**جامعة حماة**

**كلية الاقتصاد**

**السنة الأولى**

**مقرر**

# الرياضيات العالية

**الأستاذ**

**دياب محمد صادق شغري**

**٢٠١٩- ٢٠٢٠م**

# الأعداد العقدية :

## I. تقديم المجموعة $\mathbb{C}$ :

### 1. تقديم:

مجموعة الأعداد العقدية رمزها $\mathbb{C}$ و تحقق الشروط التالية:

i. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

ii. عمليتيا الضرب و الجمع في $\mathbb{C}$ تمددان عمليتي الضرب و الجمع في $\mathbb{R}$ ، و لهما نفس الخاصيات ما عدا تلك التي تتعلق بالترتيب.

iii. المجموعة $\mathbb{C}$ تحتوي على عنصر تخيلي رمزه $i$ و يحقق المعادلة $i^2 = -1$

iv. كل عدد حقيقي يكتب بصفة وحيدة على شكل $z = a + ib$ حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين.

## 2. الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

- الكتابة $z=a+ib$ حيث $a$ و $b$ عددين حقيقين تسمى **الكتابة الجبرية** للعدد العقدي $z$ .
- العدد الحقيقي $a$ يسمى **الجزء الحقيقي** للعدد العقدي $z$ و نكتب $\mathrm{Re}(z)=a$ .
- العدد الحقيقي $b$ يسمى **الجزء التخيلي** للعدد العقدي $z$ و نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$ .

## مصطلحات:

- كل عدد عقدي يكتب على شكل $ib$ يسمى **عددا تخيليا صرفا**.
- مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة يرمز لها بالرمز $i\mathbb{R}$ أي $i\mathbb{R}=\{ib / b\in\mathbb{R}\}$ .

## 3. تساوي عددين عقديين:

ليكن $z=a+ib$ و $z'=a'+ib'$ عددين مكتوبين على شكليهما الجبري،

لدينا:

$$z=z' \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z') \text{ و } \mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z')$$

## 4. التمثيل الهندسي لعدد عقدي:

### a. نشاط 5 ص 101.

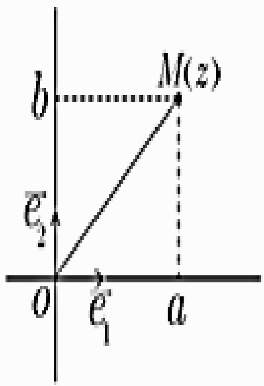
### b. تعريف:

المستوى $(P)$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي $z$ بالنقطة $M(a,b)$

- العدد $z$ يسمى لحق النقطة $M$ و النقطة $M$ تسمى صورة العدد $z$ و نكتب: $M(z)$
- العدد $z$ يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب: $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$



### c. خاصية:

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما $Z_A$ و $Z_B$ على التوالي، فإن لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو العدد العقدي $Z_B - Z_A$ .

## II. العمليات الجبرية و تأويلاتها الهندسية:

### 1. لحق منتصف قطعة:

إذا كانت A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيهما $Z_A$ و $Z_B$ على التوالي، فإن لحق النقطة I، منتصف القطعة [AB] هو العدد العقدي: $Z_I = \dfrac{Z_A + Z_B}{2}$ .

### 2. استقامية ثلاث نقط:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى العقدي، ألحاقها $Z_A$ و $Z_B$ و $Z_C$ على التوالي،
تكون النقط A وB و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان: $\dfrac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \in \mathbb{R}$ .

### 3. تداور نقط:

A(a) و B(b) و C(c) و D(d) أربع نقط غير مستقيمية و مختلفة مثنى مثنى،
تكون النقط A و B و C و D متداورة إذا وفقط إذا كان:
$\dfrac{d-a}{b-a} \times \dfrac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$ أو $\dfrac{d-a}{b-a} \times \dfrac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$

**مثال تطبيقي:**

بين أن النقط O و A(-2i) و B(2) و C($\sqrt{2}$ +1-i) متداورة و استنتج كيفية انشاء النقطة C.

### 4. منصف زاوية:

#### a. تمرين تطبيقي:

نعتبر النقط A و B و C و D التي ألحاقها على التوالي a=2-2i و b=-1+7i و c=4+2i و d=-4-2i

1. حدد e لحق النقطة E منتصف القطعة [AB]
2. أحسب $\frac{a-e}{d-e}$ ثم $\frac{c-e}{a-e}$ .
3. ماذا يمثل المستقيم (AE) بالنسبة للزاوية $\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EC}\right)$ .

b. الحل.

5. أسايه العدد i:

a. تمرين 3 ص 107

III. مرافق عدد عقدي:

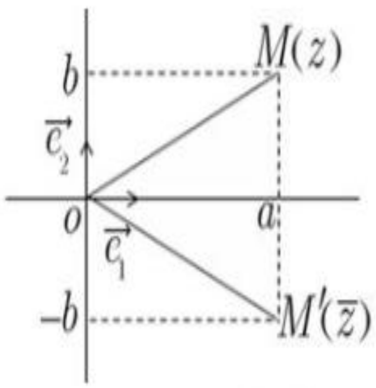
1. تعريف:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

مرافق العدد z هو العدد العقدي: $\overline{z} = a - ib$

2. التأويل الهندسي:

نضع z=x+iy.




$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

### 4. نتائج:

ليكن z=x+iy حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا ، لدينا:

- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z\overline{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$

### 5. خاصية:

لكل z عدد عقدي ، لدينا:

- $\overline{z}=z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
- $\overline{z}=-z \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف

### 6. المرافق و العمليات:

ليكن $z$ و $z'$ عددين عقدين و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم، لدينا:

- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{z\times z'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n \qquad (n\in\mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\dfrac{1}{z'}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}} \qquad (z'\neq 0)$

### 7. تمارين:

#### a. تمرين تطبيقي: تمرين 1 ص 109.

#### b. تمرين 1:

حدد هندسيا مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون: $\dfrac{z+2i}{z-4i}$ حقيقيا.

#### c. تمرين 2:

حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث يكون $T=z^2-\overline{z}$ عددا حقيقيا.

## IV. معيار عدد عقدي

### 1. نشاط 8 ص 102.

### 2. تعريف:

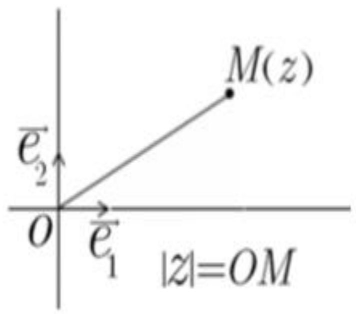
ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث: $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي $z$ هو العدد الحقيقي الموجب: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

### 3. التأويل الهندسي:

لتكن $M(z)$ النقطة الصورة للعدد العقدي $z=a+ib$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان،

لدينا: $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{a^2+b^2}$




### 4. نتيجة:

لتكن A و B نقطتين من المستوى العقدي، لحقيها على التوالي $Z_A$ و $Z_B$ ،

لدينا: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |Z_B - Z_A|$

### 5. خاصيات:

لكل عددين عقديين z و 'z، لدينا:

| | |
|---|---|
| $\left|z^n\right| = |z|^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ | $\left|z \times z'\right| = |z| \times \left|z'\right|$ |
| $|-z| = |z|$ | $|\bar{z}| = |z|$ |
| $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{\left|z'\right|} \quad (z' \neq 0)$ | $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{\left|z'\right|}$ |

## ٧. عمدة عدد عقدي

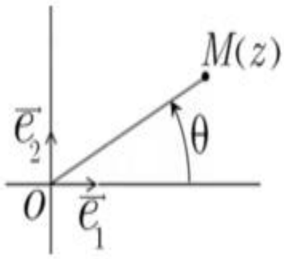
### 1. تعريف:

ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم صورته $M$

عمدة العدد العقدي $z$ هو $\theta$ أحد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز : $\arg z$

ونكتب: $\arg z = \theta[2\pi]$




**ملاحظة:**

العدد 0 ليس له عمدة.

### 2. نتائج مباشرة:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم،

لدينا:

- $z \Leftrightarrow \arg z = k\pi$ **عدد حقيقي**
- $z \Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ **عدد تخيلي صرف** $(k \in \mathbb{Z})$

### 3. خاصيات:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم؛

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z[2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z\ [2\pi]$
- $\arg \frac{1}{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$
- $\arg \frac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z')\ [2\pi]$

## VI. الشكل المثلثي لعدد عقدي:

### 1. تعريف:

ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي $z$ هو:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$$

**مثال:**

حدد الشكل المثلثي للعدد العقدي: $z=1+i$

### 2. تمرين تطبيقي:

### 3. خاصية:

ليكن $z$ عددا عقديا غير منعدم؛

إذا كان $z = r(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ مع $r \succ 0$ فإن $\arg(z) = \theta[2\pi]$ و $|z| = r$

### 4. تمرين 1 ص 115:

### 5. تساوي عددين على شكليهما المثلثي:

ليكن $z$ و $z'$ عددين عقدين غير منعدمين؛ نضع $z = [r,\theta]$ و $z' = [r',\theta']$

لدينا: $z = z' \Leftrightarrow r = r', \theta \equiv \theta'[2\pi]$

### 6. تمرين 3 ص 115:

### 7. جداء و خارج عددين عقديين باستعمال الشكل المثلثي:

ليكن $z$ و $z'$ عددين عقدين غير منعدمين؛ نضع $z = [r,\theta]$ و $z' = [r',\theta']$

لدينا:

- $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr';\theta+\theta']$
- $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$
- $-[r,\theta]=[r,\pi+\theta]$
- $[r,\theta]^n=[r^n;n\theta]$
- $\dfrac{1}{[r';\theta']}=\left[\dfrac{1}{r'};-\theta'\right]$
- $\dfrac{[r;\theta]}{[r';\theta']}=\left[\dfrac{r}{r'};\theta-\theta'\right]$

### 8. خاصية:

z عدد عقدي؛

$$\forall n\in\mathbb{N}$$
$$(\cos\theta+i\sin n\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

### 9. تطبيق:

#### a. تمرين 1:

أوجد معيار و عمدة للعدد العقدي $z=\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

#### b. تمرين 2:

نضع $z=\sqrt{3}-1$ و z'=1-i و $u=\dfrac{z}{z'}$

1. أكتب الأعداد على شكلها المثلثي.
2. أكتب u على الشكل الجبري و استنتج $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$

## VII. الشكل الأسي لعدد عقدي:

### 1. ترميز:

نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ حيث عدد حقيقي، لكل عدد عقدي معياره 1 و عمدته $\theta$ .
أي: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta=[1,\theta]$

## 2. أمثلة:

a. $e^{i0}=e^{i2\pi}=1$

b. $e^{i\pi}=-1$

c. $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$

d. $e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 3. ملاحظات:

لكل عدد حقيقي $\theta$ ؛

لدينا: $\arg(e^{i\theta})\equiv\varphi[2\pi]$ و $\left|e^{i\theta}\right|=1$

## 4. خاصيات:

لكل عدد حقيقيين $\theta$ و $\theta'$؛

لدينا:

- $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta'}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta}=re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n=r^ne^{in\theta}$
- $\dfrac{1}{r'e^{i\theta'}}=\dfrac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

## 5. حساب $\cos(n\theta)$ و $\sin(n\theta)$ باستعمال صيغة موافر:

### a. تطبيق 1:

بين أن:

- $\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos(2\theta)=\cos^2-\sin^2(\theta)$
- حدد بنفس الطريقة $\cos(3\theta)$ و $\sin(3\theta)$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$ .

### b. تعريف:

z عدد عقدي غير منعدم معياره r و عمدته $\theta$؛

الكتابة $z=re^{i\theta}$ تسمى الكتابة الأسية لـ z.

**أمثلة:**

- الكتابة الأسية للعدد i+1- هي : $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- الكتابة الأسية للعدد 3i- هي: $-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$

تحقق من ذلك

### 6. صيغتا أولير (EULER):

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\qquad \cos\theta=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)$$

و $$\sin\theta=\frac{1}{2i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)$$

## VIII. زاوية متجهتين وعمدة خارج لحقيهما:

### 1. خاصية:

ليكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى، ألحاقها $Z_A$ و $Z_B$ و $Z_C$ و $Z_D$ على التوالي، لدينا:

- $\left(\overrightarrow{e},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\arg(Z_B-Z_A)[2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}\equiv\arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})[2\pi]$
- $\overline{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}\equiv\arg(\frac{Z_D-Z_C}{Z_B-Z_A})[2\pi]$

### 2. تطبيقات:

ليكن A و B و C و D نقطا من المستوى العقدي مختلفة مثنى مثنى، ألحاقها $Z_A$ و $Z_B$ و $Z_C$ و $Z_D$ على التوالي، لدينا:

#### a. استقامية ثلاث نقط:

تكون النقط A و B و C مستقيمية إذا وفقط إذا كان:

$$\arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})\equiv\pi[2\pi] \text{ أو } \arg(\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A})\equiv 0[2\pi]$$

#### b. توازي مستقيمين:

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متوازيين إذا وفقط إذا كان:

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv 0[2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv \pi[2\pi]$$

#### c. تعامد مستقيمين:

يكون المستقيمان (AB) و (CD) متعامدين إذا وفقط إذا كان:

$$\arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ أو } \arg\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_D - Z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

#### d. تمرين:

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: a=-2 و b=1+i و c=-1-3i؛

1. حدد قياسا للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$
2. استنتج طبيعة المثلث ABC .

## IX. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$ :

### 1. المعادلة $z^2 = a$ حيث a عدد حقيقي غير منعدم:

#### a. خاصية:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم، حلا المعادلة $z^2 = a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:

- $-\sqrt{a}$ و $\sqrt{a}$ إذا كان $a > 0$ .
- $-i\sqrt{-a}$ و $i\sqrt{-a}$ إذا كان $a < 0$.

#### b. امثلة:

- حلا المعادلة $z^2 = 7$ هما $-\sqrt{7}$ و $\sqrt{7}$
- حلا المعادلة $z^2 = -3$ هما $-i\sqrt{3}$ و $i\sqrt{3}$

### 2. المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث أعداد a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم:

#### a. خاصية:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

العدد الحقيقي $\Delta = b^2 - 4ac$ يسمى مميز المعادلة $az^2 + bz + c = 0$

| المعادلة: | | مجموعة حلول المعادلة: |
|---|---|---|
| $z \in \mathbb{C} \quad az^2 + bz + c = 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$ | $\Delta > 0$ | $S = \left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ |
| | $\Delta = 0$ | $S = \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$ |
| | $\Delta < 0$ | $S = \left\{\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$ |

### b. نتائج:

ليكن $z_1$ و $z_2$ حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ في المجموعة $\mathbb{C}$، لدينا:
لكل z من $\mathbb{C}$: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

### c. تمرين تطبيقي (سلسلة التمارين):

## x. الصيغة العقدية للتحويلات الاعتيادية:

### 1. الازاحة:

نعتبر الازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(a)$ و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث t(M)=M'؛

**خاصية:**

الصيغة العقدية للازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(a)$ حيث a عدد عقدي هي **z'=z+a**، و نقول النقطة M' صورة النقطة M بالازاحة t .

**مثال:** الصيغة العقدية للازاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(1-i)$ هي z'=z+1-i

### 2. التحاكي:

نعتبر التحاكي h الذي مركزه $\Omega$ و نسبته k و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث h(M)=M'؛

**خاصية:**

$\Omega$ نقطة من المستوى لحقها $\omega$ من $\mathbb{C}$ و k عدد حقيقي غير منعدم؛
الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه $\Omega$ و نسبته k حيث هو $z'-\omega=k(z-\omega)$، و نقول النقطة M' صورة النقطة M بالتحاكي h .

**مثال:** الصيغة العقدية للتحاكي h الذي مركزه $\Omega(3-2i)$ و نسبته 4 حيث هو $z'=\frac{1}{2}z-2i$،

### 3. الدوران:

نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\theta$ و لتكن M(z) و M'(z') نقطتين من المستوى العقدي بحيث R(M)=M'.

**خاصية:**

O نقطة من المستوى لحقها $\omega$ من $\mathbb{C}$ و $\theta$ عدد حقيقي غير منعدم.

الصيغة العقدية للدوران R الذي مركزه O و زاويته $\theta$ هو و نقول النقطة 'M صورة النقطة M بالدوران R.

**مثال:** الصيغة العقدية للدوران R الذي مركزه O أصل المعلم و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ هو: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times z$

**تمرين1:** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :1) $z^2=5$ (2 $z^2=-4$ (3 $z^2=-3$

**أجوبة :** 1) $z^2=5$ يعني : $z=\sqrt{5}$ و $z=-\sqrt{5}$

ومنه : $S=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$

2) $z^2=-4$ يعني $z^2=(2i)^2$ : $z=2i$ و $z=-2i$

ومنه : $S=\{-2i;2i\}$

3) $z^2=-3$ يعني $z^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ : $z=\sqrt{3}i$ و $z=-\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\{-\sqrt{3}i;\sqrt{3}i\}$

**تمرين2:** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $z^2-z+2=0$

2) $z^2-z-2=0$

3) $z^2-2z+1=0$

**أجوبة :1)** مميز المعادلة هو:

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$.

حلا المعادلة هما: $z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ و

$z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

إذن: $S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

**2)** مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

حلا المعادلة هما: $z_1=\frac{1-3}{2}=-1$ و $z_2=\frac{1+3}{2}=2$.

إذن: . $S=\{-1;2\}$

**3)** مميز المعادلة هو: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ إذن: .

$S=\{1\}$

**تمرين3:** لكل $z$ من $\mathbb{C}$ ، نضع: $P(z)=z^2-2z+2$

1. أحسب $P(1-i)$

2. استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

**الجواب :** 1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

وبالتالي : $z_1=1-i$ جذر للحدودية العقدية $P(z)$

ونعلم أن : اذن $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ أي $1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$

أي : $z_2=2+i-1=1+i$ ومنه : $S=\{1-i;1+i\}$

**تمرين4 :** حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ (2 $z^2-6z+13=0$

**الجواب :** 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ يعني $z^2-4=0$ أو $z^2+9=0$

يعني $z^2=4$ أو $z^2=-9$ يعني $z=\sqrt{4}$ أو $z=-\sqrt{4}$ أو $z=\sqrt{9}i$ أو $z=-\sqrt{9}i$

يعني $z=2$ أو $z=-2$ أو $z=3i$ أو $z=-3i$

ومنه : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2)مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$.

حلا المعادلة $(E)$ هما: $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ و

$z_2=\overline{z_1}=3-2i$.

إذن: $S=\{3-2i;3+2i\}$

**تمرين5:** 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$ .

2)نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$ .

أ. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

ب. حدد الأعداد الحقيقية $a$ ; $b$ ; $c$ حيث :

$P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$ .

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ .

**أجوبة :** 1) $z^2-8z+17=0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$.

حلا المعادلة $(E)$ هما: $z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$ و

$z_2=\overline{z_1}=4-i$.

إذن: $S=\{4-i;4+i\}$

2)أ) ليكن : $z_0 = bi$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة.

لدينا اذن : $z_0^3+(-8+i)z_0^2+(17-8i)z_0+17i=0$

يعني : $(bi)^3+(-8+i)(bi)^2+(17-8i)(bi)+17i=0$

يعني : $-ib^3-(-8+i)b^2+17bi+8b+17i=0$

يعني : $-ib^3+8b^2-ib^2+17bi+8b+17i=0$

يعني : $8b^2+8b+i(-b^3-b^2+17b+17)=0$

يعني : $\begin{cases}8b^2+8b=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}8b(b+1)=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}b=0 ou b=-1\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

$b=0$ لا يحقق المعادلة الثانية لأن : $-0^3-0^2+170+17\neq 0$

$b=-1$ يحقق المعادلة الثانية لأن :

$-(-1)^3-(-1)^2+17(-1)+17=0$

ومنه $b=-1$ اذن : $z_0=(-1)i=-i$ حل تخيلي صرف للمعادلة.

2ب) $(z+i)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z)=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

بالمقارنة مع $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

نجد أن : $\begin{cases}a=1\\b+ai=-8+i\\c+bi=17-8i\\ci=17i\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}a=1\\b=-8\\c-8i=17-8i\\c=17\end{cases}$

ومنه : $a=1$ و $b=-8$ و $c=17$ وبالتالي الكتابة الجديدة ل $P(z)$

هي : $P(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$

2ج) $P(z)=0$ يعني $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

يعني $z^2-8z+17=0$ أو $z+i=0$

يعني $z_1=4+i$ أو $z_2=4-i$ أو $z_0=-i$

وبالتالي : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

**تمرين6:** نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة:

$(E): z^3+2(\sqrt3-1)z^2+4(1-\sqrt3)z-8=0$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة $(E)$
2. بين أن لكل $z$ من $\mathbb{C}$, لدينا:

$z^3+2(\sqrt3-1)z^2+4(1-\sqrt3)z-8=(z-2)(z^2+2\sqrt3z+4)$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$ .

**أجوبة :** 1)

$2^3+2(\sqrt3-1)2^2+4(1-\sqrt3)2-8=8+8(\sqrt3-1)8+8(1-\sqrt3)-8$

$=8+8\sqrt3-8+8-8\sqrt3-8=0$

ومنه : العدد 2 حل للمعادلة $(E)$

2) $(z-2)(z^2+2\sqrt3z+4)=z^3+2\sqrt3z^2+4z-2z^2-4\sqrt3z-8$

$=z^3+2(\sqrt3-1)z^2+4(1-\sqrt3)z-8$

3) $P(z)=0$ يعني $(z-2)(z^2+2\sqrt3z+4)=0$

يعني $z^2+2\sqrt3z+4=0$ أو $z-2=0$

يعني $z^2+2\sqrt3z+4=0$ أو $z=2$

نحل المعادلة : $z^2+2\sqrt3z+4=0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt3)^2-4(4)=12-16=(2i)^2$.

حلا المعادلة $z^2+2\sqrt3z+4=0$

هما: $z_1=\frac{2\sqrt3+2i}{2}=\sqrt3+i$ و $z_2=\overline{z_1}=\sqrt3-i$.

إذن: مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي : $S=\{\sqrt3-i;\sqrt3+i;2\}$

**تمرين7:** حدد الترميز الأسي للعدد العقدي $z=\sqrt2+i\sqrt2$

**الجواب :** ليكن: , لدينا: $|z|=2$ و $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن

$z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو الترميز الأسي للعدد العقدي $z$

**تمرين8:** أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

1) $z_1=2+2i$ 2) $z_2=1-i\sqrt3$ 3) $z_1\times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

**أجوبة :** 1) $z_1=2+2i$ لدينا: $|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt8=2\sqrt2$

$2+2i=2\sqrt2\left(\frac{1}{\sqrt2}+i\frac{1}{\sqrt2}\right)=2\sqrt2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $z_1=2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2=1-i\sqrt3$ لدينا: $|z_2|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt3)^2}=\sqrt4=2$

$1-i\sqrt3=2\left(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ومنه : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1\times z_2=2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}\times2e^{-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt2e^{-i\frac{\pi}{12}}$

4) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2\sqrt2}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)}=2\sqrt2e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt2e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12}=\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2e^{-i12\frac{\pi}{3}}=2e^{-4i\pi}$

**تمرين9:** بين أن: $\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+1}{2}$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** لديناحسب صيغ أولير : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و

$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta$

و منه:

$$\cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2+2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(e^{2i\theta}+e^{-i2\theta}\right)+2\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\cos 2\theta+2)=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

**تمرين10:** بين أن: $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ و $\sin n\theta=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ و منه:

$$\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2-2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{2i\theta}+e^{-i2\theta}\right)-2\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(2\cos 2\theta-2)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

**ملحوظة:** لكل n من $\mathbb{N}$ و $\theta$ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin(n\theta) \text{ و } e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$$

**تمرين11:** بين أن: $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ إذن $\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$

و منه:

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

ونعلم أن: $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ و منه:

$$=\frac{1}{8}(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

**تمرين12:** بين أن: $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير :

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و منه:

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

ونعلم أن: $2i\sin n\theta=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$

$$=-\frac{1}{8i}(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

**تمرين13:** بين أن: $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير :

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و منه: $\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4-4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

لدينا: $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ و منه:

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}(-4\times 2\cos 2\theta+6+2\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}(-4\cos 2\theta+3+\cos 4\theta)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

**تمرين14:** بين أن: $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$$

و منه: $\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

إذن: $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

**تمرين15:** بين باستعمال صيغة موافر أن:

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

و أن: $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ لكل $\theta$ من $\mathbb{R}$

**الجواب :** لدينا حسب صيغة موافر:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

و لدينا أيضا:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3(\cos\theta)^2 i\sin\theta+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

و منه:

$$\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

إذن: $\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

و $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ (حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$$
$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

**تمرين16:** حل في $\mathbb{C}$ : **-1** $2Z^2-2Z+5=0$ **-2** $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

**الأجوبة: -1** حل المعادلة : $2Z^2-2Z+5=0$

لدينا : $\Delta=-36$ $z_2=\frac{2+i\sqrt{36}}{4}$ ; $z_1=\frac{2-i\sqrt{36}}{4}$

إذن : $\boxed{S=\left\{\frac{1-3i}{2};\frac{1+3i}{2}\right\}}$

**-2** $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

نلاحظ أن : $1$ يعدم $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

و منه : $z-1$ يقسم $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

نجد : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=(Z-1)\left(3Z^2+2\right)$

حل المعادلة : $3Z^2+2=0$

إذن $Z^2=-\frac{2}{3}$ : $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ أو $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

ومنه : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

يعني : $Z=1$ أو $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ أو $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

إذن : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\frac{2}{3}};-i\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}}$

**تمرين17:** $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

1) بين أن $(E): P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0$ يجب تحديده

2) حل في $\mathbb{C}$ : $P(Z)=0$

**الأجوبة: 1)** لنبين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا

نعتبر : $z_0=ib$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow(ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$
$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}16b^2+16b=0\\-b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$
$$\boxed{P(z_0)=0\Leftrightarrow b=-1}$$

و منه : $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0=-i$

2) حل المعادلة $P(Z)=0$ في $\mathbb{C}$ :

بما أن : $-i$ جذر لـ $P(Z)$ فإن :

$$P(Z)=(z+i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$$
$$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$$

و بما أن : $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

فإن : $\boxed{\alpha=-16}$ و $\boxed{\beta=89}$

و منه : $P(Z)=(z+i)\left(z^2-16z+89\right)$

حل المعادلة : $z^2-16z+89=0$

نجد : $\Delta=-100$ ومنه $z=8-5i$ او $z=8+5i$

إذن: مجموعة حلول المعادلة $(E)$ هي: $S=\{-i;8-5i;8+5i\}$

**تمرين18:** نعتبر : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1)أ)حدد الشكل الأسي لـ $z$ ب)حدد الشكل الجبري لـ $z$

2)استنتج $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

**الأجوبة:** 1) أ)تحديد الشكل الأسي : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$$z=e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

ب)تحديد الشكل الجبري:

$$z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$
$$\boxed{z=\frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$$

2)من أ) و ب) : $\cos\frac{-11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$ و $\sin\frac{-11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$

إذن $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

# المصفوفات- المحددات

**تمهيد:** علم المصفوفات هو علم قائم بذاته حيث تلعب المصفوفات دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وغير الخطية في فروع الرياضيات المختلفة . فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات. فمثلاً نجد أن المصفوفات هي الأساس في صياغة نماذج المنتج والمستخدم وكذلك صياغة متسلسلات ماركوف. ويعتبر الرياضي هاملتون والرياضي كابيلي أول من أدخل مفهوم المصفوفات.

**2-1 تعريف المصفوفة من المرتبة** $m\times n$: لتكن لدينا المجموعة $X$ (مجموعة غير خالية) ولتكن المجموعتان : $F=\{1,2,3,...,n\}$ و $E=\{1,2,3,...,m\}$ حيث $m,n$ أعداد طبيعية و $(m\geq 1, n\geq 1)$ فإن كل تطبيق من الشكل : $f:E\times F\to X$ يسمى $m\times n$ مصفوفة أو مصفوفة مرتبتها $m\times n$ أو مصفوفة من الشكل $(m,n)$ وذلك من المجموعة $X$.

إذا رمزنا للصورة المباشرة للثنائية $(i,j)$ وفق التطبيق $f$ بالرمز $a_{ij}$، وذلك من أجل أي عنصر $(i,j)$ من الجداء $E\times F$ فإن العناصر التالية:

$a_{11},a_{12},...,a_{1n},a_{21},a_{22},...,a_{2n},...,a_{m1},a_{m2},...,a_{mn}$ تعين تماماً التطبيق $f$ .

لنرتب العناصر $f(E\times F)$ في $m$ من الصفوف و $n$ من الأعمدة بحيث يقع العنصر $a_{ij}$ في الصف الذي رقمه $(i)$ والعمود الذي رقمه $(j)$ كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix};(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n) \qquad (1-2)$$

أو اختصاراً :

$$A=[a_{ij}]_{(m.n)} \qquad (2-2)$$

وتسمى بالمصفوفة $m\times n$ أو المصفوفة من المرتبة $(m,n)$ ونرمز لها بأحرف كبيرة مثل $A,B,C,...$ وتسمى المصفوفة المكونة من صف واحد و $n$عمود بالمصفوفة الصفية ( أو مصفوفة الصف ) وهي من المرتبة $(1,n)$ وتسمى المصفوفة المكونة من $m$ صف وعمود واحد **بمصفوفة العمود** وهي من المرتبة $(m,1)$

وفي حالة تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف $(m = n)$ فإنها تسمى **بالمصفوفة المربعة** أو نقول من المرتبة $n$ مثلاً ، كما تسمى العناصر $(i = 1,2,...,n)$ $a_{ii}$ فيها **بالقطر الرئيسي** .

**ملاحظة(1):** في الحالة العامة ليس من الضروري أن تكون عناصر المصفوفة أعداداً فربما تكون دوال أو كثيرات حدود أو... ، وسنهتم في دراستنا بالمصفوفات التي عناصرها أعداد، وبهذا نقول لدينا مصفوفة $A$ معرفة على حقل الأعداد الحقيقية أو العقدية.

**ملاحظة(2):** يمكن تعريف المصفوفة على أنها جدول مؤلف من مجموعة عناصر مرتبة بشكل صفوف عددها $m$ وأعمدة عددها $n$.

**أمثلة:**

1−

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ مؤلفة من ثلاثة صفوف وعمودين فهي من الشكل $(3,2)$، والمصفوفة $B$ مؤلفة من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة فهي من الشكل $(3,3)$، والمصفوفة $C$ مؤلفة من صف واحد وأربعة أعمدة وتسمى بمصفوفة الصف فهي من الشكل $(1,4)$، والمصفوفة $D$ مؤلفة من عمود واحد وأربعة صفوف وتسمى بمصفوفة العمود فهي من الشكل $(4,1)$ .

2−

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ في هذا المثال فيها $(m=n)$ أي مربعة من المرتبة $(3,3)$ أو اختصاراً من المرتبة 3، كما نلاحظ أن هذه المصفوفة والمصفوفة $B$ من المثال السابق لهما نفس المرتبة $(3,3)$ ( كل منهما تحوي عدداً من الصفوف يساوي 3 وعدداً من الأعمدة يساوي 3).

3-

$$A=\begin{bmatrix} 1+i \\ 4i \\ -5+2i \\ 3i \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ من المرتبة $(4,1)$ وعلى حقل الأعداد العقدية $C$ وهي مصفوفة عمود.

**ملاحظة(3):** سنرمز لجملة المصفوفات من المرتبة $(m,n)$ وعلى حقل الأعداد $K$ بالرمز $M_{(m,n)}(K)$.

من خلال الأمثلة السابقة في المثال (1): $A\in M_{(3,2)}(R)$، $B\in M_{(3,3)}(R)$، $C\in M_{(1,4)}(R)$ $D\in M_{(4,1)}(R)$. في المثال (3): $A\in M_{(4,1)}(C)$.

**2-2 تساوي مصفوفتين:** نقول عن مصفوفتين $A=[a_{ij}]_{(m.n)}$، $B=[b_{ij}]_{(p.q)}$ إنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا تساوت كل العناصر المتقابلة في المصفوفتين، وبكلام آخر إذا كان:

1- من مرتبة واحدة اي $m=p$ ، $n=q$ .

2- العناصر المتقابلة في المصفوفتين متساوية أي: $a_{ij}=b_{ij};(1\le j\le n,1\le i\le m)$.

ونكتب اختصاراً : $A=B\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij};\forall i,j(1\le j\le n,1\le i\le m)$

**أمثلة:**

1- إذا كان:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

فإن: $a_{11}=-7$ ، $a_{12}=0$ ، $a_{21}=3$ ، $a_{22}=4$.

2- عين قيمة $\lambda$ لتكون المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \lambda^2-\lambda & 2 \\ \lambda & 3 \\ 5 & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

على حقل الأعداد الحقيقية $R$ متساويتين.

بما أن المصفوفتين من مرتبة واحدة $(3,2)$ لذلك نكتفي بتحقق شرط تساوي العناصر المتقابلة:

$$\lambda^2 - \lambda = 2 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

ومنه:

$\lambda = 2 \;,\; \lambda = -1$ ، وبالتالي فإن $\lambda = -1$ .

**2-3 منقول مصفوفة:** إن منقول مصفوفة $A = [a_{ij}]_{(m.n)}$ هو مصفوفة جديدة ناتجة من جعل الصفوف أعمدة (أو الأعمدة صفوفاً) ونرمز لها بالرمز $A^T$ ونعرفها بالشكل التالي:

$$A^T = [a_{ji}]_{(n.m)} \qquad (3-2)$$

( أي إذا كانت المصفوفة $A$ من المرتبة $(m,n)$ فإن منقولها من المرتبة $(n,m)$ ).

**ملاحظة(4):** لا يؤثر منقول مصفوفة في قيمة المحدد بمعنى أن: $|A| = |A^T|$ وذلك للمصفوفات المربعة(كما سيمر لاحقاً).

**مثال:**

أوجد منقول المصفوفة $A$ على حقل الأعداد العقدية:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ 5-i & 5 \\ 6+i & i \\ 3i+1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1+i & 5-i & 6+i & 3i+1 \\ -3i & 5 & i & 0 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة(5):** من تعريف منقول مصفوفة نلاحظ أن:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T ; A, B \in M_{(m,n)}(K)$

3) $(\alpha A)^T = \alpha A^T ; \alpha \in K$

4) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T ; A \in M_{(m,n)}(K), B \in M_{(n,p)}(K)$

**مثال:**

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A^T, B^T, A+B, (A+B)^T$

**الحل:**

$$A+B=\begin{bmatrix}1&5&2\\4&1&2\\4&5&4\end{bmatrix}\ ,\ (A+B)^T=\begin{bmatrix}1&4&4\\5&1&5\\2&2&4\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2&2&1\\3&2&2\\1&1&1\end{bmatrix}\ ,\ B^T=\begin{bmatrix}-1&2&3\\2&-1&3\\1&1&3\end{bmatrix}$$

### 2-4 المصفوفات الخاصة:

### 2-4-1 تعريف الأعداد العقدية المترافقة وخواصها:

١) إذا كان $a$ و $b$ عددين حقيقين وكان $i=\sqrt{-1}$ فإن $z=a+bi$ يسمى عدداً عقدياً . ويسمى العددان العقديان $a+bi$ و$a-bi$ عددين مترافقين ، كل منهما مرافق للآخر.

٢) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=\overline{z_1}=a-bi$ فإنه يكون $\overline{z_2}=\overline{\overline{z_1}}=\overline{a-bi}=a+bi$

( مرافق المرافق لعدد $z$ هو العدد $z$ نفسه ).

٣) إذا كان $z_1=a+bi$ و $z_2=c+di$ فإنه يكون:

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i\ ،\ \overline{z_1+z_2}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

( المرافق لمجموع عددين عقديين هو مجموع مرافقي هذين العددين )

$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i\ \Rightarrow$$

$$\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i=(a-bi)+(c-di)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

( المرافق لحاصل جداء عددين مركبين هو حاصل ضرب مرافقيهما )

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}2-i&i&1+i\\5&-i&1+6i\\0&1-i&3\end{bmatrix}\Rightarrow\bar{A}=\begin{bmatrix}2+i&-i&1-i\\5&i&1-6i\\0&1+i&3\end{bmatrix}$$

**2−4−2 تعريف مرافق منقول مصفوفة:** هو مصفوفة $A^*$ المحققة لـ $A^* = \overline{(A^T)}$ .

**2−4−3 مصـــفوفات الصف والعمود:** إن المصفوفة المؤلفة من $m$ صفاً وعموداً واحداً $(m,1)$

تسمى مصفوفة عمود كالمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ ..... \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad (4-2)$$

أما المصفوفة المؤلفة من $n$ عموداً وصفاً واحداً $(1,n)$ تسمى بمصفوفة الصف كالمصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ..... & b_{1n} \end{bmatrix} \qquad (5-2)$$

**ملاحظة(6):** تسمى هذه المصفوفات بمتجهات العمود أو الصف.

**2−4−4 المصـــفوفة الصفرية:** تكون جميع عناصرها أصفاراً ( صفر الحقل $K$ ) ونرمز لها بالرمز :

$$O_{m,n} \text{ أو } a_{ij} = 0; (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \qquad (6-2)$$

**ومن أهم خصائصها:**

$$A_{m,n} + O_{m,n} = A_{m,n} \Leftrightarrow A - A = 0 \text{ ، } O_{m,n} \times A_{n,1} = O_{m,1} \text{ ، } A_{m,1} \times O_{1,n} = O_{m,n}$$

**مثال:**

$$O_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\; O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**2−4−5 المصـــفوفة المربعـــة:** إذا كـان $(m = n)$ في المصـفوفة $A = [a_{ij}]$ فتسـمى المصـفوفة بالمربعـة ونقـول إنهـا مـن المرتبة $n$ بدلاً من $(n,n)$. وتسمى $A = [a_{ij}]$ بالمصفوفة المستطيلة إذا كان $(m \ne n)$ .

**2−4−6 المصفوفة القطرية:** تكون المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]_{(n.n)}$ قطرية إذا كان:

$(a_{ij} = 0; i \ne j)$. أي أن جميع عناصر المصفوفة أصفاراً ماعدا عناصر قطرها الرئيسي وهي: $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$

أي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (7-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A=diag[a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}]$$

**2-4-7 المصفوفة السلمية:** هي مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية وتساوي $\lambda \in K$ وبقية العناصر معدومة ونكتبها على النحو التالي:

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (8-2)$$

واختصاراً نكتب:

$$A=[a_{ij}];a_{ij}=\begin{cases} 0 & ; \quad i\neq j \\ \lambda & ; \quad i=j \end{cases} \qquad (9-2)$$

**2-4-8 المصفوفة المتناظرة:** تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متناظرة إذا كان:

$(a_{ij}=a_{ji};\forall i,j)$ وذلك من أجل جميع قيم $(i,j=1,2,...,n)$ أي إذا كان $A=A^T$ .

إن المصفوفة المتناظرة هي مصفوفة مربعة لأنها تحقق: $(a_{ij}=a_{ji};\forall i,j=1,2,...,n)$

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & g \end{bmatrix} \;,\; B=\begin{bmatrix} 1+i & 4i & 2-i \\ 4i & -3 & -6i \\ 2-i & -6i & 1+2i \end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ متناظرة.

**2-4-9 المصفوفة المتخالفة (ذات التناظر العكسي):** تكون المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(n.n)}$ متخالفة إذا كان: $(a_{ij}=-a_{ji};\forall i,j=1,2,...,n)$ ، ( أي إذا كان: $A=-A^T$ ).

عندما يكون $i=j$ فإن ( $a_{ii}=0;\forall i$ ) وذلك لأن:

$$a_{ii}=-a_{ii}\Rightarrow 2a_{ii}=0\Rightarrow a_{ii}=0;\forall i$$

أي أن عناصر القطر الرئيسي فيها يجب أن تكون أصفاراً.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} 0 & 4i & 2-i \\ -4i & 0 & -6i \\ -2+i & 6i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ متخالفة.

**2−4−10 المصفوفة المثلثية العليا(السفلى):** إذا كانت جميع العناصر $\left(a_{ij}=0; i>j\right)$ ،أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة (إذا كانت جميع العناصر $\left(a_{ij}=0; i<j\right)$ أي إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة).

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \ , \ B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$$

$A$ عليا و $B$ سفلى.

**ملاحظة(7):** لمعرفة المصفوفة شاذة أو غير شاذة يجب أن يكون قيمة محددها غير معدوم ( سوف نعرف محدد المصفوفة لاحقاً ).

**مثال:**

بفرض لدينا المصفوفة المثلثية:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

بما أن $A$ مصفوفة مثلثية فإن محددها عبارة عن جداء عناصر قطرها الرئيسي:

$$|A| = 5\cdot 6\cdot 7 = 210 \neq 0$$

وبالتالي المصفوفة $A$ ليست شاذة لأن محددها مخالفاً للصفر أي $|A|\neq 0$.

**2−4−11 المصفوفة الواحدية:** هي مصفوفة سلمية عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد والعناصر غير القطرية تكون أصفاراً ونرمز لها بالرمز $I_n$.

واختصاراً نكتب:

$$A=[a_{ij}];a_{ij}=\begin{cases}0 & ; & i\neq j\\ 1 & ; & i=j\end{cases}\qquad(10-2)$$

**مثال:**

$$I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},I_1=[1]=1$$

الخاصة الهامة للمصفوفة الواحدية هي: $I_{n,n}\times A_{n,m}=A_{n,m}\times I_{m,m}=A_{n,m}$

**2−4−12 المصفوفة المرافقة لمصفوفة:** هي مصفوفة عناصرها هي العناصر المرافقة لعناصر المصفوفة العقدية $A$ ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

**2−4−13 المصفوفة الهرميتية:** تكون المصفوفة العقدية هرميتية إذا كان:

$$A=A^*=\overline{(A^T)}\qquad(11-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij}=\overline{a_{ji}};i,j=1,2,...,n)$.

**ملاحظة(8):** بما أن $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$ عندما $i=j$ فإنه يجب أن تكون $a_{ii}\in R;\forall i$ (أي عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة الهرميتية يجب أن تكون أعداداً حقيقية دوماً).

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}1&2-3i&3+4i\\2+3i&0&4-5i\\3-4i&4+5i&3\end{bmatrix}$$

$A$ هرميتية: $A=A^*=\overline{(A^T)}$.

**2−4−14 المصفوفة الهرميتية المتخالفة:** تكون المصفوفة العقدية هرميتية متخالفة إذا كان :

$$A=-A^*=-\overline{(A^T)}\qquad(12-2)$$

أي المصفوفة الهرميتية المتخالفة هي مصفوفة مربعة بحيث: $(a_{ij}=-\overline{a_{ji}};i,j=1,2,...,n)$.

**ملاحظة(9):** بما أن $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$ عندما $i=j$ فإنه يجب أن تكون عناصر القطر الرئيسي

في المصفوفة الهرميتية المتخالفة أعداداً تخيلية بحتة أو أصفاراً.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} 3i & 3+4i & 4-5i \\ -3+4i & -4i & 5+6i \\ -4-5i & -5+6i & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}i & \frac{3}{2}+2i & 2-\frac{5}{2}i \\ -\frac{3}{2}+2i & -2i & \frac{5}{2}+3i \\ -2-\frac{5}{2}i & -\frac{5}{2}+3i & 0 \end{bmatrix}$$

كل من $A$ و $B$ هرميتية متخالفة: $A=-A^{*}=-\overline{(A^{T})}\ ,\ B=-B^{*}=-\overline{(B^{T})}$.

**ملاحظة(10):** المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

**ملاحظة(11):** المصفوفة الهرميتية الحقيقية هي مصفوفة متناظرة والمصفوفة الهرميتية المتخالفة الحقيقية هي متناظرة متخالفة.

**ملاحظة(12):** كل عدد حقيقي أو عقدي يمكن النظر إليه كمصفوفة من الشكل $(1,1)$ ونكتب $A=[a_{11}]$ نسميها المصفوفة وحيدة العنصر.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & -7 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 7 & 0 & 8 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $A$ مربعة ومثلثية سفلى− المصفوفة $B$ مثلثية عليا− المصفوفة $C$ سلمية − المصفوفة $D$ متناظرة.

$$E=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -8 \\ -5 & 8 & 0 \end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & -5 \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} i & 1-i \\ -1-i & 0 \end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $E$ متناظرة متخالفة – المصفوفة $F$ هرميتية – المصفوفة $G$ هرميتية متخالفة – المصفوفة $I$ أو $(I_3)$ واحدية.

**2–4–15 المصفوفة شبه القطرية:** نسمي المصفوفة المربعة المجزأة $A$ والتي ينطبق قطرها الرئيسي على الأقطار الرئيسية لعدد من المصفوفات المربعة الجزئية $A_1A_2,...,A_k$ المصفوفة شبه القطرية حيث $A_1A_2,...,A_k$ مصفوفات جزئية مربعة متساوية الدرجة وباقي عناصر المصفوفة $A$ عبارة عن أصفار.

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_k \end{bmatrix}$$

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة $A$ شبه قطرية حيث عناصر قطرها الرئيسي ينطبق على الأقطار الرئيسية للمصفوفات المربعة الجزئية :

$$A_1=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \;,\; A_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \;,\; A_3=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

**2–5 مقلوب مصفوفة:** وهي مصفوفة تنتج من المصفوفة $A$ ونرمز لها بالرمز $A^{-1}$، والمصفوفة المستطيلة يكون لها مقلوبان من اليمين وتحقق العلاقة:

$$A_{m,n}\times {A_{n,m}}^{-1}=I_{m,m} \qquad (13-2)$$

ومن اليسار وتحقق العلاقة:

$$ {A_{n,m}}^{-1}\times A_{m,n}=I_{n,n} \qquad (14-2)$$

وبالتالي إذا كانت المصفوفة مربعة $(m=n)$ فإن للمصفوفة مقلوباً واحداً هو: ${A_{n,n}}^{-1}$ يحقق العلاقة:

$$A_{n,n}\times {A_{n,n}}^{-1}={A_{n,n}}^{-1}\times A_{n,n}=I_{n,n} \qquad (15-2)$$

الذي يجب ذكره هو أن وجود المقلوب يرتبط بشروط سنذكرها لاحقا ، أما بالنسبة للمصفوفة المربعة فإن الشرط هو $|A| \neq 0$ ( محدد $A$ لا يساوي الصفر ) أي إن **المصفوفة** $A$ **نظامية** (غير شاذة). وإذا كان $|A| = 0$ فإن $A$ ليس لها مقلوب وتكون $A$ **مصفوفة شاذة** (أو فريدة).

**2-5-1 مبرهنة:** إذا كان للمصفوفة المربعة $A$ مقلوب فهذا المقلوب وحيد ويرمز له بالرمز $A^{-1}$ بحيث يكون:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \qquad (16-2)$$

**الإثبات:**

لنفرض أن $B$ و $C$ مقلوبا المصفوفة المربعة $A$ هذا يعني :

$$A.B = B.A = I$$
$$A.C = C.A = I$$

لكن:

$$C.A.B = C.(A.B) = C.I = C$$
$$C.A.B = (C.A).B = I.B = B$$

بالمقارنة نجد: $B = C$ ، مما يعني أن للمصفوفة المربعة مقلوب وحيد إن وجد ( في حال كان $|A| \neq 0$ ).

**2-6 خصائص المصفوفات القطرية والمثلثية:**

1- إذا كانت $A$ و $B$ مصفوفتين قطريتين لهما نفس المرتبة فإن:

$AB, BA, A-B, A+B$ هي مصفوفات قطرية ، كذلك فإن $A^{-1}$ تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار تماماً ، وتكون $A^{-1}$ قطرية وعناصر قطرها مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة $A$ .

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

2- إذا كانت $A$ و $B$ مصفوفتين مثلثيتين عليا(سفلى) لهما نفس المرتبة عندئذٍ تكون المصفوفات:

$AB, BA, A-B, A+B$ مصفوفات مثلثية ، كذلك فإن $A^{-1}$ تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خالية من الأصفار

تماماً وتكون $A^{-1}$ قطرية وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة $A$ .

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

إن:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 4 & 2\\ 0 & \frac{1}{2} & 6\\ 0 & 0 & \frac{1}{9}\end{bmatrix}$$

3- إذا كانت $A$ مصفوفة قطرية أو مثلثية (عليا أو سفلى) فإن محدد المصفوفة $A$ هو حاصل ضرب عناصر القطر

الرئيسي أي أن : $|A|=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

**2-7 المجموع المباشر:**

إذا كان $A_1, A_2, ..., A_s$ مصفوفات مربعة مرتبة كل منها على الترتيب $m_1, m_2, ..., m_s$ فإن المصفوفة القطرية:

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & 0 & ... & 0\\ 0 & A_2 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & A_s\end{bmatrix}=diag(A_1, A_2, ..., A_s) \qquad (17-2)$$

تسمى المجموع المباشر للمصفوفة $A_i$

**مثال:**

إذا كانت:

$$A_1 = [2] \ , \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \ , \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

مصفوفات ، فأوجد المجموع المباشر للمصفوفات $A_1, A_2, A_3$

**الحل:**

$$diag(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة(١٣):** إذا كانت $A = diag(A_1, A_2, ..., A_n), B = diag(B_1, B_2, ..., B_n)$ حيث $A_i$ و $B_i$ من مرتبة واحدة لقيم $(i = 1, 2, ..., s)$ فإن:

$$AB = diag(A_1B_1, A_2B_2, ..., A_sB_s) \qquad (18-2)$$

## 2-8 العمليات على المصفوفات:

**1- جمع وطرح المصفوفات:**

إذا كانت المصفوفتان: $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ على حقل واحد $K$ ومن مرتبة واحدة $(m, n)$ فإن:

$$\left. \begin{aligned} C = [c_{ij}] = A_{m,n} + B_{m,n}; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; \forall i, j \\ D = [d_{ij}] = A_{m,n} - B_{m,n}; d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}; \forall i, j \end{aligned} \right\} \qquad (19-2)$$

**مثال:**

إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A + B \ , \ A - B$

**الحل:**

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 7 \\ 10 & 1 & 8 \end{bmatrix} \ , \ D = A - B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة(14):** إن عملية جمع المصفوفات على الجملة $M_{(m,n)}(K)$ هي عملية داخلية تتصف بما يلي:

1) المصفوفة الصفرية $0_{m,n}$ عنصر حيادي بالنسبة للجمع: $0+A=A+0=A$.

2) عملية الجمع تجميعية: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3) لكل مصفوفة نظير بالنسبة للجمع هو $(-A)$ حيث: $A+(-A)=(-A)+A=0$.

4) عملية الجمع تبديلية: $A+B=B+A$.

ومنه فإن الجملة $M_{(m,n)}(K)$ تشكل زمرة تبديلية بالنسبة لعملية جمع المصفوفات.

كذلك إذا كانت $\forall \lambda,\mu \in K \;\&\; A,B \in M_{(m,n)}(K)$ فإن:

5) $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda A+\mu A$

6) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

**لنثبت صحة (6) :**

$$\lambda(A+B)=[\lambda(a_{ij}+b_{ij})]=[\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij})]=[\lambda a_{ij}]+[\lambda b_{ij}]=\lambda[a_{ij}]+\lambda[b_{ij}]=\lambda A+\lambda B$$

2- **ضرب المصفوفات:**

لتكن $A=[a_{ij}]\in M_{n,m}(K)$ ، $B=[b_{ij}]\in M_{m,l}(K)$ مصفوفتين ، نعرف جداء المصفوفتين $A,B$ بأنه مصفوفة جديدة $C$ معرفة بالشكل التالي:

$$C=A\cdot B=[c_{ij}]\in M_{n,l}(K) \qquad (20-2)$$

وعناصر المصفوفة $C$ معرفة كما يلي:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot b_{kj}\,;\forall i,j \qquad (21-2)$$

أي أن كل عنصر $c_{ij}$ من عناصر مصفوفة الجداء يساوي مجموع جداءات العناصر الواقعة في الصف $i$ من المصفوفة $A$ بعناصر العمود $j$ من المصفوفة $B$.

أي أنه لإجراء عملية الضرب ، يجب أن يكون عدد أعمدة $A$ يساوي عدد صفوف المصفوفة $B$ ونقول إن $B$ قابلة للضرب في $A$ من اليسار (أي لحاصل ضرب مصفوفتين يجب أن تكون المصفوفتان متوافقتين بالنسبة لعملية الضرب).

**مثال:**

لتكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}-2&1&4\\1&2&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $C=A\cdot B$

**الحل:**

$$C=C_{31}=A_{33}\cdot B_{31}=\begin{bmatrix}(-2)(1)+1(-1)+4(-2)\\1(1)+2(-1)+3(-2)\\0(1)+1(-1)+(-1)(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11\\-7\\1\end{bmatrix}$$

حيث:

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=(-2)(1)+1(-1)+4(-2)=-11$$

وبشكل مشابه بالنسبة لـ $c_{21}$ ، $c_{31}$.

**ملاحظة(15):** عملية الضرب في المصفوفات غير تبديلية.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}2&1&3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$$

إن:

$$A\cdot B=2(1)+1(4)+3(3)=15$$

لكن:

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2&1&3\\8&4&12\\6&3&9\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن: $A\cdot B\neq B\cdot A$

**2-9 قوانين هامة:**

1) $A(B+C)=AB+AC$

2) $(A+B)C=AC+BC$

3) $A(BC)=(AB)C=ABC$

4) $AB\neq BA$ (بشكل عام)

5) $kA=[ka_{ij}]$ ( $k$ ثابت )

6) $k(A\pm B)=kA\pm kB$

7) $(k_1\pm k_2)A=k_1A\pm k_2A$

8) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$

9) $I\cdot A=A\cdot I=A$

10) $0\cdot A=A\cdot 0=0$

**لنثبت صحة (1):**

بفرض: $A=[a_{ij}]_{n,m} \quad , \quad B=[b_{ij}]_{m,l} \quad , \quad C=[c_{ij}]_{m,l}$

فإن: $(B+C)_{m,l}=[b_{ij}+c_{ij}]_{m,l}$

$$A(B+C)=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kl}+c_{kl})\right]=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}+\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kl}\right]=$$

$$=\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right]+\left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kl}\right]=AB+AC$$

وبشكل مشابه يمكن إثبات بقية القوانين.

**ملاحظة(16):** إذا كان $AB=0$ فهذا لا يعني أن أي من المصفوفتين $A$ أو $B$ يجب أن تكون مصفوفة صفرية (جداء مصفوفتين يمكن أن يساوي المصفوفة الصفرية دون أن يكون أي منهما مصفوفة صفرية).

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \; , \; B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2+6-8 & 4-2-2 & -2+8-6 \\ 1+3-4 & 2-1-1 & -1+4-3 \\ 3+9-12 & 6-3-3 & -3+12-9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0$$

**ملاحظة(17):** يمكن التحقق من صحة عملية الضرب إذا أخذنا الترتيب التالي لمجموع الصفوف ومجموع الأعمدة.

**مثال:**

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}_{(2,3)} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 13 & 14 \\ 25 & 23 \end{bmatrix}_{(2,2)}$$

| | | | | $B$ | | + |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 2 | 1 | 3 |
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| | | | | 3 | 3 | 6 |
| $A$ | 2 | 3 | 2 | 13 | 14 | 27 |
| | 4 | 2 | 5 | 25 | 23 | 48 |

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الصفوف:

$$3(2)+3(3)+6(2)=27$$
$$3(4)+3(2)+6(5)=48$$

| | | | | $B$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 2 | 1 |
| | | | | 1 | 2 |
| | | | | 3 | 3 |
| $A$ | 2 | 3 | 2 | 13 | 14 |
| | 4 | 2 | 5 | 25 | 23 |
| | 6 | 5 | 7 | 38 | 37 |

التحقق من صحة حاصل الضرب بواسطة جمع الأعمدة:

$$6(2)+5(1)+7(3)=38$$
$$6(1)+5(2)+7(3)=37$$

3− **قسمة المصفوفات:** إن العملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا كانت $B^{-1}$ موجودة فإن العملية $AB^{-1}$ أو $B^{-1}A$ هي المعرفة في المصفوفات وعليه فإن كان المطلوب حل المعادلة $AX=B$ في المتغير $x$ فإنه إذا كانت $A^{-1}$ موجودة فإن $X=A^{-1}\cdot B$.

4− **تجزئة المصفوفات للعمليات المختلفة:** يمكن تقسيم أو تجزئة المصفوفة إذا كانت مرتبتها كبيرة وذلك إلى مصفوفات جزئية ، ويمكن استخدام هذه التجزئة في العمليات المختلفة على المصفوفات.

**أمثلة:**

−1

$$A=[a_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right]$$

وأيضاً:

$$B=[b_{ij}]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22}\end{array}\right]$$

مثلاً عملية الجمع تتم بالشكل:

$$\left[\begin{array}{c:c} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ \hdashline A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22}\end{array}\right]$$

وعملية الضرب كالتالي:

$$A\cdot B=\left[\begin{array}{c:c} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ \hdashline A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{array}\right]$$

2− لنأخذ المصفوفة التالية:

$$A=\left[\begin{array}{ccc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{array}\right]$$

من خلال التقسيم حصلنا على المصفوفات الجزئية التالية:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{bmatrix}, A_{13}=\begin{bmatrix} a_{16} \\ a_{26} \end{bmatrix}$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, A_{23}=\begin{bmatrix} a_{36} \\ a_{46} \end{bmatrix}$$

3− احسب الجداء $A\cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ \hdashline 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 1 & 5 \\ \hdashline -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} \\ A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_{21}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 35 \\ 1 & 19 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

4− احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

## 2−10 تعريف المحدد من المرتبة الثانية:

بفرض لدينا المصفوفة من المرتبة الثانية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (22-2)$$

يعرف محدد هذه المصفوفة من المرتبة $2 \times 2$ على أنه القيمة العددية التالية:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \qquad (23-2)$$

أي أن محدد مصفوفة من المرتبة الثانية يساوي حاصل جداء عنصرا قطرها الرئيسي مطروحاً منه حاصل جداء عنصري قطرها الثانوي.

**2−11 فك المحدد عن طريق العوامل:**

**2−11−1 المتمم الجبري (عامل عنصر):** بفرض $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ ، نسمي صغير العنصر $a_{ij}$

مضروباً بالإشارة $(-1)^{i+j}$ بالمتمم الجبري للعنصر $a_{ij}$ ونرمز له بالرمز $A_{ij}$ ويكون :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij} \qquad (24-2)$$

**مثال:**

بفرض لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

إن صغير العنصر 4 هو $\Delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ وعدد هذه الصغائر تسعة ذات المرتبة $2 \times 2$

والمتمم الجبري (عامل العنصر) هو $A_{12} = (-1)^{1+2}\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ .

**ملاحظة(18):** بفرض أن $A$ و $B$ مصفوفتان مربعتان من المرتبة $n$ وأن هاتين المصفوفتين تختلفان فقط في عناصر الصف الذي رقمه $i$ وفيما عدا ذلك فهما متماثلتان عندئذٍ : تكون المتممات الجبرية لعناصر هذا الصف واحدة في هاتين المصفوفتين.

**2−12 المحدد من المرتبة الثالثة:**

بفرض لدينا المصفوفة المربعة من الشكل:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (25-2)$$

إن محدد المصفوفة يكتب بالشكل التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (26-2)$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

وتسمى طريقة لابلاس أي نشر المحدد من المرتبة الثالثة بدلالة ثلاثة محددات من المرتبة الثانية.
أو حسب طريقة ساروس لحساب قيمة محدد من المرتبة الثالثة بالشكل التالي:

نضيف العمودين الأول والثاني من المصفوفة إلى يمين المحدد ثم نقوم بجمع جداءات عناصر أقطارها الرئيسية مطروحاً منه مجموع جداءات عناصر أقطارها الثانوية.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (27-2)$$

$$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - (a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})$$

كما نلاحظ فإن هذه الطريقة تطبق على المحددات من المرتبة 3 .

## 2-13 تعريف محدد أي مصفوفة من أي مرتبة $n$.

محدد المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]$ **من المرتبة** $n\times n$ يتم حسابه وفق أي صف أو **أي** عمود نختاره وذلك بضرب

كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) في متممه الجبري (عامله) ثم جمع حواصل الضرب.

1- من الصف $i$ $\quad |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$

2- من العمود $j$ $\quad |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

لنحسب قيمة محدد هذه المصفوفة وذلك بحسب عناصر الصف الأول:

$$|A| = (1)A_{11} + 3A_{12} + (-1)A_{13} = 1(-4) + 3(8) + (-1)(2) = 18$$

**ملاحظة(19):** عند فك المحدد تؤخذ قاعدة الإشارات في الاعتبار عند أخذ قيمة العنصر وهي

القاعدة التي تحل محل $(-1)^{i+j}$ الموجودة في تعريف المتمم الجبري (العامل).

**مثال:**

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6 + 6 + 4 = 16$$

يمكن اختيار الصف (أو العمود) الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وذلك لسهولة الحساب

## 2-14 خواص المحددات:

1- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ وكان عناصر أحد صفوف ( أو أعمدة ) المصفوفة أصفاراً ، فإن قيمة محددها تكون صفراً .

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

2- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ و $B$ مصفوفة مربعة ناتجة عن المصفوفة $A$ بتبديل وضعي صفين (أو عمودين) مع المحافظة على باقي الصفوف (الأعمدة) فإن:

$$\det A = -\det B \quad \text{أو} \quad |A| = -|B| \qquad (28-2)$$

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 17, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -17$$

3- إذا حوت المصفوفة المربعة $A$من المرتبة $n$ صفين (عمودين) متساويين أو متناسبين فإن محدد هذه المصفوفة يساوي الصفر.

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

4- إذا ضربنا جميع عناصر أحد الصفوف (أحد الأعمدة) في مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ بعدد ثابت $\lambda$ فأن محدد المصفوفة الناتجة يساوي إلى محدد المصفوفة الأصلية $A$ مضروباً بالعدد الثابت $\lambda$.

**الإثبات:**

$$A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda a_{11})(a_{22})-(\lambda a_{12})(a_{21})=\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda|A| \qquad (29-2)$$

حيث: $A=[a_{ij}]_{(2,2)}$ .ويمكن البرهان على ذلك من أجل أي مرتبة $n$.

**مثال:**

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=70=\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

5- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ فإن مجموع جداءات عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) بالمتممات الجبرية لعناصر صف آخر (عمود آخر) يساوي الصفر.

**مثال:**

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-5$$

إذا أخذنا جداءات عناصر الصف الأول بالمتممات الجبرية لعناصر الصف الثاني نجد:

$$2(-1)(3)+1(7)+1(-1)=0$$

6- إن :

$$|\lambda A|=\lambda^n|A| \qquad (30-2)$$

حيث $n$ مرتبة المصفوفة $A$.

**مثال:**

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 8 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 2\end{vmatrix}=(2)^3\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=280$$

7- لا تتغير قيمة محدد مصفوفة مربعة $A$ من المرتبة $n$ إذا أضفنا إلى عناصر أحد صفوفها العناصر المقابلة لها من صف آخر بعد ضربه بعدد ثابت.

**مثال:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ (2)(1)+2 & (2)(0)+3 & (2)(1)+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

**ملاحظة(20):** يمكن حساب محدد من خلال طريقة تحويل جميع عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) إلى أصفار ما عدا عنصراً واحداً منها(وذلك باستخدام الخاصة 7).

8- إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ فإن محدد منقول مصفوفة يساوي محدد هذه المصفوفة.

$$\det A^T = \det A \text{ أو } \left|A^T\right| = |A| \qquad (31-2)$$

**مثال:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إن:

$$|A| = 76 \;\; , \;\; \left|A^T\right| = 76 = |A|$$

9- محدد جداءات المصفوفات: لتكن $A, B$ مصفوفتين مربعتين من المرتبة $n$ فإن:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad (32-2)$$

**وتعمم هذه الخاصة على عدد منتهٍ من المصفوفات:**

$$|A_1 \cdot A_2,.,A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| \qquad (33-2)$$

10- إذا كانت جميع عناصر الصف الذي رقمه $k$ في مصفوفة $A$ مربعة من المرتبة $n$ عبارة عن مجموع حدين أي: $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj};\ j = 1,2,...,n$ فإن محدد هذه المصفوفة يكتب على شكل مجموع محددي مصفوفتين مربعتين $A_1$ و $A_2$ حيث عناصر الصف الذي رقمه $k$ في $A_1$ هي الحدود $a'_{kj}$ من العلاقة السابقة و عناصر الصف الذي رقمه $k$ في $A_2$ هي الحدود الثانية من العلاقة السابقة $a''_{kj}$ والصفوف الأخرى هي نفسها في المصفوفة $A$ أي:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \text{ أو } \det A = \det A_1 + \det A_2 \qquad (34-2)$$

**مثال:**

$$A=\begin{vmatrix}1&2\\6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\0+6&1+3\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}}_{=|A_1|}+\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\6&3\end{vmatrix}}_{=|A_2|}=-8$$

11− إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة فإن $\frac{d}{dt}|A|$ هو عبارة عن المجموع لـ $n$ من المحددات التي يستبدل فيها كل صف على التوالي بتفاضل هذا الصف.

**مثال:**

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x&2x\\e^x&\ln x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\e^x&\ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&2x\\e^x&\frac{1}{x}\end{vmatrix}=\ln x-2e^x+x\frac{1}{x}-2xe^x$$

**ملاحظة(21):** إذا كانت كل عناصر المحدد الواقعة على أحد جانبي قطره الرئيسي تساوي الصفر، فإن هذا المحدد يساوي حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.

أو يمكن القول بأن محدد مصفوفة قطرية من المرتبة $n$ يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي(وهي حالة خاصة من المصفوفة المثلثية) .

**الإثبات:** لتكن $A$ مصفوفة مثلثية على الشكل:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3n}\\ .&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3n}\\ .&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{nn}\times\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ .&.&\dots&.\\0&0&\dots&a_{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}$$

وذلك بالفك من الصف الأخير.

أيضاً بالفك من الصف الأخير نجد:

$$|A|=a_{nn}a_{(n-1)(n-1)}\times\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\ .&.&\dots&.\\0&0&\dots&a_{(n-2)(n-2)}\end{vmatrix}$$

وبتوالي الفك من الصف الأخير نحصل على:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (35-2)$$

**ملاحظة(22):** بنفس الطريقة بالنسبة للمصفوفة المثلثية السفلى فإن العملية تتم مع توالي الفك من الصف الأول دائماً.

## 2-15 محدد فاندرموند:

هو محدد من الشكل:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (36-2)$$

يمكن إثبات أنه $\forall n$ فإن :

$$.d_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \qquad (37-2)$$

**الإثبات:** يمكن البرهان بطريقة الاستنتاج الرياضي ، عندما $n = 2$ فإن:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \qquad (38-2)$$

وهو محقق. لنفرض أن محدد فاندرموند محقق من أجل $(n-1)$ ولنبرهن من أجل $n$. من أجل ذلك نقوم بإجراء تحويلات على محدد فاندرموند:

نطرح الصف رقم $(n-1)$ بعد ضربه بـ $a_1$ من الصف الأخير رقم $n$ ، ثم نطرح من الصف رقم $(n-1)$ الصف رقم $(n-2)$ مضروباً بـ $a_1$، وهكذا وبشكل مشابه ، وأخيراً طرح الصف الأول من الصف الثاني مضروباً بـ $a_1$ وبالتالي نحصل على المحدد:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad (39-2)$$

وبفك المحدد الأخير بواسطة العمود الأول نحصل على محدد من المرتبة $(n-1)$ مع إخراج العوامل المشتركة من جميع الأعمدة:

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1).\begin{vmatrix}1&1&1&...&1\\a_1&a_2&a_3&...&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&...&a_n^2\\.&.&.&.&.\\a_1^{n-2}&a_2^{n-2}&a_3^{n-2}&...&a_n^{n-2}\end{vmatrix}\quad(40-2)$$

إن المحدد الاخير من المرتبة $(n-1)$ وبالتالي من الفرض فإن هذا المحدد يساوي:

$$\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)\quad(41-2)$$

ومنه :

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)\quad(42-2)$$

**ملاحظة(23):** بشكل مشابه فإن المحدد :

$$d'=\begin{vmatrix}a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&...&a_n^{n-1}\\.&.&.&.&.\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&...&a_n^2\\a_1&a_2&a_3&...&a_n\\1&1&1&...&1\end{vmatrix}\quad(43-2)$$

يساوي إلى:

$$d'=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j)\quad(44-2)$$

**2-16 مشتق محدد:** بفرض أن عناصر المصفوفة المربعة $A=\left[a_{ij}\right]$ دوال في المتغير $x$ قابلة للاشتقاق أو التفاضل فيكون المشتق $\frac{d}{dx}|A|$ للمحدد $|A|$ بالنسبة للمتغير $x$ يساوي مجموع $n$ محدد تنتج من المحدد $|A|$ بأن نستعيض على التوالي عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير $x$.

**مثال:**

أوجد مشتق المحدد:

$$A=\begin{vmatrix}x^2&x+1&3\\1&2x-1&x^3\\0&x&-2\end{vmatrix}$$

**الحل:**

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x^2&x+1&3\\1&2x-1&x^3\\0&x&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x&1&0\\1&2x-1&x^3\\0&x&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2&x+1&3\\0&2&3x^2\\0&x&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2&x+1&3\\1&2x-1&x^3\\0&1&0\end{vmatrix}$$

**2−17 طرق إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة:**

**2−17−1 تعريف المصفوفة القابلة للقلب:** نقول عن المصفوفة المربعة $A$ من المرتبة $n$ أنها قابلة للقلب (أي لها مقلوب) إذا وجدت مصفوفة مثل $B$ تحقق الخاصة:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \qquad (45-2)$$

نسمي المصفوفة $B$ مقلوب المصفوفة $A$ ونرمز لهل بالرمز $A^{-1}$ .

**2−17−2 المقلوب عن طريق المصفوفة الملحقة (المرافقة):** نوجد المصفوفة الملحقة "المرافقة" للمصفوفة $A$ ونرمز لها بالرمز $adjA$ وهي عبارة عن منقول المصفوفة التي عناصرها العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة $A$ وهي عبارة عن:

$$adjA = [D_{ij}]^T = [D_{ji}] \qquad (46-2)$$

حيث $D_{ij}$ العامل المرافق للعنصر $a_{ij}$، ثم نحسب $\det A$ والذي هو $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$

بشرط $A$مصفوفة نظامية (غير شاذة) أي $|A| \neq 0$.

وأخيراً يكون:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \qquad (47-2)$$

**مثال:**

احسب $adjA$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

**2-17-3 مبرهنة:** إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة فإن:

$$A \cdot adjA = adjA \cdot A = \det A \cdot I_n \qquad (48-2)$$

**ملاحظة(24):** من المبرهنة السابقة نضرب طرفي العلاقة بـ $(\det A)^{-1}$ فنجد:

$$A \cdot [(\det A)^{-1} adjA] = [(\det A)^{-1} adjA] \cdot A = I_n \qquad (49-2)$$

ومنه نستنتج أن $(\det A)^{-1} adjA$ هو نظير المصفوفة $A$ بالنسبة للضرب .

إذن:

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} adjA \qquad (50-2)$$ .

**مثال:**

أوجد $A^{-1}$ للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

المصفوفة $A$ نظامية (غير شاذة) لأن:

$$\det A = \det\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix} = -38 \neq 0$$

وللمصفوفة مقلوب ويساوي $\dfrac{adjA}{|A|}$ (في المثال السابق أوجدنا $adjA$) وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{38}\begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

**ملاحظة(25):** إذا كان $\det A = 0$ فالمصفوفة تسمى شاذة ( فريدة ) وليس لها مقلوب.

**2-17-4 المقلوب بطريقة الارتكاز:** في هذه الطريقة تمد المصفوفة $A=[a_{ij}]$ بالمصفوفة الواحدية $I$ على الشكل $[A \vdots I]$ ثم يتم الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $[A \vdots I]$ على الشكل $[I \vdots B]$ فتكون المصفوفة $B$ هي مقلوب المصفوفة $A$ .

**مثال:**

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5&4&0\\0&3&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$[A\vdots I]=\begin{bmatrix}5&4&0&|&1&0&0\\0&3&2&|&0&1&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}$$

1- نأخذ الصف الأول من المصفوفة $[A\vdots I]$ كصف ارتكاز والعنصر الأول من هذا الصف كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]=\begin{bmatrix}5&4&0&|&1&0&0\\0&3&2&|&0&1&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&0&|&\frac{1}{5}&0&0\\0&3&2&|&0&1&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}$$

2- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الناتجة كصف ارتكاز والعنصر الثاني منه كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]\sim\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&0&|&\frac{1}{5}&0&0\\0&3&2&|&0&1&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&0&|&\frac{1}{5}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}$$

3- نضرب صف الارتكاز الثاني بـ $(-1)$ ونضيفه إلى الصف الثالث، كذلك نضرب صف الارتكاز الثاني بـ $(-\frac{4}{5})$ ونضيفه للصف الأول فنجد:

$$[A\vdots I]\sim\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}&0&|&\frac{1}{5}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&|&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{-8}{15}&|&\frac{1}{5}&\frac{-4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{-2}{3}&|&0&\frac{-1}{3}&1\end{bmatrix}$$

4- بأخذ الصف الثالث كصف ارتكاز والعنصر الثالث منه كعنصر ارتكاز وقسمة الصف على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{-8}{15}&|&\frac{1}{5}&\frac{-4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{-2}{3}&|&0&\frac{-1}{3}&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{-8}{15}&|&\frac{1}{5}&\frac{-4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&|&0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

5- نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(\frac{8}{15})$ ونضيفه إلى الصف الأول وأيضاً نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(-\frac{2}{3})$ ونضيفه للصف الثاني نجد:

$$[A\vdots I]\sim\begin{bmatrix}1&0&\frac{-8}{15}&|&\frac{1}{5}&\frac{-4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&|&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&|&0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&|&\frac{1}{5}&0&\frac{-4}{5}\\0&1&0&|&0&0&1\\0&0&1&|&0&\frac{1}{2}&\frac{-3}{2}\end{bmatrix}=[I\vdots A^{-1}]$$

ومنه يكون:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5}&0&-\frac{4}{5}\\0&0&1\\0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

**2-17-5 مبرهنة "كيلي-هاملتون" :**

كل مصفوفة مربعة نظامية مثل $A=[a_{ij}]_n$ تحقق معادلتها المميزة: $|A-\lambda I|=0$ .

حيث إن المعادلة المميزة ممثلة بكثيرة حدود بالنسبة لـ $\lambda$ بالشكل التالي:

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0 \qquad (51-2)$$

تحقق معادلتها المميزة الممثلة بكثير حدود مصفوفة:

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I \qquad (52-2)$$

**2-17-6 إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة "كيلي هاملتون":**

بفرض $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ والتي معادلتها المميزة :

$$f(\lambda)=|A-\lambda I|=0 \qquad (53-2)$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون فإن المصفوفة $A$ تحقق معادلتها المميزة:

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\dots+a_1A+a_0I=0 \qquad (54-2)$$

نضرب طرفي المعادلة $(31)$ بـ $A^{-1}$ نجد:

$$a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0 \qquad (55-2)$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) \qquad (56-2)$$

من خلال هذه العلاقة يمكن إيجاد المقلوب $A^{-1}$ بدلالة قوى المصفوفة $A$ علماً أن أكبر قوة لـ $A$ هي $(n-1)$ ويتم حساب الأمثال $a_0, a_1, \ldots, a_n$ من المعادلة المميزة.

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن $A$ تحقق المعادلة : $A^3 - 8A^2 + 13A - 6I = 0$ .

2- أوجد $A^{-1}$

**الحل:**

1- نوجد المعادلة المميزة:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 5 \\ -5 & 6-\lambda & 5 \\ -5 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون يكون لدينا:

$$-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$$

2- لإيجاد $A^{-1}$ نضرب طرفي المعادلة $-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$ بـ $(A^{-1})$ نجد:

$$A^2 - 8A + 13.I - 6.A^{-1} = 0$$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 - 8A + 13I\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left\{\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}+13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-34&35&35\\-35&36&35\\-35&35&36\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}11&-5&-5\\5&1&-5\\5&-5&1\end{bmatrix}$$

**2−17−7 تعريف المصفوفة العمودية (المتعامدة):** إذا كان $A^T=A^{-1}$ أي منقولها يساوي مقلوبها

وبالتالي:

$$.A^T\cdot A=A\cdot A^T=I_n \qquad (57-2)$$

**ملاحظة(26):** منقول مصفوفة عمودية هو أيضاً مصفوفة عمودية.

**مثال:** المصفوفة المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عمودية (متعامدة).

**ملاحظة(27):**

1) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة قطرية فإن: $A^{-1}=\left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$ قطرية أيضاً بشرط $a_{ii}\neq 0;\forall i$ .

2) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) فإن: $A^{-1}$ أيضاً تكون أيضاً مثلثية عليا (سفلى).

3) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإن $A^{-1}$ تكون أيضاً متناظرة.

**لنثبت صحة** (3) :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإنها تحقق $A=A^T$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد:

$A^{-1}=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ وهذا يعني أن $A^{-1}$ مصفوفة متناظرة.

**2-18 خواص المقلوب:**

1) المقلوب إن وجد فهو وحيد ويحقق العلاقة: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$ (تم إثبات ذلك)

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ (مقلوب جداء مصفوفتين مربعتين نظاميتين يساوي جداء مقلوبي هاتين المصفوفتين بترتيب معاكس).ويمكن تعميم هذه الخاصة على مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من المرتبة نفسها يساوي جداء مقلوباتها بترتيب معاكس.

3) إذا أخذنا منقول الطرفين في الخاصة (1) مع الاستفادة من الخاصة (2) نجد:

$$(A^{-1})^T\cdot A^T=A^T\cdot(A^{-1})^T=I_n\Rightarrow(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T \qquad (58-2)$$

أي إن مقلوب منقول المصفوفة المربعة النظامية $A$ يساوي منقول مقلوبها.

4) من الخاصة (1) نجد أن:

$$\det A\cdot\det A^{-1}=1\Rightarrow\det A^{-1}=\left[\det A\right]^{-1} \qquad (59-2)$$

محدود مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة الأصلية.

5) من الخاصة (1) نجد:

$$(A^{-1})^{-1}=A \qquad (60-2)$$

**ملاحظة(28):** لإيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية أي من الشكل $(2\times2)$ ونظامية (أي محددها لا يساوي الصفر) ، فإننا نبدل العنصرين الموجودين على القطر الرئيسي فيما بينهما ، ونبدل إشارة العنصرين الموجودين على القطر الثانوي ونضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب محدد المصفوفة $A=[a_{ij}]$ ،حيث $|A|\neq 0$ .

**2-19 حل جملة معادلات خطية فيها $(m=n)$ باستخدام مقلوب مصفوفة:**

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\} \qquad (61-2)$$

تكتب هذه الجملة بالشكل التالي :

$$A\cdot X=B \qquad (62-2)$$

أو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (63-2)$$

فإذا كانت المصفوفة $A$ نظامية (أي لها مقلوب) نجد:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (64-2)$$

**مثال:**

حل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

**الحل:**

لدينا:

مصفوفة المعاملات: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتحولات: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت: $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

إن محدد المصفوفة $A$ هو $|A| = -3$

ويكون لدينا :

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -5$$

هو حل للجملة المعطاة.

**ملاحظة(29):** لإيجاد حل الجملة $(2-63)$ يجب حساب $A^{-1}$ ومن ثم إجراء الجداء $A^{-1}\cdot B$ .

## 2-20 حل جملة معادلات خطية فيها $(m=n)$ باستخدام قاعدة كرامر:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية $(2-63)$والتي حلها كما رأينا سابقاً هو: $X=A^{-1}\cdot B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix} = (\det A)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & .... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & .... & D_{n2} \\ .... & .... & .... & .... \\ D_{1n} & D_{2n} & .... & D_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}$$

بإجراء الضرب نجد:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \left[ b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + ... + b_n D_{ni} \right] \qquad (65-2)$$

إن المقدار $\left[ b_1 D_{1i} + b_2 D_{2i} + ... + b_n D_{ni} \right]$ هو المنشور للمحدد الناتج عن محدد المصفوفة $A$ بعد استبدال عموده $i$ بالعمود $B$ ولنرمز له بـ $\det A_i$ وبذلك يكون لدينا:

$$x_i = (\det A)^{-1} \cdot \det A_i \,; i = 1,2,..,n \qquad (66-2)$$

**مثال:**

استخدم قاعدة كرامر في حل جملة المعادلات (الواردة في المثال السابق).

**الحل:**

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{9}{-3} = -3$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 15 \Rightarrow x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{15}{-3} = -5$$

## 2−21 قوى مصفوفة:

### 2−21−1 تعاريف:

1) إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإن:

$$A^n = A \cdot A \cdot A ... A(\text{ مرة } n);n \in N \qquad (67-2)$$

هي مصفوفة $A$ مرفوعة للأس $n$ . (المصفوفة $A^0 = 1$ هي المصفوفة الواحدية).

2) تسمى المصفوفة المربعة $A$ خاملة أو متساوية القوى: إذا كان $A^2 = A$ وتكون معدومة القوى إذا كان $A^n = 0;(n > 0)$ وتسمى $n$ مرتبة الانعدام و $0$ هي المصفوفة الصفرية.

3) المصفوفة المربعة $A$ من المرتبة $n$ تسمى دورية: إذا وجد عدد طبيعي $(0 < a)$ ، بحيث $A^a = I_n$ وإن أصغر عدد طبيعي موجب يحقق هذا الشرط يسمى دور المصفوفة $A$ .

**2−21−2 خواص قوى مصفوفة:** إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة و $\alpha, \beta$ عددين صحيحين غير سالبين فإن الخواص التالية صحيحة:

1) $A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta}$

2) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha \cdot \beta}$

**2−21−3 تعريف القوى الصحيحة السالبة لمصفوفة مربعة:** كما يلي: $(A^{-1})^2 = A^{-1}.A^{-1}$

$$A^{-3} = A^{-1}.A^{-2}$$
$$A^{-n} = A^{-1}.A^{-(n-1)}$$

وبالتالي نستنتج:

$$A^{-m}.A^{-n} = A^{-(m+n)}$$
$$(A^{-m})^n = A^{-mn}$$

**أمثلة:**

−1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خاملة لأن:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$-2$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معدومة ومرتبة انعدامها الثالثة وذلك لأن:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$-3$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

دورية ودورها $a = 4$ لأن:

$$A^2 = A\cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;,\; A^3 = A^2\cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; A^4 = A^3\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

## **2-22 كثيرة حدود مصفوفة:**

بفرض $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n ; (a_0, a_1, \ldots, a_n \ \text{معاملات})$$

إن التركيب :

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n \qquad (68-2)$$

يسمى كثيرة حدود بـ $A$ ويرمز له بالرمز $f(A)$ و $I$ مصفوفة واحدية من مرتبة المصفوفة $A$

و $f(A)$ من المرتبة $n$ نفسها ، وإذا كان $f(A) = 0$ نقول عن $A$ إنها جذر $f(x)$ .

**مثال:**

لتكن كثيرة الحدود:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

والمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $f(A)$ .

**الحل:**

$$f(A)=A^2+2A-3I_2$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ -7 & 11\end{bmatrix}$$

### 2-23 أثر مصفوفة مربعة:

بفرض $A$ مصفوفة مربعة من الدرجة $n$ . إن مجموع عناصر القطر الرئيسي في $A=[a_{ij}]_n$

يسمى أثر المصفوفة $A$ ونرمز له بالرمز $tr(A)$ أي أن:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (69-2)$$

**مثال:**

إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

أوجد $tr(A)$ .

**الحل:**

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}=3+3=6$$

### 2-24 التكافؤ والتحويلات الأولية:

كما ذكرنا سابقاً إن الحصول على مصفوفة مكافئة لمصفوفة $A$ على حقل $K$ يتم بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية متتابعة على المصفوفة $A$ تسمى عمليات الصفوف البسيطة (الأعمدة البسيطة) ويمكن تلخيصها كما يلي:

1- ضرب أحد الصفوف (الأعمدة) بعدد $0\neq\lambda\in K$

2- جمع أحد الصفوف (الأعمدة) إلى صف (عمود) آخر بعد ضربه بعدد $0\neq\lambda\in K$

3- المبادلة بين صفين (عمودين) في المصفوفة

هذه العمليات تلعب دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وبعض التطبيقات الأخرى مثل درجة ومقلوب مصفوفة.

**2-24-1 تعريف المصفوفات المتكافئة:** نقول عن مصفوفتين $A$ و $B$ إنهما متكافئتان ونرمز لها بالرمز $A \sim B$، إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية متتابعة (إما على الصفوف أو على الأعمدة).

**أمثلة:**

1- لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

إذا أجرينا التحويلات على الصفوف نجد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-2)}{\overset{R_{31}(1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_2(1/5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_{32}(-5)}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

2- المصفوفة الواردة في المثال السابق إذا أجرينا عليها التحويلات المتتالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \underset{R_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \underset{R_{32}(-1)}{\sim}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

**2-25 رتبة (درجة) المصفوفة:**

**2-25-1 تعريف:** نعرف رتبة (درجة) المصفوفة بأنها عدد المتجهات المستقلة خطياً في المصفوفة وبالتالي إذا كانت المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ وكانت $\rho(A)$ رتبة هذه المصفوفة فإن:

$$\rho(A)\le n\le m \quad \text{أو} \quad \rho(A)\le m\le n \qquad (70-2)$$

أي يوجد $\rho$ من المتجهات المستقلة خطياً ( في الصفوف أو الأعمدة ) وهذا يؤدي إلى وجود $(n-\rho)$ أو $(m-\rho)$ من المتجهات المرتبطة خطياً.

**2-25-2 نتائج هامة:**

1) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ فإن $\rho(A)\le \rho(m,n)$ .

2) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مربعة ونظامية فإن $\rho(A)=n$ .

3) $\rho(A)=\rho(A^T)$ ( $A^T$ منقول المصفوفة $A$ ).

4) $\rho(I_n)=n$ ( $I_n$ المصفوفة الواحدية من المرتبة $n$ ).

5) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة قطرية وكانت $a_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(A)=n$ .

6) إذا كانت: $U=[u_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية عليا وكانت $u_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(U)=n$ .

7) إذا كانت: $L=[l_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية سفلى وكانت $l_{ii}\ne 0;\forall i$ فإن $\rho(L)=n$ .

**2-25-3 خواص هامة:**

1) $\rho(A+B)\le \rho(A)+\rho(B)$ .

2) $\rho(AB)\le \min\{\rho(A),\rho(B)\}$ .

3) $\rho(\lambda A)=\rho(A);(0\ne\lambda\in K)$ .

4) $\rho(A-B)\ge \rho(A)-\rho(B)$ .

5) إذا كانت $A$ مصفوفة نظامية ( غير شاذة ) فإن $\rho(AB)=\rho(B)$ .

6) $\rho(A^TA)=\rho(A)$ .

7) إذا كانت $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ و $B=[b_{ij}]_{(n,p)}$ وكان $AB=0$ فإن: $\rho(A)+\rho(B)\le n$ (حيث $n$ هي عدد صفوف المصفوفة $B$).

**لنثبت صحة الخاصة ( 4 ):**

$$\rho(A)=\rho(A-B+B)\le\rho(A-B)+\rho(B)\Rightarrow\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$$

**2-25-4 رتبة (درجة) مصفوفة باستخدام الصغائر:**

**صغير مصفوفة:** هو محدد أي مصفوفة مربعة جزئية من هذه المصفوفة.

فمثلاً إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

فإن:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}=-4\ ,\ \det\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}=5\ ,\ \det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}=6$$

$$\det\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=2\ ,\ \det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}=-2\ ,\ \det\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=-3$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=-3\ ,\ \det\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}=4\ ,\ \det\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=5$$

تشكل الصغائر التسعة ذات المرتبة $2\times 2$ للمصفوفة $A$.

وبشكل عام: فإن المصفوفة المربعة من المرتبة $n$ يكون لها $n^2$ من الصغائر ذات المرتبة $(n-1)$ ونحصل على هذه الصغائر من حذف الصف $i$ والعمود $j$ اللذين يحويان العنصر $a_{ij}$ من المصفوفة $A$ ويرمز له بالرمز $\Delta_{ij}$.

**رتبة مصفوفة :** هي مرتبة أكبر صغير من هذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

إن الرتبة $r$ لمصفوفة هي العدد الطبيعي الذي يحقق ما يلي:

1- يوجد صغير واحد على الأقل من المرتبة ( $r$ ) لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

2- كل صغير من المرتبة $(r+1)$ يساوي الصفر.

ومنه يمكن أن نلاحظ بأن كل صغير في هذه المصفوفة من المرتبة $r+2$ يساوي الصفر وكل صغير من المرتبة $r+3, r+4, \ldots$ يساوي الصفر أيضاً.

نرمز لرتبة مصفوفة $A$ بأحد الرموز : $rank(A)=r$ ، $\rho(A)=r$ .

**مثال:**

أوجد رتبة كل من المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-3&3&2\\-7&7&-21\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&2&-3&4\\3&-1&2&1\\1&-5&8&7\end{bmatrix}$$

**الحل:**

بالنسبة للمصفوفة $A$ نلاحظ أن: $\det(A)=0$ ومن ثم فإن $\rho(A)<3$ .

بأخذ كل المحددات من المرتبة $2\times2$ الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(A)=2$ .

وبالنسبة للمصفوفة $B$ بأخذ كل المحددات الجزئية من المرتبة $3\times3$ الممكنة وعددها أربعة نجد أن جميعها أصفاراً ، وبالتالي $\rho(B)<3$ .

بأخذ كل المحددات من المرتبة $2\times2$ الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(B)=2$ .

### 2-25-5 رتبة مصفوفة باستخدام التحويلات الأولية:

سنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الصف):

$R_i(\lambda)$ ضرب أحد الصفوف $i$ بعدد $\lambda\neq0$.

$R_{i,j}(\lambda)$ جمع أحد الصفوف إلى صف آخر بعد ضربه بعدد $\lambda\neq0$.

$R_{i,j}$ المبادلة بين صفين في المصفوفة.

وسنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الأعمدة):

$C_i(\lambda)$ ،$C_{i,j}(\lambda)$ ،$C_{i,j}$ على الترتيب مع عمليات الصف.

**مثال:**

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}\underset{R_{1,2}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\-1&-2&6&-7\end{bmatrix}\underset{R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\0&0&5&-3\end{bmatrix}\underset{R_{2,3}(-1)}{\sim}$$

إن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A} = B$$

نلاحظ أن: $rank(\tilde{A}) = 2$ وبالتالي $rank(A) = 2$ ( التحويلات الأولية على مصفوفة لا تغير من رتبتها ).

**ملاحظة(30):**

1- إن إضافة متجه صفري لا يغير من رتبة المصفوفة.

2- إن المصفوفة التي حصلنا عليها في المثال السابق تسمى بالمصفوفة الدرجية أو السلمية (كما سيأتي لاحقاً) ، ويمكن معرفة رتبتها من خلال شكلها ويمكن تحويل أي مصفوفة إلى الشكل الدرجي (أو السلمي) إذا اتبعنا القواعد كما في المثال السابق للوصول إلى الشكل الدرجي (أو السلمي).

3- إذا كانت $A$ مصفوفة مستطيلة فإنه يوجد مصفوفة درجية $B$ مكافئة للمصفوفة $A$ بحيث يكون $\rho(A)$ مساوٍ لعدد الصفوف غير الصفرية للمصفوفة $B$ .

**2-25-6 رتبة مصفوفة باستخدام التعريف:**

يمكن الحصول على رتبة مصفوفة وذلك بحل المعادلة الأساسية $\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \alpha_i x_i = 0$ حيث $\{x_i\}$ هي صفوف ( أو أعمدة ) المصفوفة $A$ ، ومن خلال الحل يمكن معرفة عدد المتجهات المستقلة في

هذه المجموعة وتكون الرتبة مساوية لهذا العدد.

**مثال:**

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

إن مرتبة $A$ هي $4 \times 3$ وبالتالي فإن $\rho(A) \leq 3$ نقوم بحل جملة المعادلات:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha_1=2,\alpha_2=-1,\alpha_3=3$$

وهذا يعني أن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ليست جميعها أصفاراً وتحقق المعادلة السابقة.

ومنه فالمتجهات مرتبطة أي أن $\rho(A)\neq 3$ .

أما إذا أخذنا المتجه:

$$\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}$$

لا يرتبط مع المتجه:

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

وبالتالي $\rho(A)=2$

### 2-26 المصفوفات الأولية:

المصفوفة الأولية هي المصفوفة الناتجة عن تطبيق التحويلات الأولية على المصفوفة الواحدية $I_n$ وسنستخدم الرموز الموافقة كما ذكرنا سابقاً عن التحويلات الأولية أي أن الرمز $E_{i,j}$ تبديل الصفين (أو العمودين) $i,j$ في المصفوفة الواحدية ، أيضاً $E_i(\lambda)$ ضرب عناصر الصف (أو العمود) $i$ بـ $\lambda$ والرمز $E'_{i,j}(\lambda)$ يعني أن المصفوفة نتجت عن المصفوفة $I_n$ بعد ضرب الصف (أو العمود) $j$ بـ $\lambda$ وجمعه إلى الصف (أو العمود) $i$ .

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة الواحدية :

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

إن:

$$E_{1,3}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\quad E_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_2(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ E_{3,1}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E_{3}(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$E'_{1,3}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E'_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

**2-26-1 خواص هامة:**

بفرض لدينا $C=A\cdot B$ فإن:

1- إذا طبقنا على المصفوفة $A$ أي تحويل أولي على صفوفها فإن المصفوفة $C$ تخضع لنفس التحويل أيضاً.

2- إذا طبقنا على المصفوفة $B$ أي تحويل أولي على أعمدتها فإن المصفوفة $C$ تخضع لنفس التحويل أيضاً.

**2-26-2 مبرهنة:** إن تطبيق التحويلات الأساسية على أعمدة المصفوفة لا يغير من رتبتها كما في الصفوف.

**2-26-3 نتائج:**

1- المصفوفات الأولية جميعها نظامية (غير شاذة ) محدداتها لا تساوي الصفر.

2- لا تتغير رتبة مصفوفة بتطبيق تحويلات أولية على صفوفها (وذلك بتطبيق المبرهنة السابقة على $A^T$ مع ملاحظة $\rho(A)=\rho(A^T)$ .

3- تكون $A\sim B$ (مصفوفتين متكافئتين) إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية ويكون لهما رتبة واحدة.

4- ضرب مصفوفة ( من اليمين أو اليسار ) بمصفوفة أولية لا يغير من رتبتها.

**مثال:**

عين رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-4&0&-4\\1&-1&-2&-2&-2\\1&-3&0&-4&0\\0&1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$A \underset{\substack{R_{2,1}(-1)\\R_{3,1}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_{2,4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_{3,2}(4)\\R_{4,2}(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن رتبة المصفوفة المكافئة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوي 2 وبالتالي $\rho(A) = 2$

**2−27 تعريف المصفوفة المدرجة:**

إن المصفوفة من الشكل :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (71-2)$$

حيث: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \neq 0$ تسمى مصفوفة درجية أو مصفوفة مدرجة (أوشبه منحرفة) وللسهولة من الأفضل أن تكون العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} = 1$.

للحصول على مصفوفة درجية (مدرجة) نجري عدداً من التحويلات الأولية للمصفوفة المعطاة على صفوفها (أو أعمدتها).

**أمثلة:**

1− المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

2− المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

3− المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

**ملاحظة(31):** رتبة المصفوفة الدرجية تساوي عدد الصفوف غير الصفرية فيها.

**ملاحظة(32):** لأي مصفوفة $A$ توجد على الأقل مصفوفة درجية مكافئة لها.

**مثال:**

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\\2&3&0\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$A\underset{\substack{-R_2\leftrightarrow R_1\\R_2\leftrightarrow R_5}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\2&3&0\\3&1&7\\0&5&-10\\0&2&-4\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\0&-5&10\\0&-11&22\\0&5&-10\\0&2&-4\end{bmatrix}\underset{\substack{-\frac{1}{5}R_2,\frac{1}{5}R_4\\-\frac{1}{11}R_3,\frac{1}{2}R_5}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\0&1&-2\\0&1&-2\\0&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}\underset{\substack{R_3-R_2,R_4-R_3\\R_5-R_4,R_1-4R_2}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

إن $\rho(\tilde{A})=2$ وبالتالي $\rho(A)=2$ ( يوجد مثلاً $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$ ) أو حسب الملاحظة السابقة عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية يساوي 2.

## 2−28 إيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية ( طريقة جوردان ):

لإيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية نتبع ما يلي:

١− نشكل المصفوفة التالية $[A\vdots I]$ حيث $I$ المصفوفة الواحدية من نفس مرتبة $A$ .

٢− نقوم بالتحويلات الأولية على صفوف (أعمدة) المصفوفة $[A\vdots I]$ لنحصل على مصفوفة من الشكل $[I\vdots B]$ عندئذٍ تكون المصفوفة $B=A^{-1}$ وبالتالي الحصول على $A^{-1}$ (مقلوب المصفوفة $A$ ) نسمي هذه الطريقة – طريقة جوردان.

**أمثلة:**

1− أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&-6&5\\3&-10&6\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

**الحل:**

$$[A\vdots I_3]=\begin{bmatrix}1&-3&2\vdots 1&0&0\\2&-6&5\vdots 0&1&0\\3&-10&6\vdots 0&0&1\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&2\vdots&1&0&0\\0&0&1\vdots&-2&1&0\\0&-1&0\vdots&-3&0&1\end{bmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-3&2\vdots&1&0&0\\0&-1&0\vdots&-3&0&1\\0&0&1\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}\underset{R_1-3R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2\vdots&10&0&-3\\0&-1&0\vdots&-3&0&1\\0&0&1\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}\underset{R_1-2R_3,-R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0\vdots&14&-2&-3\\0&1&0\vdots&3&0&-1\\0&0&1\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}14&-2&-3\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$ .

2- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

**الحل:**

$$[A\vdots I_3]=\begin{bmatrix}1&0&1\vdots 1&0&0\\1&-1&1\vdots 0&1&0\\1&1&-1\vdots 0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0\vdots 0&1/2&1/2\\0&1&0\vdots 1&-1&0\\0&0&1\vdots 1&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1/2&1/2\\1&-1&0\\1&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$ .

### 2-29 خواص محدد جداء مصفوفتين ( مبرهنات ):

**2-29-1 مبرهنة:** لتكن لدينا $A$ مصفوفة مربعة من المرتبة $n$ و $E$ مصفوفة أولية من نفس مرتبة $A$ عندئذٍ:

$$\det(EA)=\det(E).\det(A) \qquad (72-2)$$

**2-29-2 مبرهنــة:** جـداء مصـفوفات أوليـة هـو مصـفوفة نظاميـة ومحـدد الجـداء يسـاوي إلـى جـداء المحـددات لهـذه المصفوفات .

**2-29-3 مبرهنـة:** إذا كـان للمصـفوفتين $A,B$ مرتبـة واحدة ( $m,n$ ) ورتبـة واحدة $r$ فإنـه يمكن إيجـاد مصـفوفة نظاميـة $P$ من المرتبة ( $m,n$ ) بحيث يكون: $B = P.A$

**2-29-4 مبرهنة:** كل مصفوفة مربعة نظامية من المرتبة $n$ تساوي أيضاً جداء مصفوفات أولية من المرتبة $n$.

**2-29-5 مبرهنة:** محدد جداء مصفوفتين مربعتين يساوي جداء المحددين لهاتين المصفوفتين.

$$\det(AB) = \det A.\det B \qquad (73-2)$$

**2-29-6 يمكن تعميم المبرهنة السابقة كما يلي:**

محدد جداء مصفوفات مربعة يساوي جداء محدداتها أي :

$$\det \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \det A_i \qquad (74-2)$$

## تذكرة بقواعد الاشتقاق للتوابع الشهيرة مع تمارين محلولة :

| مسلسل | التابع | مشتق التابع |
|---|---|---|
| 1 | $y = c$ | $y' = 0$ |
| 2 | $y = x$ | $y' = 1$ |
| 3 | $y = u(x)$ | $y' = u'$ |
| 4 | $y = A\,u$ | $y' = A\ u'$ |
| 5 | $y = x^{n}$ | $y' = n\,x^{n-1}$ |
| 6 | $y = u^{n}$ | $y' = n\ u^{n-1}.\,u'$ |
| 7 | $y = u_1 + u_2 + u_3 + .....$ | $y' = u_1' + u_2' + u_3' + .....$ |
| 8 | $y = u\,.\,v$ | $y' = u'.\,v + v'.\,u$ |
| 9 | $y = \frac{u}{v}$ | $y' = \frac{u'.\,v - v'.\,u}{v^{2}}$ |
| 10 | $y = \sin x$ | $y' = \cos x$ |
| 11 | $y = \sin u$ | $y' = \cos u\ .\ u'$ |
| 12 | $y = \cos u$ | $y' = -\sin u\ .u'$ |
| 13 | $y = \tan x$ | $y' = \frac{1}{\cos^{2} x} = \sec^{2} x$ |
| 14 | $y = \tan u$ | $y' = \frac{u'}{\cos^{2} u} = \sec^{2} u\ .\ u'$ |
| 15 | $y = \cot x$ | $y' = \frac{-1}{\sin^{2} x} = -\operatorname{cosec}^{2} x$ |
| 16 | $y = \cot u$ | $y' = \frac{-u'}{\sin^{2} u} = -\operatorname{cosec}^{2} u\ .\ u'$ |
| 17 | $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ | $y' = \sec x\ .\ \tan x$ |
| 18 | $y = \sec u = \frac{1}{\cos u}$ | $y' = \sec u\ .\ \tan u\ .\ u'$ |
| 19 | $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ | $y' = -\operatorname{cosec} x\ .\ \cot x$ |
| 20 | $y = \operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}$ | $y' = -\operatorname{cosec} u\ .\ \cot u\ .\ u'$ |

| | | |
|---|---|---|
| 21 | $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 22 | $y = \sin^{-1} u = \arcsin u$ | $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 23 | $y = \cos^{-1} x = \arccos x$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 24 | $y = \cos^{-1} u = arc\cos u$ | $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ |
| 25 | $y = \tan^{-1} x = arc\tan x$ | $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ |
| 26 | $y = \tan^{-1} u = arc\tan u$ | $y' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 27 | $y = \text{cotan}^{-1} x = arc\cot x$ | $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$ |
| 28 | $y = \text{cotan}^{-1} u = arc\cot u$ | $y' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u'$ |
| 29 | $y = \ln x$ | $y' = \dfrac{1}{x}$ |
| 30 | $y = \ln u$ | $y' = \dfrac{u'}{u}$ |
| 31 | $y = e^x$ | $y' = e^x$ |
| 32 | $y = e^{u(x)}$ | $y' = e^{u(x)} \cdot u'$ |
| 33 | $y = a^{u(x)}$ | $y' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'$ |
| 34 | $y = \sqrt{u}$ | $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ |

وفيما يلي جدول يبين قوانين التفاضلات لبعض التوابع الشهيرة التي نستخدمها وهو :

| م | التابع | تفاضل التابع |
|---|---|---|
| ١ | $y = c$ | $dy = 0$ |
| ٢ | $y = x$ | $dy = dx$ |
| ٣ | $y = u(x)$ | $dy = u'dx$ |
| ٤ | $y = Au$ | $dy = Au'dx$ |
| ٥ | $y = x^n$ | $dy = nx^{n-1}dx$ |
| ٦ | $y = u^n$ | $dy = nu^{n-1}u'dx$ |
| ٧ | $y = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots.$ | $dy = u_1'dx + u_2'dx + u_3'dx + \ldots..$ |
| ٨ | $y = u.v$ | $dy = u.dv + v.du$ |
| ٩ | $y = \dfrac{u}{v}$ | $dy = \dfrac{u.dv - v.du}{v^2}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ١٠ | $y=\sin x$ | $d\,y=\cos x\ d\,x$ |
| ١١ | $y=\sin u$ | $d\,y=\cos u\ .u'.d\,x$ |
| ١٢ | $y=\cos u$ | $d\,y=-\sin u\ .u'.d\,x$ |
| ١٣ | $y=\tan x$ | $d\,y=\frac{1}{\cos^2 x}d\,x=\sec^2 x\ d\,x$ |
| ١٤ | $y=\tan u$ | $d\,y=\frac{u'}{\cos^2 u}d\,x=\sec^2 u\ .u'.d\,x$ |
| ١٥ | $y=\cot\mathrm{an}\,x$ | $d\,y=\frac{-1}{\sin^2 x}\ d\,x=-\mathrm{cosec}^2 x\ d\,x$ |
| ١٦ | $y=\cot\mathrm{an}\,u$ | $d\,y=\frac{-u'}{\sin^2 u}\ d\,x=-\mathrm{cosec}^2 u\ .u'.d\,x$ |
| ١٧ | $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ | $d\,y=\sec x\ .\ \tan x\ d\,x$ |
| ١٨ | $y=\sec u=\frac{1}{\cos u}$ | $d\,y=\sec u\ .\ \tan u\,.u'.d\,x$ |
| ١٩ | $y=\mathrm{cosec}\,x=\frac{1}{\sin x}$ | $d\,y=-\mathrm{cosec}\,x\ .\cot\mathrm{an}\,x\ d\,x$ |
| ٢٠ | $y=\mathrm{cosec}\,u=\frac{1}{\sin u}$ | $d\,y=-\mathrm{cosec}\,u\,.\cot\mathrm{an}\,u\ .u'd\,x$ |
| ٢١ | $y=\sin^{-1}x=\arcsin x$ | $d\,y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ d\,x$ |
| ٢٢ | $y=\sin^{-1}u=\arcsin u$ | $d\,y=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ u'\ d\,x$ |
| ٢٣ | $y=\cos^{-1}x=\arccos x$ | $d\,y=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ d\,x$ |
| ٢٤ | $y=\cos^{-1}u=arc\cos u$ | $d\,y=\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\ u'\ d\,x$ |
| ٢٥ | $y=\tan^{-1}x=\arctan x$ | $d\,y=\frac{1}{1+x^2}\ d\,x$ |
| ٢٦ | $y=\tan^{-1}u=\arctan u$ | $d\,y=\frac{1}{1+u^2}\ .\ u'.d\,x$ |
| ٢٧ | $y=\cot^{-1}x=arc\cot x$ | $d\,y=\frac{-1}{1+x^2}\ d\,x$ |
| ٢٨ | $y=\cot^{-1}u=arc\cot u$ | $d\,y=\frac{-1}{1+u^2}\ u'.d\,x$ |
| ٢٩ | $y=sh^{-1}x=\arg sh\ x$ | $d\,y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ d\,x$ |
| ٣٠ | $y=sh^{-1}u=\arg sh\ u$ | $d\,y=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\ u'.\ d\,x$ |
| ٣١ | $y=ch^{-1}x=\arg ch\ x$ | $d\,y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ d\,x$ |

| | | |
|---|---|---|
| ٣٢ | $y = ch^{-1}u = \arg chu$ | $dy = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} u'.dx$ |
| ٣٣ | $y = th^{-1}x = \arg th\, x$ | $dy = \frac{1}{1-x^2} dx$ |
| ٣٤ | $y = th^{-1}u = \arg th\, u$ | $dy = \frac{1}{1-u^2} u'.dx$ |
| ٣٥ | $y = cth^{-1}x = \arg cth\, x$ | $dy = \frac{-1}{x^2-1} dx$ |
| ٣٦ | $y = cth^{-1}u = \arg cth\, u$ | $dy = \frac{-1}{u^2-1} u'.dx$ |
| ٣٧ | $y = sech^{-1}x$ | $dy = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}} dx$ |
| ٣٨ | $y = sech^{-1}u$ | $dy = \frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}} u'.dx$ |
| ٣٩ | $y = cosech^{-1}x$ | $dy = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}} dx$ |
| ٤٠ | $y = cosech^{-1}u$ | $dy = \frac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}} u'.dx$ |
| ٤١ | $y = \ln u$ | $dy = \frac{u'}{u} dx$ |
| 42 | $y = e^x$ | $y' = e^x .dx$ |
| 43 | $y = e^u$ | $y' = e^u .u'.dx$ |
| 44 | $y = a^{u(x)}$ | $y' = a^{u(x)} . \ln a . u' .dx$ |
| 45 | $y = \sqrt{u}$ | $y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} . u'.dx$ |

## تمارين محلولة على المشتقات

أولاً– احسب المشتق الأولى للتوابع الآتي:

$$1)\ y = 2^{\frac{1}{\cos x}} \quad ; \quad \cos x \neq 0 \ , \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k = 0 , \pm 1 ,....$$

$$y' = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{0 . \cos x - 1 . (-\sin x)}{\cos^2 x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$2)\ y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad ; \quad a > 0 \ , \ x > 0$$

$$y' = x^{x^a}\left(a\, x^{a-1} . \ln x + x^a . \frac{1}{x}\right) + x^{a^x}\left(a^x . \ln a . \ln x + a^x . \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ a^{x^x}\left[x^x\left(1 . \ln x + x . \frac{1}{x}\right). \ln a + x^x \frac{0}{\ln a}\right]$$

$$y' = x^{x^a}(a\, x^{a-1}.\ln x + x^{a-1}) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) +$$

$$+ a^{x^x}.x^x.(\ln x + 1).\ln a$$

$$y' = x^{x^a}.x^{a-1}.(a\ln x + 1) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) + a^{x^x}.x^x(\ln x + 1).\ln a.$$

3) $y = \dfrac{a^x . e^x}{1+\ell n a} = \dfrac{1}{1+\ln a}\, a^x . e^x$ ; $a > 0$ , $x \in (-\infty , \infty)$

$$y' = \frac{1}{1+\ln a}(a^x.\ln a.e^x + a^x.e^x) = \frac{a^x.e^x(1+\ln a)}{1+\ln a} = a^x.e^x$$

4) $y = \dfrac{a^x . b^x}{\ln(a\,b)} = \dfrac{1}{\ln a + \ln b}.a^x.b^x$ ; $a,b > 0$ , $x \in (-\infty,\infty)$

$$y' = \frac{1}{\ln a + \ln b}(a^x.\ln a.b^x + a^x.b^x.\ln b) =$$

$$= \frac{a^x.b^x.(\ln a + \ln b)}{\ln a + \ln b} = a^x.b^x$$

5) $y = (\cos x + 7x^2)^{\cos x}$

$$\ln|y| = \cos x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| + \cos x.\frac{-\sin x + 14x}{\cos x + 7x^2}$$

6) $y = x^2 e^x$

$$y' = x^2 e^x + 2x\,e^x = x\,e^x\,(x+2)$$

7) $y = x^3 \arctan x$

$$y' = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \arctan x$$

8) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

$$y' = \frac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}.\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

9) $y = x\sqrt{x}\,(3\ln x - 2) \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln|x| - 2) \Rightarrow$

$$y' = x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}(3\ln|x| - 2) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\,\ln|x|$$

10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} - \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

11) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

12) $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}\;\left(1+x^2\right)} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x^2)}{\left|1-x^2\right| . \left(1+x^2\right)}$$

13) $y = arc\cos(\tan x) + \sin(\sin 6x) \Rightarrow$

$$y' = -\frac{(\tan x)'}{\sqrt{1+\tan^2 x}} + \cos(\sin 6x)(\sin 6x)' \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\dfrac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x . \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x \quad \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{\cos x} + 6\cos 6x . \cos(\sin 6x) .$$

14) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $\dfrac{u'}{u} = (\ln|u|)'$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

وبما أن : $z' = (\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$ ، فإن :

$$y' = y\,z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\left[\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}\right]$$

15) $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x-1}} = (x+\sqrt{x-1})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x-1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$$

16) $y = (\arctan x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = \sqrt{x}\,.\ln|\arctan x|$

وبالاشتقاق نجد أن : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \sqrt{x}\,.\,\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x} \Rightarrow$$

$$y' = (\arctan x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x}\right)$$

17) $y = x^{\ln|\ln x|} \Rightarrow \ln y = \ln|\ln x|\,.\ln x \Rightarrow$

نفرض أن : $u = \ln|x| \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$

$$\ln|y| = \ln|u|\,.u \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'.\ln|u| + u\,.\frac{u'}{u}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = x^{\ln|\ln x|}\left[\frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x}\right]$$

18) $y = \cos(\text{ch } x)$ ; $x \in (-\infty, \infty)$

$y' = -\sin(\text{ch } x)\,.\,\text{sh } x$

19) $y = \ln\left|\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right|$

<u>طريقة أولى</u>: نعلم أن : $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ ; $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

نعوّض ونختصر فنحصل على : $y = \ln|\tan x| \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

21) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\,.\sqrt{x+\sqrt{x}}\,.\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

22 ) $y = \arctan\sqrt{x}$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

23) $y = \arcsin\left(\dfrac{3x}{4}\right)$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{3x}{4}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3x}{4}\right)^2}} = \frac{\dfrac{3}{4}}{\sqrt{1-\dfrac{9x^2}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{16-9x^2}}$$

24 ) $y = \arccos\left(e^{3x}\right)$

$$y' = \frac{-\left(e^{3x}\right)'}{\sqrt{1-\left(e^{3x}\right)^2}} = \frac{-e^{3x}}{\sqrt{1-\left(e^{3x}\right)^2}}$$

25 ) $y = arc\sec(5x)$

$$y' = \frac{(5x)'}{|5x|\sqrt{(5x)^2-1}} = \frac{5}{|5x|\sqrt{25x^2-1}} =$$

$$= \frac{5}{5|x|\sqrt{25x^2-1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{25x^2-1}}$$

26) $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x} = \left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{4}}$

$$y' = \frac{1}{4}(1+\cos^2 x)^{\frac{-3}{4}} .2\cos x \ . \ (-\sin x) \ \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\sin x \ . \ \cos x}{\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} = -\frac{1}{2}.\frac{2\sin x \ . \ \cos x}{2\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$$

27) $y = 2\sin^3\sqrt{\frac{3}{x}}$

$$y' = 2\ .\ 3\ .\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\cos\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\ .\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\ x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = -\ 3\sqrt{3}\ .\ \frac{\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\ \cos\sqrt{\frac{3}{x}}}{x\sqrt{x}}$$

28) $y = \frac{1}{2}\, arc\cot\frac{2}{x}$

$$y' = -\frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2}\ .\ 2\ .(-\frac{1}{x^2}) \ \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2+2}{x^2}}\ .\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+2}$$

29) $y = \ln\frac{1-\ln|x|}{1+\ln|x|}$

$$y' = \frac{1+\ln|x|}{1-\ln|x|}\ .\ \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln|x|)-(1-\ln|x|)\ .\ \frac{1}{x}}{(1+\ln|x|)^2} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{x}\ \frac{1}{1-\ln x}\ \frac{1+\ln x+1-\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2}{x(1-\ln^2|x|)}$$

30) $y = \ln\left|arc\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right|$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arc\cos}\frac{1}{\sqrt{x}}}\ (-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}})\ .\ (-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \,.\, \arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

31) $y = \arccos(th\,x) + sh(\sin 6x)$

$$y' = -\frac{(th\,x)'}{\sqrt{1-th^2 x}} + ch(\sin 6x)\,(\sin 6x)' =$$

$$= -\frac{\frac{1}{ch^2 x}}{\sqrt{\frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x}}} + 6\cos 6x \,.\, ch(\sin 6x) =$$

$$= -\frac{1}{ch\,x} + 6\cos 6x \,.\, ch(\sin 6x)$$

32 ) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \Rightarrow$$

$$z = \ln\frac{\sqrt[3]{|x|^3(x^2+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $(ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} =$$

$$= \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

لكن $z' = (ln|y|)' = \frac{y'}{y}$

ومنه فإن :

$$y' = y\,.\,z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\;.\;\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x\,(x^2+1)\,(5-x)}$$

$$33)\ \ y = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$y' = \frac{1}{4}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{4}}\,.\left(\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}}\,.\left(\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,.\,\frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)^3}}\,.\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$34)\ \ y = 5x + \tan^3 x \quad ; \quad \cos x \neq 0 \;;\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y' = 5 + 3\tan^2 x\,.\,\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\cos^4 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$35)\ \ y = (2-x^2)\,.\cos x + 2x\,.\sin x \quad ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y' = -2x\cos x + (2-x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2x.\cos x =$$

$$= -2x\cos x - 2\sin x + x^2\sin x + 2\sin x + 2x\,.\cos x = x^2\sin x$$

$$36)\ \ y = \cot\sqrt[5]{x^5+1} \quad ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt[5]{x^5+1}}\,.\,\frac{1}{5}\,(x^5+1)^{-\frac{4}{5}}\,.5x^4 =$$

$$= -\frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+1)^4}\,.\sin^2.\sqrt[5]{x^5+1}}\,.$$

**2–30 اشتقاق وتكامل المصفوفات:**

**2–30–1 اشتقاق المصفوفات:** بفرض أن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ من المرتبة $n$ جميع عناصرها دوال في المتغير $x$.

إن مشتق المصفوفة $A$ بالنسبة للمتغير $x$ ويرمز له بالرمز $\frac{dA}{dx}$ هو مصفوفة لها نفس درجة المصفوفة الأصلية

وعناصرها هي المشتقات بالنسبة للمتغير $x$ لعناصر المصفوفة $A$ أي:

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dx} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{da_{n1}}{dx} & \frac{da_{n2}}{dx} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dx} \end{bmatrix} \quad (75-2)$$

**مثال:**

أوجد المشتق الأول والثاني للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} e^{2x} & \cos x \\ 1 & x^3 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix} 2e^{2x} & -\sin x \\ 0 & 3x^2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d^2A}{dx^2}=\begin{bmatrix} 4e^{2x} & -\cos x \\ 0 & 6x \end{bmatrix}$$

### 2-30-2 مبرهنات:

1- مشتق مجموع مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A+B)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}$$

2- مشتق جداء مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A\cdot B)=\frac{dA}{dx}B+A\frac{dB}{dx}$$

3- مشتق مقلوب مصفوفة:

$$\frac{d}{dx}(A^{-1})=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

**لنبرهن صحة** (3) :

بما أن:

$$A^{-1}.A=I$$

نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة للمتغير $x$ فنجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}A+A^{-1}\frac{dA}{dx}=0$$

بضرب الطرفين من اليمين بـ $A^{-1}$ :

$$\frac{dA^{-1}}{dx}+A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}=0$$

ومنه نجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

## -جدول التكاملات الأساسية:

1) $\int 1dx=x+c$

2) $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c;n\neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

4) $\int \sin x dx=-\cos x+c$

5) $\int \cos x dx=\sin x+c$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c$

7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+c$

8) $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+c$

9) $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+c$

10) $\int e^{x}dx=e^{x}+c$

11) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$

12) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$

13) $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x+c$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

**مثال (2):** احسب التكامل: $\int(5x^3-3x^2+2x+7)dx$

**الحل:** اعتمادا على الخاصتين الأولى والثانية، نكتب:

$$\begin{aligned}\int(5x^3-3x^2+2x+7)dx &= \int 5x^3dx-\int 3x^2dx+\int 2xdx+\int 7dx\\ &= 5\int x^3dx-3\int x^2dx+2\int xdx+7\int dx\\ &= \frac{5}{4}x^4-x^3+x^2+7x+c\end{aligned}$$

**مثال (3):** احسب التكامل $\int(3\cos x+4e^{2x})dx=$ .

**الحل:** $\int(3\cos x+4e^{2x})dx=3\int\cos x dx+4\int e^{2x}dx=3\sin x+2e^{2x}+c$

**ملاحظة1:** أن نتيجة كل تكامل غير محدد يعطي ثابتاً للتكامل، وحيث أن مجموع عدد من الثوابت الكيفية هو ثابت كيفي، لذا فقد كتبنا ثابتا واحداً c في النتيجة النهائية للتكامل.

**مثال (4):** احسب التكامل $\int(2-x^2)^3dx$ .

**الحل:**

$$\begin{aligned}\int(2-x^2)^3dx &= \int(8-12x^2+6x^4-x^6)dx\\ &= 8\int dx-12\int x^2dx+6\int x^4dx-\int x^6dx=8x-4x^3+\frac{6}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+c\end{aligned}$$

**مثال (5):** احسب التكامل $\int\frac{dx}{x-a}$ .

**الحل:** بتطبيق الخاصة الثالثة، نجد: $\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+c$

**مثال (6):** احسب كل من التكاملين: $\int\sin ax\cdot dx \quad , \quad \int\cos ax\cdot dx$

**الحل:** $\int\sin ax\cdot dx=\frac{1}{a}\int\sin ax\cdot d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax+c \;;\; a\neq 0$

$$\int\cos ax\cdot dx=\frac{1}{a}\int\cos ax\cdot d(ax)=\frac{1}{a}\sin ax+c \;;\; a\neq 0$$

**مثال (7):** احسب التكاملين $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$:

**الحل:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$$

**مثال (8):** احسب التكامل $\int \sin x \cos x \, dx$:

**الحل:** يمكن حساب هذا التكامل باستخدام دساتير التحويل المثلثية، ويكتب هذا التكامل بالشكل الآتي:

$$\int \sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x)$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

ويمكن حساب هذا التكامل **بطريقة ثالثة:**

$$\int \sin x\cos x\,dx = \int \sin x\,d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

وأيضا **بطريقة ثالثة:** $\int \sin x\cos x\,dx = -\int \cos x\,d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

من الملاحظ أننا حصلنا على ثلاثة أجوبة مختلفة (ظاهراً) لتكامل واحد، وهي:

$-\frac{1}{4}\cos 2x+c$ ، $\frac{1}{2}\sin^2 x+c$ ، $-\frac{1}{2}\cos^2 x+c$

إلا أنه يمكن بسهولة التأكد أن هذه الأجوبة تختلف عن بعضها بمقدار ثابت.

**مثال (9):** احسب التكامل $\int e^{-5x}\cdot dx$.

**الحل:** $\int e^{-5x}\cdot dx = -\frac{1}{5}\int e^{-5x}\,d(-5x) = -\frac{1}{5}e^{-5x}+c$

**مثال (10):** احسب التكامل $\int \frac{dx}{7x-2}$.

**الحل:** $\int \frac{dx}{7x-2} = \frac{1}{7}\int \frac{7dx}{7x-2} = \frac{1}{7}\ln|7x-2|+c$

**مثال (11):** احسب التكامل $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx$.

**الحل:** $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx = \int\left(3x-8+\frac{9}{x+1}\right)dx = \frac{3}{2}x^2-8x+9\ln|x+1|+c$.

**ملاحظة:** بشكل عام، إذا كانت الدالة المستكملة كسرية، وفيها البسط هو مشتق للمقام فإن:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$$

**مثال (12):** احسب التكامل $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

**الحل:** $\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|+c$

**مثال (13):** احسب التكامل $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$.

**الحل:** $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+1|+c$

## 2-30-3 تكامل المصفوفات:

بفرض أن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ من المرتبة $n$ جميع عناصرها دوال في المتغير $x$ . إن تكامل المصفوفة $A$ بالنسبة للمتغير $x$ على المجال $[x_0,x]$ ويرمز له بالرمز $\int_{x_0}^{x} Adx$ هو مصفوفة وعناصرها تنتج عن تكامل عناصر المصفوفة المفروضة على المجال $[x_0,x]$ ويكون لهذه العملية معنى إذا كان التكامل ممكناً لجميع عناصر المصفوفة.

$$\int_{x_0}^{x} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} a_{11}dx & \int_{x_0}^{x} a_{12}dx & \cdots & \int_{x_0}^{x} a_{1n}dx \\ \int_{x_0}^{x} a_{21}dx & \int_{x_0}^{x} a_{22}dx & \cdots & \int_{x_0}^{x} a_{2n}dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_{x_0}^{x} a_{n1}dx & \int_{x_0}^{x} a_{n2}dx & \cdots & \int_{x_0}^{x} a_{nn}dx \end{bmatrix} \qquad (76-2)$$

**مثال:**

احسب التكامل $\int_{1}^{x} Adx$ إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ e^x & x+2 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$\int_{1}^{x} Adx = \begin{bmatrix} \int_{1}^{x} x^3dx & \int_{1}^{x} 3dx \\ \int_{1}^{x} e^x dx & \int_{1}^{x} (x+2)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^4-1}{4} & 3(x-1) \\ e^x - e & \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

## <u>تمارين محلولة</u>

1- إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A^2, A^3$.

**الحل:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

2- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&1&2\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 3&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

3− برهن أن:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$$

معدومة القوى من الدرجة 3.

**الحل:**

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=0$$

وهذا يعني أن $A$ معدومة القوى من الدرجة 3.

4− أثبت أنه إذا كان $AB=A$ و $BA=B$ فإن $A$ و $B$ تكونان متساويتي القوى.

**الإثبات:**

$$ABA=A(BA)=AB=A \quad و \quad ABA=(AB)A=A\cdot A=A^2$$

وبالتالي $A^2=A$ ، أي أن $A$ متساوية القوى.

بشكل مشابه نثبت أن $B$ متساوية القوى (نستخدم حاصل الجداء $BAB$).

5− أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-4&0&5\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&5\\2&4&8\end{bmatrix}\qquad 3)\quad C=\begin{bmatrix}0&2&3\\0&4&6\\0&6&9\end{bmatrix}$$

**الحل:**

إن رتبة المصفوفة $A$ تساوي 2 لأن $\begin{vmatrix}1&2\\-4&0\end{vmatrix}\neq 0$ ولا يوجد صغائر من الدرجة الثالثة.

ورتبة المصفوفة $B$ تساوي 2 لأن $|B|=0$ و $\begin{vmatrix}2&3\\2&5\end{vmatrix}\neq 0$

أما رتبة المصفوفة $C$ تساوي 1 لأن $|C|=0$ و الصغائر التسعة من الدرجة الثانية أصفار وليست كل عناصر المصفوفة أصفاراً.

6− احسب $adjA$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&4\\1&4&3\end{bmatrix}$$

**الحل:**

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}3&4\\4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&3\\4&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&4\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&6&-1\\1&0&-1\\1&-2&1\end{bmatrix}$$

7− أوجد $A^{-1}$ حيث: $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$

**الحل:**

إن $\det A = 5 \neq 0$ و $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

8- أوجد $A^{-1}$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

إن $\det A = -10 \neq 0$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

9- حول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الدرجي.

**الحل:**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3-3R_1 \\ R_2-2R_1}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = B$$

10- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على الصفوف.

**الحل:**

$$[A\vdots I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\1&4&3&0&1&0\\1&3&4&0&0&1\end{array}\right]\underset{R_3-R_1}{\overset{R_2-R_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&3&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_1-3R_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&3&4&-3&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\overset{R_1-3R_3}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-3&-3\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$=\left[I_3\vdots A^{-1}\right]$$

وبالتالي مقلوب المصفوفة $A$ هو:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-3&-3\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

11− أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&2\\-2&-6&-5\\3&10&6\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على أعمدتها.

**الحل:**

$$[A\vdots I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&2&1&0&0\\-2&-6&-5&0&1&0\\3&10&6&0&0&1\end{array}\right]\underset{\substack{C_2-3C_1\\C_3-2C_1}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&-2\\-2&0&-1&0&1&0\\3&1&0&0&0&1\end{array}\right]\underset{C_2\leftrightarrow C_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-2&-3\\-2&-1&0&0&0&1\\3&0&1&0&1&0\end{array}\right]\underset{C_1-2C_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-3\\0&-1&0&0&0&1\\3&0&1&-2&1&0\end{array}\right]\underset{C_1-2C_3,-C_2}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&14&2&-3\\0&1&0&-3&0&1\\0&0&1&-2&-1&0\end{array}\right]$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}14&2&-3\\-3&0&1\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$ .

12− أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة $A$ وأي عدد صحيح موجب $n$ فإن: $(A^{-1})^n=(A^n)^{-1}$

**الإثبات:**

لدينا العلاقة $(A^n)(A^n)^{-1}=I$

ومنه بضرب العلاقة من اليسار بـ $(A^{-1})^n$ نجد :

$$(A^{-1})^n A^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \Rightarrow (AA^{-1})^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

وبالتالي: $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

13- أثبت أنه إذا كانت المصفوفة $A$ متناظرة فإن: $A^{-1}$ إن وجدت تكون أيضاً متناظرة.

**الإثبات:**

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T (A^T) = I$$

ومن ثم نضرب من اليمين بـ $(A^T)^{-1}$ فنجد :

$$(A^{-1})^T (A^T)(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A$$

أي أن: $A^{-1}$ أيضاً متناظرة.

14- أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة $A$ من المرتبة $n$ وأي عدد $k$ فإن: $|kA| = k^n |A|$.

**الإثبات:**

بفرض $A = [a_{ij}]$ إذن:

$$kA = [ka_{ij}] \Rightarrow |kA| = |[ka_{ij}]| = k.k.k...k|[a_{ij}]| = k^n |A|$$

إن $kA$ تعني ضرب الثابت $k$ في جميع عناصر المصفوفة $A$ ، أما $k|A|$ فهي عملية ضرب الثابت $k$ في أحد صفوف أو أعمدة المحدد $|A|$.

15- أثبت أنه إذا كانت $A$ مصفوفة مرتبتها $(m \times n)$ و $B$ مصفوفة مرتبتها $(n \times m)$ وكان $m > n$ فإن المصفوفة $AB$ تكون شاذة.

**الإثبات:**

لنفرض $AB = C$ ومنه $C$ مرتبتها $(m \times m)$ ونعلم أن:

$$\rho(B) \le m, \rho(A) \le n$$

لكن:

$$\rho(C) = \rho(AB) \le Min\{\rho(A), \rho(B)\} = \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

وبالتالي فإن:

$$\rho(AB) \le n < m$$

وهذا يعني أن المصفوفة $AB$ تكون شاذة.

16- أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix}$ باستخدام الخاصة:

$$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda n.\det \mathrm{A}$$

**الحل:** $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$

17 - لتكن $A,B \in M_{(3,3)}(R)$ حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 4 \\ 10 & -2 & 5 \\ 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ أثبت أن:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

**الحل:**

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$
$$\det B = -9(-8+35) - 8(40-35) + 4(-70+14) = -507$$

$AB = \begin{bmatrix} 29 & 11 & 13 \\ 52 & -34 & 10 \\ 38 & -7 & 28 \end{bmatrix}$ ومنه $\det(AB) = -25350$

وكذلك فإن: $\det(A)\det(B) = -25350$ وبالتالي:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -25350$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$$

18 - لتكن $A \in M_{(3,3)}(R)$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

**الحل:**

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$

إن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\det(A^T) = 0(2-8) + 2(5+12) + 1(10+6) = 50$$

ومنه نجد:

$$\det\left(A\right) = \det(A^T) = 50$$

19- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

**الحل:**

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أضفنا العمود الثاني إلى الثالث ثم أخرجنا العامل المشترك من العمود الثالث مع الاستفادة من الخاصة (3).

20- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

**الحل:**

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

أضفنا إلى الصف الثالث الأول والثاني وبإخراج العامل المشترك .وطرح الصف الثاني من الثالث وطرح الصف الثالث من الصف الأول. ثم طرح الصف الأول من الثاني وأخيراً جعل الصف الثالث أول الصفوف.

21-أثبت بدون فك:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

**الحل:**

نطرح الصف الثاني من الأول نجد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1 - a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2)\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى الخاصة (4) وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$. أيضاً $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ عاملان وإن $|A|$ من الدرجة الثالثة فيكون: $|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$

## <u>تمارين غير محلولة</u>

1- بفرض لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

تحقق من أن: $A + (B - C) = (A + B) - C$

أوجد المصفوفة $D$ بحيث يكون $A + D = B$ وتحقق من أن: $D = B - A = -(A - B)$

2- أثبت أن $AB = 0$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \; , \; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3- بفرض لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-2&-4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$$

تحقق من أن:

$AC=A, CA=C$ أيضاً $AB=BA=0$

4- تحقق من الخاصة التجميعية للضرب حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\\3&-1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&1&0&-3\\-1&2&-2&5\end{bmatrix}$$

5- أوجد الجداء في كل مما يأتي :

$$1)\begin{bmatrix}2&-1&4\\5&1&-2\\-1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\4&1&5\\2&2&7\end{bmatrix}\qquad 2)\begin{bmatrix}1-&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1-\\0&3\end{bmatrix}\qquad 3)\begin{bmatrix}1-&0&3\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\6\end{bmatrix}$$

$$4)\begin{bmatrix}2&1-\\4&3\\6&2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-\\0\end{bmatrix}\qquad 5)\begin{bmatrix}2-&0&1\\1&2-&0\\0&1&2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1-&2\\3&1-\end{bmatrix}\qquad 6)\begin{bmatrix}1-&3&2\\3&2-&1-\\6&5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\\2\\3-\end{bmatrix}$$

6- ليكن لدينا $A$ و $B$ مصفوفتين حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\5&3&0&1\\9&2&1&6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $A+B, 2A, 2A+B$

7- ليكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&2&5\\2&0&3\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد المصفوفة $D$ بحيث يكون $A+D=B$ وتحقق من أن:

$D=B-A=-(A-B)$

8- احسب $AB$ إذا علمت :

1) $A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hdashline 1 & 1 & 0\end{array}\right]$

2) $A=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{array}\right], B=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hdashline -1 & 2\end{array}\right]$

9- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $C=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ بحيث يكون:

$$A+B-D=0$$

10- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1+i & 2+3i\\ 1-i & 2 & -i\\ 2-3i & i & 0\end{bmatrix}$$

هرميتية.

11- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}i & 1+i & 2-3i\\ -1+i & 2i & 1\\ -2-3i & -1 & 0\end{bmatrix}$$

هرميتية متخالفة و المصفوفة $iA$ هرميتية.

12- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1-i & 2\\ 1+i & 3 & i\\ 2 & -i & 0\end{bmatrix}$$

هل المصفوفة $kA$ هرميتية إذا كان $k$ عدد حقيقي ما ، وإذا كان $k$ عدداً مركباً ما؟.

13- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية المتخالفة:

$$A=\begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

هل المصفوفة $kA$ هرميتية متخالفة إذا كان $k$ عدداً حقيقياً ما ، وإذا كان عدداً مركباً ما، وإذا كان عدداً تخيلياً بحتاً.؟

14- ليكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أحسب $A^2, A^3$ ثم استنتج $A^n$.

15- إذا كانت $A$ مصفوفة متساوية القوى فبرهن أن:

$B=I-A$ متساوية القوى

وأن: $AB=BA=0$

16- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \;,\; B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

بين أن $A$ و $B$ متساويتا القوى.

17- برهن أن:

1) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

18- أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2 & 3\\ 2 & 5 & -4 & 6\\ -1 & -3 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -1 & 6\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 4\\ 3 & 7 & 4 & 6\end{bmatrix}\qquad 3)\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 5 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

19- أوجد مقلوب كل من المصفوفتين:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 4 & -3 & -3\\ 4 & -1 & 0\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 5 & 2\\ 2 & 5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 14 & 14\end{bmatrix}$$

20- أوجد مقلوب كل من المصفوفتين:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ -4 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 8 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

21- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 6 & 5 & 2\\ 2 & 5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 14 & 14\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأساسية على صفوفها.

22- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأساسية على صفوفها.

23- أوجد مقلوب كل من المصفوفات التالية وذلك باستخدام مبرهنة " كيلي هاملتون ":

$$1)\begin{bmatrix} 2 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad 2)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad 3)\begin{bmatrix} -4 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

24- لتكن كثيرة الحدود:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 6x + 4$$

والمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب إيجاد $f(A)$ .

25- اختزل المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الدرجي.

26- استخدم خواص المحددات في إثبات أن:

$$1)\quad \begin{vmatrix} a+x & r-x & x \\ b+y & s-y & y \\ c+z & t-z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} 2a & 3r & x \\ 4b & 6s & 2y \\ -2c & -3t & -z \end{vmatrix} = (-12)\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

$$3)\quad \begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b-2c & s-2t & y-2z \\ 5c & 5t & 5z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

27- أثبت أن قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ -10 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 6$$

28- أثبت باستخدام خصائص المحددات أن:

1) $$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

2) $$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \dots & a \\ a & a+b & a & \dots & a \\ a & a & a+b & \dots & a \\ . & . & . & \dots & . \\ a & a & a & \dots & a+b \end{vmatrix}_{n\times n} = b^{n-1}(na+b)$$

3) $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-\lambda)^3(4-\lambda)$$

4) $$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

5) $$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & .. & \dots \\ 1 & 1 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+n-1)(\lambda-1)^{n-1}$$

29- أحسب مشتقة كل من المحددات التالية:

1) $$\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}$$ 2) $$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$$ 3) $$\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix}$$

# القيم والمتجهات الذاتية لمصفوفة مربعة - الصيغ التربيعية

**1 – المسألة المهمة للقيم الذاتية:**

إن المسألة المهمة للقيم الذاتية في المصفوفات هي حل المعادلات $AX = \lambda X$ حيث $\lambda$ مقدار سلمي و $A \in M_{(n,n)}(R)$ أو $A \in M_{(n,n)}(C)$ و $X \in M_{(n,1)}(R)$ أو $X \in M_{(n,1)}(C)$.

يمكن كتابة المعادلات السابقة بالشكل: $(A - \lambda)X = 0$، نلاحظ أن الحل التافه لهذه المعادلات هو $X = 0$. لذلك نضع الشرط $|A - \lambda I| = 0$ لكي لا نحصل على هذا الحل ( معرفة قيم $\lambda$ التي تمنع الحل $X = 0$ لهذه الجملة من المعادلات ).

إن المعادلة الذاتية $|A - \lambda I| = 0$ تعطي القيم الذاتية والتي ينعدم عندها الحل التافه ، بل إنها تعطي عدداً لا نهائياً من الحلول التي تحقق المعادلة المتجانسة $[A - \lambda I]X = 0$. ويسمى $X$ بالمتجه الذاتي للمصفوفة $A$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda$.

**2 – مبرهنة القيم الذاتية:** إن القيم الذاتية لمصفوفة مربعة هي جذور المعادلة:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (1-4)$$

**الإثبات:**

لتكن لدينا المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$ من المرتبة $n$. إن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي القيم التي تحقق العلاقة: $AX = \lambda X$ ونستطيع كتابة هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda.X_1 \\ \lambda.X_2 \\ \dots \\ \lambda.X_n \end{bmatrix} \qquad (2-4)$$

وهذه الجملة تكتب بالشكل:

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11}-\lambda).X_1+a_{12}.X_2+\ldots+a_{1n}.X_n=0\\ a_{21}.X_1+(a_{22}-\lambda).X_2+\ldots+a_{2n}.X_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}.X_1+a_{n2}.X_2+\ldots+(a_{nn}-\lambda).X_n=0\end{array}\right\}\qquad(3-4)$$

وهي جملة معادلات خطية متجانسة ، عدد المعادلات فيها يساوي عدد المجاهيل ويكون لهذه الجملة حل غير الصفر إذا كانت مصفوفة الأمثال غير شاذة أي:

$$\begin{vmatrix}(a_{11}-\lambda) & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & (a_{22}-\lambda) & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & (a_{nn}-\lambda)\end{vmatrix}=0\qquad(4-4)$$

وهذا المحدد يكتب بالشكل التالي:

$$\det(A-\lambda I)=0 \text{ أو } |A-\lambda I|=0\ .\qquad(5-4)$$

نسمي المعادلة $\det(A-\lambda I)=0$ بالمعادلة المميزة للمصفوفة المربعة $A$ وهي من الدرجة $n$ بـ $\lambda$ .

نسمي الجذور لهذه المعادلة بالقيم الذاتية للمصفوفة $A$.

من العلاقة $AX=\lambda X$ نستنتج بأن كل قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ يقابلها متجه ذاتي بصورة عامة وهذه المتجهات الذاتية إما أن تكون حقيقية أو تخيلية ( حسب كون القيم الذاتية المقابلة لها حقيقية أو تخيلية).

**أمثلة:**

1 – أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)(1-\lambda)-9=0$$

$$\lambda^2-2\lambda-8=0\Rightarrow\lambda_1=4,\lambda_2=-2$$

(وهي القيم الذاتية للمصفوفة $A$)

لإيجاد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية السابقة:

لدينا: $[A-\lambda I]X=0$ وبالتالي:

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}(1-\lambda)x_1+3x_2=0\\ 3x_1+(1-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1=4$ نجد:

$$\left.\begin{array}{l}-3x_1+3x_2=0\\ 3x_1-3x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2=-2$ نجد:

$$\left.\begin{array}{l}3x_1+3x_2=0\\ 3x_1+3x_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow x_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

2- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -6\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 1-\lambda & -6\\ -1 & -2 & -\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -(\lambda+3)^2(\lambda-5)=0$$

ومنه نحصل على القيم الذاتية للمصفوفة $A$:

$$\lambda_1=-3, \lambda_2=-3, \lambda_3=5$$

## لإيجاد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية:

لدينا:

$$[A-\lambda I]X=0$$

وبالتالي:

$$\begin{bmatrix}-2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 1-\lambda & -6\\ -1 & -2 & -\lambda\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}(-2-\lambda)x_1+2x_2-3x_3=0\\ 2x_1+(1-\lambda)x_2-6x_3=0\\ x_1-2x_2-\lambda x_3=0\end{matrix}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1=-3, \lambda_2=-3$ نجد:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2-3x_3&=0\\ 2x_1+4x_2-6x_3&=0\\ -x_1-2x_2+3x_3&=0\end{aligned}$$

نلاحظ أن $n=3, \rho=1$ وبالتالي يوجد $n-\rho=3-1=2$ حلان مستقلان خطياً هما:

$$x_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_3=5$ نجد:

$$\begin{aligned}-7x_1+2x_2-3x_3&=0\\ 2x_1-4x_2-6x_3&=0\\ -x_1-2x_2-5x_3&=0\end{aligned}$$

والمتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda_3=5$ هو:

$$x_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\end{bmatrix}$$

**3- نتائج هامة:**

1- $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = tr(A)$

2- $|A| = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

من خلال المثال يمكن التاكد من (1):

$$\lambda_1+\lambda_2=(4)+(-2)=2$$
$$tr(A)=1+1=2$$

التاكد من (2):

$$|A|=(1)(1)-(3)(3)=-8$$
$$\lambda_1\cdot\lambda_2=(4)(-2)=-8$$

**4- الضرب الداخلي لمتجهين:**

**4-1 تعريف:** الضرب الداخلي بين متجهين $x_1,x_2$ من نفس الأبعاد ويرمز له بالرمز $\langle x_1,x_2\rangle$ يعطى بالشكل التالي:

$$\langle x_1,x_2\rangle = x_1^{*T}\cdot x_2 \qquad (6-4)$$

**مثال:**

إذا كان:

$$x_1=\begin{bmatrix}1+i\\2\\i\end{bmatrix} \quad , \quad x_2=\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}$$

أوجد $\langle x_1,x_2\rangle,\langle x_1,x_1\rangle$.

**الحل:**

$$\langle x_1,x_2\rangle = x_1^{*T}\cdot x_2=\begin{bmatrix}1-i & 2 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix}=(1-i)(2)+2(0)+(-i)(3)=2-5i$$

$$\langle x_1,x_1\rangle = x_1^{*T}\cdot x_1=\begin{bmatrix}1-i & 2 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+i\\2\\i\end{bmatrix}=(1-i)(1+i)+(2)(2)+(-i)(i)=7$$

وبالتالي: $|u|^2=7$ ( طول المتجه $u$ يساوي $\sqrt{7}$ ).

**4-2 خصائص الضرب الداخلي:**

بفرض لدينا المتجهات $u,v,u_1,u_2,v_1,v_2$ و $\lambda$ مقدار سلمي:

1) $\langle \lambda u,v \rangle = \lambda^* \langle u,v \rangle$
2) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle$
3) $\langle u,v_1 + v_2 \rangle = \langle u,v_1 \rangle + \langle u,v_2 \rangle$
4) $\langle u_1 + u_2,v \rangle = \langle u_1,v \rangle + \langle u_2,v \rangle$
5) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

**4-3 المتجهات المتعامدة:**

**4-3-1 تعريف:** نقول عن متجهين $u,v$ (غير صفريين) إنهما متعامدان إذا كان حاصل الضرب الداخلي لهما يساوي صفراً ، أي أن:

$$\langle u,v \rangle = 0 \Leftrightarrow \text{متعامدان } u,v \qquad (7-4)$$

**ملاحظة(١):** المتجهات الأولية في أي فضاء متعامدة مثنى مثنى.

**مثال:**

أوجد قيم $\alpha$ كي يتعامد المتجهان:

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \ , \ v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

$$\langle u,v \rangle = u^{*T} v = \begin{bmatrix} \alpha^* & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\alpha^* + 9 = 0 \Rightarrow 2\alpha^* + 9 = 0$$

إذا كان $\alpha = \alpha_1 + i\,\alpha_2$ فإن $\alpha^* = \alpha_1 - i\,\alpha_2$ وبالتالي لكي يتعامد المتجهان يكون:

$$2\alpha^* + 9 = 0 \Rightarrow 2(\alpha_1 - i\,\alpha_2) + 9 = 0 \Rightarrow (2\alpha_1 + 9) + i\,(-\alpha_2) = 0$$

ومنه فإن: $\alpha_1 = -9/2, \alpha_2 = 0$

**4-4 المتجهات المستقلة:**

**4-4-1 تعريف:** نقول عن المتجهات $\{x_i\}; i = 1,2,...,n$ إنها غير مرتبطة خطياً (مستقلة خطياً) إذا وفقط إذا كان المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \qquad (8-4)$$

مساوياً للصفر إذا كان فقط محققاً عند انعدام قيم المقادير السلمية $\alpha_i$ ($\alpha_i = 0$ لجميع قيم $i$ )

**مثال:**

أثبت أن المتجهات الأولية لأي فضاء هي متجهات غير مرتبطة خطياً.

**الحل:**

إذا أخذنا الفضاء ثنائي الأبعاد فإن:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

أي أنها غير مرتبطة خطياً.

وبشكل مشابه أذا أخذنا الفضاء الثلاثي الأبعاد فإن:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

أي إنها غير مرتبطة خطياً.

وبشكل عام إذا ما أخذنا أي فضاء فإن المتجهات الأولية لأي فضاء هي متجهات غير مرتبطة خطياً.

**4-4-2 مبرهنة:** المتجهات المتعامدة على بعضها البعض تكون غير مرتبطة خطياً.

**ملاحظة(٢):** عكس المبرهنة السابقة غير صحيح أي إذا كانت المتجهات $\{x_i\}$ غير مرتبطة خطياً فهذا لا يعني بالضرورة أنها متعامدة.

**مثال:**

المتجهان $u=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix},v=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ غير مرتبطين خطياً لكنهما ليسا متعامدين.

### 4-5 المصفوفة المتعامدة:

**4-5-1 تعريف:** بفرض لدينا $\{x_i\};i=1,2,...,n$ مجموعة من المتجهات المتعامدة (على بعضها البعض).إن المصفوفة التي تضم هذه المتجهات كأعمدة أو كصفوف (ولتكن المصفوفة $A$) تسمى مصفوفة متعامدة.

**4-5-2 مبرهنة:** إن نتيجة ضرب $A^{*T}\cdot A$ هو مصفوفة قطرية إذا وفقط إذا كانت أعمدة $A$ هي مجموعة من المتجهات المتعامدة وبالتالي $A^{*T}\cdot A$ أو $A\cdot A^{*T}$ ستكون مصفوفة قطرية عناصرها هي مربعات مقاييس ( أطوال ) متجهات الأعمدة (أو الصفوف) في المصفوفة.

### 4-5-3 مبرهنات (خواص القيم والمتجهات الذاتية):

1- القيم الذاتية للمصفوفة الصفرية هي أصفار.

**الإثبات:**

$$A=0\Rightarrow|0-\lambda I|=0\Rightarrow\lambda^n|I|=0\Rightarrow\lambda^n=0$$

وبالتالي: $\lambda_i=0;\forall i=1,2,...,n$

2- القيم الذاتية للمصفوفة الواحدية هي الواحد.

**الإثبات:**

$$A=I\Rightarrow|I-\lambda I|=0\Rightarrow|(1-\lambda)I|=0\Rightarrow(1-\lambda)^n|I|=0\Rightarrow(1-\lambda)^n=0$$

وبالتالي: $\lambda_i=1;\forall i=1,2,...,n$

3- القيم الذاتية للمصفوفة القطرية $D=diag(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ هي عناصر القطر الرئيسي أي:

$\lambda_i=\alpha_i;\forall i=1,2,...,n$ ، ومتجهاتها الذاتية هي المتجهات الأولية

**الإثبات:**

$$D=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_n\end{bmatrix}\Rightarrow |D-\lambda I|=0\Rightarrow\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\alpha_i)=0$$

وبالتالي:

$$\lambda_i=\alpha_i;\forall i=1,2,...,n$$

عند: $\lambda_i=\alpha_i$ لدينا :

$$(D-\alpha_i I)x_i=0\Rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_i-\alpha_1 & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \alpha_i-\alpha_2 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & \alpha_i-\alpha_3 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_i-\alpha_n\end{bmatrix}}_{(D-\alpha_i I)}\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ ...\\ b_n\end{bmatrix}}_{x_i}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\...\\0\end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على المعادلات: $(\alpha_i-\alpha_j)b_j=0;\forall i,j=1,2,...,n$

أي أن:

$$b_j=\begin{cases}0 & ; \quad j\neq i\\ c=1 & ; \quad j=i\end{cases}$$

حيث $c$ قيمة اختيارية ( اخترنا $c=1$ ) وبالتالي المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\alpha_i$ هو المتجه الأولي رقم $i$.

4- تكون المصفوفة $A$ مصفوفة شاذة إذا و فقط إذا كانت إحدى قيمها الذاتية صفراً.

**الإثبات:**

من الخاصة $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ إذا كانت إحدى القيم الذاتية صفراً فإن المحدد $|A|$ ينعدم وهذا يعني أن المصفوفة $A$ شاذة.

5- المصفوفتان $A$ و $A^T$ لهما نفس القيم الذاتية.

**الإثبات:**

نعلم أن $|A|=|A^T|$ وبالتالي فإن:

$$|A^T-\lambda I|=\left|\left(A^T-\lambda I\right)^T\right|=|A-\lambda I|$$

أي أن $A$ و $A^T$ لهما نفس الحدودية الذاتية وهذا يؤدي بدوره إلى أن لهما نفس القيم الذاتية.

6- إذا كانت $B$ مصفوفة غير شاذة فإن:

**1**)- $A,B^{-1}AB$ لهما نفس القيم الذاتية.

**2**)- المتجهات الذاتية لـ $B^{-1}AB$ هي حاصل ضرب $B^{-1}$ في المتجهات الذاتية لـ $A$.

**الإثبات:**

**1**)- $|B^{-1}AB-\lambda I|=|B^{-1}AB-\lambda B^{-1}B|=|B^{-1}(A-\lambda I)B|=|B^{-1}||A-\lambda I||B|=$

$$=|B^{-1}B||A-\lambda I|=|A-\lambda I|$$

وهذا يعني أن المصفوفتين $A, B^{-1}AB$ لهما نفس الحدود الذاتية وبالتالي نفس القيم الذاتية.

2)- لنفرض أن $u$ هو المتجه الذاتي للمصفوفة $A$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda$ وأن $v$ هو المتجه الذاتي للمصفوفة $B^{-1}AB$ المقابل لنفس القيمة الذاتية $\lambda$، إذاً:

$$Au = \lambda u \qquad (9-4)$$

وكذلك:

$$B^{-1}ABv = \lambda v \Rightarrow ABv = \lambda Bv \Rightarrow A(Bv) = \lambda(Bv) \qquad (10-4)$$

بمقارنة $(9-4)$ و $(10-4)$ نستنتج أن: $u = Bv \Rightarrow v = B^{-1}u$

7- إذا كانت $A$ مصفوفة حقيقية فإن معاملات الحدودية الذاتية لها تكون حقيقية وإذا كانت $\lambda_j = \alpha_j + iB_j$ قيمة ذاتية عقدية لها فإن مرافقها $\lambda_k = \lambda_j^* = \alpha_j - iB_j$ هو أيضاً قيمة ذاتية للمصفوفة $A$. أيضاً إذا كان $u_j$ هو المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية العقدية $\lambda_j$ فإن المتجه الذاتي $u_k$ المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_k$ هو مرافق $u_j$ أي $u_k = u_j^*$ (بدون برهان).

8- إذا كان $u$ هو متجهاً ذاتياً للمصفوفة $A$ والمقابل للقيمة الذاتية $\lambda$ فإن $\alpha u$ ( $\alpha$ عدد) يكون أيضاً متجه ذاتي للمصفوفة $A$ ومقابلاً لنفس القيمة الذاتية $\lambda$.

**الإثبات:**

$$Au = \lambda u \Rightarrow \alpha Au = \alpha\lambda u \Rightarrow A(\alpha u) = \lambda(\alpha u)$$

وبالتالي فإن $\alpha u$ متجه ذاتي للمصفوفة $A$ مقابل للقيمة الذاتية $\lambda$.

**4-5-4 تعريف:** إذا تكررت القيمة الذاتية $\lambda$ عدداً من المرات مقداره $n$ فإننا نقول أن $\lambda$ قيمة ذاتية ذات تكرار $n$.

**ملاحظة(٣):** إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ ذات تكرار $n$ ، بحل جملة المعادلات:

$[A - \lambda I]X = 0$ نحصل على الأكثر على $n$ من المتجهات الذاتية المستقلة.

9- إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ ذات تكرار $n$ وكانت $u_1, u_2, ..., u_n$ هي المتجهات الذاتية المقابلة للقيمة الذاتية $\lambda$ فإن التركيب الخطي $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ هو أيضاً متجه ذاتي للمصفوفة $A$ ومقابل للقيمة الذاتية $\lambda$.

10- إذا كانت $\lambda$ قيمة ذاتية للمصفوفة $A$ ولها المتجه الذاتي $u$ فإن $\lambda^n$ تكون قيمة ذاتية للمصفوفة $A^n$ ولنفس المتجه الذاتي $u$ ( $n$ عدد صحيح) وبشرط وجود $A^{-1}$.

**ملاحظة(٤):** إن للمبرهنة الأخيرة (10) أهمية خاصة ، على سبيل المثال إذا كان المطلوب حساب القيمة الذاتية لـ $A^3$ فإننا نحسب القيمة الذاتية لـ $A$ وأيضاً المتجهات الذاتية المقابلة لها. فإذا كانت $A$ لها $(\lambda, u)$ فإن $A^3$ يكون لها $(\lambda^3, u)$ ولا داعي لحساب $A^3$ كمصفوفة.

11- إذا كانت $A$ لها $(\lambda, u)$ فإن $f(A)$ يكون لها $(f(\lambda), u)$ حيث: $f(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i A^i$.

**ملاحظة(٥):** إن للمبرهنة الأخيرة (11) أهمية خاصة أيضاً ، مثلاً إذا كانت $A$ لها $(\lambda, u)$ فإن: $(A^2 + 3A + 5I)$ لها $(\lambda^2 + 3\lambda + 5, u)$ ، $(\sin(A))$ لها $(\sin(\lambda), u)$ ، $(e^A)$ لها $(e^\lambda, u)$ ولا داعي لحساب الدالة المصفوفية.

12- القيم الذاتية للمصفوفة المتناظرة الحقيقية تكون قيماً حقيقية ومتجهاتها الذاتية تكون متعامدة وذلك إذا كانت قيمها الذاتية مختلفة عن بعضها البعض (أي إذا كانت $\lambda_i \neq \lambda_j; \forall i \neq j$ ) وفي حالة عدم الاختلاف يمكن جعلها متعامدة.

**مثال:**

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم الذاتية للمصفوفة المتناظرة $A$ وأيضاً المتجهات الذاتية الموافقة لها.

2- أثبت أن هذه المتجهات متعامدة مثنى مثنى.

**الحل:**

1- نحل المعادلة:
$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ومنه:

$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=3$ (وهي القيم الذاتية للمصفوفة المتناظرة)

وحسب المبرهنة(12) فإن المتجهات الذاتية المقابلة لهذه القيم مستقلة خطياً(القيم الذاتية مختلفة).

لنوجد أولاً هذه المتجهات الخاصة المقابلة لهذه القيم:

من أجل القيمة $\lambda_1=0$ نجد:

$$\left.\begin{aligned}2x_1+x_3=0\\ 2x_2-x_3=0\\ x_1-x_2+x_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{aligned}x_1=-1/2\,x_3\\ x_2=1/2\,x_3\end{aligned}$$

ومنه نحصل على المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_1=0$:

$$x_1=\begin{bmatrix}-1/2\\ 1/2\\ 1\end{bmatrix}$$

وبشكل مشابه بالنسبة للقيمة الذاتية $\lambda_2=2$ نحصل على المتجه الذاتي:

$$x_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

وبالنسبة للقيمة الذاتية $\lambda_3=3$ نحصل على المتجه الذاتي:

$$x_3=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

2- لإثبات أن هذه المتجهات متعامدة مثنى مثنى نكتب:

$$x_2^T\cdot x_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1+0\end{bmatrix}=0$$

$$x_1^T\cdot x_2=\begin{bmatrix}-1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2+1/2+0\end{bmatrix}=0$$

$$x_1^T \cdot x_3 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 - 1/2 + 1 \end{bmatrix} = 0$$

وهذا يعني أن المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية المختلفة تكون متعامدة مثنى مثنى.

13− إذا كانت $A$ مصفوفة متناظرة متخالفة فإن:

1)- قيمها الذاتية تكون تخيلية.

2)- متجهاتها الذاتية تكون متعامدة مثنى مثنى (إذا كانت القيم الذاتية مختلفة).

14− إذا كانت $A$ مصفوفة هرميتية فإن:

1)- قيمها الذاتية تكون حقيقية.

2)- متجهاتها الذاتية تكون متعامدة مثنى مثنى (إذا كانت القيم الذاتية مختلفة).

15− إذا كانت $A$ مصفوفة هرميتية متخالفة فإن:

1)- قيمها الذاتية تكون تخيلية.

2)- متجهاتها الذاتية تكون متعامدة مثنى مثنى (إذا كانت القيم الذاتية مختلفة).

16− المتجهات الذاتية المقابلة لقيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة.

**مثال:**

في المثال السابق لثبت أن المتجهات الذاتية $x_1, x_2, x_3$ مستقلة خطياً:

**الحل:**

**الطريقة الأولى:**

نوجد محدد المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المكونة من المتجهات الذاتية فنجد:

$\det A = -3 \neq 0$ وهذا يبين أن المتجهات الذاتية $x_1, x_2, x_3$ مستقلة خطياً.

**ويمكن بطريقة ثانية:**

$$\begin{bmatrix} -u/2 \\ u/2 \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ -w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على جملة المعادلات:

$$-u/2 + v + w = 0$$
$$u/2 + v - w = 0$$
$$u + w = 0$$

بحل هذه الجملة نجد: $u = v = w = 0$ وهذا يعني أن المتجهات مستقلة خطياً.

**6−4 المصفوفة القابلة للتقطير:**

**4−6−1 تعريف:** المصفوفة الظاهرية $T$ هي المصفوفة التي تحتوي على المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$، والعلاقة التالية صحيحة لأي مصفوفة مربعة $A$ لها $(\lambda,u)$: $AT = TD_\lambda$ (حيث $D_\lambda$ مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي القيم الذاتية للمصفوفة $A$ وبنفس ترتيب وضع المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$ في المصفوفة $T$ كأعمدة).

**4−6−2 المتجهات الذاتية المستقلة:**

إذا كانت المتجهات الذاتية لـ $A$ مستقلة فإن: $\rho(T) = n$ ويكون $T^{-1}$ موجوداً وبالتالي:

$$T^{-1}AT = D_\lambda \qquad (11-4)$$

وتسمى هذه الصيغة بـ القطرية. وتسمى المصفوفة $A$ في هذه الحالة بالمصفوفة القابلة للتقطير.

ونقول بأن $A$ متناظرة مع $D_\lambda$).

**أمثلة:**

1− حول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل القطري.

**الحل:**

إن القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

والمتجهات الذاتية المقابلة لها هي:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المتجهات الذاتية مستقلة لأن القيم الذاتية مختلفة وبالتالي فإن المصفوفة الظاهرية $T$ للمصفوفة $A$ هي:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أما $T^{-1}$ موجود (يترك للطالب إيجاد المقلوب $T^{-1}$) هو:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة القطرية بالشكل:

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = D_\lambda$$

2− حول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل القطري.

**الحل:**

لنوجد القيم الذاتية من خلال $\det(A-\lambda I)=0$ ومنه نجد:

$$(1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda-3)=0$$

وبالتالي القيم الذاتية: $\lambda_1=1, \lambda_2=-1, \lambda_3=3$

والمتجهات الذاتية المقابلة لها هي:

$$x_1=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}, x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, x_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

وهذه المتجهات مستقلة خطياً لأن القيم الذاتية مختلفة.

إن:

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 1 & 3\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

أما $T^{-1}$:

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & -1/4\\-1/4 & -1/4 & -5/4\\1/4 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & -1/4\\-1/4 & -1/4 & -5/4\\1/4 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\\-1 & -1 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 1 & 3\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}=D_\lambda$$

**ملاحظة(٦):** يمكننا استناداً إلى المبرهنة (3) كتابة المصفوفة القطرية مباشرة بكتابة القيم الذاتية بالترتيب على القطر الرئيسي و بقية العناصر تكتب أصفاراً فنحصل على المصفوفة المطلوبة.

## 4-7 الصيغ التربيعية:

إن الصيغة العامة للمعادلة من الدرجة الثانية في $x, y$ هي:

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (12-4)$$

ويمكن وضع $ax^2+2bxy+cy^2$ بالصيغة المصفوفية الآتية:

$$ax^2+2bxy+cy^2=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \qquad (13-4)$$

تسمى هذه الصورة بالصيغة التربيعية في متغيرين التي يمكن كتابتها بالشكل:

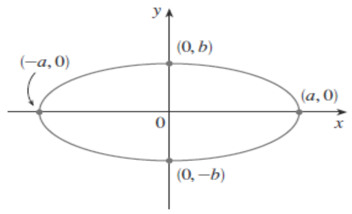
$$Q(x)=\underline{x}^T\cdot A\cdot\underline{x} \qquad (14-4)$$

حيث:

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $A$ مصفوفة متناظرة حقيقية وهذه الصورة تسمى أيضاً بالقطاعات المخروطية. معظم الأشكال القطاعية

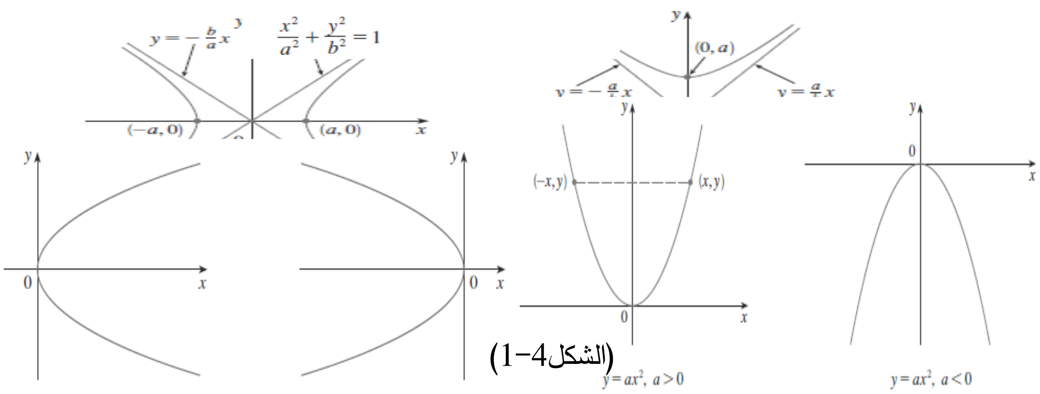
تأتي من تقاطع مستوي مع مخروط دائري قائم مزدوج (الشكل4−1) وبالتالي الصورة المبسطة للمعادلات التربيعية هي:

1− قطع ناقص:




2− قطع زائد:

٣− قطع مكافئ:

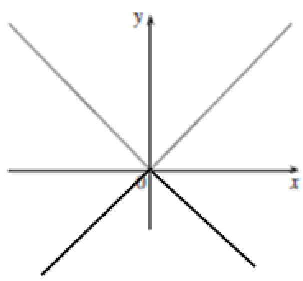



(الشكل4−1)

يمكن أن تمثل الصيغة التربيعية خطين مستقيمين أو تمثل نقطة أو تمثل ،

**أمثلة:**

1− المعادلة $x^2 - y^2 = 0$ تمثل خطين مستقيمين. انظر (الشكل4−2)




لأن: $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$

وبالتالي: $x - y = 0$ ، $x + y = 0$ (معادلتي مستقيمين)

2− المعادلة: $x^2 + y^2 = 0$ تمثل نقطة ولا تتحقق إلا في النقطة $(0,0)$.

3− المعادلة: $x^2 + y^2 + 1 = 0$ تمثل منحنياً تخيلياً . لا تتحقق لأية نقطة وبالتالي لا يمكن رسمه في المستوي الحقيقي.

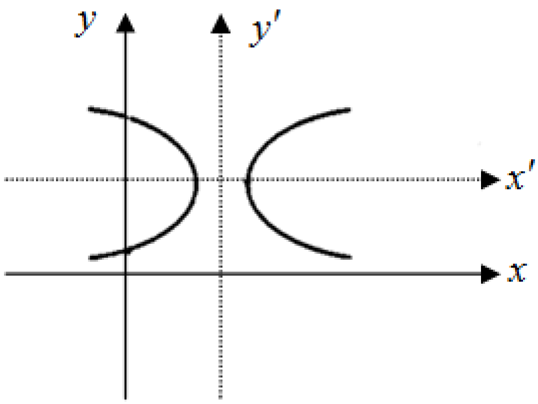
4− المعادلة: $3x^2 - 2y^2 - 18x + 8y + 13 = 0$ تمثل معادلة قطع زائد مركزه النقطة $(3,2)$.

يمكن كتابة المعادلة بالشكل:

$$(3x^2-18x)-(2y^2-8y)+13=0$$
$$3(x^2-6x+9)-2(y^2-4y+4)+13-3(9)+2(4)=0$$
$$3(x-2)^2-2(y-2)^2-6=0$$
$$3x'^2-2y'^2-6=0; x'=x-2, y'=y-2$$

ومنه:

$3x'^2-2y'^2=6 \Rightarrow \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{3}=1$ وهي معادلة قطع زائد مركزه $(3,2)$ (الشكل3-4).




يمكن الحصول على الأشكال القياسية بنقل أو دوران المحاور الإحداثية.

بالنسبة لدوران المحاور يجب علينا معرفة كيفية تحديد زاوية الدوران وذلك بكتابة المعادلة بالصورة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=0 \qquad (15-4)$$

أي:

$$x^T Ax+Bx+f=0 \qquad (16-4)$$

ومن المعلوم أن المصفوفة $A$ متناظرة وبالتالي يمكن جعلها قطرية أي إن:

$$P^T AP=D_\lambda \qquad (17-4)$$

حيث $P$ هي المصفوفة الظاهرية والتي تحتوي على المتجهات الذاتية المتعامدة $v_1,v_2,...,v_n$ المقابلة للقيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ للمصفوفة $A$.

ومن المعلوم أن:

$$\underline{x}=p\underline{x}'; \underline{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \underline{x}'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad (18-4)$$

وبالتالي:

$$\underline{x}^T A\underline{x}=(p\underline{x}')^T A(p\underline{x}')=\underline{x}'^T p^T Ap\underline{x}'=\underline{x}'^T D_\lambda \underline{x}'=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2 \qquad (19-4)$$

حيث:

$$D_\lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad (20-4)$$

**4-7-1 مبرهنة:** لتكن $Q(x)=\underline{x}^T\cdot A\cdot\underline{x}$ صيغة تربيعية حيث $A=[a_{ij}]_{(2,2)}$ مصفوفة مربعة ومتناظرة ، فإنه يوجد دوران يؤدي إلى انعدام الحد البيني (الداخلي) بحيث يكون:

$$Q(\underline{x}')=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2 \qquad (21-4)$$

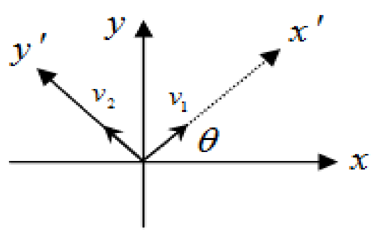
حيث: $\lambda_1,\lambda_2$ هي القيم الذاتية للمصفوفة $A$ و $p=[v_1 \quad v_2]$ و $\underline{x}=p\underline{x}'$ و $v_1,v_2$ هي المتجهات الذاتية الأولية للمصفوفة $A$ بحيث يكون $p^T=p^{-1}$ وكذلك يكون:

$$tan\,2\theta=\frac{2b}{a-c} \qquad (22-4)$$

حيث:

$$p=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \qquad (23-4)$$

انظر (الشكل4-4)




**ملاحظة(٧):**

1- المعادلة بعد الدوران تصبح:

$$x^TAx+Bx+f=0\Rightarrow x'^T(p^TAp)x+Bpx'+f=0 \qquad (24-4)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+d'x'+e'y'+f=0 \qquad (25-4)$$

حيث: $Bp=[d \quad e], p=[d' \quad e']$ مع عدم تغيير المعامل الثابت $f$ للمعادلتين.

2- إذا كان لـ $\lambda_1,\lambda_2$ نفس الإشارة فالناتج قطع ناقص ، أما إذا كانتا من إشارتين متعاكستين فالناتج قطع زائد، وإذا كانت إحداهما فقط صفراً فالناتج قطع مكافئ.

3- نلاحظ أن: $a+c=a'+c', b^2-ac=b'^2-a'c'$

لأن:

$$(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0\Rightarrow |A-\lambda I|=0\Rightarrow \begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2+4(b^2-ac)}}{2}\Rightarrow \lambda^2-(a+c)\lambda-(b^2-ac)=0\Rightarrow$$

$$\lambda_1+\lambda_2=a+c, \lambda_1\cdot\lambda_2=-(b^2-ac)$$

**أمثلة:**

1- ماهو شكل القطاع المخروطي الذي تمثله المعادلة:

$$16x^2+24xy+9y^2+15x-20y=0$$

**الحل:**

من المعادلة نلاحظ أن:

$$A=\begin{bmatrix}16&12\\12&9\end{bmatrix}، B=[15\quad -20]، \lambda_1=25,\lambda_2=0 ، v_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},v_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$p=[v_1\quad v_2]=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-3\\3&4\end{bmatrix};p^TAp=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0\\0&0\end{bmatrix}$$

ومنه:

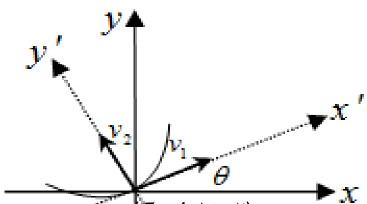
$$x'^TAx'=[x'\quad y']\begin{bmatrix}25&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=25x'^2$$

$$Bpx'=[15\quad -20]\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-3\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=-25y'$$

والمعادلة $16x^2+24xy+9y^2+15x-20y=0$

تأخذ الشكل:

$25x'^2-25y'=0\Rightarrow y'=x'^2$ وهي معادلة قطع مكافئ انظر (الشكل4−5).




(الشكل4−5)

وتتحدد زاوية الدوران $\theta$ من:

$$tan2\theta=\frac{2b}{a-c}=\frac{24}{16-9}=\frac{24}{7}\Rightarrow\theta\cong36.87^\circ$$

ويمكن أيضاً حساب $\theta$ من عناصر المتجه $v_1$ حيث $\tan\theta=\frac{3}{4}$.

2− ماهو شكل القطاع المخروطي الذي تمثله المعادلة:

$$34x^2-24xy+41y^2-40x-30y-25=0$$

**الحل:**

من المعادلة نلاحظ أن:

$$A=\begin{bmatrix}34&-12\\-12&41\end{bmatrix}، B=[-40\quad -30]، \lambda_1=25,\lambda_2=50 ، v_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},v_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$$ وبالتالي فإن:

$$p=[v_1\quad v_2]=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4&-3\\3&4\end{bmatrix};p^TAp=\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25&0\\0&50\end{bmatrix}$$

ومنه:

$$x'^T A x' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 25x'^2 + 50y'^2$$

$$Bpx' = \begin{bmatrix} -40 & -30 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -05x'$$

والمعادلة:

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 - 40x - 30y - 25 = 0$$

تأخذ الشكل:

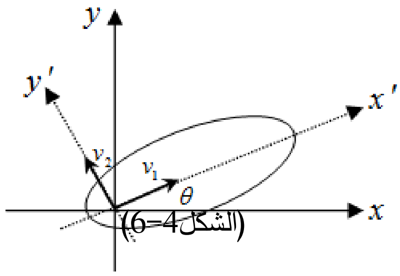
$$25(x'^2 - 1)^2 + 50y'^2 = 50$$

أو:

$$\frac{(x'^2 - 1)^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص محوره $x'$ يدور بزاوية $36.87^\circ$ عن محور $x$ ومركزه النقطة $(1,0)$

على المحاور $x'y'$. انظر (الشكل4−6) وتتحدد زاوية الدوران $\theta$ من: $tan\theta \frac{3}{4} \Rightarrow \theta \cong 36.87^\circ$.



(الشكل4−6)

3− أثبت أنه إذا كان $b^2 - ac = 0$ فإن المعا

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

تمثل قطعاً مكافئاً.

**الحل:**

نلاحظ أن:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

والقيم الذاتية للمصفوفة $A$ تتحدد من:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2 - ac) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

لتمثل المعادلة المعطاة قطعاً مكافئاً يجب أن تكون إحدى القيم الذاتية ولتكن مثلاً $\lambda_1 = 0$

ومنه:

$$\lambda_1 = \frac{(a+c) - \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} = 0 \Rightarrow (a+c) = \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}$$

$$\Rightarrow (a+c)^2 = (a+c)^2 - 4(ac-b^2) \Rightarrow ac - b^2 = 0 \Rightarrow b^2 - ac = 0$$

وهو المطلوب.

**ملاحظة(٨):** يمكن إثبات أن المعادلة:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

تمثل قطعاً زائداً إذا كان $b^2 - ac > 0$ في حين تمثل قطعاً ناقصاً إذا كان $b^2 - ac < 0$.

**4-8 الحالة العامة:**

**4-8-1 مبرهنة المحاور الأساسية للصيغة التربيعية:**

إذا كانت $Q(x) = x^T \cdot A \cdot x$ صيغة تربيعية حيث $A = [a_{ij}]_{(2,2)}$ ومتناظرة ولتكن $p$ بحيث $p^T A p = D_\lambda$

فإن: $x = px'$ يحول الصيغة إلى التالي:

$$Q(x') = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2 \qquad (26-4)$$

حيث $\{\lambda_i\}$ هي مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة $A$.

**الإثبات:**

$$Q(x) = x^T \cdot A \cdot x = (px')^T A (px') = x'^T D_\lambda x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2$$

## 4-9-1 تعاريف:

1- إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة $A$ موجبة فإن $Q(x) > 0$ إلا إذا كان $x = 0$ ، وتسمى الصيغة التربيعية $Q(x)$ في الحالة موجبة تحديداً.

2- وإذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة $A$ سالبة فإن $Q(x) < 0$ إلا إذا كان $x = 0$ ، وتسمى الصيغة التربيعية $Q(x)$ في الحالة سالبة تحديداً.

3- وإذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة $A$ غير محدودة الإشارةفإن الصيغة التربيعية $Q(x)$ تكون غير محددة أيضاً.

4- تسمى الصيغة التربيعية $Q(x)$ شبه موجبة تحديداً إذا كان $\lambda_i \ge 0; \forall i$ وشبه سالبة تحديداً إذا كان $\lambda_i \le 0; \forall i$

وغير منحلة إذا كان $\lambda_i \ne 0; \forall i$ وذلك لأن $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ وبالتالي فإن $|A| \ne 0$ إذا كان $\lambda_i \ne 0; \forall i$.

**أمثلة:**

1- بين أن الصيغة التربيعية:

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xz$$

موجبة تحديداً .

**الحل:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$ وبالتالي $\lambda_i > 0; \forall i$.

2- بين أن الصيغة التربيعية:

$$Q(x,y,z) = 6xz + 8yz$$

غير محددة .

**الحل:**

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

ومنه $\lambda_1=0,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$.

3- أثبت أن الصيغة التربيعية:

$$Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=0$$

تكون:

**1**-موجبة تحديداً إذا كان $(a>0,\Delta=ac-b^2>0)$.

**2**-سالبة تحديداً إذا كان $(a<0,\Delta=ac-b^2>0)$.

**3**- غير محددة إذا كان $(\Delta=ac-b^2<0)$.

**الحل:**

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\Rightarrow\Delta=|A|=ac-b^2=\lambda_1\lambda_2\Rightarrow ac=b^2+\Delta=b^2+\lambda_1\lambda_2$$

إذا كانت $\Delta>0$ هذا يعني أن $ac>0$ (لأن $b^2\geq 0$) وبالتالي فإن $a,c$ لهما نفس الإشارة.

وكذلك $\lambda_1,\lambda_2$ لهما نفس الإشارة (لأن $\Delta=\lambda_1\lambda_2>0$) .

ولكن نعلم أن: $a+c=\lambda_1+\lambda_2=tr(A)$ إذن $\lambda_1,\lambda_2,a,c$ لها جميعاً نفس الإشارةفإذا كانت:

**1**- $(a>0,\Delta=ac-b^2>0)$ هذا يعني (أن $\lambda_1,\lambda_2>0$) وبالتالي تكون $Q$ موجبة تحديداً.

**2**- $(a<0,\Delta=ac-b^2>0)$ هذا يعني (أن $\lambda_1,\lambda_2<0$) وبالتالي تكون $Q$ سالبة تحديداً.

**3**- $(\Delta=ac-b^2<0)$ هذا يعني (أن $\lambda_1$ أو $\lambda_2$ سالبة) أي أن $\lambda_1,\lambda_2$ لهما إشارات مختلفة وبالتالي $Q$ غير محددة.

**4-9-3 تعريف:** إذا كانت $A$ مصفوفة مربعة فإن المحدد:

$$\Delta_k=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk}\end{vmatrix}\qquad(27-4)$$

يعرف على أنه المحدد للعناصر العليا اليسرى من المصفوفة $A$ أي:

$$\Delta_1=a_{11},\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},\dots,\Delta_n=|A|\qquad(28-4)$$

**4-9-4 مبرهنة:** إذا كان $Q(x)=x^TAx$ صيغة تربيعية حيث $x\in R^n$ و $A$ مصفوفة متناظرة فإن:

**1**- $Q(x)$ تكون موجبة تحديداً إذا وفقط إذا كان $(\Delta_k>0;\forall k)$.

**2**- $Q(x)$ تكون سالبة تحديداً إذا وفقط إذا كان $\left((-1)^k\Delta_k<0;\forall k\right)$.

أي إذا كانت: $(\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0,\Delta_4>0,\dots)$

**3**- $Q(x)$ تكون غير محددة إذا كان $\Delta_k$ موجباً أحياناً وسالباً أحياناً.

ولا يمكن تحديد شيء ما إذا كان $|A|=0$ .

**أمثلة:**

1- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\Delta_1=-3,\Delta_2=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=5,\Delta_3=|A|=-10$$

وبالتالي فإن:

$$Q(x,y,z)=-3x^2-2y^2-5z^2+2xz+4xz+2yz$$

تكون غير محدودة.

2- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 9 & -6 \\ 1 & -3 & -6 & 19 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\Delta_1=1,\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=2,\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{vmatrix},\Delta_4=|A|=24$$

وبالتالي فإن:

$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$ تكون موجبة تحديداً.

## جذور مصفوفة مربعة

لتكن **A** مصفوفة مربعة و **n** عدد صحيح،وليكن: $A^n=B$ .

عندئذ يمكن أن نكتب: $A=\sqrt[n]{B}=B^{\frac{1}{n}}$

أي أن **A** هي الجذر النوني **(n)** للمصفوفة **B** .

وبشكل عام لإيجاد جذر مصفوفة **B** نفرض مصفوفة الحل **A** بعناصرها المجهولة، ومن ثم نبحث عن قيم تلك العناصر.

**مثال:**

أوجد الجذور التربيعية للمصفوفة: $B=\begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

**الحل:**

نفرض أن الجذر التربيعي للمصفوفة **B** هو المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

وبذلك يجب أن يكون: $A^2 = B$ .

أي أن: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

أي: $\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$

ومنه يكون لدينا:

$$a^2 + bc = 16 \text{..........}(1)$$

$$ab + bd = ca + cd = 0 \text{..........}(2)$$

$$cb + d^2 = 25 \text{..........}(3)$$

من المعادلة (2) لدينا: $b(a+d) = c(a+d) = 0$

إما: b=c=0 وبالتعويض في المعادلة (1) نجد: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \mp 4$

وبالتعويض في المعادلة (3) أيضاً نجد: $d^2 = 25 \Rightarrow a = \mp 5$

أو: a= -d وهذا غير ممكن لعدم تحقق المعادلتين (1) و (3).

إذاً تصبح جذور المصفوفة B هي المصفوفات الأربع التالية:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

حيث أن جداء كل من هذه المصفوفات بنفسها سيعطينا المصفوفة **B**.

**أمثلة :**

أوجد الجذور التربيعية لكل من المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## كثير الحدود لمصفوفة

إن الشكل العام لكثير الحدود من الدرجة n للمتغير x هو:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \text{..........} + a_1 x + a_0$$

وحتى يكون c جذراً لكثير الحدود f(x) يجب أن يكون f(c)=0

وهذا المفهوم ينطبق على المصفوفات المربعة أيضاً

حيث يعطى الشكل العام لكثير حدود المصفوفة A من الدرجة n كمايلي:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \text{..........} + a_1 A + a_0 I$$

وبالتالي يمكن القول بأنه حتى تكون A جذراً لكثير الحدود f(x) يجب أن يكون f(A)=0، حيث 0 هي المصفوفة الصفرية.

**مثال1:**

إذا كان: $f(x)=x^3-2x+2$ وكانت: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

**المطلوب:**

١- أوجد كثير حدود المصفوفة A.

٢- بين فيما إذا كانت A جذراً لكثير الحدود f(x).

**الحل:**

١- إيجاد كثير حدود المصفوفة A.

بالتعويض يصبح لدينا: $f(A)=A^3-2A+2I$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}37 & 54\\ 81 & 118\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 50\\ 75 & 112\end{bmatrix}$$

٢- بما أن f(A) لاتساوي المصفوفة الصفرية فإن A ليست جذراً لكثير الحدود.

**مثال2:**

إذا كان: $f(x)=x^2+2x-11$ وكانت: $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

**المطلوب:**

١- أوجد كثير حدود المصفوفة A.

٢- بين فيما إذا كانت A جذراً لكثير الحدود f(x).

**الحل:**

١- إيجاد كثير حدود المصفوفة A.

بالتعويض يصبح لدينا: $f(A)=A^2+2A-11I$

$$f(A)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}-11\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ 8 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

٢- بما أن f(A) تساوي المصفوفة الصفرية فإن A هي جذر لكثير الحدود.

## الجذور المميزة والمتجهات المميزة

**إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n و I هي المصفوفة الواحدية، يطلق على المقادير: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\dots, \lambda_k$ التي تحقق المعادلة: $|A-\lambda I|=0$ اسم الجذور المميزة للمصفوفة A.**

**وتسمى المعادلة: $|A-\lambda I|=0$ بالمعادلة المميزة.**

**لإيجاد الجذور المميزة لمصفوفة مربعة نتبع الخطوات التالية:**

**١- نشكل المصفوفة المميزة للمصفوفة A، ونرمز لها: $[A-\lambda I]$**

**٢- نوجد محدد المصفوفة المميزة $|A-\lambda I|=0$ فيعطينا كثير الحدود المميز للمصفوفة A.**

**٣- نضع كثير الحدود المميز مساوياً للصفر فنحصل على المعادلة المميزة: $|A-\lambda I|=0$.**

**٤- نحل المعادلة المميزة فنحصل على الجذور المميزة لمعادلة كثير الحدود المميز.**

**مثال:**

**أوجد الجذور المميزة للمصفوفة:** $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

**الحل:**

**١- المصفوفة المميزة للمصفوفة A:**

$$[A-\lambda I]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 3-\lambda\end{bmatrix}$$

**٢- كثير الحدود المميز للمصفوفة A:** $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda).(3-\lambda)$

$$|A-\lambda I|=3-\lambda-3\lambda+\lambda^2=\lambda^2-4\lambda+3$$

**٣- المعادلة المميزة:** $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-3).(\lambda-1)=0$

**٤- الجذور المميزة للمصفوفة A هي:** $\lambda_2=1, \lambda_1=3$

**- ملاحظة: إن الحد الثابت في كثير الحدود المميز للمصفوفة A يساوي دائماً إلى محدد المصفوفة /A/.**

## نظرية كايلي-هاميلتون

**تنص هذه النظرية على أن:**

**كل مصفوفة هي جذر لكثير حدودها المميز.**

**فحسب هذه النظرية، وبعد إيجاد كثير الحدود المميز بدلالة $\lambda$ ، إذا عوضنا عن كل $\lambda$ بـــ A يجب أن نحصل على المصفوفة الصفرية.**

**ملاحظة:**

**لاتكون المصفوفة A جذراً لكثير حدود مصفوفة إلا إذا حققت العلاقة: f(A)=0 حيث 0 هي المصفوفة الصفرية، بينما كل مصفوفة A هي حكماً جذر لكثير حدودها المميز.**

**كذلك أيضاً يمكن الاستفادة من النظرية السابقة في الحصول على مقلوب المصفوفة أو قوى هذه المصفوفة وذلك عن طريق كثير حدودها المميز.**

**مثال:**

**لتكن لدينا المصفوفة A التالية:** $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$

**المطلوب:**

**١- أوجد الجذور المميزة للمصفوفة A.**

**٢-أوجد مقلوب المصفوفة A باستخدام نظرية كايلي-هاميلتون.**

**٣- أوجد $A^2$ ومن ثم $A^3$.**

**الحل:**

**١- لإيجاد الجذور المميزة للمصفوفة A نوجد مايلي:**

**أولاً: المصفوفة المميزة** $[A-\lambda I]$

$$[A-\lambda I]=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 3\\ 3 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

**٢- إيجاد مقلوب المصفوفة A باستخدام نظرية كايلي هاميلتون**

**لدينا كثير الحدود المميز:** $|A-\lambda I|=\lambda^2-4\lambda-5$

**وحسب نظرية كايلي هاميلتون نجد:** $A^2-4A-5I=0$

**للحصول على $A^{-1}$ نضرب طرفي المعادلة بـــ $A^{-1}$ :**

$$A^{-1}.A^2-4A^{-1}.A-5A^{-1}.I=A^{-1}.0$$

$$A-4I-5A^{-1}=0$$

$$-5A^{-1}=-A+4I\Rightarrow A^{-1}=\frac{-1}{5}(-A+4I)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}(A-4I)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix})$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}(\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 3 & -2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

ثانياً: كثير الحدود المميز $|A-\lambda I|$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= [(2-\lambda)(2-\lambda)] - [(3)(3)]$$

$$= 4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5$$

ثالثاً: المعادلة المميزة $|A-\lambda I| = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$(\lambda - 5).(\lambda + 1) = 0$$

رابعاً: الجذور المميزة

$$(\lambda_2 = +5).(\lambda_1 = -1)$$

يلاحظ من كثير الحدود المميز الأخير أن محدد المصفوفة: /A/=-5

**٣- إيجاد مربع المصفوفة A**

**لدينا كثير الحدود المميز:** $|A-\lambda I| = \lambda^2 - 4\lambda - 5$

**وحسب نظرية كايلي هاميلتون نجد:** $A^2 - 4A - 5I = 0$

**للحصول على $A^2$ يصبح لدينا:**

$$A^2 = 4A - 5I$$

$$A^2 = 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

**- إيجاد المصفوفة $A^3$**

**لدينا:** $A^3 = A^2.A$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3(2)+12(3) & 3(3)+12(2) \\ 12(2)+3(3) & 12(3)+3(2) \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 42 & 33 \\ 33 & 42 \end{bmatrix}$$

# تمارين محلولة

1− أثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة الدورية تكون إما مساوية للصفر وإما مساوية للواحد.

**الحل:**

نعلم أنه للمصفوفة الدورية تكون $A^2 = A$ وبالتالي فإن:

$$\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,1$$

2− أوجد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

**الحل:**

القيم الذاتية لمصفوفة مربعة هي جذور المعادلة: $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1+\lambda)(\lambda - 3) = 0$$

وبالتالي القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$

ولإيجاد المتجهات الذاتية المقابلة للقيم الذاتية للمصفوفة $A$ نكتب جملة المعادلات التي تعين مركبات هذه المتجهات:

لدينا المعادلة: $\left[A - \lambda I\right]X = 0$

أو:

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على المعادلات التالية:

$$(2-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + (3-\lambda)x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - (2+\lambda)x_3 = 0$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_1 = 1$ نحصل على الجملة التالية:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$

بحل هذه الجملة نجد: $x_3 = 0$ ، $x_1 + x_2 = 0$

ومنه المتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda_1 = 1$ هو:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_2 = -1$ وبشكل مشابه للطريقة السابقة نحصل على المتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda_2 = -1$ :

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

من أجل القيمة الذاتية $\lambda_3 = 3$ نحصل على المتجه الذاتي المقابل للقيمة $\lambda_3 = 3$ :

$$x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3- أوجد قيم $a$ و $b$ التي تجعل المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

لها متجه ذاتي:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثم أوجد القيم والمتجهات الذاتية الأخرى.

**الحل:**

$$Au = \lambda u \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 16 \\ a = 8 \\ b = 11 \end{matrix}$$

نحل المعادلة $|A - \lambda I| = 0$ نحصل على:

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 20\lambda - 576 = 0 \Rightarrow (\lambda - 16)(\lambda^2 + \lambda + 36) = 0$$

ومنه:

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{143}}{2}$$

4- لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أوجد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A$.

2- أوجد أيضاً $B^{-1}AB$ حيث $B$ هي المصفوفة المكونة من المتجهات الذاتية للمصفوفة $A$

كأعمدة.

**الحل:**

لنوجد القيم الذاتية للمصفوفة $A$ وهي: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 10$ .

ثم نوجد المتجهات الذاتية وهي:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $x_1, x_2$ مستقلان خطياً على الرغم أن لها نفس القيمة الذاتية $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ، كذلك نلاحظ أن $x_3$ يعامد كلاً من $x_1, x_2$ .

لدينا:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنه لنوجد $B^{-1}AB$ :

$$B^{-1}AB = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

5- أوجد قاعدة للفضاء $R^2$ تجعل من مصفوفة الدالة التربيعية:

$$Q : R^2 \to R$$

والمعرفة بالصيغة التالية:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

مصفوفة قطرية.

**الحل:**

إن مصفوفة الدالة التربيعية بالنسبة للقاعدة الطبيعية هي:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

لنوجد المصفوفة $P$ التي تحقق $PMP^{-1}$ مصفوفة قطرية.

نوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة $M$ ويكون:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

والمصفوفة القطرية:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

والقاعدة المطلوبة هي قاعدة ناتجة من تأثير المصفوفة $P$ على القاعدة الطبيعية:

$$S = \{A_1 = (1,0), A_2 = (0,1)\}$$

أي أن:

$$B_1 = 1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ ، } B_2 = -1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

6- اكتب الصيغة التربيعية التالية بالصيغة المصفوفية:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_2x_3$$

**الحل:**

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T \cdot A \cdot x$$

7- اكتب الصيغة التربيعية التالية بالصيغة المصفوفية:

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_4^2 - 10x_2x_3 + 5x_3x_4 - 12x_4x_1 - x_1x_3$$

**الحل:**

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1/2 & -6 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ -1/2 & -5 & 3 & 5/2 \\ -6 & 0 & 5/2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x^T \cdot A \cdot x$$

8- اكتب الصيغة التربيعية التالية:

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

بمتغيرات جديدة $y_1, y_2$ ( أي تدوير المحاور ) بحيث تكون قطرية.

**الحل:**

إن مصفوفة $Q$ بالنسبة للقاعدة الطبيعية $S = \{A_1, A_2\}$ هي:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

تحقق:

$$PMP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

إن مصفوفة $Q$ بالنسبة للقاعدة:

$$B_1 = 1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \text{ ، } B_2 = -1/\sqrt{2}\,A_1 + 1/\sqrt{2}\,A_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

تكون قطرية وتساوي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

وهذا يعني أنه إذا وضعنا:

$$(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \cdot P^{-1}$$

يصبح $(y_1, y_2)$ متجه إحداثيات $(x_1, x_2)$ بالنسبة للقاعدة الجديدة $\{B_1, B_2\}$

$$(y_1,y_2)=(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\left(1/\sqrt{2}\,(x_1+x_2),1/\sqrt{2}\,(-x_1+x_2)\right)$$

وبالتالي:

$$y_1=1/\sqrt{2}\,(x_1+x_2)$$
$$y_2=1/\sqrt{2}\,(-x_1+x_2)$$

هي المتغيرات الجديدة والتي تحقق:

$$\begin{aligned}Q(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2&=(x_1,x_2)M\,(x_1,x_2)^T\\&=(y_1,y_2)PM\,\left((y_1,y_2)P\right)^T\\&=(y_1,y_2)PMP^T\,(y_1,y_2)^T\\&=(y_1,y_2)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}(y_1,y_2)^T\\&=3y_1^2-y_2^2\end{aligned}$$

9- ارسم المنحني الذي معادلته:

$$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=1$$

**الحل:**

المعادلة المعطاة هي معادلة من الدرجة الثانية وهي تمثل أحد القطوع المخروطية

بالعودة للمثال السابق فإن التعويض:

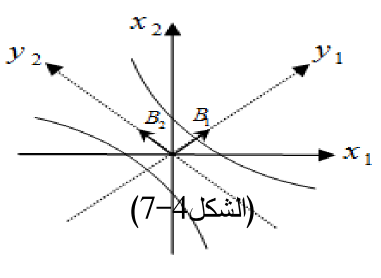
$$x_1=1/\sqrt{2}\,(y_1-y_2),x_2=1/\sqrt{2}\,(y_1+y_2)$$

يؤدي إلى حذف الحد $x_1x_2$ الذي هو حل للمسائل التي تمثل المعادلات من قطع مخروطي.

وبعد التعويض نحصل على المعادلة التالية:

$$3y_1^2-y_2^2=1$$

وهي تمثل قطعاً زائداً رؤوسه هي: $(y_1,y_2)=(\pm1/\sqrt{3},0)$ وإحداثيات هذه الرؤوس هي: $(x_1,x_2)=\pm(1/\sqrt{3})(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ انظر (الشكل7-4).




(الشكل7-4)

10- أوجد المقطع المخروطي الذي معادلته:

$$5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2-36=0$$

**الحل:**

نكتب المعادلة المعطاة بالصيغة المصفوفية:

$$XAX^T-36=0$$

حيث:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 8\end{bmatrix} \;,\; X=(x_1,x_2)$$

لنحول الصيغة التربيعية $XAX^T$ إلى صيغة قطرية . من أجل ذلك نوجد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A$.

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}5-\lambda & -2\\ -2 & 8-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-4)=0$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة $A$: $\lambda_1=4,\lambda_2=9$ والمتجهات الذاتية المقابلة لهذه القيم:

من أجل القيمة $\lambda_1=4$ نحصل على الجملة:

$$(x_1,x_2)\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=(0,0)$$

أي المعادلة: $x_1=2x_2$

ومنه يكون المتجه الذاتي $(2,1)$ قاعدة للفضاء التابع للقيمة $\lambda_1=4$ .

لنأخذ المتجه $A_1=(2/\sqrt{5},1/\sqrt{5})$ الذي طوله الواحد. وبشكل مشابه من أجل القيمة $\lambda_2=9$ يكون لدينا $A_2=(-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ أيضاً طوله الواحد.

بوضع:

$$P=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

يكون:

$$PAP^T=D=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}$$

نعوض نجد:

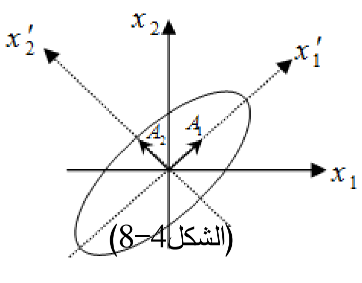
$$X=(x_1,x_2)=(x_1',x_2')P=X'P$$

وبالتالي:

$$(X'P)A(X'P)^T-36=0$$
$$X'(PAP^T)X'^T-36=0$$
$$(x_1',x_2')\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\ x_2'\end{bmatrix}-36=0 \Rightarrow 4x_1'^2+9x_2'^2-36=0$$

وبالتالي:

$x_1'^2/9+x_2'^2/4=1$ وهي معادلة قطع ناقص انظر(الشكل8-4).



(الشكل8-4)

11- ماهو شكل السطح الذي معادلته:

$$4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3-3=0$$

**الحل:**

نكتب الصيغة المصفوفية للمعادلة المعطاة:

$$XAX^T - 3 = 0$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad X = (x_1, x_2, x_3)$$

وبشكل مشابه للتمرين (4) القيم الذاتية للمصفوفة $A$ هي: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 8$

وتكون المصفوفة $A$ قابلة للإقطار بواسطة المصفوفة العمودية:

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

إن متجهي الصفين الأولين في المصفوفة $P$ هما متجهان ذاتيان يقابلان القيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$ ومتجه الصف الثالث هو المتجه الذاتي المقابل للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 8$.

وبالتالي:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3')P = X'P$$

يحول المعادلة:

$$XAX^T - 3 = 0$$

إلى المعادلة:

$$(X'P)A(X'P)^T - 3 = 0$$

وبالتالي:

$$X'(PAP^T)X'^T - 3 = 0$$

لكن:

$$PAP^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

والمعادلة المعطاة تصبح بالشكل:

$$(x_1', x_2', x_3') \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} - 3 = 0 \Rightarrow x_1'^2 + 2x_2'^2 + 8x_3'^2 = 3$$

أو بالشكل:

$$x_1'^2/(3/2) + x_2'^2/(3/2) + x_3'^2/(3/8) = 1$$

وهي معادلة سطح ناقص.

12− ارسم المنحني الذي تمثله المعادلة:

$$16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2 - 30x_1 - 40x_2 = 0$$

**الحل:**

نلاحظ في هذه المعادلة وجود الحد $x_1x_2$ والصيغة التربيعية المتجانسة في المعادلة هي:

$$16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2$$

إن مصفوفة الصيغة أعلاه هي المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

لنحول الصيغة التربيعية $XAX^T$ إلى صيغة قطرية . من أجل ذلك نوجد القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 16-\lambda & -12 \\ -12 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$$

ومنه القيم الذاتية للمصفوفة $A$: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$ والمتجهات الذاتية المقابلة لهذه القيم.

من أجل القيمة $\lambda_1 = 0$ نحصل على الجملة:

$$(x_1, x_2)\begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} = (0,0)$$

أي:

$$16x_1 - 12x_2 = 0$$
$$-12x_1 + 9x_2 = 0$$

أو المعادلة: $4x_1 - 3x_2 = 0$ والحل يكون $x_2 = (4/3)x_1$. إذا أخذنا $x_1 = 3$ نحصل على المتجه $(3,4)$ ومنه

نحصل على المتجه $A_1 = (3/5, 4/5)$ الذي طوله الواحد. وبشكل مشابه من أجل القيمة $\lambda_2 = 25$ يكون لدينا

$A_2 = (-4/5, 3/5)$ أيضاً طوله الواحد.

بوضع:

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

يكون:

$$PAP^T = D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix}$$

نعوض فنجد:

$$X = (x_1, x_2) = (x_1', x_2')P = X'P$$

وبالتالي:

$$(x_1, x_2) = (x_1', x_2')\begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

ومنه نحصل على:

$$x_1 = \frac{1}{5}(3x_1' - 4x_2'), x_2 = \frac{1}{5}(4x_1' + 3x_2')$$

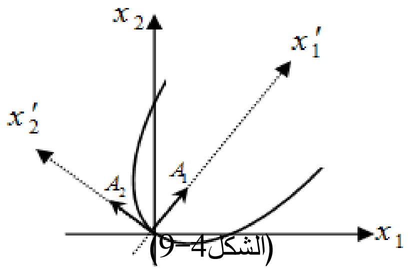
بالتعويض عن $x_1, x_2$ بالصيغة التربيعية:

$$16x_1^2 - 24x_1x_2 + 9x_2^2$$

نحصل على الصيغة القطرية : $25x_2'^2$ . ثم نعوض بالمتغيرات الجديدة $x_1', x_2'$ في المعادلة المعطاة نجد:

$$25x_2'^2 - 30.\frac{1}{5}(3x_1' - 4x_2') - 40\frac{1}{5}(4x_1' + 3x_2') = 0$$

ومنه: $x_2'^2 = 2x_1'$ وهي معادلة قطع مكافئ انظر (الشكل4-9).



(الشكل4-9)

## تمارين غير محلولة

1- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها للمصفوفات:

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3)\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

2- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المقابلة لها للمصفوفات:

$$1)\quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2)\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3)\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3- لتكن لدينا المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

1)- أثبت أن المصفوفة $A$ متناظرة ثم أوجد قيمها الذاتية ومتجهاتها الذاتية لها.

2)- أثبت أن المتجهات الذاتية مستقلة خطياً وكذلك المتجهات متعامدة.

4- حول المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل القطري.

5- حول المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل القطري.

6- أكتب كلاً من الصيغ التربيعية التالية بالصيغة المصفوفية:

$$Q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+9x_3^2-x_4^2+x_1x_2-x_1x_3+4x_2x_3-3x_1x_4$$

$$Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_1x_2-4x_1x_3+x_2x_3-2x_2^2+3x_3^2$$

7- أكتب كلاً من الصيغ التربيعية التالية بمتغيرات جديدة بحيث تكون قطرية:

$$Q(x_1,x_2)=3x_1^2+5x_1x_2+7x_2^2$$

$$Q(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

8- ارسم كلاً من القطوع المخروطية التالية:

$$5x^2-8xy+5y^2-9=0$$

$$8x^2-12xy+17y^2-80=0$$

$$16x^2-24xy+9y^2-30x+40y-5=0$$

9- اكتب الصيغة التربيعية:

$Q(x_1,x_2)=3x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2=4$ بمتغيرات جديدة $y_1,y_2$.

10- اكتب الصيغة التربيعية: $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+20x_3^2+2x_1x_2+6x_1x_3+6x_2x_3=1$ بمتغيرات جديدة $y_1,y_2$.

# المعادلات و المتراجحات من الدرجة الاولى والثانية بمجهول واحد

**القدرات المنتظرة**

**-* حل معادلات أو متراجحات تؤول في حلها إلى معادلات أو متراجحات من الدرجة 1 أو 2 بمجهول واحد.**

**-* ترييض وضعيات تتضمن مقادير متغيرة باستعمال تعابير أو معادلات أو متراجحات.**

## I ) تعاريف

**أنشطة**

1- حل المعادلتين التاليتين $x \in \mathbb{R} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$ K $x \in \mathbb{N} \quad 2x+4=5x-\frac{1}{2}$

2- حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad 5x-7 \leq \frac{11}{2}x+4$

**تعريف1**

جميع حلول معادلة (أو متراجحة) تكون مجموعة تسمى مجموعة حلول المعادلة (أو المتراجحة) نرمز لها بـ $S$ أو $S'$ او.......

**تعريف2**

نقول ان معادلتين (أو متراجحين) متكافئتان إذا كانت للمعادلتين (أو للمتراجحتين) نفس مجموعة الحلول.

## II ) المعادلة التالفية

### 1- مفهوم معادلة تالفية

**تعريف**

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ تسمى معادلة تالفية.
و تسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

### 2- حل معادلة تالفية

نحل المعادلة $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$

إذا كان $a=b=0$ فان $S=\mathbb{R}$

إذا كان $a=0$ و $b \neq 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=0$ تكافئ $x=-\frac{b}{a}$ أي أن $S=\left\{\frac{-b}{a}\right\}$

### 3- حل المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$(ax+b)(cx+d)=0$ تكافئ $ax+b=0$ أو $cx+d=0$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(ax+b)(cx+d)=0 \quad x \in \mathbb{R}$ هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة $ax+b=0 \quad x \in \mathbb{R}$ و $cx+d=0 \quad x \in \mathbb{R}$

تمرين: حل المعادلة $(2x+1)(-3x-5)=0 \quad x \in \mathbb{R}$

## III ) المتراجحات التالفية بمجهول واحد

### 1- تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل $ax+b \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو $ax+b \succ 0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$، تسمى متراجحة تالفية.
و تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان $a \neq 0$

### 2- حل متراجحة تالفية بمجهول واحد

**أ- إشارة الحدانية $ax+b$**

-* إذا كان $a=0$ فان إشارة $ax+b$ هي إشارة $b$

-* إذا كان $a \neq 0$ فان $ax+b=a\left(x+\frac{b}{a}\right)$ و بالتالي إشارة $ax+b$ مرتبطة بإشارة $a$ و $x+\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \succ 0$ تكافئ $x \succ -\frac{b}{a}$

$x+\frac{b}{a} \prec 0$ تكافئ $x \prec -\frac{b}{a}$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة $ax+b$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | عكس إشارة $a$ | 0 | إشارة $a$ | |

**تمرين**

حل المتراجحتين: $2x+3 \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$ ; $-3x+4 \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ بطريقتين مختلفتين.

**3- حل المتراجحة** $(ax+b)(cx+d) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}$ أو من نوع $(ax+b)(cx+d) \succ 0 \quad x \in \mathbb{R}$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة إشارة $(ax+b)(cx+d)$ بتوظيف إشارة كل من $(ax+b)$ و $(cx+d)$

**تمرين**

حل المتراجحتين: $(2x+1)(-3x+1) \prec 0 \quad x \in \mathbb{R}$ ; $(-2x-1)(-5x+1) \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}$

## IV ) المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

### 1- تعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{R}$ كل معادلة على الشكل $ax^2+bx+c=0$ حيث $a$ و $b$ و $c$ أعداد حقيقية و $a$ غير منعدم.

### 2- أمثلة

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$3x^2-\sqrt{3}x=0$ ، $x^2-5=0$ ، $2x^2+1=0$ ، $x^2-6x-7=0$ ، $x^2-2x+3=0$

### 3- صفة عامة

a) نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0 \quad x \in \mathbb{R}$ حيث $a \neq 0$

لكل $x$ من $\mathbb{R}$

لدينا $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

الكتابة $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ **يسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود** $ax^2+bx+c$

لنحل المعادلة

$ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد $b^2-4ac$ الذي يسمى **مميز المعادلة** $ax^2+bx+c=0$ نرمز له بـ $\Delta$ نكتب $\Delta=b^2-4ac$

* إذا كان $\Delta \prec 0$ فان $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} \succ 0$ و بالتالي المعادلة لا تقبل حلا في $\mathbb{R}$

* اذا كان $\Delta=0$ فان $x+\frac{b}{2a}=0$ أي $x=-\frac{b}{2a}$

* اذا كان $\Delta \succ 0$ فان $ax^2+bx+c=0$ تكافئ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$

تكافئ $\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

تكافئ $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ أو $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

**مبرهنة**

نعتبر المعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$ و $S$ مجوعة حلولها في $\mathbb{R}$.

العدد $b^2-4ac$ يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود $ax^2+bx+c$ نرمز له بـ $\Delta$

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta=0$ فان $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

**اصطلاح**

إذا كان $\Delta=0$ فان $x=-\frac{b}{2a}$ في هذه الحالة نقول إن $-\frac{b}{2a}$ حل مزدوج للمعادلة

**ملاحظة** إذا كان $a$ و $c$ لهما إشارتين مختلفتين فان للمعادلة حلين.

**تمرين**

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات

$$5x^2-4x+2=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{3}\right)x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

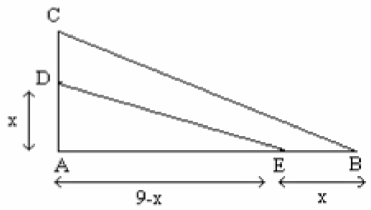
$$4x^2+3x-1=0 \qquad x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}=0$$

**تمرين**

نعتبر $ABC$ مثلث قائم الزاوية في $A$ حيث $AB=9$ و $AC=4$ حدد موضع نقطتين $E$ و $D$ تنتميان

على التوالي لـ$[AB]$ و $[AC]$ بحيث $AD=BE$ و مساحة $ADE$ تساوي مساحة الرباعي $BCDE$

اختيار المجهول نضع $AD=BE=x$




مساحة $ADE$ هي $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي $BCDE$ هي $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}$

لدينا $\frac{4\times 9}{2}-\frac{x(9-x)}{2}=\frac{x(9-x)}{2}$

ومنه $18-9x+x^2=0$.......

**b) نتيجة**

نعتبر معادلة من شكل $ax^2+2b'x+c=0$ و $a\neq 0$

لدينا $\Delta=4(b'^2-ac)$ نضع $\Delta'=b'^2-ac$

اشارة $\Delta$ هي اشارة $\Delta'$

إذا كان $\Delta'\prec 0$ فان $S=\varnothing$

إذا كان $\Delta'=0$ فان $S=\left\{-\frac{b'}{a}\right\}$

إذا كان $\Delta'\succ 0$ فان $S=\left\{\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a};\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right\}$

العدد $\Delta'$ يسمى المميز المختصر للمعادلة

**تمرين**

حل $6x^2-2\sqrt{3}x-1=0 \quad x\in\mathbb{R}$

## 4- تعميل ثلاثية الحدود

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c \quad / \quad a\neq 0$

ليكن $\Delta$ مميزها

* إذا كان $\Delta\prec 0$ فان $T(x)$ لا تقبل جدرا و بالتالي $T(x)$ لا يمكن تعميلها في $\mathbb{R}$

* إذا كان $\Delta=0$ فان $T(x)$ لها جدر وحيد $\frac{-b}{2a}$ وبالتالي $T(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

* إذا كان $\Delta\succ 0$ فان $T(x)$ لها خدرين مختلفين $x_1$ و $x_2$

وبالتالي $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$

**تمرين**

عمل $P(x)=3x^2-4x-4 \qquad Q(x)=x^2-(1+\sqrt{3})x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 5- معادلات تؤول في حلها الى معادلات من الدرجة الثانية

<u>مثال1</u> حل $x^4-7x^2+12=0 \quad x\in\mathbb{R}$

<u>مثال2</u> حل $2x-7\sqrt{x}-4=0 \quad x\in\mathbb{R}$

<u>مثال3</u> نعتبر $P(x)=2x^3-3x^2-x+1$

أحسب $P\left(\frac{1}{2}\right)$

حل المعادلة $P(x)=0$

## 6- مجموع و جداء جدري ثلاثية الحدود

نعتبر $ax^2+bx+c=0 \quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$

لنفترض أن $\Delta\succ 0$ و أن جذريها هما $x_1$ و $x_2$

لدينا لكل $x$ من $\mathbb{R}$

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$
$$=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$$

إذن $x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$

**خاصية**

إذا كان للمعادلة $ax^2+bx+c=0 \quad x\in\mathbb{R}$ حيث $a\neq 0$ حلان $x_1$ و $x_2$ فانهما يحققان العلاقتين

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad ; \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$$

**تمرين**

تأكد أن للمعادلة $4x^2-7x+5=0$ جدران $x_1$ و $x_2$ ثم أحسب $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ دون حساب $x_1$ و $x_2$

## VI- المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

### 1- اشارة ثلاثة الحدود من الدرجة الثانية

نعتبر ثلاثية الحدود $T(x)=ax^2+bx+c \quad / \quad a\neq 0$

ليكن $\Delta$ مميزها

الشكل القانوني $T(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

إذا كان $\Delta\prec 0$ فان إشارة $ax^2+bx+c$ هي إشارة $a$

إذا كان $\Delta = 0$ فان $ax^2+bx+c$ يكون منعدما من أجل $x=\frac{-b}{2a}$ و إشارتها إشارة $a$ لكل $x$ من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \succ 0$ فان $T(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ حيث $x_1$ و $x_2$ جدري $ax^2+bx+c$

نفترض أن $x_1 \prec x_2$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-x_1$ | - | 0 | + | | + |
| $x-x_2$ | - | | - | 0 | + |
| $T(x)$ | إشارة $a$ | 0 | عكس إشارة $a$ | 0 | إشارة $a$ |

**خلاصة**

إذا كان $\Delta \prec 0$ فان إشارة $ax^2+bx+c$ هي إشارة $a$

إذا كان $\Delta = 0$ فان إشارة $ax^2+bx+c$ هي إشارة $a$ لكل $x$ من $\mathbb{R}-\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$

إذا كان $\Delta \prec 0$ و $x_1$ و $x_2$ جدري $ax^2+bx+c$ حيث $x_1 \prec x_2$ فان

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T(x)$ | إشارة $a$ | 0 | عكس إشارة $a$ | 0 | إشارة $a$ |

## 2- المتراجحات

أ- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات

$-2x^2+5x-3 \leq 0$ $\qquad$ $3x^2-2x-8 \prec 0$

$-3x^2+\sqrt{3}x-1 \geq 0$ $\qquad$ $4x^2-2x+1 \succ 0$

**ب- متراجحات تؤول في حلها الى متراجحات من الدرجة الثانية**

**مثال1**

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين

$$2x^4-9x^2+4 \succ 0$$

$$\frac{x^2-\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{2}}{x^2-x-2} \geq 0$$

**مثال2**

نعتبر $p(x)=6x^3-13x^2+4$

1- تأكد أن 2 جدر للحدودية $p(x)$

2- حل في $\mathbb{R}$ $\quad p(x) \leq 0$

3- حل في $\mathbb{R}$ $\quad p(x) \leq 3x^2(x-2)$

**تمرين**

نعتبر $p(x)=-x^3+(3+a)x^2-(2+3a)x+2a$

1- بين أن $a$ جدر للحدودية $p(x)$

2- حدد حدودية $Q(x)$ حيث $p(x)=(x-a)Q(x)$

3- أ- أدرس إشارة $-x^2+3x-2$

4- ب- حل في $\mathbb{R}$ $\quad p(x) \succ 0$ حيث $Q(a) \succ 0$

## . المتراجحات

- إشارة العبارة $ax+b$ حيث $(a\neq 0)$

لدراسة إشارة العبارة $ax+b$ حيث $(a\neq 0)$، نحلّ، في $\mathbb{R}$، إحدى المتراجحتين $ax+b \geq 0$ أو $ax+b \leq 0$ ونلخص النتائج كالآتي:

▪ $a>0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | - | 0 | + |

▪ $a<0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | + | 0 | - |

قاعدة:
يمكن تلخيص إشارة العبارة $ax+b$
كما هو موضح في الجدول المقابل:

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax+b$ | عكس إشارة $a$ | 0 | إشارة $a$ |

المتراجحات

- "متراجحة جداء"

مبرهنة ٤

$A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان.
المتراجحة $A(x)\times B(x)\geq 0$ تكافئ $A(x)$ و $B(x)$ من نفس الإشارة.

ملاحظة
مثل المتراجحة $A(x)\times B(x)\geq 0$ تسمّى "متراجحة جداء".
مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $x^2-9<0$ (١)
(١) تكافئ $(x-3)(x+3)<0$، لندرس إذن إشارة العبارة $(x-3)(x+3)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | - | | - | $0$ | + | |
| $x+3$ | | - | $0$ | + | | + | |
| $(x-3)(x+3)$ | | + | $0$ | - | $0$ | + | |

نقرأ في السّطر الأخير للجدول أنّ $(x-3)(x+3)$ يكون سالبا تماما على المجال $]-3;3[$

بالتالي، (١) تكافئ $x\in]-3;3[$.

منه مجموعة حلول المتراجحة (١) هي: $]-3;3[$

- "متراجحة حاصل قسمة "

مبرهنة ٥

$A(x)$ ، $B(x)$ عبارتان جبريتان.
المتراجحة $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ تكافئ $A(x)\times B(x)\geq 0$ و $B(x)\neq 0$

ملاحظة
مثل المتراجحة $\frac{A(x)}{B(x)}\geq 0$ ، تسمّى متراجحة "حاصل قسمة ".
مثال: حلّ في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $\frac{x-2}{2x+3}\geq 0$ (٢)

تكون العبارة $\frac{x-2}{2x+3}$ معرفة عندما يكون $2x+3$ غير معدوم، بمعنى $x\neq -\frac{3}{2}$

لدراسة إشارة حاصل القسمة هذا، ندرس إشارة الجداء $(x-2)(2x+3)$ باستعمال جدول الإشارات:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | - | \| | - | 0 | + | |
| $2x+3$ | | - | 0 | + | | + | |
| $\frac{x-2}{2x+3}$ | | + | \|\| | - | 0 | + | |

نقرأ في السّطر الأخير للجدول أنّ $\frac{x-2}{2x+3}$ يكون موجبا (أكبر من $0$ أو يساويه) على المجموعة $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right[\cup[2;+\infty[$ . مجموعة حلول المتراجحة (٢) هي: $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup[2;+\infty[$ .

## ٧. العبارة $ax^2+bx+c$ حيث $a\neq 0$

- الشكل النموذجي للعبارة $ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

من أجل كلّ عدد حقيقي $x$ و $a$ عدد حقيقي غير معدوم،

لدينا: $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ لكن $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

منه $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]=a$ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$

نضع $\Delta=b^2-4ac$ ، عندئذ $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

**تعريف**

- العدد $b^2-4ac$ هو **مُميّز** العبارة $ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ونرمز إليه بالرمز $\Delta$ (نقرأ " دلتا").
- $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ هو **الشّكل النموذجي** للعبارة $ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

أمثلة:

الشكل النموذجي للعبارة $x^2+4x-1$ هو $(x+2)^2-5$ ونكتب: $x^2+4x-1=(x+2)^2-5$

الشكل النموذجي للعبارة $3x^2-12x-36$ هو $3\left[(x-2)^2-16\right]$ ونكتب:

$$3x^2-12x-36=3\left(x^2-4x-12\right)$$
$$=3\left[(x-2)^2-16\right]$$

- حلّ المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$

نكتب العبارة في الطرف الأوّل للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ على شكلها النموذجي، عندئذ نميّز ثلاث حالات:

- $\underline{\Delta>0}$ نكتب $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$.

منه

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=$$

للمعادلة حلان هما: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

- $\underline{\Delta=0}$ $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. ومنه للمعادلة حلّ وحيد هو: $x_0=\frac{-b}{2a}$
- $\underline{\Delta<0}$ لدينا $0<-\frac{\Delta}{4a^2}$، وبالتالي $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)>0$ ومنه المعادلة لا تقبل حلولا.

مبرهنة

لتكن المعادلة $ax^2+bx+c=0$ مع $(a\neq0)$، $\Delta$ مميّزها:

- إذا كان $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين $x_1$، $x_2$: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
و ينتج $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
- إذا كان $\Delta=0$ فإنّ المعادلة تقبل حلاّ مضاعفا $x_0$: $x_0=\frac{-b}{2a}$ (نعني بحلّ مضاعف، حلاّن متطابقان) و ينتج $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$
- إذا كان $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلولا و العبارة $ax^2+bx+c$ لا تحلّل.

أمثلة

١) في المعادلة $x^2+2x-2=0$ لدينا $\Delta=12>0$

إذن فهي تقبل حلّين هما: $x_1=-1-\sqrt{3}$ ، $x_2=-1+\sqrt{3}$

٢) في المعادلة $2x^2-12x+18=0$ لدينا $\Delta=0$، إذن فهي تقبل وحلا مضاعفا هو: $x_0=3$

٣) في المعادلة $x^2-x+2=0$ لدينا $\Delta=-3<0$ أي $\Delta<0$ إذن فهي لا تقبل حلولا

# طرائق وتمارين محلولة

- **نشر وتبسيط وترتيب عبارة جبرية**

أنشر وبسّط ثمّ رتّب العبارة $2(x^2-x+1)-x(x+2)+3$

| تعليق | حلّ |
|---|---|
| نلاحظ أنّ الشكل المبسّط للعبارة مرتّب حسب قوى $x$ تنازليا. | ننشر العبارة: $2(x^2-x+1)-x(x+2)+3=2x^2-2x+2-x^2-2x+3$<br>نبسّط العبارة الناتجة:<br>$2x^2-2x+2-x^2-2x+3=2x^2-x^2-2x-2x+2+3$<br>$=(2-1)x^2-(2+2)x+5$<br>$=x^2-4x+5$ |

| طريقة |
|---|
| لنشر وتبسيط وترتيب عبارة، ننشر الجداءات، إن وُجدت، نحلل الحدود المتشابهة ونرتب النتيجة حسب قوى $x$ (الحرف) تنازليا. |