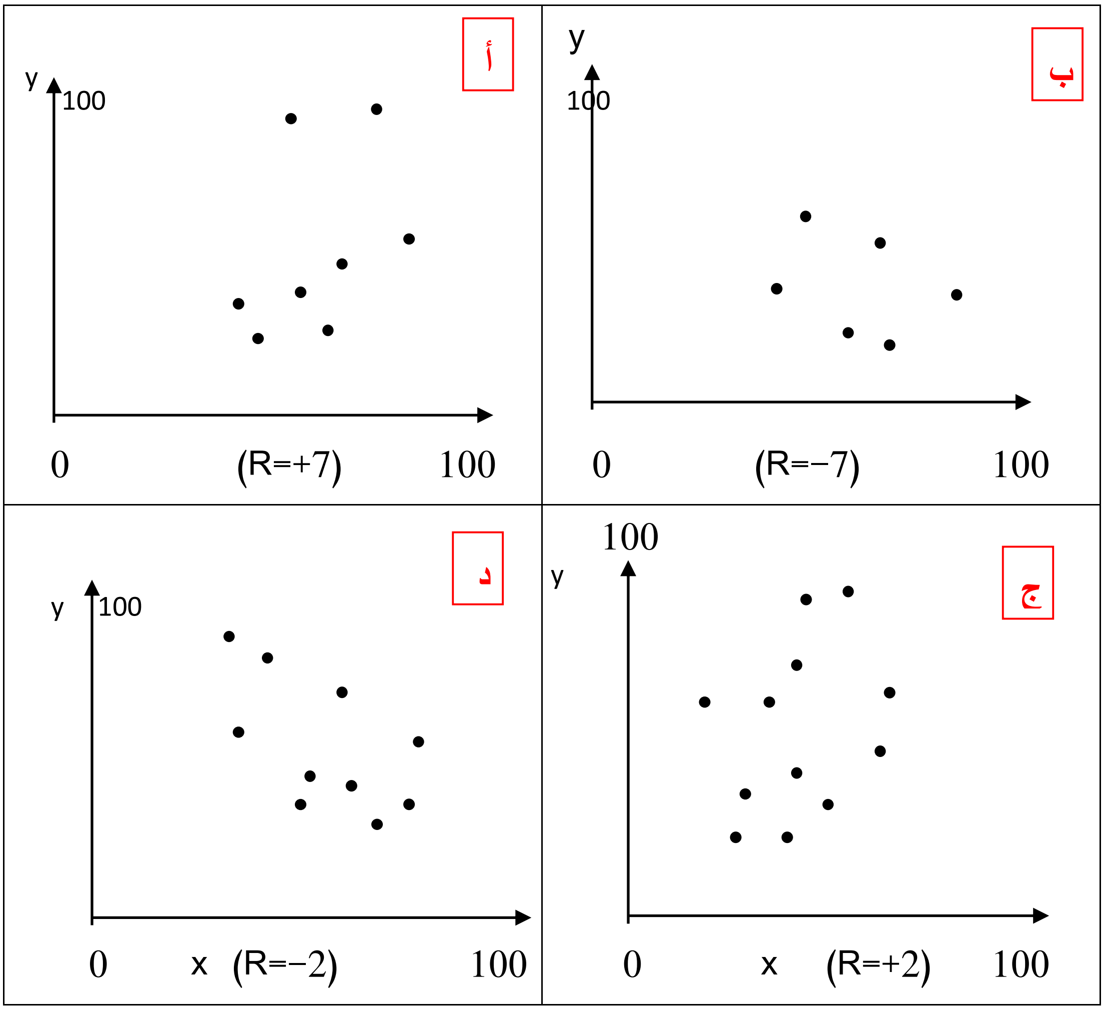
يتبين من الرسم السابق أن شكل الانتشار للمتغيرين ليس خطاً مستقياً كما هو الحال في الشكل السابق. ومع ذلك نلاحظ بصفة عامة أن الشخص الذي يحصل على درجة عالية في المتغير x أي الحساب يحتمل أن يحصل على درجة عالية في المتغير y أي العلوم، كما أن الشخص الذي يحصل على درجة منخفضة في x يحتمل أن يحصل على درجة منخفضة في y أيضاً . وهذا النوع من العلاقات يسمى العلاقة الجزئية الموجبة، وحين تحسب كمعامل ارتباط يكون مقدارها كسراً عشرياً أعلى من الصفر وأقل من الواحد الصحيح وتكون إشارته الجبرية موجبة .

وبالتأكيد يمكن للعلاقات أن تكون سالبة، فمعامل الارتباط السالب التام أو الكامل -1 يعبر عن علاقة حتمية بين المتغيرين في اتجاه عكس العلاقة الموجبة التامة. وهو نادر الحدوث في العلم عادة، إن لم يكن مستحيلاً في العلوم الإنسانية والاجتماعية. ولعل أقرب الأمثلة التي توضحه العلاقة بين حجم الغاز x وضغطه y، فمن المعروف أن الزيادة في حجم الغاز x تؤدي إلى قلة الضغط y، والنقص في الحجم يؤدي إلى زيادة الضغط، ويمكن التعبير عن هذه العلاقة في الشكل الآتي:



الشكل (3) علاقة سالبة كاملة

إن العلاقات الجزئية فقد تكون موجبة أو سالبة، وقد تكون كبيرة أو صغيرة، ويتحدد اتجاه العلاقة بالإشارة الجبرية لمعامل الارتباط عند حسابه، أما حجم العلاقة فيتحدد في ضوء مقدار الكسر العشري المحسوب، ويوضح الشكل التالي علاقات جزئية موجبة وسالبة، كبيرة وصغيرة.

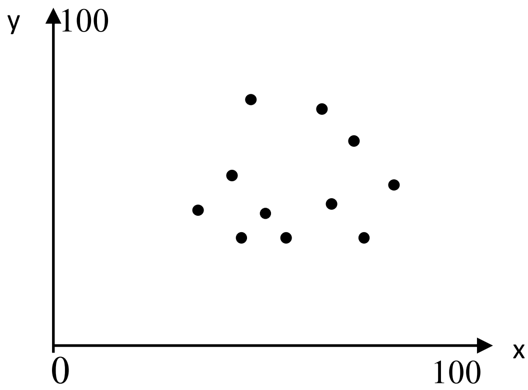


الشكل (4) علاقات جزئية

يبين الشكل السابق علاقات جزئية مختلفة: (أ) علاقة جزئية موجبة كبيرة (R=+7) (ب) علاقة سالبة كبيرة (R=−7)، (ج) علاقة جزئية موجبة صغيرة (R=+2)، (د) علاقة جزئية سالبة صغيرة (R=−2).

وهذه العلاقات الجزئية هي الأكثر شيوعاً في البحوث العلمية عامة، والبحوث النفسية والتربوية والاجتماعية خاصة.

وقد تكون العلاقة بين المتغيرين صفرية، والتي تعني عدم وجود علاقة بين المتغيرين ومن أمثلة ذلك العلاقة بين طول القامة والذكاء. والصفر هنا لا يقصد به الصفر بمعناه الرياضي المعتاد، وإنما يدل على أن معامل الارتباط ليست له دلالة إحصائية مهما كان مقداره. وحسبنا أن ننتبه هنا إلى خطأ فادح شائع في كثير من البحوث الحديثة حين يفسر بعض الباحثين معامل الارتباط بأنه موجب أو سالب بينما هو غير دال إحصائياً. إن معامل الارتباط في هذه الحالة ليس إلا صفراً، ولا يحمل معنى العلاقة الموجبة أو السالبة الحال، وتكون نقاط الانشار مبعثرة دون أن يكون لها أي اتجاه معين.



الشكل (5) علاقة صفرية (R=0.09)

خلاصة لأنواع العلاقات:

في ضوء ما سبق يمكن تصنيف العلاقات في ضوء الجدول الآتي:

الجدول (4) خلاصة لأنواع العلاقات

قيمة معامل الارتباط	التفسير	مثال العلاقة بين:
1+	علاقة موجبة كاملة	محيط الدائرة وقطرها مساحة المربع وطول ضلعه
0.99 ، 0.01	علاقة موجبة/طردية جزئية	الذكاء والتحصيل الدافعية والإنجاز
0	لا توجد علاقة	طول الجسم والذكاء
−0.99 ، −0.01	علاقة سلبية/عكسية جزئية	القلق والتحصيل
−1	علاقة سالبة كاملة	حجم الغاز وضغطه

شروط حساب معامل الارتباط:

هناك شروط يجب أن تتوفر بين الظاهرتين المدروستين حتى نستطيع دراسة علاقتهما المشتركة وهي:

- أن تكون بين الظاهرتين المدروستين علاقة جدلية واضحة.
- أن تكون كل من الظاهرتين قابلتين للقياس بواسطة وحدة قياس معينة لكل منهما (مستقلة أو مشتركة).
- أن تكون القياسات المأخوذة متقابلة من حيث الزمان أو المكان أو كلاهما معاً.

طرائق حساب معامل الارتباط:

يمكن استخدام معامل الارتباط بين متغيرين بطرائق عدة منها:

1. **معامل بيرسون** (Pearson)**:** يستخدم إذا كان كلا المتغيرين مقاساً بمقياس **كمي** مثل إيجاد معامل الارتباط بين الدخل والإنفاق أو بين الذكاء والتحصيل.
2. **معامل سبيرمان** (Spearman)**:** يستخدم إذا كان كلاً من المتغيرين مقاساً **بمقياس ترتيبي** مثل إيجاد علاقة المستوى التحصيلي (مرتفع – متوسط – منخفض) والمستوى التعليمي للأم (ابتدائي – إعدادي – ثانوي– جامعة – دراسات عليا)، أو كان أحد المتغيرين ترتيبياً والآخر كمياً كالعلاقة بين الذكاء ومستوى التحصيل، كما يمكن استخدام معامل سبيرمان في حال كان **المتغيرين كميين.**

1–معامل ارتباط بيرسون:

سمي معامل ارتباط بيرسون (Person) نسبة للعالم الإحصائي الذي استخدمه لأول مرة بشكل منهجي ويستخدم لدراسة العلاقة بين **متغيرين كميين.** ولحساب هذا المعامل لا بد من توفر قيمة لكل متغير عند نفس الفرد، بمعنى أن هذه القيم عبارة عن قيم مزدوجة وهذا يعني أيضاً تساوي عدد هذه القيم في المتغيرين.

ويحسب معامل ارتباط بيرسون وفق طرائق مختلفة منها باستخدام المعادلة الأساسية، أو باستخدام انحرافات المتغيرين عن متوسطيهما، أو وفق الطريقة العامة، وسيتم حساب معامل ارتباط بيرسون باستخدام انحرافات المتغيرين عن متوسطيهما وهي من الطرائق المعروفة والمستخدمة كثيراً وفق المعادلة الآتية:

$$R = \frac{\Sigma(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\overline{X})^2\,\Sigma(Y-\overline{Y})^2}}$$

مثال 3: احسب معامل ارتباط بيرسون بين درجات خمسة تلاميذ من الصف الرابع في مادتي اللغة العربية **(X)** والعلوم **(Y)**، وبين طبيعة الارتباط:

الجدول (6) معامل ارتباط بيرسون بين درجات خمسة تلاميذ في مادتي اللغة العربية (X) والعلوم (Y)

2-نحسب انحراف كل درجة عن متوسطها

4-نربع كل انحراف

X	Y	$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$	$(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})^2$
2	3	−2	−2	+4	4	4
4	5	0	0	0	0	0
5	8	+1	+3	+3	1	9
7	5	+3	0	0	9	0
2	4	−2	−1	+2	4	1
$\Sigma X = 20$	$\Sigma Y = 25$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 9$	$\Sigma = 18$	$\Sigma = 14$

1-نوجد متوسط X وY

3-نحسب ناتج ضرب الانحرافات

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{25}{5} = 5$$

$$R = \frac{\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X-\bar{X})^2\,\Sigma(Y-\bar{Y})^2}}$$

5-نطبق قانون الارتباط

$$R = \frac{9}{\sqrt{18 * 14}} = \frac{9}{\sqrt{252}} = \frac{9}{15.87} = 0.56$$

إن الارتباط بين درجات التلاميذ في المادتين بلغ (0.56) وهو ارتباط طردي (موجب) ومتوسط الشدة.

2-معامل ارتباط سبيرمان (للرتب):

يستخدم معامل ارتباط الرتب لسبيرمان (نسبة إلى واضعه)، لقياس العلاقة بين متغيرين من المستوى الترتيبي، أو أحدهما ترتيبي والآخر كمي، أو كلاهما كميان. وبمقارنة كفاءة هذا المعامل مع كفاءة معامل بيرسون فإن معامل سبيرمان يقترب 91% من معامل بيرسون، ويحسب معامل سبيرمان وفق المعادلة:

$$R_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{n(n^2-1)}$$

حيث **D**: فرق رتبة **X** من رتبة **Y** لكل ثنائية   **n**: عدد الأفراد أو المشاهدات.

مثال 4: احسب معامل ارتباط سبيرمان بين عدد ساعات الدراسة (**X**) والتحصيل الدراسي (**Y**) لخمسة تلاميذ وفق الجدول الآتي:

الجدول (7) معامل ارتباط سبيرمان بين عدد ساعات الدراسة (X) والتحصيل الدراسي (Y)

1-نوجد رتب X وY

3-نربع فرق الرتب

X	Y	رتبة x	رتبة y	فرق الرتب D	D^2
2	3	5	5	0	0
4	5	4	3.5	0.5	0.25
5	6	3	2	1	1
7	5	2	3.5	-1.5	2.25
10	8	1	1	0	0
					$\sum D^2=3.5$

2-نحسب فرق الرتب X-Y

ملاحظة: نرتب القيم، فالمفردة أو القيمة الأكبر تأخذ المرتبة الأولى وهكذا. أما إذا تساوت قيمتان في الرتبة فإنهما تأخذان مرتبتين متتاليتين ويتم جمع المرتبتين وتقسيمهما على 2 فنحصل على رتبة كل منهما. وإذا تساوت ثلاثة قيم في الرتب فإنها تأخذ ثلاث مرات متتالية ويتم جمع المراتب الثلاث وتقسيمها على ثلاثة فنحصل على رتبة كل منهم.

4-تطبيق القانون

$$R_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n(n^2-1)}$$

$$R_s = 1 - \frac{6*3.5}{5(5^2-1)}$$

$$R_s = 1 - \frac{21}{120} = 1 - 0.175 = 0.825$$

ومنه فإن الارتباط بين رتب x ورتب y قد بلغ (0.825) وهو ارتباط طردي (موجب) ومرتفع/عالٍ جداً.

مثال 5: يبين الجدول الآتي نتائج تقييم مجموعة من الطلاب مكونة من 10 طلاب، في مادتي الجغرافية والتاريخ، والمطلوب احسب معامل ارتباط سبيرمان لإيجاد العلاقة بين أداء الطلاب في المادتين:

الجدول (8) تقييم الطلاب في مادتي الجغرافية والتاريخ

الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
التاريخ X	ممتاز	ممتاز	ضعيف	جيد	جيد جداً	جيد	وسط	ضعيف جداً	ضعيف	جيد
الجغرافية Y	جيد جداً	ممتاز	وسط	جيد	جيد	وسط	وسط	ضعيف	ضعيف جداً	وسط

الجدول (9) معامل ارتباط سبيرمان بين تقييم الطلاب في مادتي الجغرافية والتاريخ

تأخذ "ممتاز" الرتب 1 +2 ويقسم الناتج على 2 = 1.5

تأخذ "الوسط" الرتب 8+7+6+5 ويقسم الناتج على 4 = 6.5

التاريخ X	الجغرافية Y	رتبة x	رتبة y	فرق الرتب D	D2
ممتاز	جيد جداً	1.5	2	0.5−	0.25
ممتاز	ممتاز	1.5	1	0.5	0.25
ضعيف	وسط	8.5	6.5	2	4
جيد	جيد	5	3.5	1.5	2.25
جيد جداً	جيد	3	3.5	0.5−	0.25
جيد	وسط	5	6.5	1.5−	2.25
وسط	وسط	7	6.5	0.5	0.25
ضعيف جداً	ضعيف	10	9	1	1
ضعيف	ضعيف جداً	8.5	10	1.5−	2.25
جيد	وسط	5	6.5	1.5−	2.25
					$\sum D^2=15$

$$R_s = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6*15}{10(100-1)} = 1 - \frac{90}{990} = 1 - 0.09$$

$$R_s = 0.91$$

ومنه فإن الارتباط بين رتب x ورتب y قد بلغ (0.91) وهو ارتباط طردي (موجب) ومرتفع/عالٍ جداً.