مقدمة

مرت آلاف السنين على الإنسان القديم لم يعرف فيها رمزاً يدل على عدد معين، حتى بدأ التفكير بوضع بعض الرموز للدلالة على الأشياء التي يملكها.

وقد مرت محاولات وضعه لهذه الرموز بمراحل عديدة حتى وصلت إلى شكلها الحالي .

فوضع بداية الأرقام وهي عبارة عن الرموز التي تستخدم للتعبير عن أعداد معينة والتي تمثل بالرموز التالية :

$$0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9$$

حيث ظهر الصفر في بعض المؤلفات العربية قبل ظهوره في أي مؤلفات أخرى، ومن هنا تطورت الأرقام باستخدام الصفر في العمليات الرياضية والحسابية.

ومن أبرز العلماء العرب الذين عملوا في هذا المجال **محمد بن موسى الخوارزمي** ، ثم نقلت إلى أوروبا عن طريق العالم الإيطالي **ليوناردو فيبوناتشي**، ثم انتشرت الى باقي دول العالم .

ثم تشكلت بعدها الأعداد هي عبارة عن مجموعة غير منتهية :

$$0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,9\,,10\,,11\,,12\ldots\ldots\ldots..$$

أي أن كل رقم هو عدد لكن كل عدد ليس بالضرورة أن يكون رقماً .

- إن لتطور الأعداد أهمية كبيرة لاستيعاب الواقع بشكل أفضل لذلك لم يقف العلماء عند مجموعة أعداد معينة بل دائماً كانوا يأتون بالجديد.

مجموعات الأعداد

1) مجموعة الأعداد الطبيعية :

هي المجموعة المكونة من الأعداد:

$$0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \dots \dots ..$$

يرمز لهذه المجموعة بالرمز $\mathbb{N}$ (Natural)

2) مجموعة الأعداد الصحيحة :

هي المجموعة المكونة من الأعداد:

$$\dots \dots .. -4, -3, -2, -1, 0 , 1 , 2 , 3 , 4 \dots .....$$

يرمز لهذه المجموعة بالرمز $\mathbb{Z}$

3) مجموعة الأعداد العادية :

هي كل عدد من الشكل $\frac{a}{b}$ حيث :

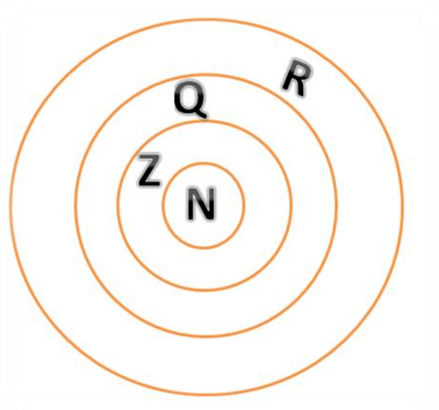
a : عدد صحيح

b : عدد طبيعي

يرمز لهذه المجموعة بالمجموعة بالرمز $\mathbb{Q}$

تمرين : هل الأعداد (5) ، (-2) أعداد عادية ؟

نعم لأنها تكتب بالشكل $\frac{5}{1}$ ، $\frac{-2}{1}$



4) مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$:

هي المجموعة التي تحوي الأعداد العشرية المنتهية وغير المنتهية مثل :

$$4,\ -2,\ \sqrt{3},\ \frac{5}{2},\ \frac{3}{11},\ \pi \simeq 3.14$$

طرق التعبير عن المجموعات :

1)طريقة القائمة :

مثال: الأعداد الأكبر أو تساوي 1 وأصغر تماماً من 5.

$A=\{1,2,3,4\}$

2)طريقة القاعدة :(الصفة المميزة):

مثال: الأعداد الأكبر أو تساوي 1 وأصغر تماماً من 5

$A=\{x: 1\leq x <5\}$

حيث أن

ملاحظة (1): في طريقة القائمة لا يتكرر العنصر في المجموعة أكثر من مرة.

مثال: ليكن لدينا علامات الطلاب :

$1, 1 , 2 , 2 , 5 , 7 , 9 , 10 , 10$

نكتبها بطريقة القائمة بالشكل : $A=\{1,2,5,7,9,10\}$

ملاحظة (2): لا أهمية لترتيب العناصر في طريقة القائمة .

ملاحظة (3):

- الاحتواء بين مجموعتين.
- الانتماء بين عنصر و مجموعة .

مصطلحات :

- نقول إن العنصر a ينتمي لـ A : إذا كان أحد عناصرها ونرمز لذلك:

$$a \in A$$

والرمز $\notin$ لا ينتمي.

- نقول إن A محتواه في B: اذا كانت جميع عناصر A تنتمي لـ B. ويرمز لذلك :

$$A \subset B$$

والرمز $\not\subset$غير محتوى.

- تقاطع مجموعتين : نرمز له $\cap$ ، وهو مجموعة العناصر المشتركة بين المجموعتين.
- اجتماع مجموعتين : نرمز له $\cup$ ، و هي مجموعة العناصر المشتركة وغير المشتركة بين المجموعتين.
- الفرق بين المجموعة A , B: هي العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B ويرمز له بـ (\ )

مثال : ليكن لدينا $\Omega = \{1,2,5,7,9,10, 12\}$ ⟶ تُقرأ أوميغا

$A=\{1,10,12\}$, $B=\{2,5\}$, $C=\{7,9,10\}$

_ $A \subset \Omega$

$B \not\subset A$

$- C \not\subset A$

$- A \cap B = \emptyset = \{\}$

$- A \cap C = \{10\}$

$- B \cap \Omega = \{2,5\}=B$

$- A \cup B = \{1,10,12,2,5\}$

$- \Omega \setminus A = \{2,5,7,9\}$

$-A \setminus B = \{1,10,12\}=A$

$-A \setminus C = \{1,12\}$

$- C \setminus A = \{7,9\}$

ملاحظة (1): التقاطع والاجتماع تبديلي
أما الفرق فهو ليس تبديلي.

ملاحظة (2):الرمز $\emptyset$ يقرأ **فاي**
للدلالة على المجموعة الخالية
أو يرمز له { }

- **قابلية القسمة :**

نقول أن العدد a يقبل القسمة على b إذا كان ناتج قسمة a على b عدداً *طبيعياً .*

أي إذا وجد عدد c طبيعي بحيث $a = b.c$ بشرط $(b \neq 0)$

عندئذ نقول إن a مضاعف للعدد b أو b يقسم العدد a .

مثال : هل العدد (20) مضاغف للعدد 4 ؟

- **نعم ، لأن** $\frac{20}{4} = 5$
- 20مضاعف للعدد 4 أو4 يقسم العدد 20

- **العدد الأولي :**

نقول عن عدد أنه أولي إذا كان لا يقبل القسمة إلا على نفسه و الواحد فقط .

أو نقول (هو كل عدد له قاسمان مختلفان فقط)

أمثلة : العدد 7 : أولي قاسماه 7 , 1.

العدد8 : ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 2.

العدد 1 : ليس أولي .

العدد 2 : أولي قاسماه 2, 1 **(العدد الزوجي الأولي الوحيد).**

العدد3 : أولي قاسماه 1,3.

العدد 51 : ليس أولي لأنه يقبل القسمة على 3 .

- **مقارنة الأعداد الطبيعية :**

1) العدد الذي يحوي منازل أكثر هو الأكبر.

2) في حالة تساوي المنازل نبدأ بمقارنة المنازل من جهة اليسار.

مثال: $999 < 2378$

$4985 > 4983$

- **القوى :**

- **القوة :** هي كل عدد من الشكل a^b

بحيث : a, b لا ينعدمان معاً.

$a^0 = 1$ (اصطلاح) بشرط $a \neq 0$

- نسمي a الأساس
- نسمي b الأُس

أمثلة : العدد 5^3 قوة أساسها 5 والأس 3.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

العدد 2^3 : قوة أساسها 2 والأس 3

$\underbrace{2^3}_{\text{القوة}} = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{الصيغة البسيطة}} = \underbrace{8}_{\text{الصيغة القياسية}}$

خواص القوى :

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$

مثال : $2^3 . 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

مثال: $\frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

$\frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$

3) $(a^m)^n = a^{m.n}$

مثال: $(4^3)^5 = 4^{15}$

4) $a^b = \frac{1}{a^{-b}}$

مثال: $2^7 = \frac{1}{2^{-7}}$

$2^{(-3)} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- **الجذر :**

جذر العدد الموجب a هو العدد الموجب b بحيث :

$$b^2 = a$$

مثال: $\sqrt{9} = 3$

$\sqrt{-9}$ ⟹ ليس له معنى

$\sqrt{\text{موجب}}$ = موجب

خواص الجذور :

1) $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \,.\, \sqrt{b}$

مثال :

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\,.\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$

3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ليس بالضرورة أن يساوي $\sqrt{a+b}$

(لا يوزع الجذر على الجمع والطرح)

- **تحليل العدد إلى عوامله الأولية :**

- يمكن أن يكتب العدد بشكل جداء عوامل أولية (أعداد أولية) .

تمرين : حلل الأعداد الآتية إلى عواملها الأولية :

$14 , 8 , 34 , 19 , 78$

$14 = 2 \times 7$

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$34 = 17 \times 2$

19 عدد أولي

78	**2**
39	**3**
13	**13**
1	

$\mathbf{78 = 2 \times 3 \times 13}$

القاسم المشترك الأكبر لعددين

مثال :

أوجد القاسم المشترك الأكبر للعدين 40 , 32

الحل:

قواسم العدد 32 : $1,2,4,8,16,32$

قواسم العدد 40 : $1,2,4,5.8,10,20,40$

إذاً القواسم المشتركة بين العددين 40 , 32 هي :

$1,2,4,8$

القاسم المشترك الأكبر هو (8)

- القاسم المشترك الأكبر (العامل المشترك الأكبر) يرمز له (ق. م.أ) أو (ع .م .أ).

إيجاد القاسم المشترك الأكبر بطريقة تحليل العددين بعواملها الأولية :

لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين في هذه الطريقة نأخذ جداء العوامل المشتركة <u>فقط</u> بأصغر أس

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$2^3 \times 5 = 40$

$2^5 = 32$

إذاً (ق. م . أ) للعددين 40 , 32 هو $2^3 = 8$

المضاعف المشترك الأصغر لعددين

مثال :

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 32 , 40

الحل:

أولاً نوجد المضاعف لكل عدد :

مضاعفات العدد 32 هي : 32, 64, 69, 128,160

مضاعفات 40 هي : ....– 40 ,80 ,120 , 160

إن العدد 160 هو المضاعف المشترك الأصغر للعددين 32، 40

إيجاد المضاعف المشترك الأصغر بطريقة التحليل :

نحلل العددين الى عواملهما الأولية ثم نكتب العددين على شكل جداء قوى ثم نأخذ جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة بأكبر أس.

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين40 ، 32.

الحل:

حللناهما في الصفحة السابقة:

$$2^5 = 32$$

$$2^3 \times 5 = 40$$

إذاً المضاعف المشترك الأصغر (م .م .أ) للعددين 40 ، 32هو :

$$160 = 2^5 \times 5$$

- نرمز للمضاعف المشترك الأصغر بـ (م . م. أ).

مثال :

أوجد (ق. م . أ) و (م . م. أ) للعددين 72 , 64 .

الحل:

72 64

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$3^2 \times 2^3 = 74$ ، $2^6 = 64$

اذاً ق . م . أ (ع . م .أ) هو : $8 = 2^3$

م . م .أ : $2^6 \times 3^2 = 64 \times 9 = 576$

المعادلات

تُعرّف المعادلة بأنها كل علاقة تحوي مساوة (=) ، ولها أنواع عديدة :

المعادلات من الدرجة الأولى :

هي كل معادلة من الشكل $a.x = b$ $(a,b \in \mathbb{R})$

لحل هذه المعادلة نناقش ثلاث حالات :

<u>الحالة الأولى</u>:

اذا كان $a \neq 0$

فالمعادلة لها حل وحيد في $\mathbb{R}$ وهو : $x = \frac{b}{a}$

ملاحظة : معنى حل معادلة هو إيجاد قيمة x (المجهول)

مثال :

حل المعادلة الأتية $2x = 10$

الحل : $2x = 10$ ومنه $x = \frac{10}{2}$ ومنه $x = 5$

<u>الحالة الثانية :</u>

إذا كان $a = 0$ و $b \neq 0$

أي $0.x = b$

فالمعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$.

<u>الحالة الثالثة :</u>

إذا كان $a = 0$ و $b = 0$

أي $0 .x = 0$

فالمعادلة لها عدد غير منته من الحلول (مجموعة حلولها في $\mathbb{R}$).

المعادلة من الدرجة الثانية :

هي كل معادلة من الشكل:

$a,b,c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$:بشرط $ax^2 + bx + c = 0$

لحل هذه المعادلات نوجد أولاً المميز(Δ):

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

نميز هنا ثلاث حالات:

الحالة الأولى : $\Delta > 0$

للمعادلة حلان مختلفان (جذران) وهما :

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

الحالة الثانية : $\Delta = 0$

للمعادلة حل وحيد (جذر مضاعف) وهو:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

الحالة الثالثة : $\Delta < 0$

المعادلة مستحيلة الحل في $\mathbb{R}$

مثال 1 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

الحل :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

ومنه :

$\Delta = 5^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1 > 0$ بما أن $\Delta > 0$ فللمعادلة

حلان :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

إذاً حلا المعادلة هما $\{-2, -3\}$

مثال 2 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية :

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

الحل:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 2^2 - 4(1)(1) = 0$$

اذاً للمعادلة حل وحيد (جذر مضاعف):

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$$

مثال3 : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية: $2x^2 + x + 5 = 0$

الحل :

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 1^2 - 4(2)(5) = 1 - 4 - 39 < 0$$

إذاً المعادلة مستحيلة الحل .

معادلة المستقيم

1– معادلة مستقيم يمر بمبدأ الإحداثيات :

شكل معادلة المستقيم الذي يمر من مبدأ الاحداثيات :

$$y = m x$$

حيث m عدد حقيقي.

ملاحظة : لرسم المستقيم نحتاج لنقطتين اختياريتين من المستقيم .

مثال(1) :

ارسم المستقيم الذي معادلته:

$$y = 2x$$

الحل:

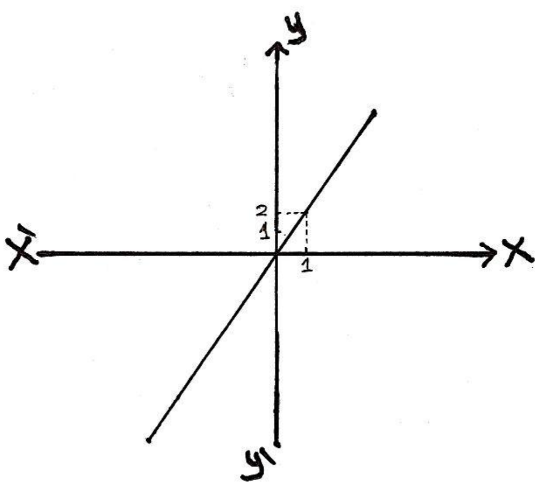
$$x = 0 \Rightarrow y = 2(0) = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2(1) = 2$$

x	0	1
y	0	2
النقطة	(0.0)	(1.2)

عوضنا قيم x في معادلة المستقيم المعطى من أجل إيجاد قيمة y

- لرسم النقطة(1,2) نقوم برسم محوري الاحداثيات ثم على المحور xx' في الموقع 1 نرسم عموداً وعلى المحور yy' في الموقع 2 نرسم عموداً، المستقيمين العموديين يتقاطعان في نقطة هي النقطة المطلوبة ثم نصل بين النقطتين (0,0) و (1,2) ونمدد ليتشكل المستقيم



مثال(2) :

ارسم المستقيم الذي معادلته : $y = -x$

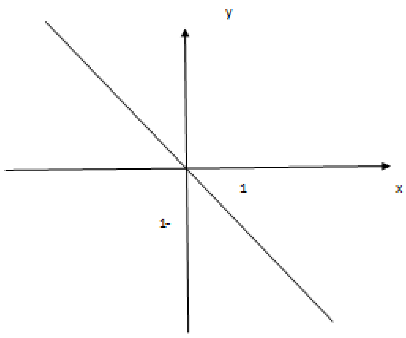
الحل:

عندما $x=0$ يكون $y=0$

عندما $x=1$ يكون $y=-1$

x	0	1
y	0	-1
النقطة	(0,0)	(1,-1)

بنفس الطريقة في المثال السابق نرسم المستقيم



2- معادلة مستقيم لا يمر من مبدأ الاحداثيات :

وشكل معادلة هذا المستقيم:

$$y = mx + c$$

حيث: m , c أعداد حقيقية ، $c \neq 0$

أو تكون من الشكل : $a x + b y = c$

مثال(1):

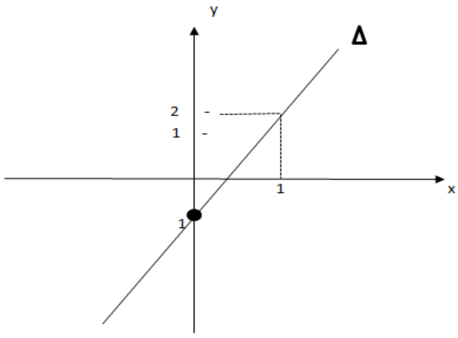
ارسم المستقيم Δ الذي معادلته: $y = 3x - 1$

عندما $x=0$ ⟸ $y = 3(0)-1 = -1$

عندما $x=1$ ⟸ $y = 3(1)-1 = 2$

x	0	1
y	-1	2

النقطة	(0,-1)	(1,2)



النقطة (0.-1) هي نقطة تقع على المحور yy' محور التراتيب.

ملاحظة :

- إذا كانت تراتيب نقطة ما صفراً فهذه النقطة تقع على محور الفواصل.
- إذا كانت فاصلة نقطة ما صفراً فهذه النقطة تقع على محور التراتيب.

مثال (٢):

ارسم المستقيم Δ الذي معادلته:

$$2x + 3y = 1$$

x	0	1/2
y	1/3	0
النقطة	(0, 1/3)	(1/2 ,0)

$x = 0$ ومنه $2(0) + 3y = 1$

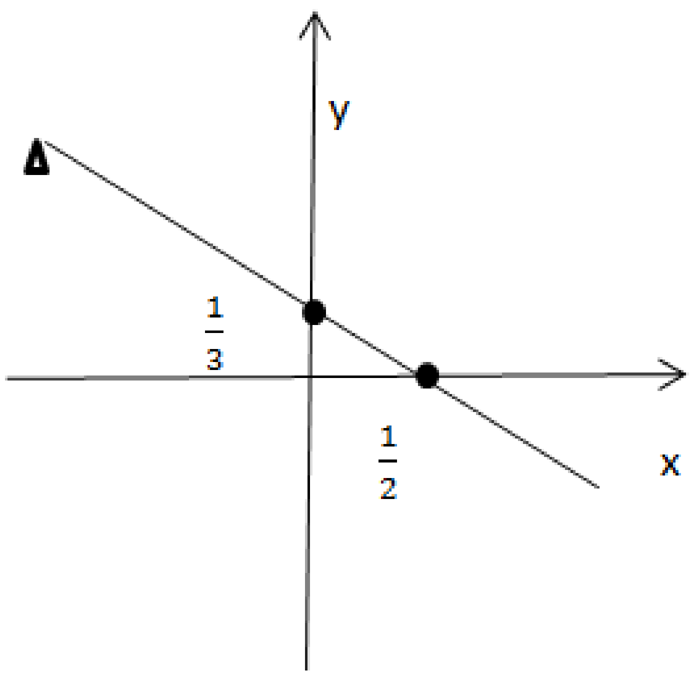
$$3y = 1$$

$$y = 1/3$$

$y = 0$ ومنه $2x + 3(0) = 1$

$$2x = 1$$

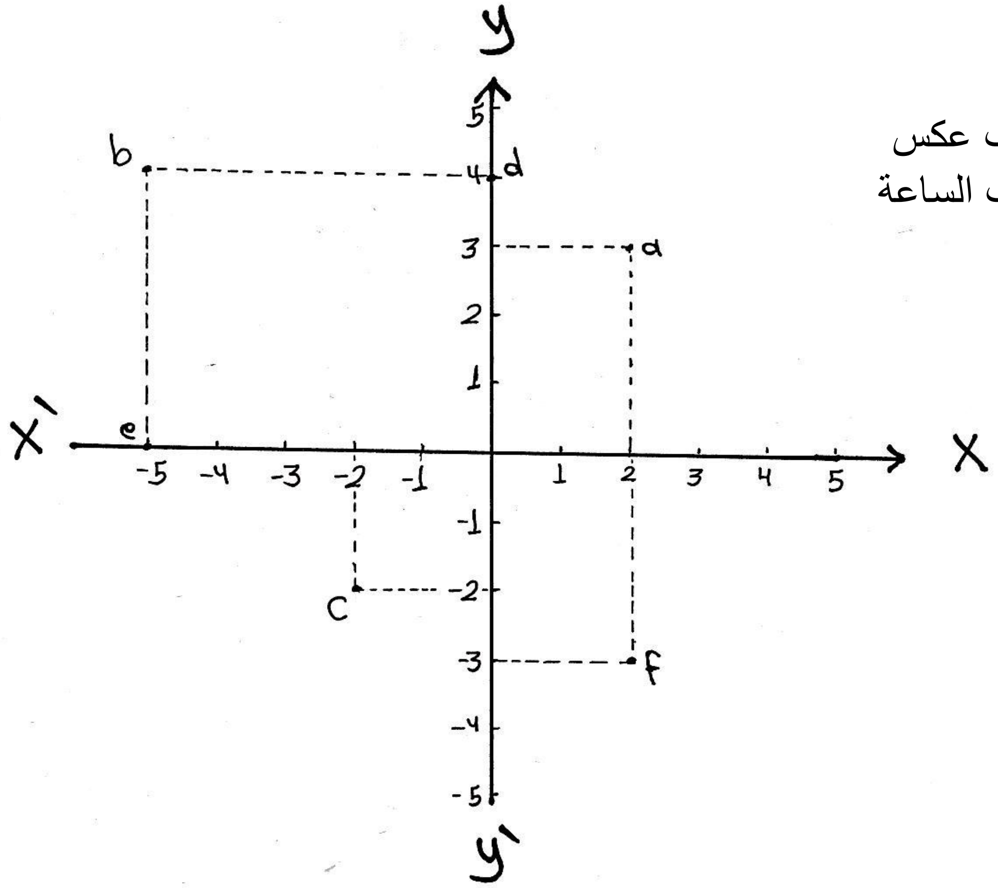
$$x = 1/2$$



تمرين :

ارسم المحورين الاحداثيين وحدد عليهما النقاط التالية :

a(2.3)	d (0.4)
b(-5.4)	e(-5.0)
c(-2.2)	f(2.-3)



الإتجاه الموجب عكس
دوران عقارب الساعة

المعادلة الخطية بمجهولين

نقول عن معادلة أنها خطية بمجهولين اذا كانت من الشكل :

$$ax + by = 0$$

بشرط: $a \neq 0$ ، $b \neq 0$

لحل هذه المعادلة نختار قيمة لأحد المجاهيل إما x أو y و نعوضها في المعادلة لنوجد المجهول الاخر .

مثال :

حل المعادلة التالية : $2x + y = 3$

الحل :

لنختار مثلاً $x = 0$ لنعوضها في المعادلة

$$2(0) + y = 3$$

$$y = 3$$

حلول أخرى

$x = 1$ ، $y = 1$

$x = 2$ ، $y = -1$

ملاحظة : لا نختار القيمتين معاً نختار قيمة واحدة لأحد المجهولين .

حل جملة معادلتين خطيتن بمجهولين:

- **طريقة التعويض** :

ليكن لدينا المعادلتين :

$a_1\ x\ +b_1 y=c_1$

$a_2\ x\ +b_2 y=c_2$

نوجد أحد المجاهيل من إحدى المعادلتين بدلالة المجهول الآخر ثم نعوض في المعادلة الأخرى لنوجد قيمة المجهول الآخر.

مثال$(\mathbf{1})$:

حل جملة المعادلتين بطريقة التعويض :

$3\ x + y = 5$..................(1)

$4\ x + y = 6$...................(2)

<u>الحل:</u>

من (1) نجد:

$\mathbf{y} = 5 - 3\ x$ .... (3)

نعوض (3) في (2) :

$4\ x + 5 - 3\ \boldsymbol{x} = 6$

ومنه:

$x = 6 - 5$

$x = 1$

ثم نعوض قيمة x في (3)

ومنه:

$y = 5 - 3(1)$

$y = 2$

اذاً لجملة المعادلتين حل وحيد هو (1,2).

مثال(2)**:**

حل جملة المعادلتين التاليتين بطريقة التعويض :

$2x - y = 3$.................(1)

$-6x + 3y = -9$.................(2)

<u>الحل :</u>

من (2) نجد :

$3y = -9 + 6x$

$y = \frac{-9+6x}{3}$

$y = \frac{3(-3+2x)}{3}$

$y = -3 + 2x$

نعوض (2) في (1):

$2x - (-3 + 2x) = 3$

$2x + 3 - 2x = 3$

$3 = 3$

لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول.

من (2) نجد : $y = 2x - 3$

مجموعة الحلول هي :

$$\{(x, y): y = 2x - 3 : x, y \in R\}$$

ملاحظة : في حال كان لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول فإن إحدى المعادلتين ينتج عن الأخرى بضربها بعدد حقيقي.

مثال(3): حل جملة المعادلتين بطريقة التعويض :

$2x + y = 1$........(1)

$4x + 2y = 3$.........(2)

الحل :

من (1) نجد $y = 1 - 2x$.......... (3)

نعوض (3) في (2)

$4x + 2(1 - 2x) = 3$

$4x + 2 - 4x = 3$

$2 = 3$ مستحيلة

إذاً جملة المعادلتين مستحيلة الحل .

تمرين:

حل جملة المعادلتين بطريقة التعويض

x + y =4........(1)

3 x +3 y =12........(2)

الحل:

من (1) نجد:

y =4- x ....(3)

نعوض (3) في (2):

3 x +3(4- x)=12

3 x +12-3 x =12

12=12

لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول.

مجموعة الحلول هي :

$$\{(x.y): y = 4 - x : x, y \in R\}$$

- **طريقة المحددات** :

لتكن جملة المعادلتين :

$$a_1+b_1\text{y}=c_1$$
$$a_2+b_2\text{y}=c_2$$

- **خطوات الحل :**

- نوجد Δ بالشكل التالي :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- نوجد Δ_x بالشكل التالي :

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- نوجد Δ_y بالشكل التالي :

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

- <u>إيجاد قيم Δ :</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2\text{-}a_2b_1$$

- **نميز الحالات الاتية :**

1- $\Delta \neq 0$ لجملة المعادلتين حل وحيد هو :

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \quad ، \quad x=\frac{\Delta_y}{\Delta}$$

2– $\Delta = 0$

نميز حالتين :

① $\Delta_x \neq 0$ أو $\Delta_y \neq 0$ (أحدهما أو كليهما لا يساويان الصفر)

جملة المعادلتين مستحيلة الحل .

② $\Delta_x = 0$ و $\Delta_y = 0$

لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول

مثال : أوجد ناتج ما يلي :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (2)(4) - (7)(3) = 8 - 21 = -13$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2) - (-6)(-8) =$$

$$= 8 - 48 = -40$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-2)(4) - (-1)(5) = -8 - (-5)$$

$$= -8 + 5 = -3$$

<u>مثال :</u> حل جملة المعادلتين التاليتين بطريقة المحددات :

$$3x + y = 5$$

$$4x + y = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(1) - (1)(4) = 3 - 4 = -1 \neq 0$$

$\Delta \neq 0$ لجملة المعادلتين حل وحيد

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (5)(1) - (1)(6) = 5 - 6 = -1$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_y = (3)\,(6) - (5)\,(4)$$

$$= 18 - 20 = -2$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

حل جملة المعادلتين هو $(2\ ,\ 1)$

<u>مثال :</u> حل بطريقة المحددات جملة المعادلتين التاليتين :

$$x - 2y = 1$$

$$-3x + 6y = -3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(6) - (-2)\,(-3)$$

$$= 6 - 6 = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(6) - (-2)\,(-3)$$

$$= 6 - 6 = 0$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\,(-3) - (1)\,(-3)$$

$$= -3 + 3 = 0$$

لجملة المعادلتين عدد غير منته من الحلول .

من المعادلة الأولى :

$$x = 2y + 1$$

مجموعة الحلول: $\{ (x, y) : x = 2y + 1 ; y \in R \}$

مثال : حل بطريقة المحددات جملة المعادلتين التاليتين :

$$2x + y = 1$$

$$4x + 2y = 3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(2) - (1)(4)$$

$$= 4 - 4 = 0$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(2) - (1)(3)$$

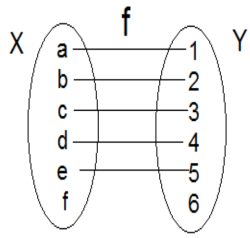
$$= 2 - 3 = -1 \neq 0$$

جملة المعادلتين مستحيلة الحل .

التوابع

التابع :

نقول عن علاقة أنها تابع إذا وفقط إذا ارتبط كل عنصر من مجموعة(تُدعى المنطلق) بعنصر واحد فقط من مجموعة أخرى(تُدعى المستقر) .



العلاقة في الشكل هي تابع نسمي X المنطلق ونسمي Y المستقر .

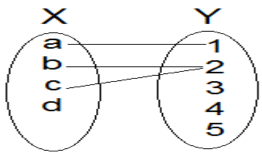
نسمي مجموعة العناصر المرتبطة في المنطلق مجموع التعريف .

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

كما نسمي مجموعة العناصر المرتبطة في المستقر مجموعة القيم .

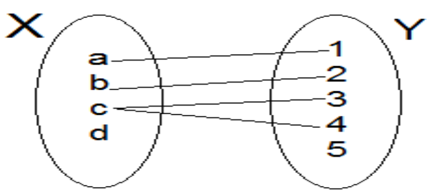
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

مثال (1)**:** المخطط التالي لعلاقة تمثل تابع :



هذه العلاقة تابع

مثال (2)**:** المخطط التالي لعلاقة لا تمثل تابع :



هذه العلاقة ليست تابع
العنصر c من X مرتبط مع
عنصرين من Y هما (3,4)

ملاحظة: يمكن الرمز للتابع بالأحرف :

$f, g, h, \ldots\ldots\ldots\ldots$

سندرس نوعين من التوابع:

١ - توابع كثيرة الحدود (الصحيحة) :

$$f\,(\mathrm{x}) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0$$

حيث : $a_n \ , a_{n-1} \ldots\ldots \ a_0$ أعداد حقيقية .

$n-2\,, n-1\,, n$ .... أعداد طبيعية .

ونأخذ درجة التابع من أعلى أس للمتغير.

مثال :

$$\mathrm{f(x)} = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4$$

تابع كثير حدود من الدرجة الخامسة.

٢- التوابع الكسرية :

هي كل تابع من الشكل : $f\,(\mathrm{x}) = \dfrac{F(x)}{G(x)} \quad (G(x) \neq 0)$

حيث $F(x)$ و $G(x)$ تابعان صحيحان .

مثال :

$f(\mathrm{x}) = \frac{3x^2+2x+1}{x-5}$ تابع كسري

مجموعة تعريف تابع : هي مجموعة كل قيم x الممكنة والتي يمكن حساب قيمة التابع عندها.

مثال :

أوجد مجموعة تعريف التابع: $f(x) = 2x^7+3\,x + 2$

معرف على $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}$ ←مجموعة تعريف f

مجموعة تعريف التابع الصحيح هي $\mathbb{R}$.

➢إن مجموعة تعريف التابع الكسري $\mathbb{R}$ماعدا القيم التي تعدم المقام .

مثال :

أوجد مجموعة تعريف التابع المعرف بالشكل $f(\mathrm{x}) = \frac{3x^2+7}{x-3}$

$$\mathrm{x} - 3 = 0 \Longrightarrow \mathrm{x} = 3$$

$$\mathrm{D_f} = \mathbb{R}\setminus\{3\}$$

مثال:

$$\mathrm{g(x)} = \frac{x+7}{x+1}$$

$$\mathrm{x} + 1 = 0 \Longrightarrow \mathrm{x} = -1$$

$$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

مثال :

ما قيمة التابع المعرف بالشكل : $f(x) = 3x - 5$ عند

$x = 0\,, x = 3$

$$f(0) = 3(0) - 5 = -5$$

$$f(3) = 3(3) - 5 = 1$$

بعض تصنيفات التوابع :

ليكن لدينا التابع f منطلقه X ومجموعة تعريفه$\mathbb{R}$ومستقره Y ومجموعة قيمهB

١ - التابع المتباين :

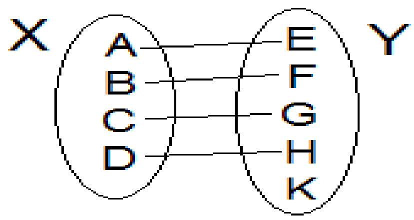
نقول عن التابع f أنه متباين إذا كان كل عنصر من مجموعة قيمه يرتبط بعنصر واحد فقط من مجموعة تعريفه أو إذا ارتبط كل عنصر من مستقره بعنصر واحد على الأكثر من منطلقه .

أو نقول عن التابع أنه متباين إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall\ x_1, x_2،\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

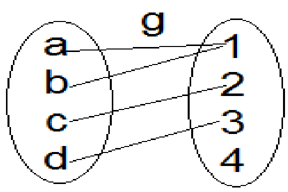
نسمي هذا الرمز ∀ (أياً كان) .

مثال : في الشكل التالي مخطط فن لتابع f :



التابع f متباين لأن كل عنصر من مستقره يأتيه سهم واحد على الأكثر (يأتيه سهم واحد فقط أو لا يأتيه) .

مثال : التابع g غير متباين لأن يوجد عنصر 1 يرتبط بعنصرين a , b



مثال :

أثبت أن التابع : $f : R \longrightarrow R$ متباين.

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$\forall x_1, x_2 \in R\,;\ f(x_1) = f(x_2)$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x^3{}_1 + 1 = x^3{}_2 + 1$$

$$x^3{}_1 = x^3{}_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

إذا التابع f متباين

مثال :

ليكن التابع f المعرف بالشكل :

؟ متباين f هل $f : R \longrightarrow R$: $f(x) = x^2$

$$\forall x_1, x_2 \in R ;\ f(x_1) = f(x_2)$$

$$x^2{}_1 = x^2{}_2$$

إما : $x_1 = x_2$

أو $x_1 = -x_2$

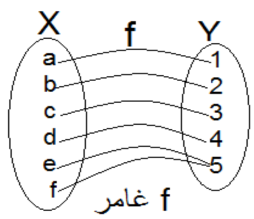
إذاً التابع f غير متباين

التابع الغامر :

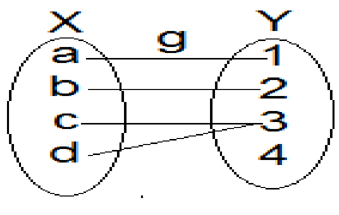
نقول عن التابع f أنه غامر إذا كان كل عنصر من المستقر مرتبط بعنصر واحد على الأقل من منطلقه .

أي أن : $B = Y$

$$\forall y \in Y ; \exists x \in X :\ f(x) = y$$



مثال :

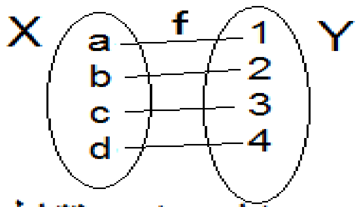


g ليس غامر وليس متباين

التابع التقابل :

نقول عن التابع أنه تقابل إذا كان متبايناً وغامراً وعند إذٍ يقابل كل عنصر من المنطلق عنصراً واحداً فقط من المستقر (تقابل واحد لِـ واحد) .

مثال :



f متباين وغامر فهو تقابل

التابع العكسي :

إذا كان لدينا تابع f مجموعة تعريفه A ومجموعة قيمه B وكان هذا التابع كاملاً فإن له تقابلاً عكسياً يرمز له بـ f^{-1} مجموعة تعريفه B ومجموعة قيمه A .

$$f : A \to B$$

$$f^{-1}: B \to A$$

التابع الزوجي :

نقول عن التابع f أنه زوجي إذا تحقق الشرطان التاليان :

1) $\forall x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$

2) $f(-x) = f(x)$

التابع الفردي :

نقول عن التابع f أنه فردي إذا تحقق الشرطان التاليان :

1) $\forall x \in D_f \Longrightarrow -x \in D_f$
2) $f(-x) = -f(x)$

مثال :

هل التابع المعرف بالشكل التالي زوجي ؟ $f(x) = x^2$

التابع معرف على $\mathbb{R}$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -x \in \mathbb{R}$ (محققة)

2) $f(-x) = (-x^2) = x^2 = f(x)$

إذاً f زوجي

مثال :

أثبت أن التابع f فردي . $f(x) = x^3$

التابع معرف على $\mathbb{R}$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -x \in \mathbb{R}$ (محققة)

2) $f(-x) = (-x^3) = -x^3 = -f(x)$

إذاً f فردي

مثال :

التابع f المعرف بالشكل التالي : معرف على $\mathbb{R}$ $\to$ $f(x) = x^2 + x$

1) $\forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -x \in \mathbb{R}$ (محقق)

2) $f(-x) = (-x^2) + (-x) = x^2 - x$

إذاً f ليس زوجي وليس فردي

مثال :

f المعرف بالشكل $f(x) = \frac{1}{x+1}$

أثبت أن f متباين و غامر واستنتج أنه تقابل ثم أوجد تقابله العكسي .

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ إذاً

دراسة التباين :

1) $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\,; f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{1}{x_1+1} = \frac{1}{x_2+1}$$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$x_1 = x_2$ إذاً f متباين

دراسة الغمر :

$\forall\, \mathrm{y} \in \mathbb{R} : \exists \mathrm{x} \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\,; f(x) = \mathrm{y}$

$$f(x) = \mathrm{y}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{y}{1}$$

$$y(x + 1) = 1$$

$$yx + y = 1$$

$$yx = 1 - y \Rightarrow x = \frac{1-y}{y}\ ; y \neq 0$$

التابع f غامر على $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

بما أن f تابع متباين و غامر فهو تقابل من $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ إلى $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

وله تقابل عكسي f^{-1} من $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ إلى $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f^{-1}(y) = x = \frac{1-y}{y}$$

<u>ملاحظة :</u> إذا كان التابع f من الشكل $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

بشرط $a.d - c.b \neq 0$

مجموعة تعريفه $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

مجموعة قيمه $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{a}{c}\right\}$

النهايات

تمهيد:

ليكن التابع $f(x) = 3x$

عندما تكبر قيمة x تكبر معها قيمة $f(x) = y$

عندما تكبر قيمة x بشكل كبير جداً نقول إن x تسعى نحو $(+\infty)$.

وعندما تصغر قيمة x بشكل كبير جداً فإننا نقول إن x تسعى نحو $(-\infty)$.

نرمز للنهاية بِـ $\lim$.

مثال : أوجد :

$$\lim_{x \to +\infty} 3x$$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

مثال :

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 + 2x + 5) = +\infty$$

مثال :

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 5) = (+\infty)$$

مثال :

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 + 3) = (-\infty)^2 + 3 = +\infty$$

ملاحظة : إن $+\infty - \infty$ هي حالة عدم تعيين .

إيجاد نهاية كثير حدود :

$$f\,(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0$$

حيث : a_0 ...... a_{n-1} , a_n أعداد حقيقية .

n , $n-1$, $n-2$ .... أعداد طبيعية .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (a_n x^n)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (a_n x^n)$$

مثال :

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x^5 + 3x^4 + 2x - 5)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-2x^5) = -2(-\infty)^5$$

= -2(-∞)= +∞

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 + 2x + 1) = \lim_{x\to+\infty} (3x^2) = +\infty$$

نهاية التابع الكسري:

عند إيجاد نهاية التابع الكسري من الشكل :

$$f(x) = \frac{a_n x^n \ + a_{n-1} x^{n-1} \ \ + \cdots \dots \dots + a_0}{b_n x^m \ + b_{m-1} x^{m-1} \ \ + \cdots \dots \dots + b_0}$$

نواجه حالة عدم تعين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ لإزالتها :

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n \ + a_{n-1} x^{n-1} \ \ + \cdots \dots \dots + a_0}{b_n x^m \ + b_{m-1} x^{m-1} \ \ + \cdots \dots \dots + b_0} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m}$$

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 - 4x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x^2}{3x^2} \right) = \frac{2}{3}$$

مثال:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5 - 2x - 3}{3x^2 + x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^5}{3x^2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3} \right) = -\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^3 - 2x + 3}{3x^4 + 7x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-x^3}{3x^4} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-1}{3x} \right) = 0$$

ملاحظة : لا نأخذ نهاية الحد المسيطر في البسط على الحد المسيطر في المقام إلا في حالة $-\infty$ و $+\infty$

مثال :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{x+2} = \frac{2^2+3}{2+2} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$$

تمرين :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-2n+5}{x^3-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

تمرين :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^5-2}{-8x^4-8}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x^5}{-8x^4}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-3x}{-8}\right)=\frac{-3(+\infty)}{-8}=+\infty$$

تمرين :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^7-11}{4x^5-2x^3}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^7}{4x^5}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^2}{4}\right)=-\frac{1}{2}(-\infty)^2=-\frac{1}{2}(+\infty)=-\infty$$

تمرين :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^3-11}{2x^3+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-8x^3}{2x^3}\right)=\frac{-8}{2}=-4$$

تمرين :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+7}{x^6-11}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^6}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)=$$

$$\frac{1}{(-\infty)^2}=0$$

تمرينات

تمرين :

ليكن لدينا التابع f المعرف بالشكل :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

أوجد مجموعة تعريفه و مجموعة قيمة وادرس كلاً من التباين و الغمر والتقابل وأوجد تقابله العكسي.

الحل :

<u>مجموعة تعريفه :</u>

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-d}{c}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{1}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

<u>مجموعة قيمه :</u>

$$\mathrm{B} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{1}\right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

<u>دراسة التباين :</u>

⍰ $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} ; f(x_1) = f(x_1)$

$$\frac{2x_1 + 1}{x_1 + 1} = \frac{2x_2 + 1}{x_2 + 1}$$

$$(2x_1 + 1)(x_2 + 1) = (2x_2 + 1)(x_1 + 1)$$

$$2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 1 = 2x_1x_2 + 2x_2 + x_1 + 1$$

ومنه :

$$2x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$$

ومنه :

$$2x_1 - x_1 = 2x_2 - x_2$$

ومنه :

$x_1 = x_2$ فالتابع f متباين

<u>دراسة الغمر :</u>

$$\forall \mathrm{y} \in \mathbb{R} : \exists \mathrm{x} \in \mathbb{R} \backslash \{-1\} \, ; f(x) = \mathrm{y}$$

$$\frac{2x+1}{x+1} = \frac{y}{1}$$

$$y\,(\,x+1) = 2x+1$$

$$yx + y = 2x+1$$

$$yx - 2x = 1 - y$$

$$x = \frac{1-y}{y-2}$$

التابع غامر على $\mathbb{R} \backslash \{2\}$

<u>دراسة التقابل :</u>

بما أن f متباين وغامر فهو تقابل من $\mathbb{R} \backslash \{-1\}$ إلى $\mathbb{R} \backslash \{2\}$

وبما أنه تقابل فله تقابل عكسي f^{-1} من$\mathbb{R} \backslash \{2\}$ إلى$\mathbb{R} \backslash \{-1\}$

بحيث

$$f^{-1}(y) = \frac{1-y}{y-2}$$

بالعودة للرمز المألوف

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x-2}$$

تمرين :

ليكن لدينا التابع f المعرف بالشكل :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

أوجد مجموعة تعريفه و مجموعة قيمة وادرس كل من التباين و الغمر والتقابل وأوجد تقابله العكسي.

الحل :

مجموعة تعريفه :

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ - \frac{-2}{1} \right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

مجموعة قيمه :

$$\text{B} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{1} \right\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

دراسة التباين :

$$\forall x_1 ، x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{2\} ; f(x_1) = f(x_1)$$

$$\frac{2x_1+3}{x_1-2} = \frac{2x_2+3}{x_2-2}$$

$$(2\, x_1 + 3)(x_2 - 2) = (2x_2 + 3)(x_1 - 2)$$

$$2x_1\, x_2 - 4x_1 + 3x_2 - 6 = 2x_2 x_1 - 4x_2 + 3x_1 + 6$$

$$-4\, x_1 + 3x_1 = -4x_2 + 3x_2$$

$$-7x_1 = -7x_2$$

$x_1 = x_2$ فالتابع متباين

دراسة الغمر :

$$\forall\, y \in \text{R}: \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} ; f(x) = y$$

$$\frac{2x+3}{x-2} = \frac{y}{1}$$
$$y(x-2) = (2x+3)$$
$$yx - 2y = 2x + 3$$

ومنه :

$$yx - 2x = 2y + 3$$

ومنه :

$$x(y-2) = 2y + 3$$

ومنه :

$$x = \frac{2y+3}{y-2}$$

إذاً التابع غامر على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

<u>دراسة التقابل :</u>

بما أن f متباين وغامر فهو تقابل من $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ إلى $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

وبما أنه تقابل فله تقابل عكسي f^{-1} من $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ إلى $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

بحيث

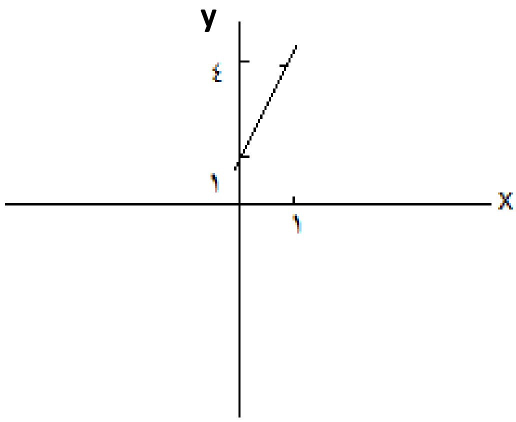
$$f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{y-2}$$

بالعودة للرمز المألوف

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$$

تمرين : ارسم المستقيم Δ الذي معادلته $-3x + y = 1$

x	0	1
y	1	4



تمرين :

أوجد قيمة a ليكون للمعادلة $ax^2 - 2x^2 - 1 = 0$ حل وحيد:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (2)^2 - 4a(-1) = 4 + 4a$

حتى يكون للمعادلة حل وحيد يجب ان يتحقق : $\Delta = 0$

$4 + 4a = 0$

$$4a = -4 \quad \text{ومنه} \quad a = \frac{-4}{4} = -1 \quad \text{ومنه} \quad a = -1$$

تمرين :

أوجد مجموعة تعريف f المعرف بالشكل :

$$f\ (x) = \frac{6x-7}{x^2-2x+1}$$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathrm{D}_f \;=\; \mathbb{R} \backslash \{1\}$$

مثال :

هل التابع f المعرف بالشكل :

$f\ (x) = x^4 - 2x^2$ فردي أم زوجي

1) $\forall\, x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -x \in\ \mathbb{R}$ (محقق)

2) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2$

$= x^4 - x^2 = f(x)$

إذاً f تابع زوجي.

تمرين :

حلّ جملة المعادلتين الآتيتين بطريقتين :

$x\ + y = 3\ \ldots\ldots\ldots.(1)$

-$2x\ + y = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

<u>طريقة التعويض :</u>

$x\ + y = 3\ \ldots\ldots\ldots.(1)$

-$2x\ + y = 0 \ldots\ldots\ldots(2)$

من (1) نجد (3) $x\ = 3 - y \ldots\ldots$

نعوض في (2)

$$-2(3 - y) + y = 0$$

$$-6 + 2y + y = 0$$

$3y = 6$ ومنه $y = \frac{6}{3} = 2$

نعوض في (3) نجد $x\ = 3 - 2 = 1$

الحل هو $x = 1$, $y = 2$

طريقة المحددات:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (1)(1) - (-2)(1) = 1 + 2 = 3$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (0)(1) = 3 - 0 = 3$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (3)(-2) = 0 + 6 = 6$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2$$

الحل هو $x = 1$, $y = 2$

==================================