منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية والمالية

الدكتورة
أميرة عبيدو
أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
مأمون النبّاش
مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور
معد سليمان
مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية
١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

منشورات جامعة حلب
كلية الاقتصاد
الرياضيات الاقتصادية والمالية

منشورات جامعة حلب

كلية الاقتصاد

الرياضيات الاقتصادية والمالية

الدكتورة

أميرة عبيدو

أستاذ في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

مأمون النباش

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

الدكتور

محمد معد سليمان

مدرس في قسم الإحصاء ونظم المعلومات

لطلاب السنة الثانية

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

١٤٣١ هـ - ٢٠١٠ م

المحتـــويات

الباب الثاني: النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية

الفصل الخامس

البرمجة الخطية

الفصل السادس

النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات - نموذج ليونتيف -

الفصل السابع

استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

الباب الثالث: التوابع الاقتصادية

الفصل الثامن

الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى

الفصل التاسع

المرونات

الفصل العاشر

سلوك المستهلك

الفصل الحادي عشر

توابع الإنتاج

الفصل الثاني عشر

التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

المقدمة

هدف مقرر الرياضيات المالية والاقتصادية شرح وصياغة وتعلم كيفية معالجة مختلف الظواهر المالية والاقتصادية والإدارية، وذلك باستخدام الأدوات الرياضية التي تساعد متخذ القرار في اتخاذ قرار صحيح أمثل، ومن أجل تحقيق هذا الهدف فقد قسم هذا الكتاب إلى ثلاثة أقسام تتضمن اثنتي عشرة فصلاً تضمنت الموضوعات الآتية:

يحتوي القسم الأول على أساسيات الرياضيات المالية وهو يتضمن أربعة فصول، يعالج الفصل الأول من ذلك القسم المسائل والمفاهيم الأساسية المتعلقة بالمتواليات العددية، الحسابية والهندسية. وفي الفصل الثاني يتعرض لمفهوم الفائدة المالية البسيطة والمركبة وتطبيقاتهما في المجالات الاقتصادية والاجتماعية والسكانية، وفي الفصل الثالث تعرضنا إلى مفهوم الدفعات الدورية بأنواعها المختلفة وتطبيقاتها في جميع المجالات، أما الفصل الرابع فقد تناول استهلاك القروض بدفعات سنوية أو جزئية غير متساوية، وموضوع استهلاك القروض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً.

أما القسم الثاني من الكتاب فقد ركز على الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الاقتصادية والإدارية فتضمن ثلاث فصول ففي الفصل الخامس تم البحث في طرق البرمجة الخطية لصياغة وحل أي مشكلة اقتصادية على اعتبار أنها من أهم العلوم الحديثة التي تعنى باستخدام النماذج الرياضية التي تهتم بالتوزيع الفعال للموارد المحدودة نسبياً بحيث ينتج عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة. وفي الفصل السادس تم التعرض للنموذج السكوني للمدخلات والمخرجات الذي يعتبر من أهم النماذج المستخدمة في التخطيط على المستوى القومي أو المستوى القطاعي، حيث كان الهدف الأساسي من دراسة هذا النموذج التحليل الكمي للتشابك بين القطاعات الاقتصادية خلال قيامها بنشاطها الإنتاجي، وبيان العلاقات بين المنتجين باعتبارهم مشترين للعناصر الداخلة في الإنتاج وبائعين لمنتجاتهم إلى المستخدمين النهائيين. أما الفصل السابع فيتعرض إلى استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية

والصناعية،على اعتبار أن لكل مشروع تجاري أو صناعي العديد من الخطط المتاحة له وعلى صاحب المشروع اختيار أنسبها من خلال تحديد صور الأحوال الاقتصادية المتوقعة وتحديد المنافع المتوقعة للخطط المتاحة له ومن ثم تحديد الأرباح والخسائر المتوقعة للمشروع من كل خطة من الخطط المتاحة له مقترنة بصور الحالة الاقتصادية.

أما القسم الثالث والأخير من الكتاب فقد ركز على التطبيقات الاقتصادية لما تمّ دراسته في مقرر الرياضيات في السنة الأولى، فتضمن أربعة فصول ففي الفصل الثامن تم التذكير بمبادئ الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى التي تعتبر من أهم مواضيع التحليل الاقتصادي الجزئي والكلي. أما في الفصل التاسع تم التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمة للمشتقات، مع دراسة المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية. أما الفصل العاشر فقد تم بحث سلوك المستهلك وفكرتها نشأت من كون المستهلك يحصل على إشباع مادي أو رضا معنوي ناتج من استهلاك السلع أو الخدمات. عند تحليل سلوك المستهلك، نقصد بالمنفعة، بأنها مستوى الرضا أو الإشباع الذي يحصل عليه المستهلك من استهلاك سلعة أو الحصول على خدمة معينة. وفي الفصل الحادي عشر تم التعرض إلى توابع الإنتاج وخواصها وتطبيقاتها الاقتصادية وأخيراً في الفصل الثاني عشر تم دراسة التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

ولقد ضمنا كل فصل من هذه الفصول كثيراً من الأمثلة التطبيقية والمسائل المحلولة لتوضيح القضايا النظرية، وألحقنا به قائمة بتمارين ومسائل غير محلولة، كما ألحقنا بآخر الكتاب ملحقاً يضم موجزاً لبعض المفاهيم الرياضية الأساسية والتي يمكن للطالب العودة إليها على سبيل التذكير حين الحاجة، كمواضيع المصفوفات والمحددات وحلول جمل المعادلات والتوابع غير الخطية المتعددة المتغيرات والمشتقات وقواعد التكامل.

هذا الكتاب يمثل جهداً مشتركاً لمؤلفيه الثلاثة، إلا أنه يمكن القول أن القسم الأول، الرياضيات المالية كان من إعداد الدكتور مأمون النباش، والفصول الخامس

والسادس والسابع من إعداد الدكتورة أميرة عبيدو والفصول الثامن والتاسع والعاشر والحادي عشر والثاني عشر من إعداد الدكتور محمد معد سليمان.

ويأمل المؤلفون أن تساهم هذه الجهود المشتركة من الرياضيات الاقتصادية في إثراء المكتبة العربية وأن يساعد الباحثين والمهتمين في هذا المجال، ونسأل الله أن نكون قد وفقنا بما عرضناه في هذا الكتاب من مادة علمية بصورة مبسطة وواضحة وسهلة الاستخدام، ومضمون علمي جيد وجديد.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

الفصل الأول

المتواليات العددية

§1. تمهيد و تعاريف:

لنتأمل مجموعات الأعداد المتتالية المرتبة وفق نظام معين:

$$1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

إن هذه الأعداد تتوالى عدداً بعد آخر، وكل عدد يزيد بواحد عن العدد الذي يسبقه بينما مجموعة الأعداد التالية:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

فيها حاصل قسمة كل عدد على العدد الذي يسبقه يساوي $\frac{1}{2}$. وأخيراً المجموعة :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

في هذه المجموعة المقام يزيد بمقدار واحد في كل عدد عن العدد الذي يسبقه.

كل من أعداد هذه المجموعات تسمى متوالية أعداد نظراً لوجود علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي يليه بالترتيب.

1ـ1ـ تعريف متوالية الأعداد:

تعرّف متوالية الأعداد بأنها تابع معرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية N ونرمز لقيم هذا التابع بـ $f(n) = a_n$، حيث تسمى حدود المتوالية، ونسمي العدد n برقم الحد a_n .

نكتب المتوالية بالشكل: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

أو بشكل مختصر: $\{a_n\} \quad , \quad n \in N$

يسمى العدد a_1 بالحد الأول للمتوالية والعدد a_2 بالحد الثاني للمتوالية، والعدد a_n بالحد العام للمتواليه (الحد النوني).

أمثلة على المتواليات:

1– المتوالية: $1,2,3,\ldots\ldots\ldots,n,\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n = n$

2- المتوالية: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots\dots\dots,\frac{1}{2^n},\dots\dots\dots$ حدها العام $a_n=\frac{1}{2^n}$

3- المتوالية: $\dots-1,+1,-1,\dots\dots\dots,+1,-1,\dots$ حدها العام $a_n=(-1)^n$

4- المتوالية: $2,2,2,\dots\dots\dots,2,\dots\dots\dots$ حدها العام $a_n=2$

المتوالية الأخيرة تعتبر مثالاً على المتوالية الثابتة.

مثـــال:

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتوالية التي حدها العام: $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

الحـــل: بأخذ $n=1,2,3,4$ على التوالي نجد أن:

$$a_1=\frac{1}{2^0}=1,\ a_2=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},a_4=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\dots\dots\dots\dots$$

وتكون المتوالية المطلوبة هي:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$$

مثـــال:

أوجد الحد العام للمتوالية:

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$$

الحـــل: يمكن كتابة حدود المتوالية كما يلي:

$$a_1=\frac{1}{1^2},\ a_2=\frac{1}{2^2},a_3=\frac{1}{3^2},a_4=\frac{1}{4^2}$$

نستنتج أن الحد العام هو: $a_n=\frac{1}{n^2}$

- إذا حدد في متوالية الحد الأخير سميت متوالية منتهية، وعندما يكون عدد حـــدودها غير منته سميت المتوالية غير منتهية.

1ــ 2ــ تعريف المتوالية المحدودة:

تسمي المتوالية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث أنه من أجـــل أي $n\in N$ فإن المتراجحة: $|a_n|\le M$ محققة.

وفي الحالة المعاكسة تسمى المتوالية غير محدودة.

مثـــال: المتواليتان $a_n = \frac{1}{n^4}$, $a_n = (-1)^n$ محدودتان.

لأن المتوالية الأولى: $0 \le \frac{1}{n^4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$

وكذلك المتوالية الثانية: $-1 \le (-1)^n \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|(-1)^n\right| \le 1$

3-1 ــ تعريف المتوالية المتزايدة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ متزايدة إذا كان مــن أجـل أي عـدد $n \in N$ تكـون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} > a_n$.

وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متناقصة، إذا كان من أجــل أي عـدد $n \in N$ تكـون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} < a_n$.

مثـــال:

بيّن أن المتوالية: $a_n = \frac{n}{n+1} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ متزايدة.

الحـــل: لأجل ذلك يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد $n \in N$ فإن المتراجحة:

$a_{n+1} - a_n > 0$ أو $a_{n+1} > a_n$ محققة.

بالفعل هذا محقق فبعد تبديل كل n بـــ $n+1$ وإجراء الطرح نجد أن:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0$$

مثـــال: المتوالية $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ متناقصة لأن:

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ مهما كانت قيمة n . وبالتالي فإن $a_{n+1} < a_n$ متوالية متناقصة.

1 ــ4 ــ تعريف نهاية متوالية:

لتكن $\{a_n\}$ متوالية ما ، نقول عنها أنها متقاربة ونهايتها L. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

عندما تتقارب حدودها من L من أجل قيم n كبيرة بقدر كاف، وإذا لــم تكــن المتوالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثـــال: حدد فيما إذا كانت المتوالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحـل: إن حدود المتوالية: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},.........$. تدنو من العدد $L=0$ عندما تأخذ n قيماً أكبر فأكبر.

إذن المتوالية متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

مثــال:

تنتج شركة شمعات اشتعال محركات، نسبة الشمعات العاطلة منها 2% واحتمال الحصول على شمعة عاطلة واحدة على الأقل في عينة عشوائية مكونة من n شمعة هو: $f(n)=1-(0.98)^n$ والمطلوب:

أوجد الحدود a_5 ، a_{10} ، a_{25} ، a_{100} ، a_{200} من هذه المتوالية واحسب $\ell im_{n\to\infty} a_n$ وفسرّ الجواب.

الحـل: لدينا متوالية معرّفة بالعلاقة التالية: $a_n = f(n) = 1-(0.98)^n$ وبحساب هذه الحدود وفق العلاقة السابقة نجد أن الحدود المطلوبة هي:

$$a_5 = 0.10\ ,\ a_{10} = 0.18\ ,\ a_{25} = 0.40\ ,\ a_{100} = 0.87\ ,\ a_{200} = 0.98$$

فعلى سبيل المثال احتمال الحصول على شمعة اشتعال عاطلة على الأقل في عينة عشوائية مكونة من 25 شمعة 0.4 أي 40%. لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-(0.98)^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}(0.98)^n = 1-0 = 1$$

ويفسّر الجواب كالآتي، إذا كان حجم العينة كبيراً بقدر كاف فإنها تحوي على شمعة عاطلة واحدة على الأقل.

سنقتصر في دراستنا في هذا الفصل على المتواليات الحسابية والمتواليات الهندسية. وللمتواليات تطبيقات عديدة منها في مجال حساب القيمة الحالية للقروض، وإيجاد أقساط الدفعات المالية.

2.§ المتوالية الحسابية:

المتوالية الحسابية هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها، بدءاً من الحد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب أو سالب) للمقدار السابق له، يسمى المقدار

الثابت الذي يضاف لأي حد من حدودها بأساس المتوالية الحسابية ونرمز له بـــالحرف d كما نرمز للحد الأول منها بالرمز a.

تسمى المتوالية الحسابية متزايدة إذا كان كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه (أي أنه إذا كان $d > 0$). ونسمي المتوالية الحسابية متناقصة إذا كان أي حد فيها أقل من الحد السابق له (أي أنه إذا كان $d < 0$).

2 ــ 1ــ قانون الحد العام للمتوالية الحسابية:

إن أي حد من حدود متوالية حسابية يساوي إلى حدها الأول $a = a_1$ مــضافاً إليه عدد الحدود السابقة له مضروباً بأساس المتوالية d ، ونعبر عن ذلــك رياضـــياً بالقانون:

$$a_n = a + (n-1)d \quad , \quad n \in N$$

يعطى أساس المتوالية الحسابية بالعلاقة :

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

- كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حــسابي للحــدين المتساويان البعد عنه، أي أن:

$$a_k = \frac{a_{k-n} + a_{k+n}}{2} \;,\; k \in N \;,\; n \in N \;,\; k - n > 0$$

- في كل متوالية حسابية يكون فيها : $a_K + a_\ell = a_n + a_m$ بشرط: $k + \ell = n + m$
- إن كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين السابق واللاحق له، أي أن: $a_K = \dfrac{a_{K-1} + a_{K+1}}{2}$

2ــ2 ــ مجموع الحدود الـــ n الأولى للمتوالية الحسابية:

لتكن لدينا المتوالية الحسابية التالية:

$$a_1 = a \;,\; a_2 = a + d \;,\; a_3 = a + 2d \;,\cdots\cdots\cdots,\; a_n = a + (n-1)d$$

ونرمز لمجموعها بـــ S_n فنكتب:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots\cdots + a + (n-1)d$$

هذا المجموع يمكن كتابة على الشكل التالي وذلك بإعادة ترتيبه بالعكس :

$$S_n = a + (n-1)d + \cdots\cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

بجمع كل حدين متقابلين بالترتيب من المجموعين السابقين نحصل على:

$$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\cdots\cdots+[2a+(n-1)d]$$

إن عدد الحدود في هذا المجموع n حد وبالتالي يكون:

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

ومنه:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

وهذه العلاقة تمثل مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية حسابية.

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بدلالة الحد الأخير بالشكل التالي:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[a+a_n]}$$

من خلال العلاقة الأخيرة يمكننا حساب مجموع متوالية حسابية بمعرفة حديها الأول والأخير وعدد حدودها.

- اعتماداً على قانون الاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن مجموع أعداد طبيعية متماثلة الأس:

$$1+2+3+\dots\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

أمثلة على المتواليات الحسابية:

مثال:

أوجد عدد الحدود ومجموع متوالية حسابية حدها الأول 0 وأساسها $d=\frac{1}{2}$ وحدها الأخير يساوي 5.

الحل: من نص المسألة نجد أن: $a=0 \;,\; d=\frac{1}{2} \;,\; a_n=5$

باستخدام العلاقة: $a_n = a+(n-1)d$

نجد:

$$n-1=\frac{a_n-a}{d}$$

$$n=\frac{a_n-a}{d}+1$$

$$n=\frac{5-0}{\frac{1}{2}}+1=10+1=11$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{11}{2}(0+5)=\frac{55}{2}=27.5$$

مثـــال:

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحـــدود لمتواليـــة حـــسابية حـــدها الأخيـــر $a_n=55$ و $S_{15}=412.5$ و $a_2+a_5=32.5$.

الحـــل:

انطلاقاً من: $a_2+a_5=32.5$

$$(a+d)+(a+4d)=32.5$$

$$2a+5d=32.5 \qquad (1)$$

ومن الفرض نجد أن: $S_{15}=412.5$

$$\frac{15}{2}(a+a_{15})=412.5$$

$$15a+105d=412.5 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على: $a=10\ ,\ d=2.5$

وبالتعويض في العلاقة:

$n=\frac{a_n-a}{d}+1$ نجد أن: $n=\frac{55-10}{2.5}+1=19$

مثـــال: إذا كانت العلاوة السنوية لراتب مدير مصنع هي 600 ل.س، وكان راتبه في آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 ل.س وإجمالي دخله طوال فترة عمله في هذه الوظيفة هو 10500 ل.س. **والمطلوب:**

احسب قيمة الراتب لمدير المصنع عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

الحـــل:

بفرض أن مقدار الراتب عند بداية التعين هي a، ومقدار الزيادة الـسنوية هـــي $d = 600$ ، فإن الراتب في السنة الثانية سيكون $a + 600$ والراتب في السنة الأخيرة هو 3300 ل.س وهو يمثل الحد الأخير مـــن متواليـــة حـسابية متزايـدة أساسـها $d = 600 > 0$.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$3300 = a + (n-1)600 \qquad (1)$$

وإن مجموع ما يتقاضاه يمثل مجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$10500 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)600] \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن: $a = 3900 - 600n$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$10500 = \frac{n}{2}[2(3900 - 600n) + (n-1)600]$$

بعد الإصلاح نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بـالمتحول n وهـــي مـــن الشكل:

$$n^2 - 12n + 35 = 0$$

$$(n-7)\cdot(n-5) = 0$$

ومنه نجد أن $n = 7$ أو $n = 5$

من أجل $n = 7$ تكون قيمة $a = -300$ مرفوضة.

ومن أجل $n = 5$ تكون قيمة $a = 900$ مقبولة.

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات ومقدار الراتب عنـد بدايـة التعـين هو 900 ل.س.

مثـــال: أودع محمد مبلغ 1000 ل.س بفائدة بسيطة شهرية 1 % في أحد المـصارف. **احسب** رصيده في نهاية سنة من تاريخ الإيداع.

الحـل: إن المبلغ المودع في بداية السنة وقدره 1000 ل.س يمثل الحد الأول لمتوالية حسابية، حدود هذه المتوالية هي:

$$1000\ ,\ 1010\ ,\ 1020\ ,\ 1030\ ,\ 1040\ ,\ \cdots\cdots\cdots$$

نرى أن أساسها هو $d=10$. لحساب الرصيد في نهاية السنة نوجد الحد a_{12}:

$$\begin{aligned} a_{12} &= a+(n-1)\cdot d \\ &= 1000+(12-1)10=1110\ \ s\cdot p \end{aligned}$$

§3. المتوالية الهندسية:

المتوالية الهندسية هي متوالية أعداد، كل حد من حدودها بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد السابق له مضروباً بمقدار ثابت (موجب أو سالب)، نسمي المقدار الثابت بأساس المتوالية الهندسية ونرمز له بالرمز r ، ونرمز للحد الأول فيها بالحرف a.

يحسب أساس المتوالية الهندسية من العلاقة: $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\ \ ,\ n\geq 1$

فمثلا المتوالية: $20\ ,10\ ,5\ ,\dfrac{5}{2}\ ,\ \cdots\cdots\cdots$

هي متوالية هندسية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $a=20$.

يعطى الشكل العام لمتوالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وعدد حدودها n بالشكل الآتي:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\cdots\cdots\cdots,\ a\cdot r^{n-1}$$

3ـ1ـ قانون الحد العام للمتوالية الهندسية:

كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد الأول a مضروباً بأساس المتوالية r المرفوع إلى قوة تساوي إلى عدد الحدود السابقة لذلك الحد. أي أن: $a_n=a\cdot r^{n-1}$

- مربع كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي جداء الحدين المتساويين في البعد عنه أي: $a_k^2=a_{k-n}\ .\ a_{k+n}$
- في كل متوالية هندسية تكون المساواة: $a_k\ .\ a_\ell=a_n\ .\ a_m$ محققة بشرط:

$$k+\ell=n+m$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

3ـ2ـ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\ldots\ldots\ldots,\ a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r:

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط : $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتواليــة تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ـ3ـ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كــان أساســها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r|<1$ وبملاحظة أن: $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}\,(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n^{\ 2} = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

3ـ2ـ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a \,,\, a\cdot r \,,\, a\cdot r^2 \,,\, a\cdot r^3 \,, \cdots\cdots\cdots, a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r:

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح (2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط : $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتواليـة تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ـ3ـ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كـان أساسـها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

أمثـلة على المتواليات الهندسية:

مثـــال: أوجد مجموع الحدود الـــ 12 الأولى للمتوالية الهندسية: $4 , -8 , 16 , -32$

الحــل: لدينا $a=4$ ، $r=-2$ ، $n=12$

$$S_n=\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \quad , \quad r\neq 1$$

$$S_{12}=\frac{4\left(1-(-2)^{12}\right)}{1-(-2)}=-5460$$

مثـــال: أوجد الحد الأول ومجموع الحدود العشرة الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a_{10}=7 \ , \ n=10 \ , \ r=\frac{1}{2}$$

الحــل: انطلاقاً من العلاقة: $a_{10}=ar^9 \quad \Rightarrow \quad a_n=ar^{n-1}$

$$a=\frac{a_{10}}{r^9}=\frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9}=7.(2)^9=3584$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$S_{10}=\frac{3584\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=7161$$

مثـــال:

متوالية هندسية مؤلفة من (6) حدود، مجموع الحدود الثلاثـــة الأولـــى منهـــا يساوي 168 ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة يساوي 21. أوجد حدود هذه المتوالية.

الحــل:

$$a_1+a_2+a_3=168$$
$$a_4+a_5+a_6=21$$

أو يمكن كتابتها حسب تعريف المتوالية الهندسية بالشكل التالي:

$$a+ar+ar^2=168$$

أو

$$ar^3+ar^4+ar^5=21$$

$$a\left(1+r+r^2\right)=168 \qquad (1)$$

$$ar^3\left(1+r+r^2\right)=21 \qquad (2)$$

بتقسيم (2) على (1) نحصل على:

$$r^3=\frac{21}{168}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة $r=\frac{1}{2}$ في المعادلة (1) نحصل على قيمة $a=96$.

والمتوالية المطلوبة هي: 3 , 6 , 12 , 24 , 48 , 96

مثـــال:

عبّر عن الكسر العشري المتكرر: $0.232323\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الحـــل:

بحسب التمثيل العشري نستطيع كتابة الرقم $0.232323\cdots\cdots$ بالشكل التالي:

$$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots$$

وهذا المجموع يمثل متوالية هندسية لانهائية حـــدها الأول $a=\frac{23}{100}$ وأساســـها $\frac{1}{100}$ ويكون مجموعها S_∞

$$S_\infty=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right)=\frac{23}{99}$$

إذن $$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{99}$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية:

1) $a_n = 2^{n-1}$

2) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

3) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$

4) $a_n = \dfrac{e^n}{n^3}$

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n!}$

2- أوجد الحد العام لكل من المتواليات الآتية:

$$1, 4, 7, 10, \ldots\ldots$$

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\ldots$$

$$2, \frac{8}{5}, \frac{32}{25}, \frac{128}{125}, \ldots\ldots$$

$$1, l, \frac{l^2}{2}, \frac{l^3}{6}, \frac{l^4}{24}, \ldots\ldots$$

3- إذا علمت أن الحد رقم (21) والحد رقم (35) لمتوالية حسابية هما (64) و (106) على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4, 7, 10$

4- إذا علمت أن الحد الخامس والحد السابع لمتوالية هندسية هما: 324 و 2916 على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4, 12, 36 \;\; if \;\; r = 3 \qquad 4, -12, 36 \;\; if \;\; r = -3$

5 - احسب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية: $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{64}, \ldots\ldots\ldots$

الجواب: $S_\infty = \dfrac{4}{5}$

6- أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتوالية المعرّفة بالشكل: $a_n = 3(a_{n-1}+2)$

حيث: $a_1 = a = 1$.

الجواب: $1 , 9 , 33 , 105 , 321$

7- إذا كانت : $2 , x , y , 17$ متوالية حسابية، فأوجد قيم y, x .

الجواب: $x = 7, y = 12$

8- إذا كان مجموع ثلاثة حدود متعاقبة في متوالية حسابية تساوي 15 وجداؤهم يساوي 80 فأوجد الحدود الثلاثة. (توجيه : أرمز للحد الأوسط بـ y).

الجواب: $8 , 5 , 2$ أو $2 , 5 , 8$

9- إذا علمت أن الحد الثالث في متوالية هندسية يساوي $\frac{63}{4}$ والحد السادس منها يساوي $\frac{1701}{32}$ فأوجد الحد الخامس فيها.

الجواب: $a_5 = \frac{567}{16}$

10- لدينا متوالية حسابية حدها الأول 5 والحد الـ (50) فيها يساوي (103)، كم حداً يجب أن نضيف إليها ليصبح مجموعها (572).

الجواب: $n = 22$

11 - إذا كانت الأعداد a,b,c تشكل متوالية هندسية، أثبت أن الأعداد:

$\frac{1}{\log_a N}, \frac{1}{\log_b N}, \frac{1}{\log_c N}$ تشكل متوالية حسابية.

12- احسب جداء الأعداد : $10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, \dots\dots\dots, 10^{\frac{19}{10}}$.

الجواب: 10^{19}

13- اكتب الكسر العشري المتكرر $0.22222\cdots\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الجواب: $\frac{2}{9}$

14- أوجد مجموع الحدود الـ 19 الأولى لمتوالية حسابية فيها:

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$$

الجواب: 1064

15– أوجد مجموع كل الأعداد ثلاثية الأرقام ومن مضاعفات العدد خمسة.

الجواب: 98550

16 – متوالية حسابية فيها:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$$
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 12.5$$

أوجد حدها الأول وأساسها.

الجواب: $a_1 = 0.5 \quad , \quad d = 0.5$

17– لدينا متوالية هندسية فيها:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots\dots = \frac{16}{3}$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots\dots = \frac{4}{3}$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

الجواب: $5 , \frac{5}{4} , \frac{5}{16}$

الفصل الثاني

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

§1. مقدمة وتعاريف:

تأتي أهمية استخدام معدل (سعر) الفائدة كأداة من أدوات السياسة الاقتصادية، حيث أن الطلب على الاستثمار يتعلق بسعر الفائدة، فإذا كان سعر الفائدة منخفضاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون كبيراً مما يؤدي إلى زيادة النشاط الإنتاجي، وبالعكس إذا كان سعر الفائدة مرتفعاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون قليلاً وهذا سيؤدي إلى قلة النشاط الإنتاجي.

يلعب سعر الفائدة دوراً كبيراً في تحقيق الاستقرار والنمو الاقتصاديين وتحفيز الاستثمار كما يربط سعر الفائدة بين سوق السلع والخدمات وسوق النقد.

إن الفائدة هي التكلفة التي تتحملها المنشآت الاقتصادية بأنواعها المختلفة الصناعية والتجارية لقاء الحصول على رأس المال، فالفائدة عملياً هي تكلفة رأس المال.

تقسم الفائدة إلى نوعين هما: الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، تستخدم الفائدة البسيطة في حالة الاستثمارات والقروض قصيرة الأجل التي مدتها سنة واحدة فما دون، بينما تطبق الفائدة المركبة في حالة الاستثمارات والقروض طويلة الأجل مدتها الزمنية أكثر من سنة.

وللفائدة المركبة تطبيقات كثيرة في المجالات الاقتصادية كمسائل الإنتاج والاستثمار، وفي مختلف المجالات العلمية والاجتماعية والسكانية.

يتحدد سعر الفائدة تبعاً لعوامل عدة منها عرض النقود وطلبها والتضخم النقدي.

1ـ1ـ تعريف الفائدة البسيطة:

هي العائد أو التعويض المادي الناتج عن استثمار أو اقتراض أموال الغير خلال فترة زمنية معنية، نسمي المبلغ المقترض بالأصل، وتحسب الفائدة كنسبة مئوية سنوية

من الأصل دائماً طوال فترة استخدام القرض، أي أن الفوائد المخصصة لا تضاف إلى أصل المبلغ.

تحتوي معادلة الفائدة البسيطة على ثلاث مركبات:

1- الأصل (المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر) ونرمز له بـ C.

2- معدل أو سعر الفائدة وتقدر بالسنوات (نسبة مئوية في السنة) ونرمز له بـ i.

3- دورة الاستثمار أو الاقتراض ونرمز لها بـ n.

وتعطى معادلة الفائدة البسيطة بالعلاقة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

حيث أن C_n جملة المبلغ بعد n سنة وتسمى (القيمة المستقبلية للمبلغ C).

مثـــال:

اقترض شخص من أحد المصارف مبلغاً من المال مقداره 1000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة 5 % سنوياً. أوجد القيمة المستقبلية للمبلغ وذلك:

1- بعد عامين.

2- بعد ثلاثة أشهر.

3- بعد 180 يوم.

الحـــل:

1) من المعلومات المعطاة: $C=1000$ ، $i=0.05$ ، $n=2$

ومن معادلة الفائدة البسيطة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

$$C_2 = 1000[1+(0.05)\cdot(2)] = 1000(1.1) = 1100 \ S\cdot P$$

2) إن ثلاثة شهور تمثل ربع عام إذن: $n=\frac{3}{12}=0.25$

$$C_{0.25} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.25)] = 1000(1.0125) = 1012.5 \ S\cdot P$$

3) في معظم المعاملات المالية يعتبر العام 360 يوماً ومنه: $n=\frac{180}{360}=0.5$

$$C_{0.5} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.5)] = 1000(1.025) = 1025 \ S\cdot P$$

1-2- تعريف الفائدة المركبة:

هي الفائدة التي تضاف إلى الأصل (المبلغ الأصلي) في نهاية كل وحدة زمن معينة وتستثمر معه لتشكل أصلاً جديداً (رأسمالاً جديداً) للدورة الزمنية التالية تحـــسب

عليه الفائدة من جديد. بمعنى أنه في الدورة الزمنية الجديدة تحسب فائدة علـى أصـل المبلغ وفائدة على فائدة أصل المبلغ في الدورة الزمنية السابقة. هنا الأصـل (المبلـغ الأصلي) متغير دائماً، حيث تحسب الفائدة في كل دورة زمنية على جملة المبلـغ فـي الدورة الزمنية السابقة.

• معدل الفائدة:

هو فائدة وحدة نقدية واحدة (ليرة واحدة) في نهاية كل دورة زمنية (سنة مثلاً) ويرمز لمعدل الفائدة بالرمز i ويعبر عنه بالشكل i %.

1ـ3ـ معادلة الفائدة المركبة:

إذا فرضنا أن شخصاً أودع مبلغ C ل.س في أحد المـصارف لمـدة n مـن السنوات بفائدة معدلها i % سنوياً فتكون الفائدة المستحقة على المبلغ C فـي نهايـة السنة الأولى أي عندما $n=1$: $I_1 = C.i.n = C.i$

وجملة المبلغ C في نهاية السنة الأولى C_1:

$$C_1 = C + C i = C(1+i)$$

وهي تمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثانية، وإذا ترك المبلغ لمدة سـنة ثانية ولم يسحب هذا الشخص فوائد السنة الأولى بل تركها تضاف لأصل المبلـغ فـي نفس الحساب، في هذه الحالة ستحسب الفائدة على الأصـل الجديـد وهـو $C(1+i)$ وستكون الفائدة هي: $I_2 = C_1 \cdot i = C(1+i) \cdot i$

وجملة المبلغ C_1 في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C(1+i) + C(1+i) \cdot i$$

وبإخراج $C(1+i)$ عامل مشترك نجد:

$$= C(1+i) \cdot (1+i) = C(1+i)^2$$

وهذا الأخير يمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثالثة.

وبالاستمرار بهذه الطريقة ستكون جملة المبلغ في نهاية السنة الثالثة هي:

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1+i) = C(1+i)^3$$

بشكل عام جملة مبلغ C ل.س (القيمة المستقبلية لمبلـغ C) مـستثمر بفائـدة مركبة i % سنوياً لمدة n من السنوات ستكون:

$$C_n = C(1+i)^n$$

إن مقدار الفائدة المستحقة عن مبلغ C لمدة n من السنوات تحسب من العلاقة:

$$I = C_n - C = C(1+i)^n - C$$

$$I = C\left[(1+i)^n - 1\right]$$

مثـــال:

أوجد جملة مبلغ (القيمة المستقبلية) 500 ل.س مستثمر بمعدل فائـدة 12 % سنوياً.

1- بعد شهر.

2- بعد سنة.

3- بعد خمس سنوات.

وذلك في حالة الفائدة البسيطة وفي حالة الفائدة المركبة.

الحــل:

- **في حالة الفائدة البسيطة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i\cdot n)$

1- جملة المبلغ بعد شهر هي:

$$C_n = 500\left(1+0.12\times\frac{1}{12}\right) = 505 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12(1)) = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12(5)) = 800 \quad S.p$$

- **في حالة الفائدة المركبة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i)^n$

1- جملة المبلغ بعد شهر على أساس معدل فائدة مركبة هي:

$$C_n = 500(1+0.12)^{\frac{1}{12}} = 500(1.12)^{0.085}$$
$$= 500(1.0094507) = 504.72 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة على أساس الفائدة المركبة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12)^1 = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12)^5 = 500(1.12)^5$$

$$= 500(1.7623417) = 881.170 \quad S.p$$

بمقارنة جملة المبلغ في حالتي الفائدة البسيطة والفائدة المركبة نلاحظ أن الجملة في حالة الفائدة البسيطة أكبر من الجملة في حالة الفائدة المركبة عندما تكون المدة n أقل من سنة وتتساوى الجملتان عندما تكون المدة سنة واحدة $(n=1)$، وتكون الجملة في حالة الفائدة المركبة أكبر من الجملة في حالة الفائدة البسيطة عندما $n>1$ (أي عندما تكون المدة n أكبر من سنة).

مثـــال:

استثمر شخص مبلغاً من المال قدره 100 000 ل.س في مصرف يمنح فائدة مركبة معدلها 4 % سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 148024.43 ل.س، احسب مدة استثمار هذا المبلغ.

الحـــل: نعلم أن: $C_n = 148024.43\,,\ \ i = 0.04\ ,\ C = 100000$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

بالتعويض نجد: $148024.43 = 100\,000(1+0.04)^n$

ومنه: $(1.04)^n = \dfrac{14804.43}{100000} = 1.4802443$

نأخذ لغاريتم الطرفين: $\ln(1.04)^n = \ln(1.4802443)$

وحسب خواص اللغاريتم نجد: $n \cdot \ln(1.04) = \ln(1.4802443)$

$$n = \frac{\ln(1.4802443)}{\ln(1.04)} = \frac{0.39220714}{0.039220713} = 10$$

إذن مدة الاستثمار هي عشر سنوات.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة المركبة إذا كانت جملة المبلغ 55839.478 ل.س بعد 10 سنوات هي 100 000 ل.س.

الحـــل: نعلم أن: $n = 10$ ، $C_{10} = 100000$ ، $C = 55839.478$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

$$100000 = 55839.478(1+i)^{10}$$

$$\frac{100000}{55839.478} = (1+i)^{10} \quad \Rightarrow \quad 1.790847686 = (1+i)^{10}$$

$$(1+i) = (1.790847686)^{\frac{1}{10}} = (1.790847686)^{0.1} = 1.06$$

$$i = 1.06 - 1 = 0.06$$

إذن معدل الفائدة المركبة هو 6 % سنوياً.

مثـــال:

مبلغ من المال قدره C ل.س نرغب في استثماره بمعدل فائـــدة مركبـــة 4 % سنوياً لتكوين مبلغ 100 000 ل.س بعد 6 سنوات لتغطية نفقات الـــسكن. فمـــا قيمـــة المبلغ C.

الحـــل: نعلم أن: $n = 6 \ , \ i = 0.04 \ , \ C_6 = 100000$

ومن معادلة الفائدة المركبة نجد أن: $C_n = C(1+i)^n \ \Rightarrow \ C = C_n(1+i)^{-n}$

$$C = 100000(1+0.04)^{-6} = 100000(1.04)^{-6}$$

$$C = 100000(0.79032) = 79031.5 \ \ S.p$$

1ــ4ــ جملة مبلغ عندما تكون مدة الاستثمار مقدّرة بالسنوات والأشهر والأيام:

إذا كانت مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر (**أي عدداً صحيحاً وكسراً**).

لنفترض أن الفترة الزمنية هي n سنة و $\frac{\alpha}{\beta}$ في الـــسنة $(\alpha < \beta)$، لحـــساب جملـــة المبلغ في نهاية الفترة الزمنية ($n + \frac{\alpha}{\beta}$) نستخدم إحدى الطريقتين:

1- نحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية n على أساس الفائدة المركبة، أما الفترة الزمنية ($\frac{\alpha}{\beta}$) فتحسب على أساس الفائدة البسيطة وتسمى هذه الطريقة بالطريقـــة الحقيقية. وتحسب من العلاقة: $C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^n \cdot (1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot i)$

2- تحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية $\frac{\alpha}{\beta}$ على أساس الفائدة المركبة، وتـــسمى هذه الطريقة بالطريقة التجارية وتحسب من العلاقة:

$$C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^{n+\frac{\alpha}{\beta}}$$

مثـــال:

احسب جملة مبلغ 000 10 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 6.3 سنوياً ولمدة 5 سنوات وثلاثة شهور.

الحـــل: من نص المسألة لدينا: $n=5\ ,\quad C=10000\ ,\quad i=0.063$

طريقة أولى:

يُحسب العدد الصحيح من سنوات مدة الاستثمار بقانون الفائدة المركبة، أما العدد غير الصحيح لمدة الاستثمار (الأشهر) فيُحسب على أساس قانون الفائدة البسيطة:

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^5\left[1+(0.063)\left(\frac{3}{12}\right)\right] \\ &= 10000(1.063)^5\left[1+(0.063)\cdot(0.25)\right] \\ &= 10000(1.3572702)(1+0.01575) = 13786.47 \quad \text{S.p} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

تحسب كامل مدة الاستثمار على أساس الفائدة المركبة والأشهر بأجزاء من السنة.

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^{5+\frac{3}{12}} = 10000(1.063)^{5.25} \\ &= 10000(1.37816) = 13781.6 \quad S.p \end{aligned}$$

1-5- جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة:

عند استثمار (اقتراض) مبلغ من المال قدره P ل.س لمدة n من السنوات بفائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات في السنة فإن m تأخذ القيم الآتية:

$m=1$: الفائدة تضاف مرة واحدة في السنة الكاملة (الفائدة سنوية).

$m=2$: الفائدة تضاف مرتان في السنة (الفائدة نصف سنوية).

$m=3$: الفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة (الفائدة $\frac{1}{3}$ سنوية).

$m=4$: الفائدة تضاف أربع مرات في السنة (الفائدة فصلية أو ربع سنوية).

$m = 12$: الفائدة تضاف 12 مرة في السنة (الفائدة شهرية).

$m = 365$: الفائدة تضاف 365 مرة في السنة.

تعطى جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر n من السنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة بالصيغة الآتية:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,n}$$

حيث:

Cــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر أو المقترض.

i ــ معدل الفائدة السنوية الذي يضاف m مرة في السنة.

mــ عدد فترات التركيب (عدد مرات إضافة الفائدة) في السنة الواحدة.

nــ عدد سنوات مدة الاستثمار (مدة الاقتراض).

إن: $\frac{i}{m}$ يمثل معدل الفائدة لفترة إضافة الفائدة (معدل الفائدة الجزئي).

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية (جملة) لمبلغ 1000 ل.س مستثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية % 8 تضاف:

1- مرة واحدة في السنة (الفائدة سنوية).

2- مرتان في السنة (نصف سنوية).

3- أربع مرات في السنة (فصلية).

4- 12 مرة في السنة (شهرية).

الحل: لدينا: $n = 3 \;,\; m = 1 \;,\; i = 0.08 \,,\; C = 1000$

1- باستخدام المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,n} \Rightarrow C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{(1)(3)} = 1259.71 \quad S.p$$

2- لدينا: $C = 1000 \;, i = 0.08 \;,\; m = 2 \;,\; n = 3$

$$C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{3}\right)^{(2)(3)} = 1265.32 \quad S.p$$

3- لدينا: $C=1000 \quad , i=0.08 \quad , m=4 \quad , n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{(4)(3)}=1268.24 \quad S.p$$

4- لدينا: $C=1000 \quad , \quad i=0.08 \quad , \quad m=12 \quad , \quad n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{(12)(3)}=1271.75 \quad S.p$$

نلاحظ أن جملة المبلغ تزداد أكثر فأكثر كلما زاد عدد مرات إضافة الفائدة في السنة.

لنضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

جملة المبلغ	الأصل المستثمر	فترة التركيب	المعدل السنوي للفائدة
$1259.71 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	سنوية $(m=1)$	8%
$1265.32 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	نصف سنوية $(m=2)$	8%
$1268.24 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	فصلية $(m=4)$	8%
$1271.75 \quad S.p$	$1000 \quad S.p$	شهرية $(m=12)$	8%

مثـــال:

ما المبلغ الذي يجب أن تودعه اليوم ولمدة 5 سنوات وبمعـدل فائـدة مركبـة 10 % سنوياً حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور لتحصل علـى مبلـغ قـدره 8000 ل.س.

الحـل: لدينا: $m=4 \quad , \quad n=5 \quad , \quad i=0.10 \quad , \quad C_5=8000$

باستخدام المعادلة: $C_n=C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.n}$

$$8000=C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{(4)(5)}=C\left(1+0.025\right)^{20}$$

ومنه: $C=\frac{8000}{(1.025)^{25}}=4882.17 \quad S \cdot P$

1 ـ6ـ الفائدة المركبة المستمرة طيلة أيام السنة:

لنفرض أن m عدد فترات التركيب في السنة (عدد مرات إضافة الفائـــدة فـــي السنة) يجري باستمرار طيلة أيام السنة (أي أن $m \to \infty$ تقترب أكثـر فـأكثر مـن اللانهاية):

نعيد كتابة المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

بالشكل التالي:

$$C_n = C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

$$\lim_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

لندخل متغيراً جديداً: $u=\frac{m}{i}$. حيـث أن: $u \to \infty$ عنـدما $m \to \infty$،

وبعد التعويض نحصل على:

$$C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ui}\right]^{n} = C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{in}$$

بما أن:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

ومنه نجد:

$$\ell im_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\cdot e^{in}$$

- إن القيمة المستقبلية لمبلغ قدره P ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعـدل فائـدة مُركبة $i\%$ سنوياً تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة يعطى بالعلاقة:

$$A_n = P\cdot e^{in}$$

حيث:

C ـ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر.

i ـ معدل الفائدة المركبة السنوية .

n ـ الزمن بالسنوات.

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية بعد ثلاث سنوات لمبلغ قدره 1000 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها 8 % سنوياً والفائدة تضاف:

1- بشكل يومي.[1]

2- بشكل مستمر.

(1) ملاحظة: يمكن اعتبار عدد أيام السنة العادية 365 يوماً وعدد أيام السنة الكبيسة 366 يوماً وعدد أيام السنة التجارية 360 يوم.

الحل: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=365 \ , \ n=(365)(3)=1095$

1- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل يومي نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = p\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \Rightarrow C_3 = 1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{1095} \approx 1271.20 \quad S.p$$

2- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل مستمر نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n = pe^{in} \Rightarrow C_3 = 1000e^{(0.08)(3)} \approx 1271.25 \quad S.p$$

§-2- المعدل الحقيقي والمعدل الاسمي للفائدة

المعدل الحقيقي هو المعدل الذي تتساوى مدته مع مدة إضافة الفائدة إلـــى رأس المال. **والمعدل الحقيقي السنوي** هو مقدار الفائدة الفعلية التي تعود على وحدة النقـــود في نهاية السنة على أساس أن الفائدة المستحقة عن كل فترة تضاف إلـــى رأس المـــال مجرد استحقاقها وتستثمر بالطريقة نفسها التي يستثمر بها رأس المال الأصلي.

المعدل الاسمي هو المعدل الذي لا تتطابق مدته مع مدة إضافة الفائدة إلى رأس المال. **والمعدل الاسمي السنوي** هو حاصل ضرب المعدل عن الفترة التي هي أقل من السنة في عدد الفترات الموجودة في السنة. فإذا قيل أن معدل الفائدة 4 % عن نـــصف السنة فإن المعدل السنوي الاسمي يكون: $4\% \times 2 = 8\%$ ونقـــول أن معـــدل الفائـــدة الاسمي 8 % يدفع على مرتين في السنة.

2_1_ العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي للفائدة :

لنفرض أن مبلغاً أصلياً قدره C ل.س استثمر بمعدل فائدة مركبة اسمي j يضاف m من المرات في السنة لنرمز بـ i لمعدل الفائدة الحقيقي السنوي. إن القيمة المستقبلية لمبلغ C ل.س بعد سنة واحدة هي:

$$C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=C(1+i)$$

نقسم طرفي المساواة على C فنجد: $$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i$$

ومنه نجد : $$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$$

من خلال هذه العلاقة يمكننا حساب معدل الفائدة الحقيقي السنوي إذا كان معدل الفائدة المركبة الاسمي معلوماً.

i ــ معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

j ــ معدل الفائدة المركبة الاسمي الذي يضاف m مرة في السنة.

m ــ عدد مرات إضافة الفائدة على المبلغ الأصلي في السنة.

بأخذ الجذر ذي الدليل m لطرفي المساواة :

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{j}{m}\right)=(1+i)^{\frac{1}{m}} \;\Rightarrow\; \frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

نجد: $$j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

من العلاقة الأخيرة يمكننا حساب معدل الفائدة الاسمي السنوي بدلالة معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

مثـــال:

احسب المعدل الحقيقي السنوي الذي يقابل معدل اسمي سنوي 8 % إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل:

1- مرة كل سنة.

2- كل ستة شهور.

3- كل ثلاثة شهور .

4- 12 مرة في السنة.

الحـــل: لدينا: $j = 8\ \%$ والمطلوب إيجاد: $i = ?$

باستخدام القانون: $$i = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1$$

1- في هذه الحالة نجد أن فترة المعدل الحقيقي هي نفس فترة المعدل الاســـمي وهـــي سنة أي:

$$i = \left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{1} - 1 = 1.08 - 1 = 0.08 = 8\%$$ سنوياً

2- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 2$

$$i = \left(1+\frac{0.08}{2}\right)^{2} - 1 = (1.04)^{2} - 1 = 0.0816 = 8.16\ \%$$ سنوياً

3- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 4$

$$i = \left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{4} - 1 = (1.02)^{4} - 1 = 0.08243 = 8.234\ \%$$ سنوياً

4- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 12$

$$i = \left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = (1.0067)^{12} - 1 = 0.08343 = 8.343\ \%$$ سنوياً

جملة المبلغ بعد 3 سنوات	المبلغ الأصلي	المعدل الحقيقي السنوي	فترة إضافة الفائدة	المعدل الاسمي السنوي
$1000(1+0.08)^{3} = 1259.71$	1000	8%	سنوية	8%
$1000(1+0.0816)^{3} = 1265.32$	1000	8.16%	نصف سنوية	8%
$1000(1+0.08243)^{3} = 1268.23$	1000	8.243%	فصلية	8%
$1000(1+0.08343)^{3} = 1271.75$	1000	8.343%	شهرية	8%

يتساوى معدل الفائدة الحقيقي السنوي مع معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة مرة واحدة في السنة، ويكون معدل الفائدة الحقيقي السنوي أكبر من معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة أكثر من مرة واحدة في السنة.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة الحقيقي المقابل لمعدل الفائدة السنوي 8 % إذا كانت الفائدة تضاف كل ربع سنة.

الحـــل:

لدينا: $j = 0.08 \quad , \quad m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1 + 0.02)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1$$

$$= 1.08243215 - 1 = 0.08243216 = 8.243216\ \%$$

مثـــال: يعطي أحد المصارف فائدة مركبة معدلها 6.1 % سنوياً تضاف كل ثلاثة أشهر ويعطي مصرف آخر فائدة مركبة معدلها 6 % سنوياً تضاف شهرياً. في أي المصرفين يكون الاستثمار أفضل ؟

الحـــل:

للإجابة على هذا السؤال علينا أن نحسب معدلي الفائدة الحقيقيين السنويين للمصرفين، والمصرف الذي يملك معدل الفائدة الحقيقية السنوية الأكبر يكون الاستثمار فيه أفضل، لأنه يعطي مقدار فائدة أكبر.

معدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الأول i_1 هو:

$$i_1 = (1 + \frac{0.061}{4})^4 - 1 = 0.0624096$$

ومنه: $i_1 = 6.24\%$.

ومعدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الثاني i_2 هو:

$$i_2 = (1 + \frac{0.06}{12})^{12} - 1 = 0.0616778$$

ومنه: $i_2 = 6.16\%$.

نستنتج أن: $i_1 > i_2$ ويكون الاستثمار أفضل لدى المصرف الأول.

§3. خصم الديون بفائدة مركبة:

من الشائع في المعاملات المالية أن يخصم المقرض الفائدة من المبلغ المقترض مقدماً، فمثلاً إذا اقترض شخص مبلغاً قدره C ل.س من مصرف فيقوم المصرف بخصم الفائدة، وفي نهاية المدة يدفع المقترض للمصرف مبلغ C ل.س. تسمى هذه الطريقة بطريقة الخصم، ويسمى المبلغ المطروح بمقدار الخصم، والمبلغ الذي أخذه المقترض بالقيمة الحالية للقرض.

نسمي الفرق بين القيمة الحالية V_p للقرض والتي تساوي $V_p = V_n(1+i)^{-n}$ والقيمة الاسمية V_n للقرض والتي تساوي $V_n = V_p(1+i)^n$ (القيمة المستقبلية) بالخصم، ونرمز للخصم بالحرف D ، حيث:

$$D = V_n - V_p = V_n - V_n(1+i)^{-n} = V_n[\,1-(1+i)^{-n}\,]$$

3ـ1ـ معدل الخصم :

معدل الخصم: هو مقدار الخصم عن مبلغ وحدة نقدية واحدة، وتستحق الدفع بعد سنة واحدة. نعلم أن:

$$D = V_n - V_p \;\Rightarrow\; V_p = V_n - D \;\Rightarrow\; \frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n - D$$

- لإيجاد القيمة الحالية لوحدة نقدية واحدة تستحق بعد فترة زمنية قدرها سنة نعوض في العلاقة السابقة كل من: $D=d \;,\; n=1 \;,\; V_n=1$ فنجد أن :

$$\frac{1}{1+i} = 1-d \;\Rightarrow\; d = 1-\frac{1}{1+i}$$

ومنه

$$d = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; \boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

وهو معدل الخصم المركب بدلالة معدل الفائدة المركبة.

- ولنحسب معدل الفائدة المركبة i بدلالة معدل الخصم:

$$d = \frac{i}{1+i} \;\Rightarrow\; d(1+i) = i \;\Rightarrow\; d + id = i$$

ومنه:

$$d = i - id \;\Rightarrow\; d = i(1-d) \;\Rightarrow\; \boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

- القيمة الحالية بدلالة معدل الخصم المركب d:

$$\frac{1}{1+i}=1-d \Rightarrow (\frac{1}{1+i})^n=(1-d)^n$$

بضرب الطرفين بـــ V_n نجد: $\frac{V_n}{(1+i)^n}=V_n(1-d)^n$

ومنه:

$$\boxed{V_p=V_n(1-d)^n}$$

مثـــال:

احسب معدلات الخصم المقابلة لمعدلات الفائدة 5 % ، % 6.2 سنوياً.

الحـــل: 1- $d=\frac{i}{1+i}=\frac{0.05}{1+0.05}=\frac{0.05}{1.05}=0.0476=4.76\%$

2- $d=\frac{0.063}{1+0.062}=0.05838=5.84\%$

مثـــال:

احسب معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم % 1.96 ، % 2.439

الحـــل:

باستخدام العلاقة: $i=\frac{d}{1-d}$

$i=\frac{0.0196}{1-0.0196}=\frac{0.0196}{0.9804}=2\%$ سنوياً

$i=\frac{0.02439}{1-0.02439}=\frac{0.0249}{0.97561}=2.5\ \%$ سنوياً

مثـــال:

سند قيمته الاسمية 60000 ل.س ويستحق الدفع بعد 15 عاماً من الآن، فـــإذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 7% سنوياً. ما مقدار الخصم؟

الحـــل: لدينا: $V_{15}=60000$ ، $i=0.07$ ، $n=15$

باستخدام قانون الخصم:

$$D=V_n[1-(1+i)^{-n}]=60000[1-(1+0.07)^{-15}]$$
$$=60000[1-(1.07)^{-15}]=38253.23 \quad S.p$$

§4. تسوية الديون بفائدة مركبة

إن تسوية الديون تعني سداد الديون في غير موعد استحقاقها، فإذا تأجل سداد الدين مدة ما فإن قيمته تزداد بمقدار الفوائد التي تستحق على مبلغ الدين خلال مدة التأجيل، وإذا تقدم موعد سداد الدين مدة ما فإن قيمته تنقص إلى القيمة التي لو استثمرت طول مدة التقديم لأصبحت جملتها مساوية لمبلغ الدين الأصلي، بمعنى أن القيمة الاسمية لأي دين تتغير بتغير تاريخ استحقاق الدين.

إن استبدال الديون القديمة بديون جديدة (إعادة جدولة الديون) يخضع للقاعدة الآتية:

القيمة الحالية للديون القديمة (قبل التسوية) = القيمة الحالية للديون الجديدة (بعد التسوية)

يأخذ استبدال الديون (إعادة جدولة الديون) أكثر من شكل نذكر منها:

1- استبدال الدين الأصلي بدين آخر جديد لمدة أطول (أقصر) من مدة الدين الأصلي، أي تأخير (تقديم) تاريخ استحقاق الدين الأصلي.

2- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق الأداء بعد مواعيد استحقاق الديون الأصلية (القديمة).

3- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق قبل مواعيد استحقاق الديون الأصلية .

4- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بعدة ديون جديدة مختلفة سواء من حيث القيمة أومن حيث تاريخ الاستحقاق أو كلاهما معاً.

مثـــال:

تاجر مدين لدائن بالمبالغ الآتية:

30000 ل.س تستحق السداد بعد سنة واحدة من الآن .

40000 ل.س تستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

50000 ل.س تستحق السداد بعد ست سنوات من الآن.

طلب هذا التاجر من الدائن استبدال الديون الثلاثة الأصلية بدين جديد يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن، فإذا كان معدل الفائدة المركبة % 5 ما قيمة الدين الجديد؟

الحــل: لنرمز للقيمة الاسمية للدين الجديد بـــــ $V_{n'}$ ومن نص المسألة لدينا:

$$V_{n_1}=30000 \qquad n_1=1 \quad ، \quad i=0.05$$
$$V_{n_2}=40000 \qquad n_2=3$$
$$V_{n_3}=50000 \qquad n_3=6$$

بحسب قاعدة تسوية الديون:

القيمة الحالية للديون الثلاثة الأصلية = القيمة الحالية للدين الجديد.

$$\frac{V_{n'}}{(1+i)^{n'}}=\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}}+\frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}}+\frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$$

$$\frac{V_{n'}}{(1.05)^3}=\frac{50000}{(1.05)^6}+\frac{40000}{(1.05)^3}+\frac{30000}{(1.05)^1}$$

ومنه نجد : $V_{n'}=116266.88 \quad S.p$

مثـــال:

تاجر مدين بثلاثة ديون قيمها الاسمية هي 70000 ، 90000 ، 120000 ل.س وتستحق السداد بعد 5 , 8 , 10 سنوات على الترتيب. اتفق مع دائنة على خصم هــذه الديون. ما مقدار الخصم إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 12 سنوياً ؟

الحـــل: $V_{n_1}=70000 \quad ، \quad V_{n_2}=90000 \quad ، \quad V_{n_3}=120000$

$$n_1=5 \quad ، \quad n_2=8 \quad ، \quad n_3=10$$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للـــدين الثاني + القيمة الحالية للدين الثالث

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}}+\frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}}+\frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{120000}{(1+0.12)^{10}}+\frac{90000}{(1+0.12)^{8}}+\frac{70000}{(1+0.12)^{5}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $3863.6788+36349.490+39719.879$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = 114706.157

الخصم = مجموع القيم الاسمية للديون الثلاثة – القيمة الحالية للديون الثلاثة

$$D=(70000+90000+120000)-44706.157=165293.843 \quad S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 7000 ل.س بفائدة مركبة معدلها 4 % سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 12121.76 ل.س، **المطلوب:** احسب مدة إيداع هذا المبلغ.

الجواب: 14 سنة

2- احسب القيمة المستقبلية لقرض قيمته 8500 ل.س بعد 10 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة 4.5 % سنوياً.

الجواب: 13200

3- بعد مضي ست سنوات من إيداع شخص مبلغ قدره 2500 ل.س في حساب التوفير بفائدة مركبة معدلها 8 % ،انخفض معدل الفائدة المركبة إلى 5 % سنوياً.

المطلوب: كم يكون في حساب الشخص بعد عشر سنوات من تاريخ تغير معدل الفائدة.

الجواب: 6462.12

4- ما المبلغ الذي يجب أن تودعه الآن بفائدة مركبة معدلها 8 % سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف كل ثلاثة شهور ولمدة 20 عاماً ليصبح رصيدك 10000 ل.س.

الجواب: 2051.10

5- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 1000 ل.س في أحد المصارف لمدة أربع سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية مضافة مرتين في السنة ، فحصل في نهاية الأربع سنوات على مبلغ 1435.77 ل.س. **والمطلوب:** ما معدل الفائدة المركبة ؟

الجواب: 9.25 %

6- ما المدة اللازمة لإيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها 9.5 % سنوياً والفائدة تضاف كل ثلاثة شهور للحصول على مبلغ 8000 ل.س؟

الجواب: 5سنوات

7- أودع أحمد مبلغاً قدره 40000 ل.س في مصرف لمدة ثلاث سنوات وستة أشهر، فإذا علمت أن المصرف يعطي فائدة مركبة معدلها 10 % سنوياً. **احسب:** القيمة المستقبلية (الجملة) لهذا المبلغ في نهاية المدة.

الجواب: 55838.584 أو 55902

8- ما المبلغ الذي سيصبح في حسابك بعد عامين من إيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها 8 % سنوياً والفائدة تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة.

الجواب: 5867.55 ل.س

9- عند شراء شخص لجهاز الحاسب، دفع من ثمنه 10000 ل.س نقداً، واتفق مع البائع على دفع مبلغ 7500 ل.س بعد عامين بفائدة مركبة معدلها 6 % سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف مرتان في السنة، **والمطلوب: ما ثمن جهاز الحاسب نقداً عند تاريخ الشراء؟**

الجواب: 16663.65 ل.س

10- أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي حيث تضاف الفوائد مرتين في السنة وبموجبه يؤول مبلغ 1000 ل.س إلى 1266.77 ل.س بعد أربع سنوات.

الجواب: 6 %

11- ما معدل الفائدة المركبة الاسمي السنوي حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور؛ إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة الحقيقي السنوي هو 8.8 % ؟ **الجواب:** 8.524 %

12- لدى أحد الأشخاص مبلغ 15000 ل.س، أراد استثماره في أحد المصارف بفائدة مركبة فعرضت عليه ثلاثة مصارف العروض الثلاثة الآتية:

1- فائدة مركبة حقيقية معدلها 6.85 % سنوياً والفائدة تضاف في نهاية كل سنة.

2- فائدة مركبة معدلها 6.5 % سنوياً والفائدة تضاف مرتين في السنة.

3- فائدة مركبة معدلها % 6.75 سنوياً والفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة. فأي عرض هو الأفضل للمستثمر؟

الجواب: عرض المصرف الثالث % 6.90

13- تاجر مدين بمبلغ 450000 ل.س تستحق في نهاية 6 سنوات، أوجد القيمة الحالية لهذا الدين إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 4 سنوياً، ثم احسب قيمة الخصم.

الجواب: 355641.54 , 94358.45

14- ثلاثة ديون قيمها الاسمية 30000 ، 40000 ، 50000 ل.س تستحق بعد 3 , 5 , 6 سنوات على الترتيب والمطلوب:

1- أوجد القيمة الحالية للسندات الثلاثة.

2- احسب مقدار خصم الديون الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 7 سنوياً.

الجواب: 86325.5 , 33674.5 ل.س

15- تاجر مدين بالسندات الآتية:

سند قيمته الاسمية 40000 ل.س ويستحق الدفع بعد عامين.

وسند قيمته الاسمية 70000 ل.س ويستحق الدفع بعد أربع سنوات.

ومجموع قيمتيهما الحاليتين 84488.40 ل.س، اتفق المدين مع الدائن على خصم هذين السندين ما معدل الفائدة المركبة التي تم على أساسها الخصم؟.

الجواب: % 8.5

16- شخص مدين بالسندين التاليين:

الأول قيمته 500000 ل.س يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن.

والثاني قيمته 600000 ل.س يستحق الدفع بعد خمس سنوات من الآن.

يريد هذا الشخص أن يستعيض عن هذين السندين بسند وحيد يستحق بعد 7 سنوات من الان، ما القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت ان معدل الفائدة المركبة % 6 سنوياً.

الجواب: 1 305 398.5 ل.س

17- تاجر مدين بالسندين التاليين:

سند قيمته الاسمية 200000 ل.س يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

وسند قيمته الاسمية 300000 ل.س يستحق السداد بعد خمس سنوات من الآن.

أراد هذا التاجر استبدال هذين السندين بسندين جديدين متساويين بالقيمة الاسمية يستحق الأول بعد ست سنوات ويستحق الثاني بعد سبع سنوات، علماً أن معدل الفائدة المركبة 6 % سنوياً، ما قيمه كل من السندين الجديدين؟

الجواب: 286201.46 ل.س

الفصل الثالث

الدفعات الدورية

§1. مفهوم الدفعات

يقصد بالدفعات مجموعة من المبالغ تدفع بشكل دوري منتظم وعلى فترات زمنية متساوية، عندما تكون مبالغها متساوية تسمى بالدفعات الدورية المتساوية، يطلق على المبلغ الذي يدفع دورياً بمبلغ الدفعة، نسمي الزمن من فترة الدفعة الأولى إلى نهاية فترة الدفعة الأخيرة بمدة الدفعة.

عندما تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين سنة، تسمى الدفعات سنوية. أو تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين نصف سنة، فتسمى دفعات نصف سنوية أو دفعات شهرية.

أمثلة:

- مجموعة دفعات تدفع لاستثمارها لتتراكم وتصل إلى مبلغ معين في وقت معين (مثل المبالغ التي تدفع شهرياً في حساب ادخار).
- مجموعة دفعات تدفع شهرياً لسداد قرض مع فوائده (مثل القروض العقارية).
- مبالغ الدفعة الواحدة التي تدفع لشركات التأمين للتأمين على الحياة.

1–1– أنواع الدفعات:

يمكن تقسيم الدفعات إلى أنواع مختلفة وفقاً لأساس التقسيم المستخدم.

1 – الدفعات المتساوية والدفعات المتغيرة:

الدفعات المتساوية: هي تلك الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة متساوية.

الدفعات المتغيرة: هي الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة غير متساوية.

2– الدفعات المحدودة (المؤقتة) والدفعات الدائمة:

الدفعات المحدودة: هي الدفعات التي يستمر سدادها لمدة محدودة.

الدفعات الدائمة: هي تلك الدفعات التي يستمر سدادها دون توقف خلال مدة لانهائية من الزمن.

3- الدفعات العاجلة والدفعات المؤجلة:

الدفعات العاجلة: هي الدفعات التي يبدأ فيها السداد من الدورة الزمنية الأولى من تاريخ اليوم فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية هذه الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة الفورية، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في نهاية الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة العادية.

الدفعات المؤجلة: فيها يبدأ سداد أول مبلغ للدفعة بعد انتهاء مدة محدودة من بداية التعاقد تسمى ((مدة التأجيل))، فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية الدورة الزمنية التي تلي مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة فورية))، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة من نهاية الدورة الزمنية الأولى لانتهاء مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة عادية)) و أياً كان نوع الدفعات في التقسيمات السابقة فإنها إما أن تسدد مبالغها في آخر كل دورة زمنية فتسمى بدفعات عادية، أو تسدد مبالغها في أول كل دورة زمنية فتسمى بدفعات فورية.

1-2 ـ جملة الدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

الدفعات الدورية السنوية المتساوية العادية: هي دفعات متساوية تدفع بشكل دوري في نهاية كل سنة. وتستخدم هذه الدفعات من أجل تسديد القروض ويطلق عليها أحياناً اسم دفعات سداد.

لنرمز لجملة الدفعات هذه بالرمز V_n، ولمقدار الدفعة السنوية (القسط السنوي) R ولمعدل الفائدة المركبة بـ i ، وللقيمة الحالية لها بـ V_p.

إن المبلغ الأول (الدفعة الأولى) يستثمر من نهاية السنة الأولى وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة $(n-1)$ سنة وتكون جملته بعد $(n-1)$ سنة:

$$R(1+i)^{n-1}$$

وأن المبلغ الثاني (الدفعة الثانية) يستثمر من نهاية السنة الثانية وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة $(n-2)$ من السنوات، وتكون جملته بعد $(n-2)$ سنة:

$$R(1+i)^{n-2}$$

وأن المبلغ قبل الأخير (الدفعة قبل الأخيرة) يستثمر لمدة سنة واحدة وتكون جملته:

$$R(1+i)$$

وأن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) لا يستثمر وتبقى قيمته كما هي R .

ومنه جملة الدفعات تساوي:

$$V_n = R(1+i)^{n-1} + R(1+i)^{n-2} + \dots\dots + R(1+i) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_n = R\left[1+(1+i)+(1+i)^2+\dots\dots+(1+i)^{n-1}\right]$$

الطرف الأيمن داخل القوسين يمثل متوالية هندسة متزايدة حدها الأول (1) وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها (n)، فيكون مجموعها:

$$V_n = R\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} \Rightarrow V_n = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

تمثل العلاقة السابقة القيمة المستقبلية (جملة) لـ n من الدفعات العادية المتساوية قيمة كل منها R ل.س وبمعدل فائدة مركبة $i\%$.

1 ـ3ـ القيمة الحالية للدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

لنفرض أن المطلوب هو إيجاد قيمة المبلغ المطلوب استثماره V_P ل.س بفائدة مركبة معدلها السنوي $i\%$، لنحصل على دفعة مكونة من n من الأقساط مقدار كل منها R ل.س تدفع بعد سنة من بدء استثمار المبلغ V_P.

ننظر إلى المبلغ V_P وكأنه يتكون من n من الأجزاء وكل جزء من هذه الأجزاء يمول قسطاً واحداً من مجموعة من الأقساط عددها n ومقدار كل منها R ل.س. إن كل جزء من هذه الأجزاء يمثل القيمة الحالية لإحدى الدفعات، وتكون القيمة الحالية للدفعات:

$$V_P = R(1+i)^{-n} + \dots\dots\dots + R(1+i)^{-2} + R(1+i)^{-1}$$

بضرب طرفي المساوة بـ $(1+i)^n$ نجد:

$$V_P(1+i)^n = R + R(1+i) + \dots\dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1}$$

نعلم أن:

$$R + R(1+i) + \dots\dots\dots + R(1+i)^{n-2} + R(1+i)^{n-1} = V_n$$

وبالتالي:

$$V_P(1+i)^n = V_n$$

ومنه:
$$V_p = V_n (1+i)^{-n} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n}$$

$$V_p = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

مثـــال:

يودع شخص مبلغاً قدره 2000 ل.س في مصرف في نهاية كل عـــام ولمـــدة 20 عاماً أوجد جملة ما تكون له، إذا كان المصرف يعطـــي فائـــدة مركبـــة معـــدلها % 8.5 سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة.

الحـــل: $R = 2000 \quad , \quad i = 0.085 \quad , \quad n = 20$

نظراً لأن الدفعات دورية سنوية عادية نستخدم العلاقة:

$$V_n = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$V_{20} = 2000\frac{(1+0.085)^{20} - 1}{0.085} = 96754.03 \quad S.p$$

مقدار الفائدة المستحقة = جملة الدفعات − إجمالي الدفعات

$$I = V_n - n \cdot R = 96754.03 - (20)\cdot(2000) = 56754 \quad S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات سنوية مبلغها 200 ل.س تدفع آخر كل سنة ولمدة 20 عاماً، على أساس معدل فائدة مركبة % 6 سنوياً.

الحـــل: $R = 200 \quad , \quad i = 0.06 \quad , \quad n = 15$

$$V_p = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 200\frac{1-(1.06)^{-15}}{0.06} = 1942.45 \quad S.p$$

1 ــ4ــ جملة الدفعات الجزئية الدورية العادية:

الدفعات الجزئية الدورية العادية هي دفعات متساوية في القيمـــة تـــدفع بـــشكل دوري منتظم في نهاية كل دورة زمنية، حيث أن الدورة هي جزء من السنة (شـــهر، فصل، نصف سنة ...الخ).

لتكن مدة الاستثمار هي n من السنوات، ولنقسم كل سنة من هذه المدة إلى m قسماً متساوياً، فيكون $n \cdot m$ هو عدد الدفعات المتساوية خلال الـــ n من السنوات.

لنفرض أن قيمة القرض V ل.س، يسدد على دفعات عادية دورية قيمة كل منها R ل.س تدفع في نهاية كل فترة زمنية جزئية علـــى أســـاس معـــدل فائـــدة مركبـــة معدلها i % سنوياً.

فيكون معدل الفائدة الجزئي لكل فترة زمنية جزئية J_m هو: $J_m = \dfrac{i}{m}$

حيث: m عدد الفترات الجزئية في السنة الواحدة.

إن الدفعة الجزئية الأولى تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الأولى وحتى نهاية المدة أي إنها تستثمر لمدة$(m \cdot n - 1)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+J_m\right)^{m \cdot n-1}$$

وأن الدفعة الجزئية الثانية تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الثانية وحتى نهاية المدة أي أنها تستثمر لمدة$(m \cdot n - 2)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2}$$

وأن الدفعة الجزئية قبل الأخيرة تستثمر لفترة جزئية واحدة وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)$$

وأن الدفعة الجزئية الأخيرة لا تستثمر وتبقى قيمتها كما هي R.

وبناء عليه فإن جملة الدفعات الجزئية العادية $V_{m,n}$ تكون:

$$V_{m,n} = R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-1} + R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2} + ... + R\left(1+j_m\right) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_{m,n} = R\left[1+(1+j_m)+(1+j_m)^2+.......+(1+j_m)^{m \cdot n-2}+(1+j_m)^{m \cdot n-1}\right]$$

مجموعها يكون: $$V_{m,n} = R\frac{(1+j_m)^{m \cdot n}-1}{(1+j_m)-1}$$

ومنه: $$V_{m,n} = R\frac{(1+j_m)^{m \cdot n}-1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

تمثل هذه العلاقة جملة دفعات جزئية عادية قيمة كل منها R ل.س.

• **تعطى القيمة الحالية للدفعات الجزئية العادية $V_0^{m,n}$ بالعلاقة:**

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-(1+j_m)^{-mn}}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

مثـــال: يودع شخص مبلغاً قدره 1000 ل.س في نهاية كل ستة أشـــهر ولمـــدة 10 سنوات في مصرف يعطي فائدة مركبة سنوية 8 % تـضـاف مرتـــان فـــي الـسنة.

والمطلوب: أوجد جملة الدفعات.

الحــل: نظراً لان الدفعات جزئية نصف سنوية فإن المعدل النصف سنوي هو:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

$$R = 1000 \ , \ m = 2 \ , \ n = 10 \ , \ m \cdot n = 20$$

باستخدام العلاقة :

$$V_{m,n} = R\,\frac{(1+j_m)^{mn}-1}{j_m} = 1000\frac{(1+0.04)^{20}-1}{0.04} = 29778.08 \quad S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 200 ل.س تدفع في نهاية كل شـــهر لمدة خمس سنوات على أساس معدل فائدة مركبة سنوية 6 % والفائدة تضاف شهرياً.

الحــل: الدفعات عادية شهرية والمعدل الشهري للفائدة:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

$$R = 200 \ , \ m = 12 \ , \ n = 5 \ , \ m \cdot n = 12 \times 5 = 60$$

باستخدام العلاقة:

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-(1+j_m)^{-mn}}{j_m} = 200\frac{1-(1+0.005)^{-60}}{0.005} = 10345.11 \quad S.p$$

5-1 جملة الدفعات السنوية الدورية الفورية المتساوية V_n':

الدفعات السنوية الدورية الفورية: هي متتالية من المبالغ تدفع بشكل منتظم فـــي بداية كل سنة وتسمى دفعات إيداع أو استثمار، كلمة فورية تعني أن الدفع أو الإيـــداع يتم في بداية السنة.

إن المبلغ الأول وقدره R ل.س (القسط السنوي الأول) يستثمر من بداية الفترة الأولى وحتى نهاية المدة، (n) من السنوات، فتكون جملته:

$$R\,(1+i\,)^n.$$

وإن المبلغ الثاني R ل.س يستثمر من بداية الفترة الثانية وحتى نهاية المدة، أي لمدة $(n-1)$ في السنوات، فتكون جملته:

$$R(1+i)^{n-1}.$$

وإن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) يستثمر لفترة واحدة، أي لمدة سنة واحدة، فتكون جملته: $R(1+i)$

وتكون جملة الدفعات الفورية V_n':

$$V_n'=R\,(1+i\,)^n+R\,(1+i\,)^{n-1}+.......+R\,(1+i\,)^2+R\,(1+i\,)$$

$$V_n'=R\,(1+i\,)+R\,(1+i\,)^2+.......+R\,(1+i\,)^{n-1}+R\,(1+i\,)^n$$

المجموع الأخير يمثل متوالية هندسية متزايدة حدها الأول $R(1+i)$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها (n) هو:

$$V_n'=R\,(1+i\,)\frac{(1+i\,)^n-1}{(1+i\,)-1}$$

$$V_n'=R\,\frac{(1+i\,)^n-1}{i}(1+i\,)$$

تمثل هذه العلاقة جملة الدفعات الفورية السنوية.

• **تعطى القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية V_P' بالعلاقة:**

$$V_P'=R\,\frac{1-(1+i\,)^{-n}}{i}(1+i\,)$$

مثـــال:

أوجد القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 2000 ل.س تدفع في أول كل سنة لمدة خمس عشرة عاماً، إذا كانت الفائدة المركبة تحسب بمعدل % 6 سنوياً.

الحـــل: نظراً لأن مبلغ الدفعة يسدد في أول كل سنة فتعتبر دفعات سنوية فورية.

$$R=2000,\quad i=0.06,\quad n=15$$

$$V_p' = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

$$= 2000\,\frac{1-(1+0.06)^{-15}}{0.06}(1+0.06) = 20589.96 \quad S.p$$

مثـــال:

أدخر شخص في أحد المـــصارف (15) دفعـــة ســـنوية فوريـــة قيمـــة كـــل منها (10000) ل.س بفائدة 5 % سنوياً، بهدف تكوين رأسمال. أوجد جملة الدفعات.

الحـــل:

$$R = 10000, \quad i = 0.05, \quad n = 15$$

$$V_n' = R\,\frac{(1+i)^{n}-1}{i}(1+i)$$

$$= 10000\,\frac{(1+0.05)^{-15}-1}{0.05}(1+0.05) = 226574.9 \quad S.p$$

1-6- جملة الدفعات الجزئية الفورية $V_{m,n}^{*}$:

تحسب **جملة الدفعات الجزئية الفورية** من العلاقة الآتية:

$$V_{m,n}^{*} = R\,(1+j_m)\frac{(1+j_m)^{m\cdot n}-1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

كما تحسب **القيمة الحالية لدفعات جزئية فورية** من العلاقة:

$$V_0^{*,m,n} = R\,(1+j_m)\frac{1-(1+j_m)^{-m\cdot n}}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

§2. الدفعات الدائمة:

إذا استثمر مبلغ ما لمدى الحياة، ولم تترك فائدته لتتراكم عليـــه، أي أن المبلـــغ المستثمر ظل ثابتاً وسحبت فائدته في نهاية كل وحدة زمنية فيكون مقدار الفائدة ثابتـــاً ويستمر دفعها على هذا الشكل لمدى الحياة، ويطلق على هذه الفائـــدة اسـم الدفعـــة الدائمة.

أمثـلة على الدفعات الدائمة:

ـ إيراد العقارات والأراضي.

ـ فوائد السندات.

ـ فوائد القروض طويلة الأجل.

لا يمكن حساب جملة الدفعات الدائمة لأن عددها غير محـدد ومـدة سـدادها بأنواعها المختلفة ليس لها نهاية، الأمر الذي يستحيل معه حساب جملة هـذه الـدفعات ويمكن التحقق من هذه النتيجة رياضياً كما يلي:

لنرمز بجملة الدفعات الدائمة بالرمز $V_{n,\infty}$:

$$V_{n,\infty} = \ell im_{n\to\infty} S_n = \ell im_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^\infty - 1}{i} = \infty$$

1-2 ـ القيمة الحالية للدفعات الدائمة:

1- القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية V_∞

$$V_\infty = \ell im_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

نلاحظ أن:

$$(1+i)^{-\infty} = \frac{1}{(1+i)^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية يساوي: $V_\infty = \frac{R}{i}$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لاستثمار عائده الـسنوي 3000 ل.س، وسـعر الفائـدة المركبة السائدة هو % 12 سنوياً.

الحــل:

$$V_\infty = \frac{R}{i} = \frac{3000}{0.12} = 25000 \quad S.P$$

2- القيمة الحالية لدفعات دائمة فورية V'_{∞}

$$= R(1+i)\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

$$V'_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة الفورية يساوي:

$$V'_{\infty} = \frac{R(1+i)}{i}$$

مثـــال: احسب ثمن شراء قطعة أرض زراعية إيجارها الـسنوي 1000 ل.س علـى أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً وذلك إذا كان أول دفعة للإيجار تستحق حالاً.

الحـــل: هنا الدفعة دائمة فورية:

$$V'_{\infty} = \frac{R(1+i)}{i} = 1000\left(\frac{1}{0.04}+1\right) = 26000\ S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1 ــ اشترى شخص شقة سكنية واتفق على دفع الثمن كالآتي:

- 20000 ل.س فورياً.
- 1000 ل.س في آخر كل سنة ولمدة 10 سنوات.

والمطلوب: ما ثمن الشقة السكنية نقداً إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 5 سنوياً؟

الجواب: $V_p = 27721.735$ ل.س

2ــ اقترضت إحدى الشركات مبلغ 500000 ل.س، وتعهدت بسداده على عشرين دفعة سنوية فما قيمة كل دفعة إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 5 سنوياً؟

3ــ دفعة سنوية عادية مدتها خمس سنوات، وجد أن جملتها على أساس معدل فائدة مركبة % 2 سنوياً تساوي 5204 ل.س ما القيمة الحالية للدفعات في أول السنوات الخمس؟

الجواب: $V_p = 4713.46$ ل.س

4- دفعات عادية سنوية مبلغها 100 ل.س، وجد أن قيمتها الحالية على أساس معدل فائدة مركبة % 2.5 سنوياً هي 875.210 ل.س. ما مدة الدفعات ؟

الجواب: $n = 10$

5ــ يودع شخص في مصرف في آخر كانون الأول من كل عام (500) ل.س ابتداء من آخر كانون الأول من عام 1990، وبعد إيداع الدفعة مباشرة في سنة معينة وجد أن رصيده 3661.500 ل.س. أوجد تلك السنة المعينة إذا كان معدل الفائدة المركبة % 15سنوياً.

الجواب: $n = 7$

6- اشترت إحدى الشركات مصنعاً بمبلغ 400000 ل.س، واتفقت مع البائع على أن تدفع له من الثمن 88 216.8 ل.س فوراً، وتسدد الباقي على (20) دفعة متساوية

تدفع كل منها في آخر كل نصف سنة بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية % 2.5. وبعد أن قامت الشركة بدفع العشرة أقساط الأولى مباشرة اتفقت مع البائع على دفع الأقساط الباقية عليها مرة واحدة. **والمطلوب:** اوجد قيمة المبلغ الواجب على الشركة دفعه عندئذ؟

الجواب: 17 541.28 ل.س.

7ـ أودع شخص في أحد المصارف عدداً من الدفعات السنوية المتساوية قيمة كل منها (500) ل.س في أول كل سنة بفائدة مركبة % 3 سنوياً، فحصل في نهاية المدة على مبلغ 9568.44 ل.س. **والمطلوب:** احسب عدد هذه الدفعات ؟

8ـ ما المبلغ الواجب إيداعه في بداية كل سنة للحصول على مبلغ قدره 6500 ل.س ولمدة ثلاث سنوات على أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً ؟

9ـ يرغب شخص بتكوين رأسمال قدره 1000000 ل.س ، بإيداع 60 دفعة شهرية، على أساس فائدة مركبة معدلها % 9 سنوياً والفائدة تضاف شهرياً. **والمطلوب** ما مقدار القسط الشهري الواجب إيداعه؟

الجواب: $R = 13159.66$

10 ـ يرغب شخص ببيع سيارته نقداً بمبلغ 2400 وحدة نقدية، وفي حالة البيع بالتقسيط يتم السداد على دفعات شهرية عادية مدتها (24) شهراً، فإذا كان معدل الفائدة الشهرية % 1 احسب قيمة القسط الشهري الذي سيقبضه بائع السيارة. وما مقدار الفائدة المستحقة.

الجواب: $I = 311.52$ $\quad R = 112.98,$

11ـ طلب أحد المتبرعين من مصرف أن يدفع 1000 ل.س كل ستة شهور لجمعية خيرية مدى الحياة. احسب ما يجب أن يدفعه المتبرع للمصرف مقدماً، علماً أن معدل الفائدة المركبة السنوية % 4 والفائدة تضاف مرتين في السنة في الحالتين الآتيتين:

1 ـ إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في أول كل ستة شهور.

2 ـ إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في آخر كل ستة شهور.

الجواب: $V_{\infty} = 50000 \quad , \quad V'_{\infty} = 51000$

12ـ شخص كان يودع مبلغ 3000 ل.س في آخر كل سنة لمدة خمس سنوات في مصرف ما، ثم قام بإيداع ضعف هذا المبلغ لمدة عشر سنوات التالية، احسب جملة المستحق له في نهاية 20 سنة، إذا كان معدل الفائدة المركبة % 12سنوياً.

الجواب: 289879.39

الفصل الرابع
استهلاك القروض

1.§ . مفهوم استهلاك القروض

يقصد باستهلاك القروض سدادها مع فوائدها، ويتم استهلاك (سداد) القروض طويلة الأجل بطرق مختلفة يتفق عليها بين الدائن والمدين ومنها:

1ــ سداد القرض مع فوائدة دفعة واحدة في نهاية مدة الاقتراض، حيث تحسب قيمة القرض في نهاية مدة الاقتراض من العلاقة: $C_n = C(1+i)^n$.

2ــ سداد الفوائد الدورية بشكل دوري أولاً وسداد أصل القرض في نهاية مدة الاقتراض مضافاً إليها الفائدة الدورية الأخيرة.

3ــ سداد القرض بدفعات دورية غير متساوية، حيث كل دفعة تتكون من قسمين. القسط المتساوي المقتطع من أصل القرض + الفائدة المترتبة على المتبقي من القرض.

4ــ سداد القرض وفوائده على دفعات دورية متساوية (سنوية، شهرية،....الخ)

وفي هذا الفصل نتناول بالدراسة مايلي:

1ـ1ــ استهلاك القرض بدفعات سنوية غير متساوية:

بموجب هذه الطريقة يقوم المدين بتسديد أصل القرض V على أقساط متساوية من الأصل فقط مع سداد الفوائد المستحقة على الأرصدة المتبقية المتناقصة بصفة دورية، وتجدر الإشارة إلى أنه طالما أصل القرض يتناقص بمبلغ متساوي بشكل دوري فإن الفائدة المحتسبة على الرصيد المتبقي في القرض سوف تتناقص هي الأخرى بقيمة ثابتة مما يجعلها تأخذ شكل متوالية عددية يمكن إيجاد مجموعها بسهولة.

يحسب مقدار القسط المتساوي المقتطع من أصل القرض من العلاقة:

$$R = \frac{V}{n}$$

V ــ أصل القرض (المبلغ الأصلي للقرض).

n ــ عدد الأقساط السنوية.

بفرض إن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الأولى (الدفعة السنوية الأولــى) k_1 هو:

$$k_1 = R + Vi$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الثانية (الدفعة السنوية الثانية) k_2 هو:

$$k_2 = R + (V - R)i$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الثالثة (الدفعة السنوية الثالثة) k_3 هو:

$$k_3 = R + (V - 2R)i$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة n (الدفعة السنوية رقم n) k_n هو:

$$k_n = R + (V - (n-1)R)i$$

مثـــال:

اقترض شخص مبلغ 1200000 ل.س من أحد المصارف **بفائدة مركبة معـــدلها** 9 % سنوياً، على أن يسدد القرض والفوائد بدفعات دورية سنوية غير متساوية خلال ست سنوات، **والمطلوب:**

1 ــ احسب قيمة القسط المتساوي الثابت من القرض.

2 ــ تشكيل جدول استهلاك القرض.

الحــل: $V = 1200000, \quad i = 0.09 \quad , \ n = 6$

قيمة القسط المتساوي الثابت من القرض R هي:

$$R = \frac{1200000}{6} = 200000 \quad S.p$$

المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الأولى (الدفعة السنوية الأولى) k_1 يساوي إلى: القسط المتساوي من أصل القرض + الفائدة المستحقة على كامل قيمـــة القــرض خلال السنة الأولى:

فائدة السنة الأولى I_1: $\quad I_1 = 1200000(0.09) = 108000 \ S.p$

ومنه مقدار الدفعة الأولى: $\quad k_1 = 200000 + 108000 = 308000 \quad S.p$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الثانية هو:

$$1200000 - 200000 = 1000000 \quad S.p$$

وتكون فائدة السنة الثانية I_2: $I_2 = 1000000(0.09) = 90000 \ S.p$

مقدار الدفعة السنوية الثانية (القسط الثاني) k_2 وتساوي إلى: القسط المتساوي الثابت من أصل القرض + فائدة السنة الثانية على الرصيد المتبقي من قيمة القرض في بداية السنة الثانية:

$$k_2 = 200000 + 90000 = 290000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الثالثة:

$$1000000 - 200000 = 800000 \ S.p$$

فائدة السنة الثالثة I_3: $I_3 = 800000(0.09) = 72000 \ S.p$

قيمة الدفعة السنوية الثالثة (القسط الثالث) k_3:

$$k_3 = 200000 + 72000 = 2720000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الرابعة:

$$800000 - 200000 = 600000 \ S.p$$

فائدة السنة الرابعة I_4:

$$I_4 = 600000.(0.09) = 54000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية الرابعة (القسط الرابع) k_4:

$$k_4 = 200000 + 54000 = 254000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الخامسة:

$$600000 - 200000 = 400000 \ S.p$$

فائدة السنة الخامسة I_5:

$$I_5 = 400000.(0.09) = 36000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية الخامسة (القسط الخامس) k_5:

$$k_5 = 200000 + 36000 = 236000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة السادسة:

$$400000 - 200000 = 200000 \ S.p$$

فائدة السنة السادسة I_6:

$$I_6 = 200000(0.09) = 18000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية السادسة (القسط السادس) k_6 :

$$k_6 = 200000 + 18000 = 218000 \ S.p$$

جدول الاستهلاك

السنة	رصيد القرض في بداية السنة	القسط المتساوي الثابت من أصل القرض	الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض	قيمة الدفعة السنوية	رصيد القرض في نهاية السنة
الأولى	1200000	200000	108000	308000	1000000
الثانية	1000000	200000	90000	290000	800000
الثالثة	800000	200000	72000	272000	600000
الرابعة	600000	200000	54000	254000	400000
الخامسة	400000	200000	36000	236000	200000
السادسة	200000	200000	18000	218000	0
المجموع		1200000	378000	1578000	

لاحظ أن الفوائد تمثل متوالية عددية متناقصة حدها الأول 108000 وأساسها 18000 وحدها الأخير 18000 وعدد حدودها (6) ومجموعها 378000.

وإجمالي الدفعات المسددة = مجموع الأقساط المتساوية من أصل القرض + مجموع الفوائد المستحقة.

1-2- استهلاك القرض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً:

في ضوء هذه الطريقة يتم سداد القرض وفوائده على أقساط متساوية تدفع بشكل دوري في نهاية كل دورة زمنية خلال مدة القرض، وأن كل قسط دوري مسدد في نهاية كل دورة يشتمل على جزئين هما:

الجزء الأول: الجزء المدفوع من القرض (قيمة الاستهلاك من أصل القرض).

الجزء الثاني: الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض عن فترة زمنية معينة.

3-1- معادلة حساب القسط المتساوي:

لنفرض أن لدينا قرضاً قيمته V ل.س يراد استهلاكه وفوائده على أقساط متساوية قيمة كل منها R تسدد في نهاية كل فترة زمنية لمدة (n) من الفترات الزمنية على أساس معدل فائدة مركبة i، إن الأقساط تمثل دفعات متساوية، وأن القرض في بداية المدة يمثل القيمة الحالية لهذه الدفعات V_p.

$$\text{القسط المتساوي} = \text{أصل القرض} \times \frac{1}{V_p}$$

مثـــال:

اقترض شخص مبلغ 500 ل.س من أحد المصارف بمعدل فائدة مركبة شهرية 1 % واتفق على سداد القرض على دفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً على (6) دفعات شهرية متساوية.

والمطلوب: 1 ــ احسب قيمة القسط (الدفعة) الشهري.

2 ــ شكل جدول استهلاك القرض.

الحـــل: لدينا: $V = V_p = 500 \;\; S.p$

وجدنا سابقاً أن قيمة الدفعة الشهرية R هي:

$$V_p = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \;\Rightarrow\; R = V_p\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

حيث: i معدل الفائدة الشهرية، n عدد الدفعات الشهرية:

$$R = 500\frac{0.01}{1-(1.01)^{-6}} = 86.27 \;\; S.p$$

الدفعة الشهرية المتساوية تتكون كما ذكرنا من جزئين الأول وهو المستهلك من القرض ونرمز له بـــ C والجزء الثاني وهو الفائدة ونرمز له بالرمز I، أي أن:

$$R = C + I$$

إن الدفعة الشهرية الأولى تستحق بعد فترة واحدة (شهر واحد) بعـد الحـصول على القرض في هذا الوقت يحق للمصرف فائدة I_1 مقدارها:

$$I_1 = 500(0.05) = 5 \;\; S.p$$

مقدار الاستهلاك الأول من القرض C_1 يساوي إلى:

$$C_1 = R - I_1 = 86.27 - 5 = 81.27 \quad S.p$$

ويكون **الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الأول في بداية الشهر الثاني:**

$$500 - 81.27 = 418.73 \quad \text{S.p}$$

فائدة الفترة الثانية (الشهر الثاني) I_2:

$$I_2 = 418.73(0.01) = 4.19 \quad \text{S.p}$$

مقدار الاستهلاك الثاني C_2:

$$C_2 = 86.27 - 4.19 = 82.08 \quad \text{S.p}$$

الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الثاني في بداية الشهر الثالث:

$$418.73 - 82.08 = 336.65 \quad S.p$$

فائدة الفترة الثالثة (الشهر الثالث) I_3:

$$I_3 = 336.65(0.01) = 3.37 \quad S.p$$

مقدار الاستهلاك الثالث C_3:

$$C_3 = 86.27 - 3.37 = 82.90 \quad S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الثالث في بداية الشهر الرابع:

$$336.65 - 82.90 = 353.75 \quad S.p$$

ويستمر هذا العمل حتى نهاية الشهر السادس، حيث تصل قيمة القرض غير المسدد إلى الصفر أي أن القرض سدد.

جدول الاستهلاك

الشهر	قيمة القرض في بداية الشهر	القسط الشهري المتساوي	الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض	الاستهلاك الشهري من القرض	قيمة القرض في نهاية الشهر
الأول	500	86.27	5	81.27	418.73
الثاني	418.73	86.27	4.19	82.08	336.65
الثالث	336.65	86.27	3.37	82.90	253.75
الرابع	253.73	86.27	2.54	83.73	170.02
الخامس	170.02	86.27	1.70	84.57	85.45
السادس	85.45	86.30	0.85	85.45	0
المجموع		517.65	17.65	500	

لاحظ أن القسط الشهري السادس ازداد بمقدار 0.03 عن مقدار القسط الشهري المتساوي ويعود سبب الزيادة إلى التدوير في الأرقام، وفي معظم الحالات يكون القسط الأخير اكبر بمقدار ضئيل لكي تصبح قيمة القرض في نهاية المدة مساوية للصفر، للدلالة على أن القرض قد سدد.

4-1- العلاقة بين الاستهلاكات:

إن الاستهلاك الأول والثاني يرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة الآتية:

$$C_2 = C_1(1+i)$$

والاستهلاك الثالث C_3 يرتبط مع الاستهلاك الأول C_1 بالعلاقة:

$$C_3 = C_1(1+i)^2$$

وهكذا يمكن حساب قيمة استهلاك أي قرض بإحدى العلاقات الآتية:

$$C_k = C_{k-1}(1+i)$$

أو:

$$C_k = C_1(1+i)^{k-1}$$

أو:

$$C_k = C_r(1+i)^{k-r}$$

وبمعرفة استهلاكيين متتالين يمكن معرفة معدل الفائدة.

يلاحظ أن مجموع الاستهلاكات يساوي قيمة القرض الأصلي أي أن:

قيمة القرض $C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n = V$

يمكن حساب قيمة الرصيد المتبقي من القرض في نهاية الفترة ولنرمز له بـ K ويحسب بالعلاقة التالية:

قيمة الرصيد المتبقي من القرض في نهاية الفترة:

$$K = V - (C_1 + C_2 + ...C_k)$$

إن مجموع الفوائد المستحقة على القرض خلال مدة القرض يساوي إلى مجموع الأقساط المتساوية مطروحاً منه أصل القرض أي أن:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = nR - V$$

إن معدل الفائدة يعطى بالعلاقة التالية إذا تم معرفة استهلاكين متتالين:

$$C_2 = C_1(1+i) \Rightarrow 1+i = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow i = \frac{C_2}{C_1} - 1$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1 ــ اقترض شخص مبلغ 5000 ل.س من أحد المصارف على أن يسدد القرض على خمسة أقساط متساوية من الأصل فقط، يسدد كل قسط مع فائدة الرصيد في آخر كل سنة، فإذا كان البنك يستخدم معدل فائدة مركبة 10 % سنوياً. **المطلوب:**

1 ــ إيجاد المبلغ الواجب سداده في نهاية كل سنة.

2 ــ تصوير جدول استهلاك القرض.

2ــ اقترض خالد من أحد المصارف مبلغ 1000 ل.س بمعدل فائدة مركبة 10 % سنوياً لمدة 5 سنوات. **والمطلوب:** تصوير جدول استهلاك القرض إذا تم استهلاك القرض:

1 ــ بأقساط سنوية متساوية من الأصل فقط.

2 ــ بأقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً.

3ــ اقترض شخص من أحد المصارف مبلغ 1000 ل.س بمعدل فائدة مركبة فصلية 2.5 % على الرصيد غير المسدد، على أن يسدد القرض على (4) أقساط فصلية متساوية من الأصل والفوائد معاً. **والمطلوب:** تصوير جدول استهلاك القرض.

4 ــ اقترض مزارع من مصرف مبلغاً من المال لمدة (4) سنوات وتعهد بسداده بطريقة القسط المتساوي من الأصل والفوائد معاً. **والمطلوب:**

احسب قيمة القرض. واحسب قيمة القسط المتساوي R الذي يدفعه المدين في آخر كل سنة، إذا علمت أن الاستهلاك السنوي الثاني والأول هما على الترتيب 481.988 , 450.456 ل.س.

5 ــ اقترض شخص مبلغ ما من المصرف واتفق على أن يسدده على (5) أقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً وبالرجوع إلى جدول الاستهلاك لهذا القرض وجد أن الاستهلاك الثاني 188.04 ل.س، والاستهلاك الرابع 211.282 ل.س . **والمطلوب:**

1ـ احسب قيمة القرض.

2 ـ احسب القسط السنوي.

6ـ اقترض شخص مبلغ من أحد المصارف على أن يسدده على خمسة أقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً بفائدة مركبة معدلها % 6 سنوياً، وبالرجوع إلى جدول الاستهلاك وجد أن الفرق بين الاستهلاكيين الثاني والثالث 22.56 ل.س. **والمطلوب:**

1 ـ احسب قيمة القرض.

2 ـ القسط السنوي.

3 ـ مجموع الفوائد التي تحملها المدين إلى أن تم سداد الدين.

الفصل الخامس

البرمجة الخطية

Programmation Linear

تعد البرمجة الخطية من العلوم الحديثة التي ظهرت إلى الواقع العملي في النصف الأول من القرن العشرين في البلدان المتقدمة صناعياً، وأن الهدف الأساسي وراء استخدام البرمجة هو ترشيد استخدام الموارد المتاحة بما يضمن تحقيق أعلى فائدة ممكنة، إذ إن وجود الموارد الاقتصادية والموارد البشرية بكميات محدودة تحتم على واضعي الخطط الاقتصادية والاجتماعية الاستخدام الأمثل لها وذلك بهدف تحقيق أفضل العوائد الاقتصادية الممكنة والناتجة عن استثمار هذه الموارد.

فالبرمجة الخطية تعني استخدام نماذج رياضية تهتم بالتوزيع الفعّال لتلك الموارد المحدودة على أنشطة معروفة بقصد الوصول إلى أفضل مردود ممكن. وتعرف اقتصادياً مسائل البرمجة الخطية بأنها مسائل البحث عن إيجاد الحل الأمثل لمشكلات تخصيص الموارد المحدودة بين الاستخدامات البديلة بحيث ينتج عن هذا التوزيع الحد الأقصى من الكفاءة.

§1 – فروض البرمجة الخطية:

تستند تطبيق البرمجة الخطية إلى مجموعة من الفروض أهمها:

- **الخطية Linearity** : يفترض أن تكون العلاقة في دالة الهدف وفي المتباينات علاقة خطية، أي عند حدوث تغيير في قيمة أحدهما تسبب تغيرات متناسبة وثابتة في قيمة تابع الهدف.
- **الإضافة Additionally** : يقصد بذلك أن كميات المواد الأولية الداخلة في الإنتاج وكميات الإنتاج قابلة للإضافة ويقضي بعدم التداخل بين الأنشطة الإنتاجية.
- **المحدودية Determinacy** : تعني محدودية الموارد والأنشطة حيث لا يوجد عدد لا نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة.
- **العلاقات المحددة Determinated relations** : وتقتضي هذه الفرضية أن تكون جميع العلاقات الرياضية في نموذج البرنامج الخطي معروفة وثابتة.

- **حجم النشاط غير السالب Non Negativity** : وتقتضي هذه الفرضية أن الكميات السالبة لحجم النشاط غير ممكنة.

§- 2 - بناء وصياغة *النموذج الرياضي* للمشكلة:

يتم ذلك بعد تحديد وبيان العلاقات المتداخلة بين عوامل المشكلة، وبعد تحديد التعاريف اللازمة للنموذج، حيث يتم تكوين النموذج الرياضي الذي هو بمثابة التعبير الكمي لملابسات وتداخلات المشكلة، ويتكون عادةً من عدد من المعادلات والعلاقات الرياضية التي تعبر عن شروط المشكلة والهدف المطلوب تحقيقه من حلها. وكلما كانت المعادلات والعلاقات الرياضية معبرة بشكل شامل عن المشكلة كان تحقيق الهدف المطلوب ممكناً أكثر.

ويصاغ نموذج البرمجة الخطية من ثلاثة عناصر أساسية وهي:

- **دالة الهدف:** أي الهدف الذي نرغب الوصول إليه ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عنه كمياً كأن يكون تحقيق أكبر ما يمكن من الربح أو إنفاق أقل ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد.
- **قيود توازن المسألة:** وهي عبارة عن متباينات أو معادلات تخضع لها متغيرات القرار.
- **قيود عدم السلبية:** وهي عدد من متغيرات القرار الذي يجب تحديد قيمتها للوصول إلى الهدف المرغوب والتي لا يمكن أن تكون سالبة.

§-3 - النموذج الرياضي العام لمسائل البرمجة الخطية:

يمكن كتابة النموذج الرياضي العام للبرنامج الخطي على النحو التالي:

حالة (أ) : تعظيم الأرباح:

$$MaxZ = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\le b_2 \qquad (2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0 \ , \ ..., \ x_n \ge 0 \qquad (3)$$

حالة (ب): تدنية التكاليف:

$$MinZ = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \qquad (2)$$
$$x_1 \geq 0 \;, x_2 \geq 0 \;,\; ..., \;\; x_n \geq 0 \qquad (3)$$

نميز في النموذج أعلاه:

(1) دالة الهدف (Objective Function) : وهو تابع خطي ويعبر عنه بدلالة متغيرات القرار $x_n ,...., x_3 , x_2 , x_1$ ويكون المطلوب جعله أعظمياً عندما تكون الغاية تعظيم الأرباح (حالة أ)، أو جعله أصغرياً عندما يكون الهدف تخفيض التكاليف (حالة ب).

(2) الشروط الخطية (Constraints) : والمعطاة على شكل متراجحات أو معادلات خطية وتسمى بشروط توازن المسألة، وتكون بصورة $\leq$ في حالة التعظيم لدالة الهدف، وبصورة $\geq$ في حالة التدنية لدالة الهدف.

(3) قيود عدم السلبية (Non-Negativity Constraints) لمتغيرات القرار:

$$x_n \geq 0 ,...,\; x_3 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_1 \geq 0$$

حيث هذه المتغيرات تمثل كميات منتجة أو كميات مواد أولية مستخدمة في الإنتاج أو كميات يراد نقلها من مكان إلى آخر. ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي:

$$Max \; or \; Min \, Z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \qquad (1)$$

Subject to

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b_i \qquad (i = 1,2,....,m), (j = 1,2,...,n) \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,....,n) \qquad (3)$$

حيث إن: Z تمثل دالة الهدف. x_j متغيرات القرار.

a_{ij} , b_i , p_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة.

a_{ij} الكمية المخصصة من المورد i لكل وحدة واحدة من النشاط j .

b_i الكميات المحدودة من الموارد ، (وهي كميات موجبة أو غير سالبة على الأقل).

p_j تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لكل وحدة واحدة من النشاط j .

§4-4 –تعاريف ومصطلحات خاصة بالبرمجة الخطية:

1 – الحل الأساسي (Basic Solution):

من m معادلة خطية تحوي n متغيرقرار (حيث $n \geq m$) نستطيع أن نحصل على حل أساسي لهذه المعادلات وهو ذلك الحل الذي يكون فيه قيمة (m) من المتغيرات لا تساوي الصفر حيث تعرف بالمتغيرات الأساسية و $(n-m)$ من متغيرات القرار تساوي الصفر، ويطلق على هذه المتغيرات اسم متغيرات غير الأساسية. وبذلك يكون عدد الحلول الأساسية التي يمكن الحصول عليها هو C_n^mحلاً.

2 – الحل الممكن (Feasible Solution):

يحمل صفة الحل الأساسي،و هي القيم التي تأخذها متغيرات القرار x_j والتي تحقق جميع القيود الواردة في نموذج البرمجة الخطية.

3 – الحل الأفضل:

يحمل صفة الحل الأساسي وهو الحل الذي يحقق كافة القيود الواردة في مشكلة البرمجة الخطية وهو بالنسبة لمتخذ القرار أفضل من الحل الممكن.

4 – الحل الأمثل (Optimal Solution):

يحمل صفة الحل الأساسي وهو الحل الذي يسعى لتحقيقه متخذاً القرار لأنه يحقق كافة قيود البرنامج الخطي وأفضل من الحل الأفضل.

§5-5 – طرائق حل مشاكل البرمجة الخطية:

سنتناول في هذا الفصل أبرز الطرق الرياضية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية وهي:

1 – الحل البياني (Graphic Solution).

2 – الحل الجبري (Algebric Solution).

3 – سمبلكس (Simplex).

المبحث الأول

الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية
Graphic Solution

§1-1 -كيفية تحديد منطقة حلول متراجحة خطية بمتغيرين:

لإيجاد منطقة حلول المتراجحة $ax_1 + bx_2 + c < > 0$ نتبع الخطوات التالية:

1-1- نرسم مستقيم التابع $ax_1 + bx_2 + c = 0$ على جملة المحاور الإحداثية $X_1 0 X_2$.

هذا المستقيم المرسوم يقسم المستوي إلى ثلاث مناطق مختلفة (واحدة مقبولة وأخرى مرفوضة ومجموعة نقاط المستقيم المحققة للتابع $ax_1 + bx_2 + c = 0$).

أما إذا كانت المتراجحة من أحد الشكلين $ax_1 + bx_2 + c \leq \geq 0$ فالمستقيم يقسم المستوي إلى منطقتين (واحدة مقبولة وأخرى مرفوضة تدخل في إحداها نقاط المستقيم $ax_1 + bx_2 + c = 0$).

2-1- نحدد مناطق القبول والرفض بالنسبة للمحاور الإحداثية للمتراجحة المدروسة بإحدى الطريقتين التاليتين:

أ- طريقة النقطة التحليلية:

تتلخص هذه الطريقة في اختيار نقطة فرضية (ندعوها تحليلية لأنها ستحلل لنا أي نصف مستوي سيرفض وأي نصف مستوي سيقبل) تقع على يمين أو يسار المستقيم المرسوم شريطة أن لا تقع على المستقيم لأنها تحقق معادلة المستقيم ويفضل للسهولة أن تكون المركز $(0,0)$ إذا لم يمر المستقيم بها، وتعويض إحداثيات النقطة المختارة في المتراجحة الأصلية فإن تحققت المتراجحة فهذه النقطة وجميع النقاط التي تقع باتجاهها تقع في منطقة الحل التي تظلل وإن لم تحقق المتراجحة فمنطقة الحل هي المنطقة الأخرى التي لا تقع فيها النقطة، ثم نظلل المنطقة لتشير إلى منطقة الحل.

ب- طريقة المتجه:

إن المستقيم $ax_1 + bx_2 = 0$ يمر بالمركز $(0,0)$ وأن النقطة (a,b) تقع في الجهة الموجبة من المتراجحة لأن $a.a + b.b = a^2 + b^2 > 0$ لذلك إذا رسمنا الشعاع المتجه من مركز الإحداثيات نحو النقطة (a,b) فسيدل دائماً على الجهة الموجبة

للمتراجحة بغض النظر عن نوعها وثوابتها. وبذلك حسب جهة المتراجحة المحددة بنص السؤال نحدد جهة قبول المتراجحة فنظللها.

مثـــال:

أوجد منطقة حلول المتراجحة التالية : $x_1 - x_2 + 6 < 0$

الحـــل:

١ - **1- نرسم أولاً مستقيم الدالة** $x_1 - x_2 + 6 = 0$ **نجد :**

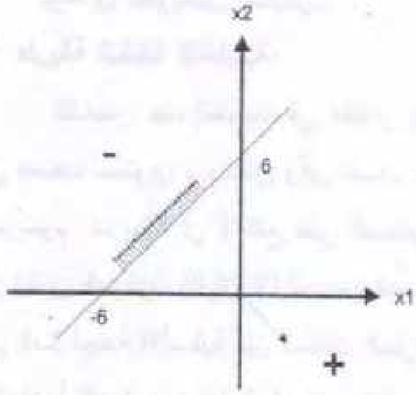
$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \qquad (x, y) = (0, 6)$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -6 \qquad (x, y) = (-6, 0)$$

٢ - 2- نحدد منطقة قبول المتراجحة:

- طريقة النقطة التحليلية: بما أن المستقيم لا يمر من مبدأ الإحداثيات نختار النقطة التحليلية $(0,0)$ والتي تقع على يمين المستقيم $x_1 - x_2 + 6 = 0$ ونعوضها في المتراجحة فنجد أن $6 < 0$ غير ممكن، فالنقطة $(0,0)$ غير محققة للمتراجحة وبالتالي منطقة القبول تقع في الجهة اليسرى للمستقيم فنظللها .

- طريقة الشعاع المتجه: نحدد النقطة $(a,b) = (1,-1)$ على مستوي الإحداثيات ونرسم الشعاع المتجه من مبدأ الإحداثيات $(0,0)$ باتجاه النقطة $(1,-1)$ ليشير إلى الاتجاه الموجب للمتراجحة، وبما أن المتراجحة المعطاة في نص السؤال أصغر من الصفر إذن نظلل المنطقة المخالفة لجهة الشعاع لتشير إلى جهة تحقق المتراجحة.



§-2-كيفية تحديد منطقة حلول جملة متراجحات خطية بمتغيرين:

عندما يكون لدينا جملة من المتراجحات الخطية بمتغيرين x_2, x_1 ، ويطلب إيجاد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات معاً، نحدد وعلى نفس مستوي الإحداثيات $X_1 0 X_2$ منطقة قبول كل متراجحة على حده ومن ثم نظلل المنطقة التي تمثل الحل المشترك لجملة المتراجحات معاً.

مثـــال: أوجد منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات التالية:

$$2x_1 + 2x_2 \le 12 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8 \qquad (2)$$
$$4x_1 \le 16 \qquad (3)$$
$$x_1 \ge 0 \qquad (4)$$
$$x_2 \ge 0 \qquad (5)$$

الحـــل: نحول المتراجحات إلى مساويات:

$$2x_1 + 2x_2 = 12 \qquad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 = 8 \qquad (2)$$
$$4x_1 = 16 \qquad (3)$$
$$x_1 = 0 \qquad (4)$$
$$x_2 = 0 \qquad (5)$$

ثم نرسم المستقيم الأول:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \qquad (0,6)$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6 \qquad (6,0)$$

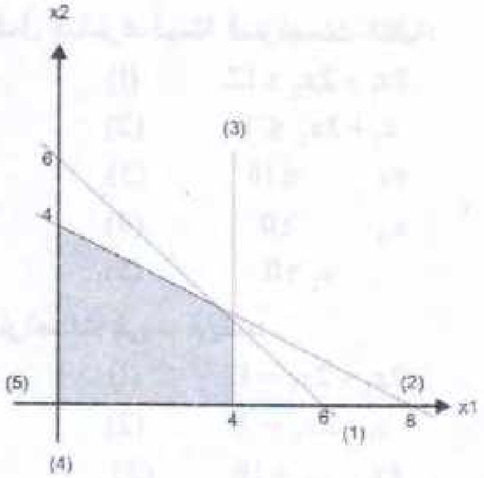
نحدد النقطتين على المستوي ونصل بينهما، ثم نحدد منطقة الحـــل للمتراجحـــة الأولى وكذلك نرسم المستقيم الثاني فنجد:

$$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 \qquad (0,4)$$
$$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \qquad (8,0)$$

نحدد النقطتين على المستوي ونصل بينهما، ثم نحدد منطقة الحـــل للمتراجحـــة الثانية، أما المستقيم الثالث فهو مستقيم يوازي $0X_2$ ويمر بالنقطة (4,0) ويلاحـــظ أن مبدأ الإحداثيات (0,0) يحقق المتراجحات الأولى والثانية والثالثة.

كذلك المستقيم الرابع فهو ينطبق على المحور OX_2 والنقطة المختـــارة مـــثلاً (1,0) تحقق المتراجحة الرابعة.

أما المستقيم الخامس فهو ينطبق على المحور OX_1 والنقطـــة المختـــارة مـــثلاً (0,1) تحقق المتراجحة الخامسة.



حيث تم تخطيط منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات.

§3 – خطوات الحل البياني لمسألة برمجة خطية بمتغيرين:

نكتب البرنامج الخطي بمتغيرين:

حالة (أ) : تعظيم الأرباح:

$$MaxZ = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \quad (2)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m$$

$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0 \quad (3)$$

حالة (ب): تدنية التكاليف:

$$MinZ = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b_2 \quad (2)$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m$$

$$x_1 \ge 0 \ , x_2 \ge 0 \quad (3)$$

تصلح طريقة الحل البياني لحل مسألة برمجة خطية تحوي متغيرين فقط ، وبموجب هذه الطريقة يتم التعبير عن كل متغير بأحد الإحداثيات (الإحداثي الأفقي أو

العمودي) على مستوى المحاور العمودية $X_1 0 X_2$ المعروفة في قواعد الرسم البياني.
ولإيجاد حل المشكلة بطريقة الحل البياني نقوم بالخطوات التالية:

2-1- نحدد منطقة حلول كل من المتراجحات الممثلة لقيود المشكلة (2) وقيود عدم السلبية (3) في مسألة البرمجة الخطية حالة (أ) أو حالة (ب) على المحاور الإحداثية بإحدى الطريقتين المعروفتين (طريقة النقطة التحليلية أو طريقة المتجه) فنحصل على منطقة الحل المشترك لجملة المتراجحات والتي نسميها بمنطقة الحلول المقبولة أو منطقة الإمكانيات.

2-2- نرسم المستقيم الذي يمثل دالة الهدف Z مبتدئين من الوضع الإنتاجي $x_2 = 0, x_1 = 0$ وبالتالي $Z = 0$ أي الطاقة الإنتاجية للنشاطات لم تستغل بعد وبالتالي الربح معدوم، أي نضع $Z = p_1x_1 + p_2x_2 = 0$ ونرسم المستقيم ومن ثم بطريقة الشعاع المتجه نعين الجهة الموجبة لدالة الهدف.

2-3- نعطي لـ Z قيم متغيرة ونرسم المستقيمات فنحصل على حزمة من المستقيمات المتوازية مع المستقيم الأصلي Z (وبفرض $p_1, p_2 > 0$) يكون جهة تزايد Z بالاتجاه الموجب لدالة الهدف.

وهناك بعض الخصائص المميزة للخطوط المستقيمة لدالة الهدف:

- كل نقطة تقع على خط الأرباح أو التكاليف وفي إطار منطقة الحول الممكنة تمثل برنامج مقترح لحل المشكلة.
- جميع النقاط التي تقع على خط مستقيم واحد للأرباح أو للتكاليف تحقق أرقاماً مماثلة تماماً من الأرباح أو التكاليف على الرغم من اختلاف برامج الإنتاج عند هذه النقاط.
- كلما بعد خط الأرباح عن نقطة الأصل كلما زادت الأرباح المحققة عند كل نقطة تقع على هذا الخط بسبب التوسع في برامج الإنتاج،والعكس صحيح كلما قرب خط التكاليف من نقطة الأصل كلما انخفضت التكاليف عند كل نقطة تقع على هذا الخط بسبب تخفيض برامج النشاط.

2-4- آخر نقطة تمر بها حزمة المستقيمات المتوازية مع مستقيم دالة الهدف تمثل الحل الأمثل للمسألة (حالة أ). وعند هذه النقطة يتحقق البرنامج الأمثل لتعظيم الأرباح إلى أعلى حد ممكن.

2-5- أما عندما تكون المسألة (في حالة ب) تخفيض التكلفة أقل ما يمكن، فإننا نرسم مجموعة من المستقيمات المتوازية مع معادلة تابع الهدف ومن أعلى وفي اتجاه نقطة الأصل.

ويستمر الانتقال من خط مستقيم إلى آخر مواز له بقدر ما تسمح به منطقة الحلول الممكنة حتى نقطة تماس الخط المستقيم الأخير الذي يمثل تكلفة الإنتاج مع أدنى نقطة تقع على أطراف منطقة الحلول الممكنة المظللة. وعند هذه النقطة يتحقق البرنامج الأمثل لتخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن.

2-6- هناك طريقة أخرى في إيجاد الحل الأمثل بطريقة الحل البياني ،حيث بعد إيجاد منطقة الحلول المشتركة والمقبولة للمسألة، نحصل على مجموعة من النقاط التي تقع على محيط الشكل المذكور، حيث تسمى بالنقاط الركنية،نوجد إحداثيات كل نقطة ركنية وتعوضها في دالة الهدف ونختار النقطة التي تعطي أكبر قيمة إذا كانت المسألة تعظيم الربح (حالة أ)، ونختار أصغرها إذا كانت المسألة تدنية التكاليف (حالة ب).

مثـال: على حالة تعظيم دالة الهدف:

شركة لإنتاج الأثاث ترغب بالبدء بعدد محدود من المنتجات على أن تتوسع بإضافة خطوط إنتاجية جديدة بعد أن تستقر مبيعات الخطوط الإنتاجية الأولى. لذلك حرص مدير الشركة على أن يكون الإنتاج على درجة مناسبة من الجودة ويحقق أكبر قدر ممكن من الأرباح.وقد وقع الاختيار على الكراسي والطاولات لارتفاع الطلب عليهما. يحتاج إنتاج الكرسي إلى خشب من نوع أول A ، كما يحتاج إلى قضبان من المعدن للهيكل، هذا بالإضافة إلى مستلزمات أخرى مثل الطلاء والغراء وأدوات وخلاف ذلك. ونظراً لأن تكاليف المستلزمات الأخرى منخفضة ولن يكون لها أثر على النموذج، لذلك فإنها لن تؤخذ في الاعتبار. ويتطلب إنتاج الطاولة المواد نفسها بالإضافة إلى خشب من نوع ثاني B .

الجدول التالي يوضح المواد الخام المستخدمة لإنتاج الوحدة من الكراسي والوحدة من الطاولات،كما يوضح الكميات المتاحة من كل نوع من المواد الخام المطلوبة.

	الطاولات	الكراسي	المتاح من المورد أسبوعياً
كمية الخشب من النوع الأول A اللازمة لصنع واحدة من المنتج.	1	1	200
كمية الخشب من النوع الأول B اللازمة لصنع واحدة من المنتج.	2	0	240
كمية المعدن اللازمة لصنع واحدة من المنتج.	1	2	210
الربح في واحدة المنتج	12	5	

هنا تظهر أهمية توزيع الكميات المتاحة والمحدودة على المنتجين، بمعنى أنه يلزم تخصيص الكمية المناسبة من كل مادة خام لإنتاج كل منتج من منتجات الشركة، بهدف تحقيق أكبر ربحية ممكنة.

الحل:

1- إعداد النموذج الرياضي للمشكلة، وذلك باتباع الخطوات التالية:

- **تعريف متغيرات المسألة**: نفرض أن:

x_1 : عدد الوحدات المطلوب إنتاجها أسبوعياً من الكراسي.

x_2 : عدد الوحدات المطلوب إنتاجها أسبوعياً من الطاولات.

- **تحديد دالة الهدف:**

الربح الأسبوعي المحقق من الكراسي $5x_1$ (بافتراض بيع كل ما سيتم إنتاجه من كراسي)، والربح الأسبوعي المحقق من الطاولات $12x_2$ (بافتراض بيع كل ما

سيتم إنتاجه من طاولات) وبما أن الهدف هو تحقيق أكبر ربح ممكن من إنتاج الكراسي والطاولات، إذن يمكننا كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$MaxZ = 5x_1 + 12x_1$$

إن كلمة "ممكن"، تعني أن هناك قيوداً تحد من تحقيق الربح، وهي الكميات المتوافرة أسبوعياً من المواد الخام المطلوبة لإنتاج الكراسي والطاولات.

- **تحديد قيود المسألة:**

– **قيد استخدام المتاح من النوع الأول من الأخشاب** A : متاح منه أسبوعياً 200 متر مربع، المطلوب توزيع هذه الكمية المتاحة على المنتجين. أي أنه يمكن إنتاج أي عدد من الكراسي وأي عدد من الطاولات، شريطة أن لا يزيد إجمالي المطلوب لإنتاج هذه الأعداد من الكراسي والطاولات على 200 متر مربع من المادة خشب A وتوضح هذه العلاقة رياضياً بالقيد التالي:

$$x_1 + x_2 \leq 200 \quad \text{متر مربع}$$

– **قيد استخدام المتاح من النوع الثاني من الأخشاب** B :نلاحظ أن هذا النوع يستخدم لإنتاج الطاولات فقط، إذن فالمطلوب أسبوعياً لإنتاج الكراسي هو $(0.x_1)$، وهذا يعني أن الإنتاج الأسبوعي من الكراسي لن يؤثر على الكمية المطلوبة أسبوعياً من خشب B لإنتاج الطاولات. المفروض هنا أن لا يزيد إجمالي المستخدم من الخشب B عن 240 متراً مربعاً أسبوعياً، وهي الكمية المتاحة أسبوعياً. وبما أن الطاولة الواحدة تحتاج إلى 2 متر مربع من خشب B، إذن إجمالي المطلوب أسبوعياً لإنتاج الطاولات هو $(2x_2)$ وتوضح هذه العلاقة رياضياً بالقيد التالي:

$$2x_2 \leq 240$$

– **قيد استخدام المتاح من القضبان المعدنية:** يمكن إعداده بنفس الطريقة وذلك كما يلي:

$$2x_1 + x_2 \leq 210$$

- **قيود عدم السلبية:** وتكتب كما يلي:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

وبذلك يأخذ النموذج الرياضي لهذه المسألة الشكل التالي:

$$MaxZ = 5x_1 + 12x_2$$

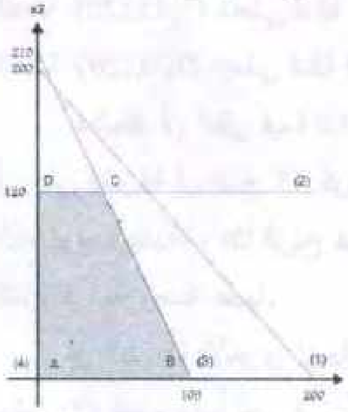
$$\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 &\le 200 \qquad (1)\\
2x_2 &\le 240 \qquad (2)\\
2x_1 + \quad x_2 &\le 210 \qquad (3)\\
x_1 \qquad &\ge 0 \qquad (4)\\
x_2 &\ge 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

2- الحل البياني للمسألة:

بما أن هذه المسألة تحتوي على متغيرين اثنين فقط، إذن يمكن تمثيلها في مستوي محورين إحداثيين. نحول أولاً متراجحات قيود المسألة إلى معادلات:

$$\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 &= 200 \qquad (1)\\
2x_2 &= 240 \qquad (2)\\
2x_1 + \quad x_2 &= 210 \qquad (3)\\
x_1 \qquad &= 0 \qquad (4)\\
x_2 &= 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

نرسم الآن المستقيمات المعبرة عن هذه المعادلات، مع العلم أن منطقة الحلول المقبولة دائماً تقع في الربع الأول من مستوي المحورين الإحداثيين، وذلك لأن $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$، فيصبح الشكل البياني على الشكل الجانبي:



نلاحظ أن المستقيم الأول يمر من النقطتين $(200,0)$, $(0,200)$، والمستقيم الثاني يمر من النقطة $(0,120)$ ويوازي المحور $0X_1$، أما المستقيم الثالث فيمر من النقطتين $(0,210),(105,0)$، بالنسبة للمستقيم الرابع يقع على المحور $0X_2$، والمستقيم الخامس يقع على المحور $0X_1$، ومنطقة الحلول المشتركة والمقبولة في هذه المسألة تقع ضمن المنطقة المظللة $(ABCD)$ وعلى محيطه، باعتبار أن المتراجحات من الشكل أصغر أو يساوي.

ومن الواضح أن الحل الأمثل لهذه المسألة، والذي يتمثل في تعظيم دالة الهدف يقع في إحدى النقاط على محيط الشكل المذكور، حيث تسمى هذه النقاط **بالنقاط الركنية (النقاط الركنية هي رؤوس المضلع الناتجة عن تقاطع المستقيمات)**. ونلاحظ أن إحداثيات جميع النقاط معروفة ما عدا النقطة C الناتجة عن تقاطع المستقيمين (2) و (3) وبحل المعادلتين المعبرتين عن هذين المستقيمين حلاً مشتركاً نحصل على إحداثيات النقطة وهي: $C(45,120)$.

يمكن تحديد ربحية الشركة في ضوء برامج الإنتاج المختلفة التي تمثلها النقط الركنية (D,C,B,A)، فأي نقطة تقع على أضلاع منطقة الحلول المقبولة أو داخله تمثل حلاً ممكناً للمشكلة وتحقق قيود المسألة.

لمعرفة الحل الأمثل لهذه المسألة المتمثل في تعظيم دالة الهدف نعوض إحداثيات جميع النقاط الركنية في دالة الهدف ونختار النقطة التي تعطينا أكبر قيمة لدالة الهدف وذلك على الشكل التالي:

النقطة $A(0,0)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $Z=5(0)+12(0)=0$.

النقطة $B(105,0)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $Z=5(105)+12(0)=525$.

النقطة $C(45,120)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $Z=5(45)+12(120)=1665$.

النقطة $D(0,120)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $Z=5(0)+12(120)=1440$.

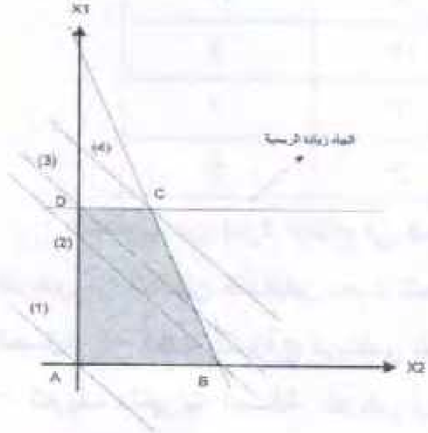
نلاحظ أن أعلى قيمة لدالة الهدف تكون عند النقطة $C(45,120)$، والتي تعني أن على الشركة أن تنتج 45 كرسي و 120 طاولة لتحقيق ربح أعظمي قدره 1665 وحدة نقدية، وهذا الربح هو أعظم ربح أسبوعي يمكن أن تحققه الشركة ضمن الشروط المفروضة عليها.

إن الطريقة الأخرى لإيجاد الحل الأمثل بعد تحديد منطقة الحلول المقبولة هي تمثيل دالة هدف بيانياً على الرسم. الجدير بالملاحظة أن البرنامج الذي يتحدد عند النقطة C ليس وحده الذي يحقق للشركة أرباحاً تعادل 1665 وحدة نقدية. فهناك برنامج أو برامج أخرى بديله يتحدد عند نقاط مختلفه على الرسم البياني تحقق للشركه الأرباح نفسها وتتحدد مواقع هذه النقاط على الرسم بتمثيل ربحية الشركة التي يختارها

متخذ القرار بخطوط مستقيمة عند النقاط الركنية لتمثيل المعادلات التي تمثل قيماً مختلفة للأرباح يختارها متخذ القرار.

$$5x_1 + 12x_2 = 0 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 12x_2 = 525 \qquad (2)$$
$$5x_1 + 12x_2 = 1440 \qquad (3)$$
$$5x_1 + 12x_2 = 1665 \qquad (4)$$

ففي أي معادلة نفترض أن $x_1 = 0$ وعليه تتحدد قيمة x_2، ثم نفترض أن $x_2 = 0$ فتحدد قيمة x_1، وهكذا. ويتم توصيل النقطتين بخط مستقيم فنحصل على خط أرباح متساوي وكل نقطة عليه تعطي نفس الأرباح.



وحتى يمكن تعظيم ربحية الشركة فيجب الانتقال من الخط المستقيم (1) الذي يمثل المعادلة $5x_1 + 12x_2 = 0$ إلى الخط المستقيم الموازي له (2) والذي يمثل المعادلة $5x_1 + 12x_2 = 525$ وذلك في الاتجاه الأعلى الموجب لنقطة الأصل. ويستمر الانتقال من خط مستقيم إلى خط مستقيم آخر يوازي للخط الأول بقدر ما تسمح به منطقة الحلول الممكنة حتى نقطة تماس الخط المستقيم (4) الذي يمثل ربحية الشركة مع أقصى نقطة تقع على أطراف منطقة الحلول الممكنة المظللة في اتجاه زيادة الربحية النقطة C. وتمثل هذه النقطة برنامج الإنتاج الأمثل الذي تحقق أقصى ربحية ممكنة للشركة في ضوء الإمكانيات المتاحة.

تطلق على هذه النقطة التي تتحقق عندها أكبر ربح ممكن 1665 وحدة نقدية، النقطة الركنية التي تحقق عندها البرنامج الأمثل للإنتاج.

مثـال: على حالة تدنية دالة الهدف:

تعاقدت إحدى دور الحضانة مع إحدى المنشآت الإنتاجية المتخصصة بصناعة المواد الغذائية ذات المواصفات الخاصة بتجهيزها بكمية من مادة غذائية للأطفال تحوي

على الأقل (40)وحدة فيتامين A و (50) وحدة من فيتامين B و (49) وحـدة مـن فيتامين C. وتنتج المنشأة نوعين من المواد الغذائية المنتجة من قبل المنشأة هي: المادة الغذائية رقم (1) والمادة الغذائية رقم (2)، والجـدول التـالي يوضـح المواصـفات الإنتاجية للمادتين الغذائيتين وكلفة إنتاجهما:

نوع المادة الغذائية / نوع الفيتامين	المادة الغذائية رقم (1)	المادة الغذائية رقم (2)
A	4	10
B	10	5
C	7	7
الكلفة بالوحدة النقدية	5	8

المطلوب من إدارة الإنتاج في المنشأة تحديد الكمية المطلوب إنتاجها مـن كـلا النوعين من المادتين الغذائيتين بحيث تتحمل المنشأة أقل تكلفة ممكنة.

الحـل: 1- إعداد النموذج الرياضي للمشكلة:

- **تعريف متغيرات المسألة:** لنفرض أن:

x_1 هي كمية المنتج رقم 1 .

x_2 هي كمية المنتج رقم 2 .

- تحديد دالة الهدف:

كلفة المنتج (رقم 1) $5x_1$، وكلفة المنتج (رقم 2) $8x_2$ وبما أن الهدف هو تحقيق أقل تكلفة ممكنة من إنتاج النوعين من المادتين الغذائيتين ، إذن يمكننا كتابة دالة الهدف كما يلي:

$$Min\, C = 5x_1 + 8x_2$$

إن كلمة "ممكن "، تعني أن هناك قيوداً يجب الالتزام بها، وهي الحـدود الـدنيا للكميات الواجب توافرها من الفيتامينات في كلا النوعين من المادتين الغذائيتين.

- **تحديد قيود المسألة:**

قيد توافر الحد الأدنى من الفيتامين A في كلا النوعين من المـــادتين الغــذائيتين يوضح بالقيد التالي:

$$4x_1 + 10x_2 \geq 40 \qquad (1)$$

قيد توافر الحد الأدنى من الفيتامين B في كلا النوعين من المـــادتين الغــذائيتين يوضح بالقيد التالي:

$$10x_1 + 5x_2 \geq 50 \qquad (2)$$

قيد توافر الحد الأدنى من الفيتامين C في كلا النوعين من المـــادتين الغــذائيتين يوضح بالقيد التالي:

$$7x_1 + 7x_2 \geq 49 \qquad (3)$$

- **قيود عدم السلبية:**

وتكتب كما يلي:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

وبذلك يأخذ النموذج الرياضي لهذه المسألة الشكل التالي:

$$MinC = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned}
4x_1 + 10x_2 &\geq 40 && (1)\\
10x_1 + 5x_2 &\geq 50 && (2)\\
7x_1 + 7x_2 &\geq 49 && (3)\\
x_1 &\geq 0 && (4)\\
x_2 &\geq 0 && (5)
\end{aligned}$$

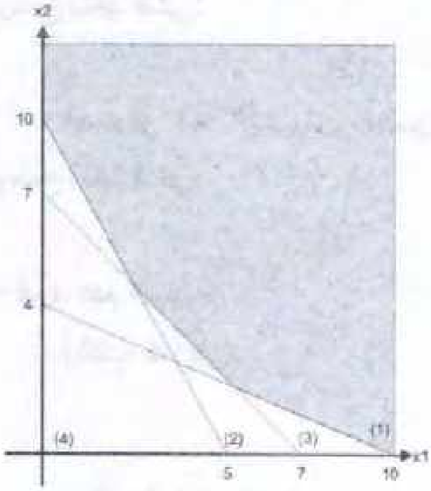
3- الحل البياني للبرنامج الخطي :

بما أن هذه المسألة تحتوي على متغيرين اثنين فقط ،إذن يمكــن تمثيلهـــا فـــي مستوي محورين إحداثيين .

نحول أولاً متراجحات قيود المسألة إلى معادلات:

$$4x_1 + 10x_2 = 40 \qquad (1)$$
$$10x_1 + 5x_2 = 50 \qquad (2)$$
$$7x_1 + 7x_2 = 49 \qquad (3)$$
$$x_1 \qquad = 0 \qquad (4)$$
$$x_2 = 0 \qquad (5)$$

نرسم الآن المستقيمات الممثلة لهذه المعادلات،مع التذكير أن منطقة الحلول المقبولة تقع دائماً في الربع الأول من مستوي المحورين الإحداثيين،وذلك لأن $x_2 \geq 0$, $x_1 \geq 0$ ، فيصبح الشكل البياني على الشكل التالي:



نلاحظ أن المستقيم الأول يمر من النقطتين $(10,0)$, $(0,4)$ ، والمستقيم الثاني يمر من النقطتين $(5,0)$, $(0,10)$ أما المستقيم الثالث فيمر من النقطتين $(7,0)$, $(0,7)$ ، بالنسبة للمستقيم الرابع يقع على المحور $0x_2$ ،والمستقيم الخامس يقع على المحور $0x_1$.

من الواضح أن الحل الأمثل لهذه المسألة، والذي يتمثل في تدنية دالة الهدف يقع في إحدى النقاط الركنية A,B,C,D . نلاحظ أن إحداثيات النقطتين A و Dمعروفة بينما يتم إيجاد إحداثيات النقطة C الناتجة عن تقاطع المستقيمين (1)و (3)بحل المعادلتين معادلتي هذين المستقيمين حلاً مشتركاً نحصل على نقطة التقاطع $C(5,2)$ ، وكذلك يتم إيجاد إحداثيات النقطة B الناتجة عن تقاطع المستقيمين (2) و (3) بحل المعادلتين المعبرتين عن هذين المستقيمين حلاً مشتركاً فنحصل على $B(3,4)$.

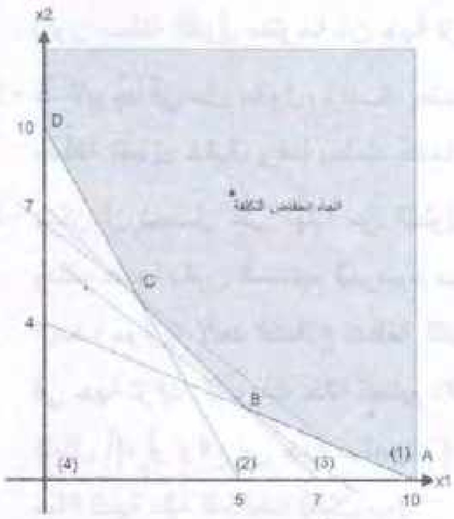
إن أي نقطة تقع على أضلاع منطقة الحلول A,B,C,D المقبولة أو داخله تمثل حلاً ممكناً للمشكلة وتحقق قيود المسألة. لمعرفة الحل الأمثل لهذه المسألة المتمثل في تدنية دالة الهدف نعوض إحداثيات جميع النقاط الركنية ،في دالة الهدف ، ونختار النقطة التي تعطينا أصغر قيمة لدالة الهدف،وذلك على الشكل التالي:

- النقطة $A(0,10)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $C = 5(0) + 8(10) = 80$.

- النقطة $B(3,4)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $C = 5(3)+8(4) = 47$.
- النقطة $C(5,2)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $C = 5(5)+8(2) = 41$.
- النقطة $D(10,0)$ تعطي لدالة الهدف القيمة $C = 5(10)+8(0) = 50$.

نلاحظ أن أدنى قيمة لدالة الهدف تكون عند النقطة $C(5,2)$، والتي تعني أن على المنشأة إنتاج (5) من النوع الأول من المادة الغذائية و(2) من النوع الثاني من المـادة الغذائية لتحقيق أدنى تكلفة ممكنة وقدرها 41 وحدة نقدية، وهذه التكلفة هي أدنى تكلفة يمكن أن تحققها المنشأة ضمن الشروط المفروضة عليها.

نأخذ الآن الطريقة الأخرى: لإيجاد الحل الأمثل بعد تحديد منطقة الحلول المقبولة هي تمثيل دالة هدف تدنية التكاليف بيانياً على الرسم. الجدير بالملاحظة أن البرنامج الذي يتحدد عند النقطة A ليس وحده الذي يحقق للمنشاة تكلفة تعادل 80 وحدة نقدية. فهناك برنامج أو برامج أخرى بديلة تتحدد عند نقاط مختلفة على الرسم البياني تحقق للمنشأة التكلفة نفسها. وتتحدد مواقع هذه النقاط على الرسم بتمثيل تكلفة الإنتاج التي يختارها متخذ القرار بخطوط مستقيمة عند النقاط الركنية لتمثيل المعادلات التي تساوي قيم مختلفة للتكلفة التي يختارها متخذ القرار.



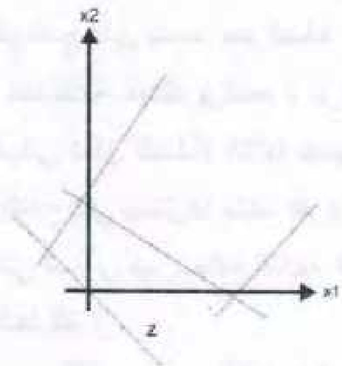
$$5x_1 + 8x_2 = 80 \qquad (1)$$
$$5x_1 + 8x_2 = 50 \qquad (2)$$
$$5x_1 + 8x_2 = 47 \qquad (3)$$
$$5x_1 + 8x_2 = 41 \qquad (4)$$

نعوض $x_1 = 0$ في أي معادلة فتحدد قيمة x_2، ثم نضع $x_2 = 0$ فنحصل على قيمة x_1، وهكذا. ويتم إيصال النقطتين الممثلتين للمتغيرين x_1 و x_2 بعد تحديدهما بنفس الطريقة في كل معادلة فنحصل على خط تكلفة متساوي وكل نقطة تقع عليه تعطي التكلفة نفسها.

وحتى يمكن تخفيض تكاليف الإنتاج فيجب الانتقال من خط مستقيم (1) الــذي يمثل $5x_1 + 8x_2 = 80$ وحدة نقدية إلى الخط المستقيم الموازي له (2) الــذي يمثــل المعادلة $5x_1 + 8x_2 = 50$ وحدة نقدية وهكذا من أعلى وفي اتجاه نقطة الأصل.

ويستمر الانتقال من خط مستقيم إلى خط مستقيم آخر موازي له بقدر ما تــسمح به منطقة الحلول الممكنة حتى نقطة تماس الخط المستقيم (4) الذي يمثل تكلفة الإنتاج مع أدنى نقطة تقع على أطراف منطقة الحلول الممكنة المظللة وهي النقطة C. وعنــد هذه النقطة الركنية يتحقق البرنامج الأمثل لتخفيض تكاليف الإنتاج إلى أدنى حد ممكن.

§-4- حالات خاصة:

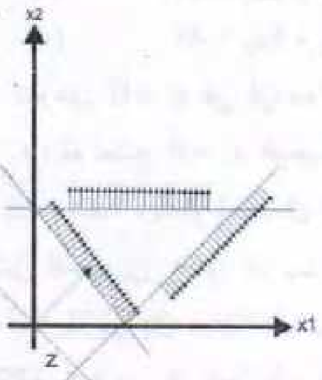


إن عملية البحث عن الحل الأمثل توصلنا إلى إحدى الحالات التالية:

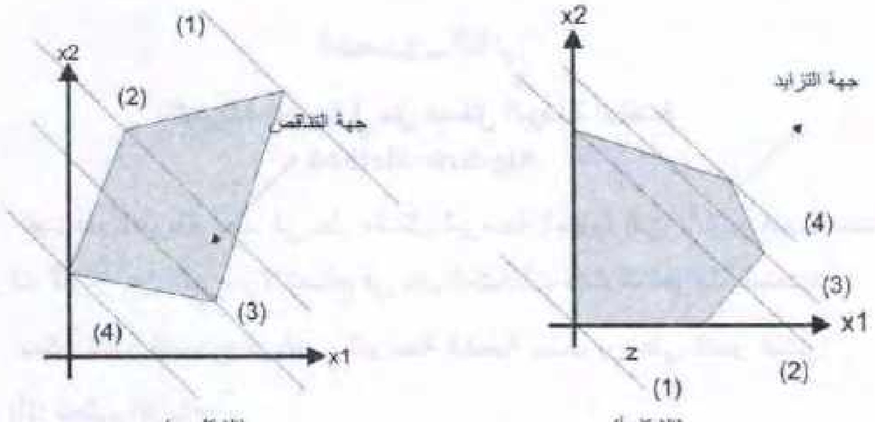
1- يمكن أن نحصل على حل مثالي وحيد ،كما رأينــا في المثالين السابقين.

2- يمكن أن لا يكون هناك أي حل أمثل، وذلك عندما تكون منطقة القبول مفتوحة من جهة تزايد Z.

3- قد لايوجد أي حل مقبول، وذلــك عنــدما تكــون منطقة القبول خالية، وهذا يحدث عندما تكون الشروط متعارضة.



4- يمكن أن نحصل على نهاية من الحلول المثلــى وذلك عندما يكون المستقيم المرسوم مــن دالــة الهدف موازياً لأحد أضلاع منطقة القبول وواقع في جهة تزايد Z وذلك حالة تعظيم دالة الــربح (شكل أ)، أو واقع في جهة تناقص C وذلك في حالة تدنية دالة التكاليف (شكل ب).



نلاحظ (في الشكل أ) أن آخر مستقيم موازي لمستقيم دالة الهدف Z وواقع في جهة تزايده ينطبق على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ من منطقة القبول، وتكون للمسألة في هذه الحالة لا نهاية من الحلول المثلى المتمثلة بالنقاط الواقعة على القطعة $\overline{BC}$ والتي تعطي نفس القيمة العظمى لتابع الهدف Z ، نحصل على تلك الحلول بإجراء عملية التركيب الخطي بين إحداثيات النقطتين A و B باستخدام العلاقة $Z=\alpha A+(1-\alpha)B$ ، حيث α تأخذ القيم ضمن المجال $[0,1]$.

كما نلاحظ (في الشكل ب) أن آخر مستقيم موازي لمستقيم دالة الهدف C وواقع في جهة تناقصه ينطبق على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$ من منطقة القبول، وتكون للمسألة في هذه الحالة لانهاية من الحلول المثلى المتمثلة بالنقاط الواقعة على القطعة BC والتي تعطي نفس القيمة الصغرى لـ C، وبالطريقة نفسها نحصل على تلك الحلول بإجراء عملية التركيب الخطي بين إحداثيات النقطتين A و B باستخدام العلاقة $Z=\alpha A+(1-\alpha)B$ ، حيث α تأخذ القيم ضمن المجال $[0,1]$.

المبحث الثاني

الطريقة الجبرية في حل مسائل البرمجة الخطية
Algebric Method

تفيد هذه الطريقة أيضاً في حل مشاكل البرمجة الخطية التي لا يزيد فيها عدد متغيرات القرار عن اثنين، ولا تصلح في حل المشكلات ذات المتغيرات المتعددة.

يمكن كتابة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية بمتغيرين على النحو التالي:

حالة (أ): تعظيم الأرباح:

$$MaxZ = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \quad (2)$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2\ n} \le b_m$$

$$x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0 \quad (3)$$

حالة (ب): تدنية التكاليف:

$$MinZ = p_1x_1 + p_2x_2 \quad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ge b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ge b \quad (2)$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ge b_m$$

$$x_1 \ge 0\ , x_2 \ge 0 \quad (3)$$

خطوات إيجاد الحل الأمثل لمسألة برمجة خطية بالطريقة الجبرية:

لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية (حالة أ)، أو (حالة ب) بالطريقة الجبرية نتبع الخطوات التالية:

1- نحول المتراجحات، الممثلة لقيود المسألة وقيود عدم السلبية في النموذج أعلاه، إلى معادلات.

2- نوجد نقاط الحلول المشتركة لجميع المعادلات ،عن طريق أخذ كل معادلتين على حده وإيجاد حلهما المشترك ، فيكون عدد نقاط الحلول C_n^2، حيث n عدد المتراجحات جميعها بما فيها قيود عدم السلبية.

3- نشكل جدولاً يتضمن جميع نقاط الحلول الناتجة .

4- نختبر نقاط الحلول المشتركة الواحدة تلو الأخرى، فتكون النقطة مقبولة إذا حققت جميع المتراجحات، وتكون غير مقبولة إذا لم تحقق جميع المتراجحات وتستبعد.

5- لإيجاد الحل الأمثل (أعظمي أو أصغري)، نوجد قيمة دالة الهدف لكل نقطة مقبولة ثم نختار أكبرها في حالة تعظيم الأرباح (حالة أ)، أو أصغرها في حالة تدنية التكاليف (حالة ب).

مثــال على حالة تعظيم دالة الهدف:

يمكننا في منشأة صنع نوعين من المنتجات باستخدام ثلاثة أنواع من المــوارد، التي تتوفر بكميات محدودة. في الجدول الآتي أوردنا بيانات عما يلزم استخدامه من كل مورد لصنع واحدة من كل منتج، وعن كمية

المتاح من كل مورد وعن الربح الذي نحصل عليه من بيع الواحدة من كل مــن المنتجين.

المتاح من المورد	المنتج الثاني A_2	المنتج الأول A_1	
20	5	2	كمية المورد الأول اللازمة لصنع واحدة من المنتج
40	5	8	كمية المورد الثاني اللازمة لصنع واحدة من المنتج
30	6	5	كمية المورد الثالث اللازمة لصنع واحدة من المنتج
	40	50	الربح في واحدة المنتج

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل لبرنامج تخطيط الإنتاج في المنشأة بالطريقة الجبرية.

الحــل:

- **صياغة البرنامج الخطي:**

نفرض x_1 : كمية المنتج A_1.

x_2 : كمية المنتج A_2.

نكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة على الشكل التالي:

$$Max\,Z = 50x_1 + 40x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 20 \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 30 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

- **الحل الجبري للمسألة:**

نحول أولاً متراجحات قيود المسألة إلى معادلات:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 20 \quad (1) \\ 8x_1 + 5x_2 &= 40 \quad (2) \\ 5x_1 + 6x_2 &= 30 \quad (3) \\ x_1 &= 0 \quad (4) \\ x_2 &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

نحل كل معادلتين من المعادلات الخمس حلاً مشتركاً، نحصل على عــدد مــن الحلول يساوي: $C_5^2 = 10$ وليس بالضرورة أن تكون هذه الحلول العشر مقبولــة، فقــد يكون بعضها مرفوضاً، لأنه لا يحقق واحداً أو أكثر من القيود.

رقم الحل	حل جملة معادلتين	الحل الناتج	مقبولية الحل	قيمة دالة الهدف
1	(1) مع (2)	$x_1 = 3.33$ $x_2 = 2.66$	**حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الثالثة.**	-
2	(1) مع (3)	$x_1 = 2.3$ $x_2 = 3.07$	**حل مقبول لأنه يحقق** جميع المتراجحات.	$Z = 237.8$

$Z = 160$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$x_1 = 0$ $x_2 = 4$	(1) مع (4)	3
-	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحتين الثانية والثالثة.	$x_1 = 10$ $x_2 = 0$	(1) مع (5)	4
$Z^* = 263$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$x_1 = 3.9$ $x_2 = 1.7$	(2) مع (3)	5
-	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحتين الأولى والثالثة.	$x_1 = 0$ $x_2 = 8$	(2)مع (4)	6
$Z = 250$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$x_1 = 5$ $x_2 = 0$	(2)مع (5)	7
-	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الأولى.	$x_1 = 0$ $x_2 = 5$	(3)مع (4)	8
-	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الثانية.	$x_1 = 6$ $x_2 = 0$	(3)مع (5)	9
$Z = 0$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(4)مع (5)	10

نلاحظ من الجدول السابق أن هناك خمسة حلول مقبولة فقط من أصل عشرة حلول. ومن هذه الحلول الخمسة هناك حل أمثل واحد فقط، الذي يعطي أكبر قيمة لدالة الهدف، وذلك عندما ننتج ما يعادل 3 وحدات من المنتج الأول A_1، ووحدة واحدة من المنتج الثاني A_2، وبذلك نحصل على ربح أقصى قدره 263 وحدة نقدية.

مثـــال على حالة تدنية التكاليف:

تقوم إحدى مصانع النجارة بإنتاج الكراسي والمناضد، وكل نوع من هذه المنتجات تحتاج إلى المواد الأولية التالية: B, A بالإضافة إلى ساعات عمل، الجدول التالي يوضح لنا الاحتياجات الأسبوعية من المواد الأولية ومن ساعات العمل وكلفة الوحدة الواحدة من كل منتج.

الاحتياجات الأسبوعية	المناضد	الكراسي	نوع المواد الأولية
12	3	2	A
25	1	1	B
90	3	5	ساعات عمل
	3	40	كلفة الوحدة الواحدة بالوحدة النقدية

حدد البرنامج الأمثل للإنتاج بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن.

الحــل:

- **صياغة البرنامج الخطي للمسألة:**

نفرض أن:

x_1 عدد الوحدات المنتجة من الكراسي.

x_2 عدد الوحدات المنتجة من المناضد.

$$Min\,C = 40x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1 + \ \ x_2 &\geq 25 \\ 5x_1 + 3x_2 &\geq 90 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **الحل الجبري للمسألة:**

نحول متراجحات قيود المسألة إلى معادلات:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \quad (1) \\ x_1 + \ \ x_2 &= 25 \quad (2) \\ 5x_1 + 3x_2 &= 90 \quad (3) \\ x_1 &= 0 \quad (4) \\ x_2 &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

وبحل كل معادلتين من المعادلات الخمس حلاً مشتركاً، نحصل على عـدد مـن الحلول يساوي: $C_5^2 = 10$ وليس بالضرورة أن تكون هذه الحلول العشر مقبولـة، فقـد يكون بعضها مرفوضاً، لأنه لا يحقق واحداً أو أكثر من القيود.

رقم الحل	حل جملة معادلتين	الحل الناتج	مقبولية الحل	قيمة دالة الهدف
1	(1)مع (2)	$x_1 = 63$ $x_2 = -38$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الخامسة .	-
2	(1)مع (3)	$x_1 = 26$ $x_2 = -13.33$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحتين الثانية والخامسة .	-
3	(1)مع (4)	$x_1 = 0$ $x_2 = 4$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحتين الثانية والثالثة	-
4	(1)مع (5)	$x_1 = 6$ $x_2 = 0$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحتين الثانية والثالثة.	-
5	(2)مع (5)	$x_1 = 7.5$ $x_2 = 17.5$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$C = 352.5$
6	(2)مع (4)	$x_1 = 0$ $x_2 = 25$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الثالثة.	-
7	(2)مع (5)	$x_1 = 25$ $x_2 = 0$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات.	$C = 1000$
8	(3)مع (4)	$x_1 = 0$ $x_2 = 30$	حل مقبول لأنه يحقق جميع المتراجحات .	$C^* = 90$
9	(3)مع (5)	$x_1 = 18$ $x_2 = 0$	حل غير مقبول لأنه لا يحقق المتراجحة الثانية.	-
10	(4)مع (5)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	حل غير مقبول لأنه لايحقق سوى المتراجحتين الرابعة والخامسة.	-

نلاحظ من الجدول السابق أن هناك ثلاثة حلول مقبولة فقط من أصـل عـشرة حلول. ومن هذه الحلول الثلاثة هناك حل أمثل واحد فقط، الذي يعطي أدنى قيمة لدالـة الهدف، وذلك عندما يتم إنتاج 30 وحدات من المناضد وأن يتوقف عن إنتاج الكراسـي نهائياً لتحصيل أقل كلفة ممكنة وهي 90 وحدة نقدية.

المبحث الثالث

حل البرامج الخطية بطريقة سمبلكس

Method of Simplex

في حالة وجود أكثر من متغيرين في المسألة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية أو الجبرية، وإنما نلجأ إلى استخدام طريقة سمبلكس التي تعتمد على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود وتهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود.

المبدأ الأساسي الذي تقوم عليه طريقة سمبلكس هو إيجاد حل أولي ممكن، (يقابل هذا الحل إحدى النقاط الركنية في منطقة الحلول الممكنة في الحل البياني، أو حل مقبول في الحل الجبري)، ومن ثم تقييم دالة الهدف العائدة لهذا الحل، ثم فحص الحلول الممكنة الأخرى (التي تقابل النقاط الركنية الأخرى المجاورة في الحل البياني، أو الحلول المقبولة الأخرى في الحل الجبري) وتقييم دالة الهدف، ومن ثم انتقاء الحل التي تأخذ فيها دالة الهدف قيمة عظمى (في حالة تعظيم الأرباح) أو قيمة دنيا (في حالة تدنية التكاليف)، عندئذ نكون قد بلغنا الحل الأمثل.

§1– المرحلة الأساسية الواجب اتباعها أثناء تطبيق طريقة السمبلكس

وجدنا أن النموذج العام لمسألة البرمجة الخطية يعطى بإحدى الحالتين التاليتين:

حالة (أ): تعظيم الأرباح:

$$MaxZ = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\le b_2 \qquad (2) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le b_m \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0 \;, x_2 \ge 0 \;, \;..., \; x_n \ge 0 \qquad (3)$$

حالة (ب): تدنية التكاليف:

$$\mathrm{Min}C = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad (1)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \qquad (2)$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , \ \dots, \ x_n \geq 0 \qquad (3)$$

من أجل تطبيق طريقة سمبلكس يجب تحويل مشكلة البرمجة الخطية من النموذج العام، الذي تتخذ فيه دالة الهدف صفة التعظيم وتأخذ القيود الموضوعة للمشكلة شكل متراجحات أقل أو تساوي كما في حالة (أ) أو صفة التصغير وأن القيود الموضوعة للمشكلة تأخذ شكل متراجحات أكبر أو تساوي كما في حالة (ب)، إلى النموذج القياسي الذي تتخذ فيه دالة الهدف صفة التعظيم أو التصغير وأن جميع قيوده تكون على شكل معادلات خطية بدلاً من المتراجحات ونلجأ إلى هذا الشكل لسهولة التعامل مع المعادلات حيث تساعدنا في استخراج بعض المتحولات من بعضها لتعويضه في المعادلات الأخرى.

§2 – كيفية الانتقال من النموذج العام إلى النموذج القياسي

إذا كانت معطيات المسألة على شكل النموذج العام (حالة أ) فإنه يمكننا تحويل قيود توازن المسألة إلى معادلات وذلك بإضافة متحولات موجبة y_i إلى الطرف الأيسر للمتراجحات الممثلة لقيود توازن المسألة، وتسمى هذه المتحولات بالمتحولات القاعدية والتي تشكل فيما بينها المصفوفة الواحدية، كما ندخل هذه المتحولات على دالة الهدف بأمثال صفرية، فنحصل على النموذج القياسي المكافئ للنموذج العام السابق (حالة أ) والذي نكتبه على الشكل التالي:

$$Z - p_1x_1 - p_2x_2 - \dots - p_nx_n + 0y_1 + 0y_2 + \dots + 0y_m = 0$$

$$\begin{array}{llllll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + & y_1 & & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & & + \ y_2 & & & = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n & & & + y_3 & & = b_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & & & & + y_m & = b_m
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,\dots,n)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i = 1,2,\dots,m)$$

ويصبح النموذج متضمناً لـ $n+m$ متحولاً غير سالب.

أما إذا كانت معطيات المسألة على شكل النموذج العام (حالة ب) فإنه يمكننا تحويل قيود توازن المسألة إلى معادلات وذلك بطرح متحولات موجبة y_i من الطرف الأيسر للمتراجحات الممثلة لقيود توازن المسألة، وتسمى هذه المتحولات أيضاً بالمتحولات القاعدية، كما ندخل هذه المتحولات على دالة الهدف بأمثال صفرية، فنحصل على النموذج القياسي المكافئ للنموذج العام السابق (حالة ب) والذي نكتبه على الشكل التالي:

$$
\begin{array}{l}
Z-p_1x_1-p_2\,x_2-\ldots-p_nx_n+0y_1+0y_2+\ldots+0y_m=0\\
a_{11}x_1+a_{12}\,x_2+\ldots+a_{1n}x_n-\ y_1 \qquad\qquad\qquad =b_1\\
a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\ldots+a_{2n}x_n \qquad -\ y_2 \qquad\quad =b_2\\
a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+\ldots+a_{3n}x_n \qquad\qquad -y_3 \quad =b_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \qquad\qquad\qquad -y_m=b_m\\
\quad x_j\geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots n)\\
\quad y_i\geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots m)
\end{array}
$$

ونلاحظ أيضاً أن النموذج يتضمن $n+m$ متحولاً غير سالب.

§-3 – المراحل العملية الواجب اتباعها أثناء تطبيق طريقة سمبلكس

3-1- حالة تعظيم الأرباح:

سنتناول في هذه الفقرة طريقتين من طرق سمبلكس الأكثر استخداماً في حل مسائل البرمجة الخطية والتي تتميز بدرجة كبيرة من الدقة في معالجة مشكلات البرمجة بغض النظر عن عدد المتغيرات الخاصة بمسألة البرمجة المطروحة.

أ- طريقة سمبلكس المختزلة (الطريقة المتطورة):

سنتناول، بهدف التبسيط، نموذج برمجة خطية يتضمن متغيرين فقط. تتلخص طريقة سمبلكس المختزلة بالمراحل التالية:

1 – كتابة النموذج العام بالشكل القياسي

$$
\begin{aligned}
Z - p_1 x_1 - p_2\ x_2 + 0\,y_1 + 0\,y_2 + 0\,y_3 &= 0\\
a_{11} x_1 + a_{12}\, x_2 + \ y_1 \qquad\qquad &= b_1\\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \qquad + \ y_2 \qquad &= b_2\\
a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + \qquad\qquad + y_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_j \geq 0 \qquad & (j = 1,2)\\
y_i \geq 0 \qquad & (i = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

2 – تبدأ الدراسة عادةً من الوضع الإنتاجي $x_1 = 0\ , x_2 = 0$ وبالتالي فإن قيمة الربح معدومة أي $Z = 0$ لذلك نكتب دالة الهدف $Z - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$

3– إيجاد الأساس الأولي وذلك بكتابة جدول سمبلكس الأول بالشكل المختزل، أي نكتفي بكتابة متغيرات القاعدة $y_1\ , y_2\ , y_3$ في العمود الأول من الجدول وبكتابة متغيرات القرار $x_1\ , x_2$ في السطر الأول، حيث في جداول سمبلكس يتضمن السطر الأول المتغيرات خارج القاعدة، والعمود الأول متغيرات داخل القاعدة.

الجدول الأول:

	x_1	x_2 ↓	B
Z	$-P_1$	$-P_2$	0
y_1	a_{11}	a_{12}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	b_2
← y_3	a_{31}	a_{32}	b_3

4 – ذكرنا بأننا نبدأ الدراسة من وضع الربح المعدوم أي $Z = 0$، ولا بد من تحسين الاختيار والانتقال إلى اختيار ثاني أفضل وبذلك تتحسن قيمة دالة الهدف. الجدير بالذكر أننا لا نلجأ إلى مثل هذا التغيير إلا إذا احتوى السطر Z على إحدى المركبات السالبة.

5– لتحسين الاختيار والانتقال إلى جدول سمبلكس الثاني نتبع الخطوات التالية:

✓ لمعرفة أي متغير قرار سيدخل القاعدة ننظر إلى السطر Z ونختار أصغر المركبات السالبة، ولتكن مثلاً $-P_2$ ، لتشير إلى العمود الذي نختاره ويسمى بعمود

الارتكاز، ومتغير القرار الموجود في عمود الارتكاز x_2 هو الذي سيدخل القاعدة الجديدة بدلاً من متغير من داخل القاعدة الذي سيخرج.

✓ لمعرفة أي متغير سيخرج القاعدة تاركاً مكانه لـ x_2 تقوم بتقسيم عناصر العمود B على العناصر الموجبة فقط في عمود الارتكاز المقابلة لها (لأن العناصر المعدومة والسالبة لا تقيد عملية الإنتاج)، أي: $\theta_1 = \frac{b_1}{a_{12}}, \theta_2 = \frac{b_2}{a_{22}}, \theta_3 = \frac{b_3}{a_{32}}$ ثم نختار أصغر هذه القيم ($\theta = Min(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ، ولتكن مثلاً θ_3 ، ونسمي السطر الذي يقابل هذه القيمة الصغرى θ_3 بسطر الارتكاز. ويسمى العنصر الذي يقع على تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز بعنصر الارتكاز a_{32}، (إذن على افتراضاتنا المتغير y_3 سيغادر القاعدة تاركاً مكانه للمتغير x_2 الذي سيدخل القاعدة.

6- الآن سنشرح كيفية الانتقال إلى الجدول الثاني لسمبلكس والذي يتم وفق ما يلي: في الجدول الثاني لسمبلكس:

- نضع في الجدول الثاني لسمبلكس x_2 مكان y_3 ، و y_3 مكان x_2.
- نضع في الجدول الثاني بدل عنصر الارتكاز a_{32} مقلوبه $\frac{1}{a_{32}}$.
- نضع مكان العناصر الأخرى من سطر الارتكاز قيمتها مقسومة على عنصر الارتكاز.
- نضع مكان العناصر الأخرى من عمود الارتكاز قيمتها مقسومة على عنصر الارتكاز مع تغيير الإشارة .
- أما باقي عناصر الجدول الثاني فتحسب حسب قاعدة المستطيل التالية:

قاعدة المستطيل: تتلخص بالعلاقة التالية:

(القطر الرئيسي- القطر الثانوي)/ عنصر الارتكاز. حيث القطر الرئيسي للمستطيل يبدأ بعنصر الارتكاز وينتهي بالعنصر المقابل للعنصر المراد حسابه، أما القطر الثانوي فهو عبارة عن جداء العنصرين الآخرين المكملين للمستطيل .

الجدول الثاني:

	x_1	y_3	B
Z	$\frac{(a_{32})(-p_1)-(-p_2)(a_{31})}{a_{32}}$	$+\frac{p_2}{a_{32}}$	$\frac{(a_{32})(0)-(-p_2)(b_3)}{a_{32}}$
y_1	$\frac{(a_{32})(a_{11})-(a_{12})(a_{31})}{a_{32}}$	$-\frac{a_{12}}{a_{32}}$	$\frac{(a_{32})(b_1)-(a_{12})(b_3)}{a_{32}}$
y_2	$\frac{(a_{32})(a_{21})-(a_{22})(a_{31})}{a_{32}}$	$-\frac{a_{22}}{a_{32}}$	$\frac{(a_{32})(b_2)-(a_{22})(b_3)}{a_{32}}$
x_2	$\frac{a_{31}}{a_{32}}$	$\frac{1}{a_{32}}$	$\frac{b_3}{a_{32}}$

الجدول الثاني يعطينا حلاً أساسياً جديداً أفضل من الحل الأساسي الممكن السابق، بقاعدة جديدة مع متغيرات جديدة مع قيمة أعلى لدالة الهدف.

7- ننظر من جديد إلى القيم في السطر Z في الجدول الثاني، فإذا كانت كلها غير سالبة تكون قد وصلنا إلى الحل الذي يعطي دالة الهدف قيمتها المثلى،حيث إذا لم يحتو السطر Z على أي مركبة سالبة فإن أي تغيير في القاعدة التي لدينا سيسيء إلى قيمة دالة الهدف، أو على الأقل سوف لا يحسن من قيمتها، وإذا احتوى السطر Z على عناصر سالبة نقوم بخطوة تالية مشابهة للخطوة التي شرحناها وننتقل بذلك إلى جدول ثالث ثم إلى جدول رابع وهكذا حتى نصل إلى حل البرنامج الخطي.

مثـــال:

مصنعاً يمكنه إنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات A_3, A_2, A_1 وذلك باستخدام ثلاثة أنواع من المواد الأولية B_3, B_2, B_1. لنفرض أن كميات المواد الأولية المتوفرة خلال الدورة الإنتاجية هي على التوالي:

10,12,14، أما كميات المواد الأولية المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من كل من المنتجات موضحة في الجدول التالي:

أنواع المواد الأولية المستخدمة في الإنتاج	المواد الأولية المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من المنتج		
	A_1	A_2	A_3
B_1	2	4	6
B_2	4	0	2
B_3	0	4	2

فإذا علمت أن مقدار الربح الصافي المتحقق من إنتاج وحدة واحدة من المنتج A_1 يبلغ /6/ وحدات نقدية ومن المنتج A_2 يبلغ / 4 / وحدات نقدية ومن المنتج A_3 يبلغ /2 / وحدة نقدية. المطلوب: إيجاد خطة الإنتاج المثلى بهدف تحقيق الربح الأعظم للمصنع.

الحـل:

- **فروض متغيرات القرار:**

نفرض: x_1ما يجب إنتاجه من المنتج A_1 x_2ما يجب إنتاجه من المنتج A_2

x_3ما يجب إنتاجه من المنتج A_3

- **كتابة النموذج العام للبرنامج الخطي :**

$$
\begin{aligned}
Max\,Z &= 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\le 14 \\
4x_1 \qquad + 2x_3 &\le 12 \\
4x_2 + 2x_3 &\le 10 \\
x_j \ge 0 \qquad & (j = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

- **كتابة النموذج القياسي للبرنامج الخطي:**

$$
\begin{aligned}
Z - 6x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= 0 \\
2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + y_1 \qquad\qquad &= 14 \\
4x_1 \qquad + 2x_3 \qquad + y_2 \qquad &= 12 \\
4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + y_3 &= 10 \\
x_j \ge 0 \qquad & (j = 1,2,3) \\
y_i \ge 0 \qquad & (i = 1,2,3)
\end{aligned}
$$

* جدول سمبلكس الأول:

	x_1	x_2	x_3	B
Z	-6	-4	-2	0
y_1	2	4	6	14
y_2	4	0	2	12
y_3	0	4	2	10

نلاحظ في السطر Z أن أصغر القيم السالبة هي/ -6 / إذن عمود الارتكاز هو العمود الذي يتضمن المتغير x_1 الذي سيدخل القاعدة بدلاً من المتغير y_2 الذي سيخرج من القاعدة تاركاً مكانه للمتغير x_1، (لأن $\theta_2 = \frac{12}{4} = 3 < \theta_1 = \frac{14}{2} = 7$)،

إذن سطر الارتكاز هو السطر الذي يتضمن المتغير y_2 وبالتالي عنصر الارتكاز هو / 4 /.

* جدول سمبلكس الثاني:

	y_2	x_2	x_3	B
Z	$\frac{6}{4}$	-4	1	18
y_1	$-\frac{2}{4}$	4	5	8
x_1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	3
y_3	0	4	2	10

نلاحظ من الجدول الثاني لسمبلكس أننا لم نصل إلى الحل الأمثل لاحتواء السطر Z على مركبة واحدة سالبة /4-/ ، إذن عمود الارتكاز هو العمود الذي يتضمن المتغير x_2 الذي سيدخل القاعدة ، وحيث أن $\theta_3 = \frac{10}{4} = 2.5 \succ \theta_1 = \frac{8}{4} = 2$ ، إذن سطر الارتكاز هو السطر الذي يتضمن المتغير y_1 والذي سيخرج من القاعدة تاركاً مكانه لـ x_2، وعنصر الارتكاز هو العنصر الذي يقع على تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز وهو العنصر /4/ .

• جدول سمبلكس الثالث:

	y_2	y_1	x_3	B
Z	1	1	6	26
x_2	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	2
x_1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	3
y_3	$\frac{1}{2}$	-1	-3	2

نلاحظ من الجدول أعلاه أننا وصلنا الحل الأمثل لعدم احتواء السطر Z على أي مركبة سالبة، إذن على المصنع أن ينتج ثلاث وحدات من المنتج A_1 $(x_1 = 3)$، ووحدتين من المنتج A_2 $(x_2 = 2)$. وأن لا ينتج أي شيء من المنتج A_3 $(x_1 = 0)$ بهدف تحقيق ربح أعظمي قدره $Z^* = 26$ وحدة نقدية.

ب- طريقة التحويلات الأولية:

سنتناول أيضاً ، بهدف التبسيط، نموذج برمجة خطية يتضمن متغيرين فقط.

تتلخص طريقة التحويلات الأولية بالمراحل التالية :

1 – كتابة النموذج العام لمسألة البرمجة الخطية بالشكل القياسي وذلك بالشكل التالي:

$$\begin{array}{l}
p_1 x_1 + p_2\ x_2 + 0\,y_1 + \ 0\,y_2 + 0\,y_3 \ = Z \\
a_{11} x_1 + a_{12}\ x_2 + \quad y_1 \qquad\qquad\qquad = b_1 \\
a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \qquad + \quad y_2 \qquad\quad = b_2 \\
a_{31}\ x_1 + a_{32}\ x_2 + \qquad\qquad\qquad + y_3 \quad = b_3
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
x_j \geq 0 & (j = 1,2,) \\
y_i \geq 0 & (i = 1,2,3)
\end{array}$$

2 – نشكل مصفوفة أعمدتها هي أمثال متغيرات القرار الأساسية والمتغيرات القاعدية في دالة الهدف وقيود توازن المسألة ،والعمود الأخير فيها يتضمن أمثال العمود B:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_3 & y_2 & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & Z \\ \boxed{a_{11}} & a_{12} & 1 & 0 & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 & 0 & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \\ \\ \\ \end{array}$$

نلاحظ في المصفوفة أعلاه أن المتغيرات القاعدية (y_3, y_2, y_1) تشكل فيما بينها أعمدة المصفوفة الواحدية، وهي داخل القاعدة. أما متغيرات القرار (x_2, x_1) أعمدتها لا تشكل أعمدة المصفوفة الواحدية فهي خارج القاعدة .

3- لمعرفة أي متغير قرار سيدخل القاعدة ،ننظر إلى السطر الأول في المصفوفة (سطر دالة الهدف) ونختار أكبر القيم الموجبة ولتكن $(p_1 > p_2)$ ،إذن العمود x_1 يشير إلى عمود الارتكاز.

4 – لمعرفة أي متغير سيخرج من القاعدة تاركاً مكانه لـ x_1 ،نقسم عناصر العمود الأخير B على العناصر الموجبة فقط في العمود x_1 $(\theta_3 = \frac{b_3}{a_{31}}, \theta_2 = \frac{b_2}{a_{21}}, \theta_1 = \frac{b_1}{a_{11}})$ ونختار أصغر القيم ولتكن θ_1، إذن عنصر الارتكاز هو a_{11} .

5 – بإجراء التحويلات الأولية على الأسطر نجعل عمود الارتكاز أحد أعمدة المصفوفة الواحدية ،على أن نبدأ بجعل عنصر الارتكاز العنصر 1+ أما باقي عناصر العمود أصفار،وهكذا يكون قد دخل القاعدة الجديدة.

6 – ننظر إلى السطر الأول في المصفوفة (سطر دالة الهدف) فإذا كان لا يحتوي على أي مركبة موجبة فهذا يعني أننا بلغنا الحل الأمثل، أما إذا كان يحتوي على مركبة سالبة نكرر نفس الخطوات السابقة حتى نصل الحل الأمثل.

مثـــال:

نعود للمثال السابق ونوجد الحل الأمثل بطريقة التحويلات الأولية.

الحـــل:

- **فروض متغيرات القرار:**

نفرض: x_1 ما يجب إنتاجه من المنتج A_1

x_2 ما يجب إنتاجه من المنتج A_2

x_3 ما يجب إنتاجه من المنتج A_3

- **كتابة النموذج العام للبرنامج الخطي:**

$$\begin{aligned} Max\,Z &= 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\le 14 \\ 4x_1 \qquad\quad + 2x_3 &\le 12 \\ 4x_2 + 2x_3 &\le 10 \\ x_j \ge 0 \quad & (j = 1,2,3) \end{aligned}$$

- **كتابة النموذج القياسي للبرنامج الخطي:**

$$\begin{aligned} 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= Z \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + y_1 \qquad\qquad &= 14 \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 \qquad + y_2 \qquad &= 12 \\ 4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + y_3 &= 10 \\ x_j \ge 0 \quad & (j = 1,2,3) \\ y_i \ge 0 \quad & (i = 1,2,3) \end{aligned}$$

- **تشكل مصفوفة الأمثال:**

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 & B \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & Z \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ \boxed{4} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

نلاحظ في السطر الأول من المصفوفة أعـلاه أن أكبـر القـيم الموجبـة هـو العنصر 6 ، إذن x_1 سيدخل القاعدة، وعنـصر الارتكـاز هـو العنـصر /4/ لأن $(\theta_2 = \frac{12}{4} = 3 \prec \theta_1 = \frac{14}{2} = 7)$: بتطبيق التحويلات الأولية على الأسـطر نـدخل

المتغير x_1 القاعدة بأن نجعل عنصر الارتكاز مسوياً إلى الواحد أمـا بـاقي عناصـر العمود أصفاراً. وبذلك نحصل على المصفوفة المكافئة الآتية:

$$\xrightarrow{H_3(\frac{1}{4}),H_{13}(-\frac{3}{2}),H_{23}(-\frac{1}{2})}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & y_2 & y_1 & x_3 & x_2 & B & y_3 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 4 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & Z-18\\
0 & \boxed{4} & 5 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 8\\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 3\\
0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 10
\end{bmatrix}
\end{array}$$

نلاحظ من المصفوفة أعلاه أن x_1قد دخل القاعدة وأخذ القيمة 3، وكذلك تحسنت قيمة دالة الهدف لتصبح مساوية إلى / 18 / ولكننا لم نصل إلى الحل الأمثـل لوجـود قيمة موجبة / 4 / في السطر الأول (سطر دالة الهدف) ، لذلك نكرر نفس الخطـوات السابقة لتحسين قيمة دالة الهدف فنحصل على المصفوفة المكافئة التالية:

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{4}),H_{12}(-1),H_{42}(-1)}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & y_2 & y_1 & x_3 & x_2 & B & y_3 \end{array}\\
\begin{bmatrix}
0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 0 & Z-26\\
0 & 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & 0 & 2\\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 3\\
0 & 0 & -3 & -1 & \frac{1}{2} & 1 & 2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

نلاحظ من المصفوفة أعلاه أن x_2قد دخل القاعـدة وأخـذ القيمـة 2، وكـذلك تحسنت قيمة دالة الهدف لتصبح مساوية إلى / 26 / وأننا وصلنا الحل الأمثـل لعـدم وجـود أي قيمـة موجبـة فـي سـطر دالـة الهـدف .إذن فالحـل الأمثـل هـو $(Z^* = 26, x_2 = 2, x_1 = 3)$.

ج- حالات خاصة عند تطبيق طريقة السمبلكس:

- **الحالة التي تكون فيها الشروط على شكل معادلات ومتراجحات يسارية أي ≥:**

يمكننا تحويلها إلى متراجحات يمينية ≥ بضربها بإشارة سالب، إذا كان ذلك لا يجعل الثابت الحر في الطرف الأيمن سالباً. أما إذا كان الضرب بسالب يؤدي إلى ذلك

فإننا نضيف متحولاً إضافياً إلى الطرف الأيسر مسبوقاً بإشارة سالب إلى كل متراجحة يسارية لا يمكن تحويلها إلى يمينية.

- **حالة وجود أكثر من عنصر ارتكاز واحد:**

ويتم التخلص من هذه الحالة بأن نعتمد أحد العنصرين ليكون عنصر ارتكاز ثم نتابع الحل .

- **حالة وجود أكثر من حل أمثل :**

وجدنا سابقاً في الحل البياني أن الحلول المثلى البديلة تظهر عندما يكون لدالة الهدف نفس القيمة المثلى عند أكثر من نقطة حل واحدة. وتظهر هذه الحالة عندما يتوازى خط دالة الهدف مع قيد من القيود المحددة (أي قيد من القيود التي ستكون مستغلة بالكامل عند الحل الأمثل).

أما في طريقة سمبلكس المختزلة نستدل على وجود عدد لا نهائي من الحلول عند ظهور عنصر الصفر في سطر دالة الهدف في الجدول الأخير لجداول سمبلكس الذي يعطينا الحل الأمثل الأول، لإيجاد حل أمثل آخر نختار عمود الارتكاز العمود الذي يتضمن الصفر في سطر دالة الهدف ونتابع الحل،ومن ثم بعد إيجاد حلين من الحلول المثلى نجري عملية التركيب الخطي بين هذين الحلين باستخدام العلاقة التالية $\alpha A + (1-\alpha) B$: حيث A هو الحل الأول،و B الحل الثاني،و $\alpha \in [0,1]$ حيث أي قيمة تأخذها α ضمن مجالها تعطينا حلاً أمثلاً (خياراً آخر) ولكن يعطي لدالة الهدف نفس القيمة العظمى.

وكذلك نستدل على وجود عدد لانهائي من الحلول المثلى باستخدام طريقة التحويلات الأولية عند ظهور عنصر الصفر في سطر دالة الهدف في المصفوفة الأخيرة التي تعطينا الحل الأمثل،هذا الصفر يتواجد في عمود لايشكل عناصره أحد أعمدة المصفوفة الواحدية، في هذه الحالة أيضاً لإيجاد حل أمثل آخر نختار عمود الارتكاز العمود الذي يتضمن عنصر الصفر في سطر دالة الهدف ونتابع الحل ونجري عملية التركيب الخطي بين الحلين الأمثلين لإيجاد باقي الحلول المثلى.

مثـــال على وجود أكثر من حل أمثل:

تخطط إحدى الشركات لعملياتها الإنتاجية خلال فترة زمنية مقبلـــة،حيث تقـــوم الشركة بإنتاج نوعين من المنتجات ويتطلب تصنيع كل منتج ثلاث مراحـــل إنتاجيـــة. يوضح الجدول التالي عدد الساعات اللازمة لتصنيع وحدة المنتج في كل مرحلـــة مـــن المراحل الإنتاجية وربحية المنتج بالوحدة النقدية بالنسبة للشركة.

الحد الأقصى لساعات التشغيل	وحدة المنتج الثاني	وحدة المنتج الأول	المرحلة الإنتاجية
420	6	6	الأولى
300	6	3	الثانية
240	2	4	الثالثة
	2	1	ربحية الوحدة

بفرض أن هدف إدارة الشركة تعظيم الربح من العمليـــة الإنتاجيـــة فكـــم عـــدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كل نوع من منتجات الشركة حتى يتحقق الهدف.

الحـــل:

- **طريقة سمبلكس المختزلة (الطريقة المتطورة):**

- **فروض متغيرات القرار:**

نفرض: x_1 عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع الأول.

x_2 عدد الوحدات الواجب إنتاجها من النوع الثاني.

- **كتابة النموذج العام للبرنامج الخطي:**

$$\begin{aligned} Max\,Z &= x_1 + 2x_2 \\ 6x_1 + 6x_2 &\le 420 \\ 3x_1 + 6x_2 &\le 300 \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 240 \\ x_j \ge 0 \quad & (j = 1,2) \end{aligned}$$

- **كتابة النموذج القياسي للبرنامج الخطي:**

$$\begin{aligned} Z - x_1 - 2x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 + y_1 &= 420 \end{aligned}$$

$$3x_1 + 6x_2 \quad + y_2 \quad = 300$$
$$4x_1 + 2x_2 \quad + y_3 = 240$$
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2)$$
$$y_i \geq 0 \quad (i = 1,2,3)$$

• جدول سمبلكس الأول:

	x_1	x_2	B
Z	-1	-2	0
y_1	6	6	420
y_2	3	$\boxed{6}$	300
y_3	4	2	240

نلاحظ في السطر Z أن أصغر القيم السالبة هي/ -2 / إذن عمود الارتكاز هو العمود الذي يتضمن المتغير x_2 الذي سيدخل القاعدة بدلاً من المتغير y_2 الذي سيخرج من القاعدة تاركاً مكانه للمتغير x_1، (لأن $\theta_2 = \frac{300}{6} = 50 < \theta_1 = \frac{420}{6} = 70 < \theta_3 = \frac{240}{2} = 120$) ، إذن سطر الارتكاز هو السطر الذي يتضمن المتغير y_2 وبالتالي عنصر الارتكاز هو / 6 /.

• جدول سمبلكس الثاني:

	x_1	y_2	B
Z	0	$\frac{1}{3}$	100
y_1	$\boxed{3}$	-1	120
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	50
y_3	3	$-\frac{1}{3}$	140

نلاحظ من الجدول أعلاه أننا وصلنا الحل الأمثل لعدم احتواء السطر Z على أي مركبة سالبة، إذن على الشركة أن تنتج خمسين وحدة من المنتج الثاني$(x_2 = 50)$.

وأن لا تنتج أي شيء من المنتج الأول ($x_1 = 0$) بهدف تحقيق ربح أعظمـــي قـــدره $Z^* = 100$ وحدة نقدية.

لكن نلاحظ من الجدول الأخير لسمبلكس وجود العنصر صفر في دالة الهـــدف وهذا مؤشر على وجود أكثر من حل أمثل وأكثر من خيار أمام الشركة للوصول الربح الأعظمي (لانهاية من الحلول المثلى)، لإيجاد حلاً أمثلاً آخر نختار عمـــود الارتكـــاز المتغير الذي يتضمن الصفر في دالة الهدف ونتابع الحل، إذن عمـــود الارتكـــاز هـــو العمود الذي يتضمن المتغير x_1 الذي سيدخل القاعدة بدلاً من المتغير y_1 الذي سيخرج مـــــن القاعــــــدة تاركـــــــاً مكانـــــــه للمتغيـــــــر x_1، (لأن $\theta_1 = \frac{120}{3} = 40 < \theta_2 = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100 \langle \theta_3 = \frac{140}{3} = 46.67$)، إذن سطر الارتكاز هـــو السطر الذي يتضمن المتغير y_1 وبالتالي عنصر الارتكاز هو / 3 /.

- **جدول سمبلكس الثالث :**

	y_1	y_2	B
Z	0	$\frac{1}{3}$	100
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	40
x_2	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	30
y_3	-1	$\frac{2}{3}$	20

نلاحظ من الجدول أعلاه أننا وصلنا إلى حل أمثل آخر لعدم احتواء الـــسطر Z على أي مركبة سالبة، إذن بإمكان الشركة أيضاً بهدف تحقيق ربـــح أعظمـــي قـــدره $Z^* = 100$ وحدة نقدية، أن تنتج أربعين وحدة من المنتج الأول($x_1 = 40$)، وثلاثـــين وحدة من المنتج الثاني ($x_2 = 30$)

بعد إيجاد حلين من الحلول المثلى هما:

الحل الأمثل الأول A $(x_1 = 0\ , x_2 = 50)$

و الحل الأمثل الثاني B $(x_1 = 40\ , x_2 = 30)$

نجري عملية التركيب الخطي بين هذين الحلين المثليين لإيجاد باقي الحلول المثلى باستخدام العلاقة التالية:

$$\alpha A+(1-\alpha)B \quad \text{حيث :} \quad \alpha\in[0,1]$$

حيث أي قيمة تأخذها α ضمن مجالها تعطينا حلاً أمثلاً جديداً (خياراً آخر للربح الأعظمي للشركة) ويعطي لدالة الهدف نفس القيمة العظمى.

$$\alpha=0\Rightarrow B(40,30)\Rightarrow Z^*=40+2(30)=100$$

....

....

$$\alpha=0.5\Rightarrow 0.5\ A\ +0.5\ B$$
$$=0.5(0,50)+0.5(40,30))$$
$$=\ (0,25)\ +\ (20,15))$$
$$=(20\ ,40)\Rightarrow Z^*=20+2(40)=100$$

....

....

$$\alpha=1\Rightarrow A(0,50)\Rightarrow Z^*=0+2(50)=100$$

ب- طريقة التحويلات الأولية :

- **فروض متغيرات القرار:**

نفرض: x_1ما يجب إنتاجه من المنتج الأول.

x_2ما يجب إنتاجه من المنتج الثاني.

- **كتابة النموذج القياسي للبرنامج الخطي:**

$$x_1+2x_2+\ 0y_1+0y_2+0y_3=Z$$
$$6x_1+6x_2+\ y_1 \qquad =420$$
$$3x_1+6x_2 \quad +y_2 \qquad =300$$
$$4x_1+2x_2 \qquad +y_3=240$$
$$x_j\geq 0 \qquad (j=1,2)$$
$$y_i\geq 0 \qquad (i=1,2,3)$$

• **نشكل مصفوفة الأمثال :**

$$
\begin{array}{c}
\downarrow \\
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & B \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & Z-0 \\ 6 & 6 & 1 & 0 & 0 & 420 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 300 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 240 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

نلاحظ في السطر الأول من المصفوفة أعـلاه أن أكبـر القـيم الموجبـة هـو العنصر2 ، إذن x_2سيدخل القاعدة، وعنصر الارتكـاز هـو العنـصر / 6 / ، x_1 (لأن $\theta_2 = \frac{300}{6} = 50 < \theta_1 = \frac{420}{6} = 70 \langle \theta_3 = \frac{240}{2} = 120$) بتطبيـق التحـويلات الأولية على الأسطر ندخل المتغير x_2 القاعدة بأن نجعل عنصر الارتكاز مسوياً إلـى الواحد أما باقي عناصر العمود أصفاراً. وبذلك نحصل على المصفوفة المكافئة الآتية:

$$
\xrightarrow{H_3(\frac{1}{6}), H_{23}(-1), H_{13}(-\frac{1}{3}), H_{43}(-\frac{1}{3})}
\begin{array}{c}
\downarrow \\
\begin{array}{cccccc} x_1 & y_3 & y_2 & y_1 & x_2 & B \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & Z-100 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 120 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 50 \\ 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 140 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

نلاحظ من المصفوفة أعلاه أننا وصلنا الحل الأمثل لعدم احتواء السطر Z على أي مركبـة موجبـة، إذن علـى الـشركة أن تنـتج خمـسين وحـدة مـن المنـتج الثاني($x_2 = 50$). وأن لا تنتج أي شيء من المنتج الأول ($x_1 = 0$) بهدف تحقيق ربح أعظمي قدره $Z^* = 100$ وحدة نقدية.

لكن نلاحظ من المصفوفة الأخيرة لسمبلكس وجود العنصر صفر في سـطردالة الهدف وفي عمود عناصره لا تمثل أحد أعمدة المصفوفة الواحدية وهذا مؤشـر علـى وجود أكثر من حل أمثل وأكثر من خيار أمام الـشركة للوصـول للـربح الأعظمـي (لانهاية من الحلول المثلى) ، لإيجاد حلاً أمثلاً آخر نختار عمود الارتكاز المتغير الذي

يتضمن الصفر في دالة الهدف وعناصره لاتمثل أحد أعمدة المصفوفة الواحدية ونتابع الحل ، إذن عمود الارتكاز هو عمود المتغير x_1 الذي سيدخل القاعدة وعنصر الارتكاز هو 3 /. (لأن $\theta_3 = \frac{140}{3} = 46.67$ ، $\theta_2 = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100$ ، $\theta_1 = \frac{120}{3} = 40 < $)،

نجعل عنصر الارتكاز مسوياً إلى الواحد أما باقي عناصر العمود أصفاراً. وبذلك نحصل على المصفوفة المكافئة الآتية:

$$\xrightarrow{H_2(1/3),\,H_{32}(-\frac{1}{6}),\,H_{42}(-1)} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & y_3 & y_2 & y_1 & x_2 & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & Z-100 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 40 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 30 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 20 \end{bmatrix} \end{array}$$

نلاحظ من المصفوفة أعلاه أننا وصلنا إلى حل أمثل آخر لعدم احتواء السطر Z على أي مركبة موجبة، إذن بإمكان الشركة أيضاً بهدف تحقيق ربح أعظمي قدره $Z^* = 100$ وحدة نقدية،أن تنتج أربعين وحدة من المنتج الأول($x_1 = 40$)، وثلاثين وحدة من المنتج الثاني ($x_2 = 30$)

بعد إيجاد حلين من الحلول المثلى هما:

A $(x_1 = 0 \ , x_2 = 50)$ الحل الأمثل الأول

و B $(x_1 = 40 \ , x_2 = 30)$ الحل الأمثل الثاني

نجري عملية التركيب الخطي بين هذين الحلين المثليين كما وجدنا سابقاً لإيجاد باقي الحلول المثلى وذلك باستخدام العلاقة التالية:

$$\alpha A + (1-\alpha) B \qquad \text{حيث}: \alpha \in [0,1]$$

حيث أي قيمة تأخذها α ضمن المجال تعطينا حلاً أمثلاً جديداً (مزيجاً آخر للربح الأعظمي للشركة) ويعطي لدالة الهدف نفس القيمة العظمى.

3-2- حالة تدنية التكاليف:

عندما تكون المسألة تتطلب إيجاد أصغر قيمة لتابع الهدف، ونريد إيجاد الحل الأمثل بطريقة سمبلكس المختزلة، نختار في سطر دالة الهدف أكبر القيم الموجبة لتشير إلى عمود الارتكاز ونتابع الحل بالطريقة المعتادة حتى نصل الحل الأمثل وهذا يتحقق عندما تصبح جميع العناصر في دالة الهدف غير موجبة. أو إذا كانت دالة الهدف فقط كالتالي:

$$Min\,C = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

في هذه الحالة نقوم بتحويل هذه الدالة إلى دالة أكبر قيمة وذلك بفرض $Z = -C$ فتصبح دالة الهدف الجديدة هي:

$$MaxZ = -p_1x_1 - p_2x_2 - ... - p_nx_n$$

وبعدها نتابع الحل كالعادة ، وبعد الحصول على الحل الأمثل نعود ونحسب قيمة C من العلاقة $C = -Z$ ، لكن في غالب الأحيان يكون شكل القيود فيها من نوع $(=,\geq)$ لذا يصعب تطبيق أسلوب سمبلكس الاعتيادي لذلك نلجأ إلى استخدام طريقة الثنائية التالية.

أ- مفهوم الثنائية (البرنامج الأصلي والبرنامج المرافق):

يعتمد هذا المفهوم على أنّ لكل برنامج خطي برنامجاً مرافقاً له، بحيث أنه إذا وجد حل لأحد البرنامجين فإنه يوجد حل للبرنامج الآخر وتتساوى قيمة دالة الهدف للبرنامجين عند الحل الأمثل. سنبين كيفية تكوين البرنامج المرافق وكيفية حله باستخدام طريقة السمبلكس.

ب- كيفية تكوين البرنامج المرافق: The dual program

سنفترض أنّ لدينا البرنامج الخطي الآتي الذي يتكون من دالة هدف في صورة تدنية وقيود توازن المسألة في صورة أكبر أو يساوي، ويعرف هذا البرنامج بالبرنامج الأصلي The primal program

$$MinC = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \qquad (2)$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \qquad (m)$$

$$x_1 \geq 0 \ , x_2 \geq 0 \ , \ ..., \ \ x_n \geq 0$$

البرنامج المرافق The dual program للبرنامج الأصلي هو:

$$MaxZ = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \leq p_1 \qquad (1)$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \leq p_2 \qquad (2)$$

....

$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \leq p_n \qquad (n)$$

$$y_1 \geq 0 \ , y_2 \geq 0 \ , \ ..., \ \ y_m \geq 0$$

فيما يلي نلخص طريقة كتابة المنهاج المرافق:

- بما أن دالة هدف البرنامج الأصلي في صورة تدنية فإن دالة هدف البرنامج المرافق تكتب في صورة تعظيم.
- يقابل كل قيد من قيود توازن المسألة في البرنامج الأصلي متغيراً في البرنامج المرافق ولتكن $(y_1, y_2, y_3, ..., y_m)$ بعدد متراجحات قيود توازن المسألة.
- بما أن دالة الهدف في البرنامج الأصلي في صورة تدنية، إذن دالة الهدف في البرنامج المرافق ستكون في صورة تعظيم وبالتالي قيود توازن المسألة في البرنامج المرافق ستكون أصغر من أو يساوي.
- معاملات دالة الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن في البرنامج الأصلي، وقيم الطرف الأيمن في البرنامج المرافق هي معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي.
- في البرنامج الأصلي عدد قيود توازن المسألة m وعدد متغيرات القرار n.
- في البرنامج المرافق تصبح عدد قيود توازن المسألة n وعدد متغيرات القرار m.

ملاحظة هامة: مرافق البرنامج المرافق هو البرنامج الأصلي، أي يمكن اعتبار البرنامج المرافق برنامجاً أصلياً وفي هذه الحالة يكون البرنامج الأصلي هو البرنامج المرافق له، في هذه الحالة:

- بما أن دالة هدف البرنامج الأصلي في صورة تعظيم فإن دالة هدف البرنامج المرافق تكتب في صورة تدنية.
- يقابل كل قيد من قيود توازن المسألة في البرنامج الأصلي متغيراً في البرنامج المرافق ولتكن $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$.
- بما أن دالة الهدف في البرنامج الأصلي في صورة تعظيم وقيود توازن المسألة فيها أصغر من أو تساوي ، إذن دالة هدف البرنامج المرافق ستكون في صورة تدنية وقيود توازن المسألة في البرنامج المرافق ستكون أكبر من أو يساوي.
- معاملات دالة الهدف في البرنامج المرافق هي قيم الطرف الأيمن في البرنامج الأصلي، وقيم الطرف الأيمن في البرنامج المرافق هي معاملات دالة الهدف في البرنامج الأصلي.
- في البرنامج الأصلي عدد قيود توازن المسألة n وعدد متغيرات القرار m .
- في البرنامج المرافق تصبح عدد قيود توازن المسألة m وعدد متغيرات القرار n.

ج – مثال يوضح العلاقة بين البرنامج الأصلي والمنهاج المرافق:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$Min\,C = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

لإيجاد البرنامج المرافق للبرنامج الخطي السابق نجد أن دالة الهدف في صورة تدنية ولذلك يجب أن تكون قيود توازن المسألة في صورة أكبر من أو يساوي، لذلك نضرب المتراجحة الأولى بـ / -1 / فتتغير اتجاه المتراجحة لتصبح كما يلي:

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ge -b_1$$

أما القيد الثالث باعتباره في صورة معادلة نستبدله بالقيدين التاليين:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3$$

نضرب المتراجحة الأولى بـ / -1 / لتحويلها إلى صورة أقل من أو يساوي ونحصل على: $-a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \ge -b_3$

بهذه التعديلات نحصل على البرنامج الأصلي التالي:

$$\begin{aligned} MinC = \ & p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \\ & -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \ge b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ge b_2 \\ & -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 \ge -b_3 \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ge b_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

والبرنامج المرافق يكتب كما يلي:

$$\begin{aligned} MaxZ = \ & b_1y_1 + b_2y_2 - b_3y_3 \\ & -a_{11}y_1 + a_{21}y_2 - a_{31}y_3 \le p_1 \\ & -a_{12}y_1 + a_{22}y_2 - a_{32}y_3 \le p_2 \\ & -a_{13}y_1 + a_{23}y_2 - a_{33}y_3 \le p_3 \\ & y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

وحيث y_3 غير محددة الإشارة.

نوجد حلاً البرنامج المرافق باستخدام طريقة السمبلكس العادية ،ومن ثم نصل إلى نتائج الحل الأمثل للبرنامج الأصلي من الجدول الأخير كما يوضحه المثال التالي.

مثـــال:

افرض أنّ المطلوب شراء كمية معينة من لحوم الغنم والدجاج والبقر بأقل ثمن ممكن بحيث:

- تحتوي على الأقل على 6 كيلو غرام من البروتين.
- لا تزيد كمية الدهن عن 10 كيلو غرام.
- لا تقل كمية لحم الغنم عن 15 كيلو غرام.
- لا تزيد كمية الماء عن 30 كيلو غرام.

علماً أنّ نسبة وجود المادة الغذائية في الكيلو غرام الواحد من كل نوع هي كما مبين في الجدول التالي:

	غنم	دجاج	بقر
بروتين	0.15	0.15	0.20
دهن	0.25	0.15	0.20
ماء	0.60	0.70	0.60

وثمن كيلوغرام الواحد لكل من الغنم والدجاج والبقر هي على التوالي: 18,8,12 وحدة نقدية.

الحـل:

- **نفترض أن:** x_1 كمية لحم الغنم.

x_2 كمية لحم الدجاج.

x_3 كمية لحم البقر.

- **البرنامج الأصلي:**

$$\begin{aligned}
&\text{MinC} = 12x_1 + 8x_2 + 18x_3 \\
&\qquad 0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.20x_3 \geq 6 \\
&\qquad 0.25x_1 + 0.15x_2 + 0.20x_3 \leq 10 \\
&\qquad 0.60x_1 + 0.70x_2 + 0.60x_3 \leq 30 \\
&\qquad x_1 \geq 15 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

نعيد كتابة البرنامج الأصلي بحيث تصبح متراجحات قيود توازن المسألة بصورة $\geq$على اعتبار أن المشكلة هي تدنية تكاليف فيصبح على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&MinC = 12x_1 + 8x_2 + 18x_3 \\
&\qquad 0.15x_1 + 0.15x_2 + 0.20x_3 \geq 6 && (1) \\
&\qquad -0.25x_1 - 0.15x_2 - 0.20x_3 \geq -10 && (2) \\
&\qquad -0.60x_1 - 0.70x_2 - 0.60x_3 \geq -30 && (3) \\
&\qquad x_1 \geq 15 && (4) \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن لكل من المتراجحتين (2) ، (3) يتضمن قيماً سالبة لذلك لا يمكن إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الأصلي بالطريقة العادية لذا نلجأ إلى كتابة البرنامج المرافق ونوجد حله الأمثل ومنه نستنتج الحل الأمثل للبرنامج الأصلي.

- **البرنامج المرافق:**

عدد قيود توازن المسألة للبرنامج الأصلي أربعة إذن عدد متغيرات البرنامج المرافق أربعة.

$$\begin{aligned}
&MaxZ = 6y_1 - 10y_2 - 30y_3 + 15y_4 \\
&0.15y_1 - 0.25y_2 - 0.60y_3 + y_4 \le 12 \\
&0.15y_1 - 0.15y_2 - 0.70y_3 \le 8 \\
&0.20y_1 - 0.20y_2 - 0.60y_3 \le 18 \\
&y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0
\end{aligned}$$

- **البرنامج القياسي للبرنامج المرافق:**

$$\begin{aligned}
&Z - 6y_1 + 10y_2 + 30y_3 - 15y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 + 0.y_7 = 0 \\
&0.15y_1 - 0.25y_2 - 0.60y_3 + y_4 + y_5 = 12 \\
&0.15y_1 - 0.15y_2 - 0.70y_3 + y_6 = 8 \\
&0.20y_1 - 0.20y_2 - 0.60y_3 + y_7 = 18 \\
&y_j \ge 0; j = 1,2,...,7
\end{aligned}$$

- **جدول سمبلكس الأول:**

↓

	y_1	y_2	y_3	y_4	B
Z	-6	10	30	-15	0
y_5 ←	0.15	-0.25	-0.60	$\boxed{1}$	12
y_6	0.15	-0.15	-0.70	0	8
y_7	0.20	-0.20	-0.60	0	18

نلاحظ من الجدول السابق أن:

$$(y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 0, Z = 0)$$

• جدول سمبلكس الثاني :

	y_1	y_2	y_3	y_5	B
Z	-3.75	6.25	21	15	180
y_4	0.15	-0.25	-0.60	1	12
y_6	$\boxed{0.15}$	-0.15	-0.70	0	8
y_7	0.20	-0.20	-0.60	0	18

من الجدول الثاني يتبين لنا أن: $(y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 12, Z = 180)$

• الجدول الثالث لسمبلكس:

	y_6	y_2	y_3	y_5	B
Z	$\boxed{25}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\boxed{15}$	380
y_4	-1	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1	4
y_1	$\frac{20}{3}$	-1	$-\frac{14}{3}$	0	$\frac{160}{3}$
y_7	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{22}{3}$

نلاحظ من الجدول الأخير لسمبلكس أن حل البرنامج المرافق هو :

$$(y_1^* = \frac{160}{3}, y_2^* = 0, y_3^* = 0, y_4^* = 4, Z^* = 380)$$

ومنه نستنتج الحل الأمثل للبرنامج الأصلي وهو :

$$(x_1^* = 15, x_2^* = 25, x_3^* = 0)$$

الذي يعطي لدالة الهدف القيمة الدنيا:

$$C^* = 12(15) + 8(25) + 18(0) = 380$$

نلاحظ أن: $Z^* = C^* = 380$

مثال:

إدارة إحدى المستشفيات تفكر في إيجاد أفضل مزيج من الطعام المقدم لمرضى المستشفى ،فهي تقوم يومياً بتقديم نوعين من الطعام A_1 , A_2 تبلغ تكلفة الأول A_1

(90) وحدة نقدية لوجبة الطعام الواحدة وتبلغ تكلفة النوع الثاني A_2 (75) وحدة نقدية لوجبة الطعام الثانية ، ويدخل في تركيبه كل من هاتين الوجبتين ثلاث مواد أولية هي B_1, B_2, B_3 ويجب أن تكون الكميات المتوفرة من هذه المواد الثلاث لا تقل عن (60, 80, 120) وحدة ، وإذا كان معلوماً:

أن الوجبة من النوع الأول A_1 تحتاج إلى:(6) وحدات من المادة B_1 و(2) وحدة من المادة B_2 و(2) وحدة من المادة B_3 .

وأن الوجبة من النوع الثاني A_2 تحتاج إلى :(4) وحدات من المادة B_1 و (8) وحدة من المادة B_2 و (3) وحدة من المادة B_3 .

المطلوب: مساعدة إدارة المستشفى في إيجاد أفضل مزيج من نوعي الطعام وبما يحقق أقل التكاليف.

الحل:

نفرض: x_1 ما يجب تحضيره من النوع الأول من الطعام A_1

x_2 ما يجب تحضيره من النوع الثاني من الطعام A_2

• **البرنامج الأصلي:**

$$\begin{aligned} MinC &= 90x_1 + 75x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 &\geq 120 \quad (1) \\ 2x_1 + 8x_2 &\geq 80 \quad (2) \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 60 \quad (3) \\ x_1 \geq 0&, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

• **البرنامج المرافق:**

عدد قيود توازن المسألة للبرنامج الأصلي أربعة إذن عدد متغيرات البرنامج المرافق أربعة.

$$\begin{aligned} MaxZ &= 120y_1 + 80y_2 + 60y_3 \\ 6y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\leq 90 \\ 4y_1 + 8y_2 + 3y_3 &\leq 75 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

• البرنامج القياسي للبرنامج المرافق:

$$Z-120\,y_1-80\,y_2-60\,y_3+0.y_4+0.y_5=0$$
$$6\,y_1+2\,y_2+2\,y_3+y_4=90$$
$$4\,y_1+8\,y_2+3\,y_3+y_5=75$$
$$y_j\geq 0;\ j=1,2,\ldots,5$$

• جدول سمبلكس الأول:

	y_1	y_2	y_3	B
Z	-120	-80	-60	0
y_4	6	2	2	90
y_5	4	8	3	75

نلاحظ من الجدول السابق أن: $(y_1=0, y_2=0, y_3=0, Z=0)$

• جدول سمبلكس الثاني :

	y_4	y_2	y_3	B
Z	20	-40	-20	1800
y_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	15
y_5	$-\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{3}$	15

من الجدول الثاني يتبين لنا أن: $(y_1=15, y_2=0, y_3=0, Z=1800)$

• الجدول الثالث لسمبلكس:

	y_4	y_5	y_3	B
Z	16	6	-10	1890
y_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{57}{4}$
y_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$

من الجدول الثالث لسمبلكس يتبين لنا أن:

$$(y_1=\frac{57}{4}, y_2=\frac{9}{4}, y_3=0, Z=1890)$$

• الجدول الرابع لسمبلكس:

	y_4	y_5	y_2	B
Z	12	12	40	1980
y_1	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	-1	12
y_3	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	4	9

نلاحظ من الجدول الأخير لسمبلكس أن حل البرنامج المرافق هو:

$$(y_1^* = 12, y_2^* = 0, y_3^* = 9, Z^* = 1980)$$

ومنه نستنتج الحل الأمثل للبرنامج الأصلي وهو:

$$(x_1^* = 12, x_2^* = 12)$$

الذي يعطي لدالة الهدف القيمة الدنيا:

$$C^* = 90(12) + 75(12) = 1980$$

نلاحظ أن:

$$Z^* = C^* = 1980$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- مصنع لصناعة الأثاث المنزلي يقوم بإنتاج نوعين من الأثاث،كراسي وطاولات خشبية، وفي المصنع ثلاث وحدات إنتاجية (قسم الصنع، قسم التجميع، قسم الدهان)، الجدول التالي يوضح لنا الوضع الإنتاجي لهذا المصنع.

الطاقة الإنتاجية بالشهر	عدد الساعات اللازمة لإنتاج سلعة		القسم
	الطاولات	الكراسي	
1500	1	3	الصنع
1000	1	1	التجميع
800	0	2	الدهان
	2	6	العوائد بمئات الوحدات النقدية

المطلوب: إيجاد حجم الإنتاج الشهري الأمثل والذي يحقق أفضل العوائد الممكنة للمصنع.

2 – تمتلك شركة لتكرير البترول خطين للإنتاج ، ينتج الخط الأول في اليوم 1000 برميل من البنزين، و 4000 آلاف برميل من المازوت، و 6000 آلاف برميل من الزيت المعدني.وينتج الخط الثاني في اليوم 4000 آلاف برميل من البنزين، و 4000 آلاف برميل من المازوت،و 2000 برميل من الزيت المعدني، ويكلف تشغيل الخط الأول يومياً 1000 يورو،والخط الثاني يومياً 1500 ألف يورو.

إذا تلقت الشركة طلبات على الشكل التالي: 80000 برميل من البنزين، و 160000 برميل من المازوت، و 120000 برميل من الزيت المعدني.

المطلوب: تحديد عدد أيام عمل كل خط من خطوط الإنتاج لتلبية الطلبات التي التزمت بها الشركة، على أن تكون النفقات أقل ما يمكن.

3 – شركة صناعية تتخصص في إنتاج ثلاثة نوعيات من المنتجات هامش الربح للوحدة من كل منها كان كالآتي:

النوع الأول: 20 وحدة نقدية، النوع الثاني: 40 وحدة نقدية، النوع الثالث: 30 وحدة نقدية، ويمر كل نوع من هذه المنتجات على ثلاثة أقسام إنتاجية بغرض تصنيعها لتكون تامة الصنع، وكان الوقت المطلوب لإنتاج الوحدة الواحدة من كل نوع من هـذه المنتجات في تلك الأقسام الإنتاجية كالتالي:

القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	المنتج
1 ساعة	2 ساعة	2 ساعة	**النوع الأول**
3 ساعة	1 ساعة	4 ساعة	**النوع الثاني**
2 ساعة	2 ساعة	2 ساعة	**النوع الثالث**

المطلوب: تحديد الإنتاج الأمثل الذي يصل بالأرباح المحققة إلى أقصى حد لهـا فـي ضوء الطاقة المتاحة بالأقسام الإنتاجية وهي: 60 ساعة بالقسم الأول، 40 ساعة بالقسم الثاني، 80 ساعة بالقسم الثالث.

4 – تقوم إحدى الشركات الغذائية بإنتاج غذاء للأطفال مكون من مادتين أساسيتين هما A و B، تكلفة الوحدة من المادة الأساسية A تساوي 3 وحـدة نقديـة، وتكلفـة الوحدة من المادة الأساسية B تساوي 5 وحدة نقدية.

تبين للإدارة أن كلاً من المادتين الأساسيتين تحتـوي علـى عناصـر غذائيـة بدرجات متفاوتة،كما أن المختبر قد حدد الحدود الدنيا لتوفر هذه العناصر فـي المنـتج النهائي كما هو مبين في الجدول التالي:

الحد الأدنى اللازم لتوفره في المنتج النهائي	درجة توفر العناصر في المادة B	درجة توفر العناصر في المادة A	العناصر الغذائية
18 وحدة	2	6	بروتين
16 وحدة	4	2	فيتامين A
20 وحدة	10	2	حديد

المطلوب: تحديد الكميات التي تستخدمها الشركة الغذائية في كل من المـادتين A و B لتكوين الغذاء الجديد بمواصفاته المحددة وبحيث تصبح النفقات أقل ما يمكن.

5 – مؤسسة لديها 70 وحدة من النحاس و 24 وحدة من النيكل وتنـتج نـوعين مـن الآلات:

النوع الأول: ويحتاج إلى 20 وحدة من النحاس و 3 وحدات من النيكل.

النوع الثاني: ويحتاج إلى 10 وحدات من النحاس و 6 وحدات من النيكل.

إذا علمت أن ربح المؤسسة في الآلة الأولى يساوي 10 وحدة نقدية وفي الآلـــة الثانية 5 وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع.

6- تنتج إحدى المؤسسات الكيميائية نوعين من المحاليل الكيميائية يستدعي مرور كـــل منها بثلاثة أقسام إنتاجية على التوالي لغرض تصنيعها. الوقت اللازم في كل قـــسم إنتاجي وربح المنتج في الجدول أدناه.احسب كمية الإنتاج من كل محلـــول بحيـــث يحقق أعلى ربح ممكن.

ربح الساعة بالوحدة النقدية	الأقسام الإنتاجية			نوع المنتج
	(3)	(2)	(1)	
9	4.5	6	10	A
7	18	6	5	B
	81	36	50	الساعات المتاحة في كل قسم

الفصل السادس
النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات
نموذج ليونتيف

The Static Input-Output Model
Leontief Model

يطلق على النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات اسم نموذج التشابكات القطاعية، ويأتي هذا النموذج من بين أهم النماذج المستخدمة في التخطيط سواءً على المستوى القومي أو المستوى القطاعي. يعتبر العالم الاقتصادي ليونتيف Leontief الذي قام بأبحاثه عن بنية الاقتصاد الأمريكي في عام 1931 في جامعة اكسفورد أول من وضع نموذجاً اقتصادياً لدراسة العلاقة بين المدخلات والمخرجات للاقتصاد الأمريكي.

إن الهدف الأساسي من دراسة نموذج المدخلات والمخرجات هو التحليل الكمي للتشابك بين القطاعات الاقتصادية خلال قيامها بنشاطها الإنتاجي، وبيان العلاقات بين المنتجين باعتبارهم مشترين للعناصر الداخلة في الإنتاج (المدخلات) وبائعين لمنتجاتهم (المخرجات) إلى المستخدمين النهائيين.

في جدول المدخلات والمخرجات توضع النشاطات الاقتصادية بمختلف أنواعها في عدد محدود من القطاعات الإنتاجية، ويختلف عدد تلك القطاعات من جدول إلى آخر بحسب درجة التفصيل في ذلك الجدول. فإذا كان الجدول على درجة عالية من التفصيل كان عدد القطاعات الإنتاجية فيه كثيراً ويصل إلى ثلاثمائة قطاع أو أكثر، وإذا كان الجدول مجملاً وكانت المعلومات الواردة فيه مكثفة كان عدد القطاعات الإنتاجية فيه صغيراً لا يزيد عن عدد أصابع اليد في بعض الأحيان.

§1- – أساسيات نموذج المدخلات والمخرجات

1-1 استخدامات النموذج:

بشكل عام يسعى تحليل جدول المدخلات والمخرجات لاقتصاد دولة ما، إلى توضيح ما هو كائن للاستدلال منه على ما يتوقع أن يكون، وتتلخص الاستخدامات الأساسية لهذا التحليل بالنقاط التالية:

- تحليل الهيكل الاقتصادي للدولة.
- التنبؤ بالتطورات المحتملة في كل قطاع من القطاعات.
- رسم خطط الإنتاج وحل مشكلة الاختيار بين الخطط البديلة التي يمكن إتباعها.

2-1 الخصائص العامة لجدول المدخلات والمخرجات:

- يوضع جدول المدخلات والمخرجات غالباً لسنة معينة .
- يتوقف اختيار القطاعات المشكلة لجدول المدخلات والمخرجات على هدف الدراسة.
- يركز جدول المدخلات والمخرجات على التشابكات بين القطاعات المكونة للجدول.
- تتضح أهمية جدول المدخلات والمخرجات بالنسبة للتخطيط الإقليمي لإمكانية استخدامه على جميع المستويات الاقتصادية، على المستوى القومي، أو على مستوى إقليم معين، أو لمدينة معينة من مدن الدولة، أو حتى على صعيد الوحدة المنتجة.

3-1 – فرضيات النموذج العام لجدول المدخلات والمخرجات:

- سنفترض أن الاقتصاد مكون من n قطاع إنتاجي.
- بصورة موازية لتصنيف النشاطات الإنتاجية في قطاعات، تقسم المنتجات الاقتصادية المختلفة من سلع وخدمات إلى نفس العدد n من الأنواع.
- عدم وجود منتجات مشتركة، أي كل قطاع إنتاجي يتخصص بصنع نوع واحد من المنتجات، وهذا يعني أن كل منتج اقتصادي يجري صنعه في قطاع واحد فقط.
- دالة الإنتاج خطية ومتجانسة من الدرجة الأولى، أي أن كل عملية إنتاجية تتطلب عناصر الإنتاج بنسب ثابتة، وأن هذه العناصر تتزايد بنسبة زيادة الإنتاج.
- ثبات الأسعار النسبية، وذلك لأن تغير هذه الأسعار قد يؤدي إلى تغير نسب مزج عناصر الإنتاج ومن ثم المعاملات الفنية للإنتاج.

§-2 – الشكل العام لنموذج المدخلات والمخرجات:

من المعروف أن عملية الإنتاج في القطاعات المختلفة هي عملية متشابكة، فكل قطاع يعتمد في إنتاجه على قطاعات أخرى لتأمين بعض المواد الوسيطة- نصف المصنعة- الداخلة في إنتاجه المتخصص، نعبر عن تشابك القطاعات بواسطة جدول التشابك القطاعي وذلك بطريقتين هما:

• الأولى: ويتم التعبير عن التشابك القطاعي بدلالة كميات المواد المنتجة (بشكلها الطبيعي) وبوحدات قياسية مناسبة.

• الثانية: ويتم التعبير عن التشابك القطاعي بدلالة قيم المواد المنتجة (بسعر المنتج أو بسعر المستهلك) وبوحدات نقدية ملائمة.

سننظر إلى عملية تحليل التشابك القطاعي في كلتا الطريقتين السابقتين على أنها: عملية سكونية ثابتة، لا تتغير فيها مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة، لا سيما وأن عملية التحليل ستكون قصيرة الأجل (عام مثلاً)، تاركين تحليل التشابك القطاعي الديناميكي لفترة طويلة الأجل، والتي تأخذ بعين الاعتبار تغير مقادير أو قيم المنتجات المتداخلة (بسبب التقدم التقني أو التضخم النقدي... الخ) للمراحل الدراسية المتقدمة. الجدول التالي يعطينا صورة واضحة لجدول المدخلات والمخرجات على مستوى اقتصاد قومي مغلق تم تقسيم نشاطه الإنتاجي إلى n قطاع.

مدخلات / مخرجات	القطاعات المستخدمة (المستهلكة) 1 2.... j.... n	المخرجات الوسيطة $L_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	الطلب النهائي Y_i	المخرجات النهائية X_i
1	$x_{11}\ x_{12}\dots x_{1j}\dots x_{1n}$	L_1	Y_1	X_1
2	$x_{21}\ x_{22}\dots x_{2j}\dots x_{2n}$	L_2	Y_2	X_2
...	....	.....	.....	....
i	$x_{i1}\ x_{i2}\dots x_{ij}\dots x_{in}$	L_i	Y_i	X_i
....	....	.....	.....	.....
n القطاعات المنتجة (البائعة)	$x_{n1}\ x_{n2}\dots x_{nj}\dots x_{nn}$	L_n	Y_n	X_n
$C_j=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	$C_1\ C_2\dots C_j\dots Cn$			
V_j القيمة المضافة	$V_1\ V_2\dots V_j\dots V_n$		$V=Y$	
Y_j المدخلات الإجمالية	$X_1\ X_2\dots X_j\dots X_n$			$X=\sum_{j=1}^{n} X_j=\sum_{i=1}^{n} X_i$

من الجدول السابق يمكن ملاحظة ما يأتي:

1- إن كل قطاع يتكرر مرتين: المرة الأولى على الأسطر وعلى شكل قطاع منتج (بائع) ونعطيه الرمز i حيث: $(i = 1,2,3,...,n)$ ،فالقطاعات المنتجة هي القطاعات المتمثلة في الأسطر. والأخرى على شكل قطاع مستخدم (مستهلك) ونعطيه الرمز j حيث: $(j = 1,2,3,...,n)$ ، أي القطاعات المستخدمة متمثلة بالأعمدة.

2- سنقوم بتقدير منتجات كل القطاعات بنفس الوحدة، أي سنعتبر منتَج القطاع مساوياً الكمية العينية مضروبة بالسعر الوسطي الذي يباع به المنتَج،وبذلك يمكننا جمع مكونات كل سطر في جدول المدخلات والمخرجات،ومكونات كل عمود فيه.

3- البيانات الخاصة بمخرجات كل قطاع $(i = 1,2,3,...,n)$ تقرأ سطراً سطراً.

- فالقطاع الأول $(i = 1)$ يخرج ما قيمته: x_{11}لنفسه ، و x_{12}للقطاع الثاني، و x_{13} للقطاع الثالث... و x_{1n} للقطاع n.

يبلغ مجموع مخرجات القطاع الأول من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + ... + x_{1n}$

X_1 المخرجات الكلية في القطاع الأول: منه L_1 عبارة عن مخرجات القطاع الأول من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه، والباقي $Y_1 = X_1 - L_1$ عبارة عن مخرجات القطاع الأول لسد حاجة الطلب النهائي للمستهلكين النهائيين، (أي مبيعات القطاع الأول من السلع النهائية لقطاع الأعمال: القطاع العائلي، القطاع الحكومي).

- والقطاع الثاني $(i = 2)$ يخرج ما قيمته: x_{21}للقطاع الأول، و x_{22}لنفسه، و x_{23}للقطاع الثالث ... و x_{2n} للقطاع n .

يبلغ مجموع مخرجات القطاع الثاني من السلع الوسيطة لجميع القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + ... + x_{2n}$

X_2 المخرجات الكلية في القطاع الثاني: منه L_2 عبارة عن مخرجات القطاع الثاني من السلع الوسيطة لجميع القطاعات، والباقي $Y_2 = X_2 - L_2$ عبارة عن مخرجات القطاع الثاني لسد حاجة الطلب النهائي للمستهلكين النهائيين، (أي مبيعات القطاع الثاني من السلع النهائية لقطاع الأعمال: القطاع العائلي، القطاع الحكومي).

- وهكذا القطاع $(i = n)$ يخرج ما قيمته: x_{n1} للقطاع الأول و x_{n2} للقطاع الثاني و x_{n3} للقطاع الثالث ... و x_{nn} لنفسه.

يبلغ مجموع مخرجات القطاع n من السلع الوسيطة لباقي القطاعات بما فيه نفسه ما قيمته: $L_n = x_{n1} + x_{n2} + x_{n3} + ... + x_{nn}$

X_n المخرجات الكلية في القطاع n: منه L_n عبارة عن مخرجات القطاع n من السلع الوسيطة لجميع القطاعات، والباقي $Y_n = X_n - L_n$ عبارة عن مخرجات القطاع n لسد حاجة الطلب النهائي للمستهلكين النهائيين، (أي مبيعات القطاع n من السلع النهائية لقطاع الأعمال: القطاع العائلي، القطاع الحكومي).

4- البيانات الخاصة باستخدامات كل قطاع $(j = 1,2,3,...,n)$ تقرأ عموداً عموداً.

- فالقطاع الأول $j = 1$ يدخل (يستخدم) ما قيمته: x_{11} من نفسه ، و x_{21} من القطاع الثاني ، و x_{31} من القطاع الثالث... و x_{n1} من القطاع n.

وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع الأول (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + ... + x_{n1})$.

X_1 المدخلات الإجمالية في القطاع الأول:منه C_1 عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_1 = X_1 - C_1$ القيمة المضافة في القطاع الأول (أجور ورواتب، فائدة على رأس المال، أرباح).

- والقطاع الثاني $(j = 2)$ يدخل ما قيمته: x_{12} من القطاع الأول، و x_{22} من نفسه ، و x_{32} من القطاع الثالث ... و x_{n2} من القطاع n.

وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع الثاني (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_2 = x_{12} + x_{22} + x_{32} + ... + x_{n2})$.

X_2 المدخلات الإجمالية في القطاع الثاني: منه C_2 عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_2 = X_2 - C_2$ القيمة المضافة في القطاع الثاني.

- وهكذا إلى القطاع $(j = n)$ يدخل ما قيمته: x_{1n} من القطاع الأول، و x_{2n} من القطاع الثاني و x_{3n} من القطاع الثالث ... و x_{nn} من القطاع نفسه. وبذلك يبلغ مجموع مستلزمات الإنتاج الوسيطة في القطاع n (المدخلات الوسيطة) ما قيمته: $(C_n = x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + ... + x_{nn})$.

X_n المدخلات الإجمالية في القطاع n: منها C_n عبارة عن مستلزمات إنتاج، والباقي $V_n = X_n - C_n$ القيمة المضافة في القطاع n.

5- إذن بشكل عام:

- ➢ x_{ij} هو ذلك الجزء من مخرجات القطاع i والذي يستخدم كمدخلات في القطاع j، أو بعبارة أخرى هو ذلك الجزء الذي يدخله القطاع j من إنتاج القطاع i.
- ➢ قد يكون أحد القطاعات (مثلاً الثاني) ليس بحاجة لمنتجات أحد القطاعات ولـيكن (مثلاً الثالث)، عندها تكون $x_{32} = 0$.
- ➢ Y_i هو ذلك الجزء من إنتاج القطاع i الذي يتبقى بعد استيفاء حاجة مختلف القطاعات المنتجة والذي يمثل الطلب النهائي (ويتجه للاستهلاك، الاستثمار، ... الخ) على منتجات هذا القطاع.
- ➢ $Y = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ قيمة المنتجات النهائية المتولدة في الاقتصاد (الناتج القومي).
- ➢ $V = V_1 + V_2 + ... + V_n$ القيمة المضافة في الاقتصاد القومي، أو عوائد عناصر الإنتاج ويساوي الدخل القومي.
- ➢ مجموع القيم المضافة للقطاعات المستخدمة (الدخل القومي) يساوي مجموع الطلب النهائي للقطاعات المنتجة (الناتج القومي)، أي: $V = Y$.
- ➢ إجمالي المخرجات يساوي إلى إجمالي المدخلات ، حيث نلاحظ أن المخرجات الإجمالية X_i لكل قطاع يساوي إلى مدخلاته X_j الإجمالية.
- ➢ الإنتاج الإجمالي في الاقتصاد هو: $X = X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_n$

§-3 – الصيغة الرياضية للنموذج:

بناءً على ما تقدم نستطيع صياغة جدول المدخلات والمخرجات بمجموعة من المعادلات الخطية كما يلي:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+...+x_{1j}+...+x_{1n}+Y_1=X_1$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+...+x_{2j}+...+x_{2n}+Y_2=X_2$$
....
$$x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+...+x_{ij}+...+x_{in}+Y_i=X_i \qquad (1)$$
....
$$x_{n1}+x_{n2}+x_{n3}+...+x_{nj}+...+x_{nn}+Y_n=X_n$$

يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية (1) بشكل مختصر على الشكل التالي:

$$(x_{i1}+x_{i2}+...+x_{in})+Y_i=X_i \qquad ;i=1,2,\dots,n$$

نسمي هذه العلاقة بميزان الإنتاج في القطاع i، حيث مجموع ما يذهب من المنتج إلى الاستخدام الوسيط $(x_{i1}+x_{i2}+...+x_{in})$ في كل القطاعات الإنتاجية وما يذهب إلى الاستخدام النهائي Y_i يساوي إلى كمية ما يصنع من المنتج في القطاع i .

باعتبار أن x_{ij} تعبر عن ما يستخدمه القطاع j من سلع وسيطة من منتج القطاع i ويتناسب مع كمية المنتج X_j في القطاع j، نرمز لمعامل التناسب بالرمز a_{ij} حيث:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j} \qquad (2)$$

نسمي المعامل a_{ij} المعامل الفني Technical Coefficient حيث يمثل اقتصادياً مقدار ما يستخدم القطاع j من السلع الوسيطة، التي ينتجها القطاع i، كي يصنع القطاع j وحدة واحدة من منتجه.

نلاحظ أن: $0 \le a_{ij} < 1$ ، أي a_{ij} غير سالب، لأن $x_{ij} \ge 0$ غير سالب، و $X_j > 0$ موجباً.

- عندما $a_{ij}=0$ ، هذا يعني أن j لا يحتاج لمستلزمات من القطاع i لإنتاج وحدة من القطاع j، أي لا يوجد تدفق قطاعي من القطاع i إلى القطاع j $(x_{ij}=0)$.
- و $a_{ij} \ne 1$ ، لأنه إذا كان $a_{ij}=1$ ، هذا يعني أن $x_{ij}=X_j$ وهذا غير ممكن، لأن كمية السلع الوسيطة x_{ij}، التي يستخدمها القطاع j في صنع منتجه ، أقل من كمية المنتج X_j .

➤ $a_{ij} < 1$ لأن ثمن منتج القطاع j هو دوماً أكبر من ثمن كل السلع الوسيطة، التي يستخدمها القطاع في الإنتاج.فإذا أريد صنع واحدة من منتج القطاع j فإن أثمان الكميات المستخدمة من السلع الوسيطة ستكون هي عناصر العمود رقم j في المصفوفة A ، لهذا فإن مجموع المعاملات الفنية في كل عمود من أعمدة المصفوفة A سيكون أقل من الواحد.

§-4 – الشكل المصفوفي لنموذج المدخلات والمخرجات:

من العلاقة (2) نستنتج مايلي:

$$x_{ij} = a_{ij}.X_j \qquad (3)$$

بتعويض x_{ij} في جملة المعادلات (1) بقيمتها من العلاقة (3) فنحصل على جملة المعادلات الآتية:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + ... + a_{1j}X_j + ... + a_{1n}X_n + Y_1 = X_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + ... + a_{2j}X_j + ... + a_{2n}X_n + Y_2 = X_2$$
$$..$$
$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_n + Y_i = X_i \qquad (4)$$
$$..$$
$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 + ... + a_{nj}X_j + ... + a_{nn}X_n + Y_n = X_n$$

نكتب جملة المعادلات الخطية (4) المتضمنة n معادلة خطية بـ n مجهول بالشكل المصفوفي على اعتبار أن المعاملات الفنية a_{ij} والطلبات النهائية على المنتجات Y_i معلومة ، وكمية المنتجات X_i وهي نفسها المدخلات الكلية مجهولة فنحصل على التالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_j \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_i \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} \qquad (5)$$

وبالتالي تكتب العلاقة (5) بالشكل المصفوفي التالي:

$$A_{(n,n)} \cdot X_{(n,1)} + Y_{(n,1)} = X_{(n,1)} \qquad (6)$$

حيث: A مصفوفة المعاملات الفنية، Y شعاع الطلبات النهائية من المنتجات، X شعاع المنتجات المطلوب إيجاد قيمها. أي أن:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_i \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ Xi \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix}$$

§-5 – حل النموذج :

هناك العديد من الطرائق التي يمكن استخدامها لحل نماذج المدخلات والمخرجات، وجميعها لا تختلف من حيث أسلوب الحل، سنتناول الطريقة الأكثر استخداماً وهي طريقة مقلوب مصفوفة المعاملات، (حيث Y, X, A مصفوفات) بالعودة إلى العلاقة (6) نستطيع أن نكتب: $X = A \cdot X + Y$

ننقل الجداء $A.X$ إلى الطرف الأيسر فنجد:

$$X - A.X = Y$$

وبإخراج X في الطرف الأيسر من اليمين عاملاً مشتركاً نجد:

$$[I - A]X = Y \qquad (7)$$

حيث: I هي مصفوفة واحدية من مرتبة مصفوفة المعاملات الفنية A نفسها. $[I - A]$ تسمى بمصفوفة ليونتيف.

إذا كانت المصفوفة $[I - A]$ غير شاذة تكون قابلة للقلب، وبالتالي إذا ضربنا طرفي العلاقة رقم (7) من اليسار بمقلوب مصفوفة ليونتيف $[I - A]^{-1}$ سنجد العلاقة الآتية:

$$[I - A]^{-1}.[I - A].X = [I - A]^{-1}.Y$$

ولما كان الجداء $[I - A]^{-1}.[I - A] = I$ و $IX = X$ فالعلاقة السابقة تكتب كما يلي :

$$X = [I - A]^{-1}.Y \qquad (8)$$

7 – وضح جدول التشابكات القطاعية للعام القادم 2005.

الحـــل:

1- المدخلات الوسيطة للقطاعات: استخدم قطاع الزراعة ما قيمته: 100 مليون وحـــدة نقدية من منتجاته، و ما قيمته 200 مليون وحدة نقدية من القطاع الصناعي، و 150 مليون وحدة نقدية من قطاع الخدمات، وبذلك فقد بلغ مجموع مدخلاتــــه الوســـيطة 450 مليون وحدة نقدية $C_1 = 100 + 200 + 150 = 450$.

بالأسلوب نفسه نلاحظ أن مجموع المدخلات الوسيطة في القطاع الصناعي قـــد بلغ $C_2 = 50 + 300 + 450 = 800$ مليون وحدة نقدية،

وفي قطاع الخدمات قد بلـــغ : $C_3 = 20 + 100 + 200 = 320$ مليـــون وحـــدة نقدية.

أما بالنسبة للمخرجات الوسيطة للقطاعات: نلاحظ أن قطاع الزراعة قد باع ما قيمته 100 مليون وحدة نقدية لنفسه للاستمرار في العملية الإنتاجية، وقد بـــاع للقطـــاع الصناعي ما قيمته 50 مليون وحدة نقدية ولقطاع الخدمات ما قيمته 20 مليـــون وحـــدة نقديـــة ، وبـــذلك تبلـــغ مجمـــوع المخرجـــات الوســـيطة لقطـــاع الزراعـــة $C_1 = 100 + 50 + +20 = 170$ مليون وحدة نقدية.

وبنفس الأســـلوب تبلـــغ مجمـــوع المخرجـــات الوســـيطة لقطـــاع الـــصناعة $C_2 = 200 + 300 + 100 = 600$ مليـــون وحـــدة نقديـــة، ولقطـــاع الخـــدمات $C_3 = 150 + 450 + 200 = 800$ مليون وحدة نقدية.

2- المخرجات الكلية للقطاعات:

نلاحظ أن المخرجات الكلية: لقطاع الزراعة

$$X_1 = C_1 + Y_1 = 170 + 830 = 1000$$

ولقطاع الصناعة $X_2 = C_2 + Y_2 = 600 + 600 = 1200$

ولقطاع الخدمات $X_3 = C_3 + Y_3 = 800 + 350 = 1150$

المدخلات الكلية للقطاعات:

بما أن إجمالي المدخلات للقطاعات =إجمالي المخرجات للقطاعات ، إذن:

المدخلات الكلية: لقطاع الزراعة $X_1 = 1000$

ولقطاع الصناعة $X_2 = 1200$

ولقطاع الخدمات $X_3 = 1150$

3-عناصر القيمة المضافة للقطاعات:

المدخلات الكلية في القطاع الزراعي 1000 مليون وحدة نقدية: منه 450 مليون وحدة نقدية عبارة عن مستلزمات إنتاج (مدخلات وسيطة)، والباقي 550 مليون وحدة نقدية عبارة عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_1 = X_1 - C_1 = 1000 - 450 = 550$ مليون وحدة نقدية

(أجور ورواتب، فائدة على رأس المال، أرباح).

وأن المدخلات الكلية في قطاع الصناعة تبلغ 1200 مليون وحدة نقدية: منها 800 مليون وحدة نقدية عبارة عن مدخلات وسيطة، والباقي يعبر عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_2 = X_2 - C_2 = 1200 - 800 = 400$ مليون وحدة نقدية

وأن المدخلات الكلية في قطاع الخدمات تبلغ 1150 مليون وحدة نقدية: منها 320 مليون وحدة نقدية عبارة عن مستلزمات إنتاج (مدخلات وسيطة)، والباقي تعبر عن القيمة المضافة في ذلك القطاع:

$V_3 = X_3 - C_3 = 1150 - 320 = 830$ مليون وحدة نقدية.

4 – **الناتج الإجمالي في الاقتصاد** :ويساوي إلى مجموع المدخلات أو المخرجات النهائية للقطاعات أي:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 = 1000 + 1200 + 1150 = 3350$$

المدخلات ← / ↑ المخرجات	الزراعة	الصناعة	الخدمات	المخرجات الوسيطة L_i	الطلب النهائي Y_i	المخرجات النهائية X_i
الزراعة	100	50	20	170	830	1000
الصناعة	200	300	100	600	600	1200
الخدمات	150	450	200	800	350	1150
المدخلات الوسيطة C_j	450	800	320	1570		
القيمة المضافة V_j	550	400	830		$V=Y$ 1780	
إجمالي المدخلات X_j	1000	1200	1150			$X=3350$

5 – مصفوفة المعاملات الفنية:ونحصل على عناصر المصفوفة من العلاقة:

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{X_j}$$

$$A=a_{ij}=\begin{bmatrix}\frac{100}{1000} & \frac{50}{1200} & \frac{20}{1150}\\ \frac{200}{1000} & \frac{300}{1200} & \frac{100}{1150}\\ \frac{150}{1000} & \frac{450}{1200} & \frac{200}{1150}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.04 & 0.02\\ 0.2 & 0.25 & 0.08\\ 0.15 & 0.37 & 0.17\end{bmatrix}$$

نلاحظ من مصفوفة المعاملات الفنية مثلاً $a_{31}=0.15$ تمثل ما يستخدم القطاع الأول من السلع الوسيطة، التي ينتجها القطاع الثالث، كي يصنع القطاع الأول واحدة من منتجه.

6 – لإيجاد المخرجات الكلية لكل قطاع لسد حاجة الطلب النهائي الجديد: نستخدم العلاقة (8) فنكتب:

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'$$

– نوجد $[I-A]^{-1}$ بتطبيق العلاقة:

$$[I-A]^{-1} = \frac{1}{|I-A|}\,\Gamma(I-A)$$

فنحصل على:

$$[I-A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.134 & 0.078 & 0.035 \\ 0.341 & 1.423 & 0.145 \\ 0.357 & 0.648 & 1.276 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$X' = \begin{bmatrix} 1.134 & 0.078 & 0.035 \\ 0.341 & 1.423 & 0.145 \\ 0.357 & 0.648 & 1.276 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1038 \\ 750 \\ 437.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1251 \\ 1484 \\ 1415 \end{bmatrix}$$

أي من أجل تلبية حاجة الطلب النهائي والمحدد بـ 1038 على القطاع الأول وبـ 750 على القطاع الثاني وبـ 437.5 على القطاع الثالث، يتطلب ذلك أن يكون إجمالي قيم مخرجات القطاعات الثلاثة على الترتيب:

$$X_3 = 437.5 \quad , \quad X_2 = 1484 \quad , \quad X_1 = 1251$$

7 – جدول التشابكات القطاعية لعام 2005 :

نوضح التشابكات القطاعية من العلاقة:

$$x_{ij} = a_{ij}.X_j$$

حيث:

$$x_{11} = a_{11}X_1 = (0.1)(1095) = 109.5$$
$$x_{12} = a_{12}X_2 = (0.04)(1375) = 55$$
$$x_{13} = a_{13}X_3 = (0.02)(1413) = 28.26$$

... وهكذا

المدخلات → / ↑ المخرجات	الزراعة	الصناعة	الخدمات	المخرجات الوسيطة L_i	الطلب النهائي Y_i	المخرجات النهائية X_i
الزراعة	125.1	59.36	28.3	212.76	1038	1251
الصناعة	250.2	371	113.2	734.4	750	1484
الخدمات	187.65	549.08	240.55	977.28	437.5	1415
المدخلات الوسيطة C_j	562.95	979.44	382.05	1924.44		
القيمة المضافة V_j	688.05	504.56	1032.95		$V = Y$ 2225.56	
إجمالي المدخلات X_j	1251	1484	1415			$X = 4150$

§-6 - واقعية الخطط المقترحة:

في كثير من الأحيان تكون الخطة المقترحة من قبل واضعي الخطط الاقتصادية غير واقعية وتحتاج إلى تعديل، لإجراء ذلك نأخذ التغيرات لإحدى العلاقتين (7) أو (8) السابقتين:

$$(I - A)X = Y$$

$$X = [I - A]^{-1}.Y$$

لتصبح الخطة واقعية فنحصل على العلاقتين التاليتين:

$$(I - A)\Delta X = \Delta Y \qquad (9)$$

$$\Delta X = [I - A]^{-1}\Delta Y \qquad (10)$$

وبالتالي شعاع الطلب النهائي الجديد ، وشعاع المخرجات الجديد يصبحان على التوالي:

$$Y' = Y + \Delta Y$$
$$X' = X + \Delta X$$

مثـــال:

افترض أن اقتصاد ما مكون من ثلاث قطاعات هـــي: الـــصناعة ، الزراعـــة، الخدمات. وافترض أن مصفوفة المعاملات الفنية معطاة كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت الخطة الاقتصادية المقترحة تستهدف تحقيق قائمـــة الطلـــب النهـــائي التالية:

100 مليون وحدة نقدية قيمة منتجات صناعية.

20 مليون وحدة نقدية قيمة منتجات زراعية.

40 مليون وحدة نقدية قيمة خدمات.

المطلوب:

1- إيجاد شعاع الناتج الكلي لتحقيق قائمة الطلب النهائي.

2 - شكل جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد البسيط.

3- إذا افترضنا أن الطاقة الإنتاجية القصوى هي :

180 مليون وحدة نقدية لقطاع الصناعة.

170 مليون وحدة نقدية لقطاع الزراعة.

185 مليون وحدة نقدية لقطاع الخدمات.

في ضوء هذه المعلومات هل نستطيع القول أن الخطة المقترحة هي خطة واقعية أم لا ؟ ماذا تقترح ؟

الحـــل:

1- **لإيجاد شعاع الناتج الكلي** :نستخدم العلاقة $X = [I - A]^{-1}.Y$

- نوجد مصفوفة ليونتيف : $[I - A]$

$$[I-A]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.2&0.2&0.1\\0.4&0.1&0.3\\0.2&0.5&0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.8&-0.2&-0.1\\-0.4&0.9&-0.3\\-0.2&-0.5&0.9\end{bmatrix}$$

ومن ثم معكوس مصفوفة ليونتيف من العلاقة:

فنجد: $[I-A]^{-1}=\dfrac{1}{|I-A|}\Gamma(I-A)$

$$[I-A]^{-1}=\begin{bmatrix}1.626&0.567&0.369\\1.034&1.724&0.69\\0.936&1.084&1.576\end{bmatrix}$$

$$X=[I-A]^{-1}.Y=\begin{bmatrix}1.626&0.567&0.369\\1.034&1.724&0.690\\0.936&1.084&1.576\end{bmatrix}\begin{bmatrix}100\\20\\40\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}188.67\\165.517\\178.38\end{bmatrix}$$

أي لتحقيق قائمة الطلب النهائي المذكورة ينبغي أن يكون الإنتاج الكلي :

للصناعة $X_1=188.67$ مليون وحدة نقدية ، وللزراعة $X_2=165.517$ مليون وحدة نقدية ، وللخدمات $X_3=178.38$ مليون وحدة نقدية .

2- لتشكيل جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد البسيط : نطبق العلاقة

$$x_{ij}=a_{ij}.X_j$$

فنحصل على التشابكات القطاعية:

$$x_{ij}=\begin{bmatrix}0.2&0.2&0.1\\0.4&0.1&0.3\\0.2&0.5&0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}188.67\\165.517\\178.38\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}37.734+33.1034+17.838\\75.468+16.5517+53.514\\37.734+82.7585+17.838\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}88.6754\\145.5337\\138.3305\end{bmatrix}$$

↑ →	الصناعة	الزراعة	الخدمات	L_i	Y_i	X_i^*
الصناعة	37.734	33.1034	17.838	88.6754	100	188.67
الزراعة	75.468	16.5517	53.514	145.5337	20	165.53
الخدمات	37.734	82.7585	17.838	138.3305	40	178.33
C_j	150.936	132.4136	89.19	372.5396		
V_j	37.734	33.1164	89.14		160	
X_j	188.67	165.53	178.33			532.53

نتيجة المقارنة بين الطاقات الإنتاجية القصوى للقطاعات الثلاث والإنتاج الكلي الواجب إنتاجه ($X_1 = 188.67$, $X_2 = 165.53$, $X_3 = 178.33$) لتأمين قائمة الطلب النهائي Y ، نلاحظ أن الخطة المقترحة غير واقعية لأنها تتوقع من قطاع الصناعة إنتاجاً كلياً أكثر مما يستطيع تحقيقه لو عمل بأقصى طاقته. إذن يجب تعديل الخطة بإحدى الطريقتين التاليتين:

الطريقة الأولى:

إذا افترضنا أننا سنخفض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة فقط بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، أي:

$$\Delta X = \begin{bmatrix} -8.67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فما التغير في شعاع الطلب النهائي المترتب على تخفيض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة ؟

بتطبيق العلاقة : $\Delta Y = [I - A]\Delta X$ نحصل على التغير في شعاع الطلب النهائي المترتب على هذا التخفيض في الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة.

$$\Delta Y=\begin{bmatrix}0.8 & -0.2 & -0.1\\ -0.4 & 0.9 & -0.3\\ -0.2 & -0.5 & 0.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8.67\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6.936\\ 3.468\\ 1.734\end{bmatrix}$$

أي أنه نتيجة تخفيض الإنتاج الكلي لقطاع الصناعة بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، سينخفض الطلب النهائي على منتجات القطاع الصناعي بمقدار 6.936 مليون وحدة نقدية، وسيزداد بمقدار 3.468 مليون وحدة نقدية على منتجات قطاع الزراعة، وأيضاً سيزداد بمقدار 1.734 مليون وحدة نقدية لقطاع الخدمات، وبالتالي شعاع الطلب النهائي الجديد الذي نقترحه والذي تستطيع القطاعات الثلاث تحقيقه في ضوء طاقاتها القصوى هو:

$$Y'=Y+\Delta Y=\begin{bmatrix}100\\ 20\\ 40\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6.936\\ 3.468\\ 1.734\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}93.064\\ 23.468\\ 41.734\end{bmatrix}$$

للتحقق من مدى واقعية الخطة بعد التعديل نستخدم العلاقة :

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'$$

$$X'=[I-A]^{-1}.Y'=\begin{bmatrix}1.626 & 0.567 & 0.369\\ 1.034 & 1.724 & 0.69\\ 0.936 & 1.084 & 1.576\end{bmatrix}\begin{bmatrix}93.064\\ 23.468\\ 41.734\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}180\\ 165.517\\ 178.325\end{bmatrix}$$

نلاحظ بعد التعديل أن الإنتاج الكلي الواجب إنتاجه لتأمين قائمة الطلب النهائي ضمن الطاقات القصوى للقطاعات الثلاث .

الطريقة الثانية:

هي تخفيض الطلب النهائي على منتجات القطاع الصناعي بمقدار 8.67 مليون وحدة نقدية، مع ثبات الطلب النهائي للقطاعين الآخرين ومعرفة ما التغير في الإنتاج الكلي المترتب على تخفيض الطلب النهائي لقطاع الصناعة.

$$\Delta Y=\begin{bmatrix}-8.67\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي بتطبيق العلاقة: $\Delta X = [I - A]^{-1} \Delta Y$ نحصل على التغير في شعاع الناتج الكلي المترتب على هذا التخفيض في الطلب النهائي لقطاع الصناعة.

$$\Delta X = [I - A]^{-1} \Delta Y = \begin{bmatrix} 1.626 & 0.567 & 0.369 \\ 1.034 & 1.724 & 0.69 \\ 0.936 & 1.084 & 1.576 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8.67 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14.09742 \\ -8.96478 \\ -8.11512 \end{bmatrix}$$

أي أن تخفيض الطلب النهائي لقطاع الصناعة بما قيمته 8.67 مليون وحدة نقدية يترتب عليه تخفيض الإنتاج الكلي بما قيمته : 14.09742 م.و.ن لقطاع الصناعة ، و 8.96478 م.و.ن لقطاع الزراعة ، و8.11512 م.و.ن لقطاع الخدمات.

وبالتالي يصبح الإنتاج الكلي الواجب إنتاجه هو :

$$X' = X + \Delta X = \begin{bmatrix} 188.67 \\ 165.53 \\ 178.33 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -14.09742 \\ -8.96478 \\ -8.11512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 174.57258 \\ 156.56522 \\ 170.21488 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الإنتاج الكلي للقطاعات الثلاثة ضمن طاقاته القصوى.

تمارين ومسائل غير محلولة

1 – لتكن مصفوفة المعاملات الفنية لاقتصاد دولة ما، وشعاع الناتج الكلــي محــددان كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix}0.2 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.3 & 0.3\\ 0.1 & 0.2 & 0.2\end{bmatrix} \qquad , \ X=\begin{bmatrix}1000\\ 1000\\ 1000\end{bmatrix}$$

المطلوب : 1 – أوجد شعاع الطلب النهائي ، واستنتج مجموع القيم المضافة .

2 – تنظيم جدول التشابكات القطاعية بشكل كامل.

2 – احسب حجم منتجات ثلاثة قطاعات لاقتصاد دولة ما ، فيه مــصفوفة المعــاملات الفنية وشعاع الطلب النهائي محددان كالتالي:

$$A;\begin{bmatrix}0 & 0.3 & 0.4\\ 0.5 & 0 & 0.2\\ 0.4 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix} \qquad , \ Y=\begin{bmatrix}300\\ 300\\ 200\end{bmatrix}$$

ثم شكل جدول المخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد.

3 – إذا علمت أن إجمالي الناتج القومي في دولة ما في سنة معينة كان 1400 مليــون وحدة نقدية موزعة كالتالي: 500 مليون وحدة نقدية إنتاج صــناعي، 600 مليــون وحدة نقدية إنتاج زراعي، 300 مليــون وحــدة نقديــة خــدمات، وأن مــصفوفة المعاملات الفنية للإنتاج هي:

$$\begin{bmatrix}0.30 & 0.20 & 0.20\\ 0.30 & 0.35 & 0.10\\ 0.20 & 0.10 & 0.20\end{bmatrix}$$

المطلوب: إعداد جدول المدخلات والمخرجات لهذا الاقتصاد.

4 – ناقش مدى واقعية خطة اقتصادية تستهدف تحقيق طلب نهائي قدره:

95 مليون وحدة نقدية موزعة كالتالي:

60 مليون وحدة نقدية صناعة.

20 مليون وحدة نقدية زراعة.

15 مليون وحدة نقدية خدمات.

مع العلم أن مصفوفة المعاملات الفنية معطاة بالعلاقة:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.03 \\ 0.1 & 0.05 & 0.1 \end{bmatrix}$$

وأن الطاقات الإنتاجية القصوى هي:

100 مليون وحدة نقدية للصناعة.

35 مليون وحدة نقدية للزراعة.

30 مليون وحدة نقدية للخدمات.

الفصل السابع

استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

تعد الاحتمالات من الأدوات الأساسية في الإحصاء والرياضيات الإدارية، بل أن علمي الإحصاء والرياضيات الإدارية وتطبيقاتهما المختلفة تعتمد على نتائج نظرية الاحتمالات.

في هذا الفصل سنبدأ بتذكير الطالب بالاحتمالات وبقوانين الاحتمالات مفترضين أن الطالب قد درس وبشكل كبير مبادئ الاحتمالات في مقرر مبادئ الإحصاء ومن ثم سنبحث في التطبيقات العملية للاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية.

المبحث الأول

مقدمة في الاحتمالات

§-1 – تعريف الاحتمال:

1-1 التعريف الكلاسيكي للاحتمال:

احتمال تحقق الحدث A يساوي ناتج قسمة عدد الحالات الملائمة لتحقق هذا الحدث وليكن m على عدد الحالات الكلية N وذلك بشرط تماثل جميع الحالات الكلية. أي أن:

$$P(A) = \frac{m}{N}$$

والمقصود بشرط التماثل هو أن يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة الكلية الفرصة المتساوية نفسها. لذلك يقال أن قطعة النقود سليمة ومتوازنة بمعنى أن فرصة ظهور الصورة تساوي فرصة ظهور الكتابة، ويقال أن حجر النرد سليم ومتوازن بمعنى أن فرصة ظهور كل وجه من الأوجه الستة متساوية. وهكذا لدينا:

$$0 \le P(A) \le 1$$

أي أن قيمة الاحتمال دوماً تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح. تساوي الصفر إذا كان الحدث مستحيلاً، بينما تساوي الواحد إذا كان الحدث مؤكداً.

مثـــال:

إذا رمينا حجر نرد سليماً ومتوازناً احسب الاحتمالات التالية:

1-الحصول على الرقم 5 .

2-الحصول على رقم زوجي.

3- الحصول على رقم أكبر من 2 .

4- الحصول على رقم أقل من 7 .

الحــل:

نفرض أن:

A حدث الحصول على الرقم 5 فيكون: $P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1}{6}$

B حدث الحصول على رقم زوجي فيكون: $P(B)=\frac{m}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

C حدث الحصول على رقم أكبر من 2 فيكون: $P(C)=\frac{m}{N}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

D حدث الحصول على رقم أقل من 7 فيكون: $P(D)=\frac{m}{N}=\frac{6}{6}=1$

2-1 تعريف الاحتمال كتكرار نسبي:

لاحظنا أن التعريف السابق للاحتمال يشترط أن تكون الحالات الممكنة متماثلة الأمر الذي قد لا يتحقق دائماً، فقد تكون قطعة النقود متآكلة (أي غير متوازنة) بمعنى أن فرصة الصورة لا تساوي فرصة الكتابة. في هذه الحالة لا يمكن القول أن احتمال الصورة يساوي احتمال الكتابة يساوي $\frac{1}{2}$.

وكمثال آخر عند تقسيم المجتمع إلى مدخنين وغير مدخنين فالحالات الممكنة هنا حالتان فقط هما " مدخن " أو " غير مدخن "، ولكن لا يمكن القول أن احتمال " التدخين " يساوي احتمال عدم التدخين يساوي $\frac{1}{2}$، وذلك لأن الحوادث الكلية لكل حالة غير متماثلة حيث أنه في الغالب لا تتساوى أعداد المدخنين مع أعداد غير المدخنين، أي أن فرصة التدخين لا تساوي فرصة عدم التدخين وبالتالي فإن احتمال إحداهما لا يساوي $\frac{1}{2}$.

في مثل هذه الحالات لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال وتطبق تعريف التكرار النسبي أو التعريف الإحصائي للاحتمال.

فإذا رمينا قطعة نقود n مرة وكانت m_n هي عدد المرات التي تظهر فيها الصورة فإن نسبة عدد الصور إلى عدد الرميات الكلي $= \frac{m_n}{n}$ وهذه النسبة قد لا تساوي $\frac{1}{2}$ ولكن مؤكد أنه كلما زاد عدد الرميات (أي كلما كبرت n) فإن هذه النسبة سوف تقترب من $\frac{1}{2}$. فإذا كانت n كبيرة جداً وتؤول إلى ما لانهاية فإن هذه النسبة تؤول إلى $\frac{1}{2}$. أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو نهاية التكرار النسبي، أي:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n}{n}$$

وحسب هذا التعريف: إن الاحتمال هو القيمة التي يستقر عندها التكرار النسبي لوقوع الحدث عندما تزيد n بدرجة كافية لتحقق ذلك الاستقرار للتكرار النسبي، حيث n هو عدد مرات إجراء التجربة، m_n هو عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث في عدد n من المرات التي أجريت فيها التجربة.

وبذلك فإن التعريف الثاني للاحتمال يعالج عدم تحقق شرط التماثل. مع ملاحظة أننا نفترض أن لدينا مجتمعاً وهمياً يتكون من عدد لا نهائي من مرات إجراء التجربة. أما إذا كان المجتمع حقيقياً كمثال التدخين فإن الاحتمال لأي حدث يساوي نسبة وجود أو تحقق الحدث في المجتمع.

فمثلاً: إذا كانت نسبة العمال المدخنين في مصنع تساوي 30% فإن احتمال أن يكون العامل مدخناً في هذا المصنع يساوي 30%، وهكذا... أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو النسبة السائدة للصفة المدروسة في المجتمع.

مثـــال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

القسم \ الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
الأول	5	7	12
الثاني	8	14	22
الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير أحد العمال بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون أعزباً.

2 – أن يكون متزوجاً.

3 – أن يكون من القسم الأول.

4 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

5 – أن يكون من القسم الأول وأعزباً.

الحـــل: نفرض أن:

A حدث كون العامل المختار أعزباً فيكون: $P(A)=\dfrac{23}{50}=0.46$

B حدث كون العامل المختار متزوجاً فيكون: $P(B)=\dfrac{27}{50}=0.54$

C حدث كون العامل المختار من القسم الأول فيكون: $P(C)=\dfrac{12}{50}=0.24$

D حدث كون العامل المختار من القسم الأول أو الثاني فيكون:

$$P(D)=\frac{12+22}{50}=\frac{34}{50}=0.68$$

E حدث كون العامل المختار من القسم الأول وأعزباً فيكون : $P(E)=\dfrac{5}{50}=0.10$

§2– قوانين الاحتمالات:

1-2 قوانين الجمع:

- إذا كان A و B حدثين متنافيين (أي حدوث أحدهما ينفي أو يمنع حدوث الحادث الآخر)، فإن احتمال حدوث إحداهما هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

• إذا كان A و B حدثين غير متنافيين (أي يمكن أن يحدثا معاً) ، فإن احتمال حدوث A أو B (أي احتمال حدوث إحداهما على الأقل) هو :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثـــال :

بالعودة إلى المثال السابق الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. اختير أحد العمال بطريقة عشوائية . احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

2 – أن يكون متزوجاً أو من القسم الأول.

3 – أن يكون من القسم الثالث أو أعزب.

الحـــل:

1 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الأول.

B حدث كون العامل من القسم الثاني.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{12}{50}+\frac{22}{50}=\frac{34}{50}$$

2 – لنفرض A حدث كون العامل متزوجاً.

B حدث كون العامل من القسم الأول.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{27}{50}+\frac{12}{50}-\frac{7}{50}=\frac{32}{50}$$

3 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الثالث.

B حدث كون العامل أعزباً.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{16}{50}+\frac{23}{50}-\frac{10}{50}=\frac{29}{50}$$

2-2 قوانين الضرب :

إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن احتمال حدوث A و B (أي حدوثهما معاً) هو :

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على عدد من الحوادث المستقلة أي أن :

$$P(A\cap B\cap ...\cap Z)=P(A).P(B).....P(Z)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال السابق الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. سحب عاملان مع الإرجاع ،احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون كلاهما من القسم الأول.

2 – أن يكون كلاهما متزوجاً.

3 – أن يكون كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها.

4 – أن يكون كلاهما من القسم نفسه.

الحـــل:

1 – لنفرض: A حدث كون العامل الأول من القسم الأول.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً من القسم الأول.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$=\frac{12}{50}.\frac{12}{50}=\frac{144}{2500}$$

2 – لنفرض : A حدث كون العامل الأول متزوج.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً متزوج.

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

$$=\frac{27}{50}.\frac{27}{50}=\frac{729}{2500}$$

3 – لنفرض: A حدث كون كلا العاملين متزوجين فإن: $P(A)=\frac{27}{50}.\frac{27}{50}=\frac{729}{2500}$

B حدث كون كلا العاملين عازبين فإن: $P(B)=\frac{23}{50}.\frac{23}{50}=\frac{529}{2500}$

الاحتمال المطلوب هو: $P(A\cap B)=\frac{729}{2500}+\frac{529}{2500}=\frac{1258}{2500}$

4 – إما كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله:

$$P(A)=\frac{12}{50}.\frac{12}{50}=\frac{144}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثاني فهو الحدث B واحتماله:

$$P(B)=\frac{22}{50}.\frac{22}{50}=\frac{484}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثالث فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{16}{50}.\frac{16}{50}=\frac{256}{2500}$$

الاحتمال المطلوب:

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{144}{2500}+\frac{484}{2500}+\frac{256}{2500}=\frac{884}{2500}$$

3-2 قانون الضرب في الحالة العامة:

إذا كان A ، B حدثين غير مستقلين فإن احتمال حدوث $A.B$ (أي حدوثهما معاً) هو:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال السابق بافتراض أن السحب بدون إرجاع (أي بدون إرجاع العامل الأول إلى المجموعة قبل سحب العامل الثاني).

الحـــل :

1 – كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله: $P(A)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}=\frac{132}{2450}$

2 – كلاهما متزوج فهو الحدث B واحتماله: $P(B)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}=\frac{702}{2450}$

3 – كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}+\frac{23}{50}.\frac{22}{49}=\frac{702}{2450}+\frac{506}{2450}=\frac{1208}{2450}$$

4 – كلاهما من القسم نفسه فهو الحدث D واحتماله:

$$P(D)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}+\frac{22}{50}.\frac{21}{49}+\frac{16}{50}.\frac{15}{49}=\frac{132}{2450}+\frac{462}{2450}+\frac{240}{2450}=\frac{834}{2450}$$

المبحث الثاني

المتغير العشوائي والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي

سنتناول في هذا المبحث تعريف المتغير العشوائي وتوزيعاته الاحتمالية بإيجاز باعتبار قد تمّ دراسته في مقرر مبادئ الإحصاء في السنة الأولى.

§-1 – تعريف المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بالوسيلة التي يتم بواسطتها التعبير عن نواتج التجربة العشوائية باستخدام الأعداد الحقيقية ليسهل دراسة الظواهر الاحتمالية المختلفة، ويكون المتغير العشوائي منقطعاً إذا أخذ قيماً منفصلة بعضها عن بعض، مثلاً عدد أفراد الأسرة. ويكون المتغير العشوائي مستمر إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في مجال تغيره، مثلاً أطوال أو أوزان الطلاب.

§-2 – التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة:

يرتبط بأي متغير عشوائي X تابع موجب يسمى تابع الاحتمال للمتغير X ويرمز له بالرمز $p(X)$ يحدد مدى X ويعطي احتمال أخذه للقيم في هذا المدى.

ويحدد هذا التابع شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير لأنه يبين كيف يتوزع الاحتمال الكلي (ومقداره واحد) على قيم المتغير.

فالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع X يمثل بتابع $p(X)$ يسمى التابع الاحتمالي، ويعطي احتمالات قيم X المختلفة في صورة جدول أو صيغة رياضية تبين القيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي X واحتمالات هذه القيم.

بشكل عام إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$ باحتمالات مقابلة: $p(x_1), p(x_2), ..., p(x_n)$ وإذا تحقق:

$$p(x_i) \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,...,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

عندئذ يقال أن X يتبع توزيعاً احتمالياً منقطعاً تابعه الاحتمالي $p(X)$.

§-3 – توزيع ثنائي الحدين :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما وقوع حدث معين أو عدم وقوعه ، وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو p وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو $q=1-p$ ، فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة n مرة ، فإن احتمال وقوع هذا الحدث x مرة من بين الـ n من هذه المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$p(x)=C_n^x.p^x.q^{n-x} \qquad ;x=0,1,2,...,n$$

وأن مجموع الاحتمالات المرتبطة بأي تجربة عشوائية تخضع لهذا التوزيع تساوي الواحد .

$$p(0)+p(1)+p(2)+...+p(n)=1$$

يسمى توزيع الاحتمالات هذا على قيم المتغير x المختلفة بتوزيع ثنائي الحدين أو بشكل مختصر بالتوزيع الثنائي برنولي.

§-4 – التوزيع الاحتمالي المستمر:

إذا كان X متغيراً عشوائيا مستمراً وكان $f(X)$ تابعاً يحقق الشرطين الآتيين:

$$f(X)\geq 0 \ ; \forall X$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)\,dX=1$$

فعندها يتبع المتغير العشوائي X توزيعاً احتمالياً مستمراً تابع كثافته هو $f(X)$ وفي هذه الحالة يكون احتمال وقوع X في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى التابع $f(X)$.

ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري.

في هذا الفصل سنهتم بالتوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة لاستخدامها في تقييم المشروعات التجارية والصناعية.

§5- التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً فإن التوقع الرياضي له (أو القيمة المتوقعة أو المتوسطة للمتغير العشوائي) ونرمز له بالرمز $E(X)$ يعرف كما يلي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

مثــال :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً بتابع احتمال $P(X)$ كما يظهر في الجدول التالي:

X	$P(X)$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

فأوجد $E(X)$.

الحــل:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

$$=(2\times\frac{1}{4})+(3\times\frac{1}{2})+(4\times\frac{1}{4})=3$$

مثــال : أوجد $E(X)$ إذا كان:

X	$P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

$$=(-2\times\frac{1}{5})+(-1\times\frac{2}{5})+(0\times\frac{1}{5})+(1\times\frac{1}{5})=-\frac{3}{5}$$

نلاحظ من المثالين السابقين ما يلي :

1 - ليس بالضرورة أن تكون $E(X)$ قيمة من قيم المتغير العشوائي X ، ففي المثال الأول $E(X)=3$ وهي إحدى قيم المتغير العشوائي X. أما في المثال الثاني $E(X)=-\frac{3}{5}$ وهي ليست إحدى القيم المشاهدة للمتغير العشوائي X.

2 - قد تكون قيمة $E(X)$ سالبة (كما في المثال الثاني) أو قيمة موجبة (كما في المثال الأول) أو قد يكون صفراً.

3 - يقع $E(X)$ بين أقل قيمة للمتغير العشوائي وأكبر قيمة له وذلك في جميع الأحوال.

§-6- التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي :

إذا كان $f(X)$ تابع وحيد القيمة في المتغير العشوائي X فإن التوقع الرياضي للتابع $f(X)$ يعرف كما يلي:

$$E[f(X)]=\sum_{i=1}^{n} X_i . P(X_i)$$

وهذه النتيجة هامة جداً حيث تعطي كيفية استنتاج التوقع الرياضي لأي تابع (وحيد القيمة) في المتغير العشوائي X أياً كان الشكل الرياضي لهذه الحالة.

مثـــال:

إذا كانت X متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان $f(X)=X^2$ فإن:

$$E(f(X))=E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . p(X)$$

وبالعودة للمثالين السابقين نجد في المثال الأول:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{4}{4}=1$
3	$\frac{1}{2}$	9	$\frac{9}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	16	$\frac{16}{4}=4$
$\sum$	1		$\frac{38}{4}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . p(X_i)=\frac{38}{4}$$

هذه القيمة تعبر عن توقع التابع ، بينما رأينا أن توقع المتغير كان /3/ وفي المثال الثاني:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{4}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$	0	0
1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
$\sum$	1		$\frac{7}{5}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 . p(X_i)=\frac{7}{5}$$

§-7- أهم خواص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي عملية رياضية (كما يتضح من تعريف التوقع) وهذه العملية الرياضية تحقق مجموعة من الخواص من أهمها ما يلي:

1 - $E(C)=C$ ، حيث C ثابت، وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لأي ثابت هي هذا الثابت.

فمثلاً : $E(-5)=-5$, $E(2)=2$ ... وهكذا.

2 - $E(CX)=C.E(X)$ وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لحاصل ضرب مقدار ثابت C في متغير عشوائي X تساوي حاصل ضرب الثابت في توقع المتغير العشوائي.

فمثلاً إذا أكان $E(X)=7$ ، فإن:

$$E(2X)=2.E(X)=2(7)=14$$

$$E(\frac{X}{3})=\frac{1}{3}.E(X)=\frac{1}{3}.E(X)=\frac{1}{3}.7=\frac{7}{3}$$ وهكذا ...

3 - إذا كان X_1+X_2 متغيرين عشوائيين فإن:

$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)$$

هذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (أو باقي طرح) متغيرين عشوائيين هو مجموع (باقي طرح) توقع كل منهما. فمثلاً إذا كان:

$$E(X_1)=4 \quad , \quad E(X_2)=6.2$$
$$E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=4+6.2=10.2$$
$$E(X_1-X_2)=E(X_1)-E(X_2)=4-6.2=-2.2$$

وهذه الخاصية يمكن تعميمها لأكثر من متغيرين عشوائيين حيث أنه إذا كان $X_1,X_2,...,X_n$ متغيرات عشوائية فإن:

$$E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)$$

4 - $E(aX_1+bX_2)=a.E(X_1)+bE(X_2)$

هذه الخاصية نتيجة للخاصتين رقمي (2)، (3) وتعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (باقي طرح) حاصل ضرب متغير عشوائي في ثابت وحاصل ضرب متغير عشوائي آخر في ثابت آخر هو مجموع (باقي طرح) حاصل ضرب الثابت الأول في توقع المتغير العشوائي الأول وحاصل ضرب الثابت الثاني في توقع المتغير العشوائي الثاني.

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=3$ و $E(X_2)=-2$ فإن:

$$\begin{aligned} E(2.X_1+3.X_2) &= 2E(X_1)+3E(X_2) \\ &= 2(3)+3(-2) \\ &= 6-6=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(5.X_1-4.X_2) &= 5.E(X_1)-4E(X_2) \\ &= 5(3)-4(-2) \\ &= 15+8=23 \end{aligned}$$

5 - إذا كان X_1 ، X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)$$

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=4$ و $E(X_2)=2$ وكان كل من X_1 و X_2 مستقلاً عن الآخر فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)=4\times 2=8$$

ونلاحظ أن هذه الخاصة لا تتحقق بالضرورة إذا كان X_1 و X_2 غير مستقلين ومن ناحية أخرى فإنه يمكن تعميم هذه الخاصية لأكثر من متغيرين مستقلين وذلك على النحو التالي:

إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ فإن:

$$E(X_1.X_2....X_n)=E(X_1).E(X_2)....E(X_n)$$

المبحث الثالث

تطبيق التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية

§1 – أهمية التوقع الرياضي في المشروعات التجارية والصناعية:

من المعلوم أن لكل مشروع تجاري أو صناعي العديد من الخطط المتاحة له وعلى صاحب المشروع اختيار أنسبها ويكون ذلك وفقاً للخطوات التالية:

- تحديد صور الأحوال الاقتصادية المتوقعة أو صور الطلب المتوقعة.
- تحديد المنافع المتوقعة من هذه الخطط.
- تحديد الأرباح المتوقعة (أو الخسائر المتوقعة) من الخطط المختلفة.وفي هذه الحالة تكون المنافع المتوقعة ما هي إلا التوقع الرياضي لربح المشروع أو خسارته من كل خطة من الخطط المتاحة، مقترنة بصور الحالة الاقتصادية أو بصور الطلب المختلفة.

مثـــال: تاجر يربح 200000 وحدة نقدية في الشهر إذا كان الطلب ممتازاً ونرمز لـــه بالرمز A، ويربح 80000 وحدة نقدية إذا كان الطلب معتدلاً ونرمز لـــه بـــالرمز B، ويخسر 20000 وحدة نقدية إذا كان الطلب رديئاً ونرمز له بالرمز C.

فإذا كان احتمال تحقق صور الطلب الثلاث السابقة على الترتيب هو:

$$P(C)=0.1 \qquad ,P(B)=0.6 \qquad ,P(A)=0.3$$

المطلوب: إيجاد التوقع الرياضي لربح هذا التاجر في الشهر ؟

الحل: لإيجاد التوقع الرياضي لربح التاجر في الشهر نوجد حاصل جمع قـــيم التوقـــع الرياضي لكسبه أو خسارته في ظل صور الطلب الثلاث لأنها قد تتحقق في أي شهر:

$$E(K)=\sum_{i=1}^{3} k_i.p(k_i)$$

$$=200000\times 0.3+80000\times 0.6+(-20000)\times 0.1=106000$$

وحدة نقدية.

مثـــال:

اتفق أمير وسفير على أن يقوم سفير بإلقاء ثلاث قطع نقود مرة واحدة، وأن يعطيه أمير المبالغ الآتية:

500 ليرة سورية إذا ظهر الشعار على قطعة واحدة من القطع الثلاث.

1000 ليرة سورية إذا ظهر شعاران على قطعتين من القطع الثلاث.

1500ليرة سورية إذا ظهر ثلاث شعارات على القطع الثلاث.

أما إذا لم يظهر أي شعار على القطع الثلاث فيعطي سفير لأمير مبلغ 700ليرة سورية.

المطلوب: ما هو التوقع الرياضي لما يحصل عليه كل من أمير وسفير؟

الحل: التوقع الرياضي لما يحصل عليه سفير هو :

$$500\times\frac{3}{8}+1500\times\frac{3}{8}+1500\times\frac{1}{8}-700\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1500}{8}+\frac{4500}{8}+\frac{1500}{8}-\frac{700}{8}$$

$$=\frac{6800}{8}=850$$

ليرة سورية.

التوقع الرياضي لما يحصل عليه أمير هو:

$$700\times\frac{1}{8}-500\times\frac{3}{8}-1000\times\frac{3}{8}-1500\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{700}{8}-\frac{1500}{8}-\frac{3000}{8}-\frac{1500}{8}=-\frac{5300}{8}=-662.5$$

ليرة سورية،نلاحظ أن قيمة التوقع الرياضي لما يحصل عليه سفير قيمة موجبة، في حين أن قيمة التوقع الرياضي لما يحصل عليه أمير قيمة سالبة . وفي هذه الحالة يكون الاتفاق في مصلحة سفير وفي غير مصلحة أمير.

§2- المنفعة المتوقعة في المشروعات التجارية والصناعية:

تعترض المشروعات التجارية والصناعية أثناء حياتها الإنتاجية **ظواهر** متعددة من بيع وشراء وإنتاج... الخ، وكل **ظاهرة** من هذه الظواهر يمكن أن تتم وفق **خطط بديلة**، وكل **خطة** من هذه الخطط يصادف تنفيذها **حالات متعددة للطلب** على منتجات المشروع (طلب ممتاز، طلب جيد، طلب مقبول، طلب رديء ... الخ)، حيث تلك الحالات المتعددة للطلب مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بتعدد الأحوال الاقتصادية (رواج، كساد،...)، وعلى مدير المشروع مقارنة كل خطة من الخطط المتاحة بحالات الطلب

المختلفة ويكون ذلك من خلال حساب المنفعة المتوقعة للخطط المختلفة للمشروع، في إطار العوامل التي تؤثر في الظاهرة والمتصلة بالسياسة العامة للمشروع أو بالنظام العام، أو بالظروف الاقتصادية أو الصناعية أو السياسية، ومن ثم اختيار الخطة الأنسب له. إذن حتى يتمكن صاحب المشروع من تحديد الخطة المناسبة له يتبع الخطوات التالية:

1 – تحديد الخطط المختلفة المتاحة للمشروع، ولتكن مثلاً بهدف التبسيط أربع:

$$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$$

2 – تحديد حالات الطلب المختلفة ،والتي سنفترضها أيضاً أربع بهدف التبسيط:

$$D_1, D_2, D_3, D_4$$

3 – تحديد احتمالات حالات الطلب المختلفة ولتكن:

$$P(D_1)\ ,\ P(D_2)\ ,P(D_3)\ \ ,\ P(D_4)$$

وهذه الاحتمالات إما أن يقوم صاحب المشروع بتقديرها ذاتياً، أو يقوم بحسابها فيما لو توفر له بيانات عن التجار الآخرين الذين يتعاملون في نفس نوع وعدد السلع التي يتعامل بها.

3 – تحديد ثمن شراء السلع وثمن بيعها.

4 – إعداد مصفوفة رياضية ، توضح ربح التاجر أو خسارته من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} &
\begin{bmatrix}
Q_1D_1 & Q_1D_2 & Q_1D_3 & Q_1D_4 \\
Q_2D_1 & Q_2D_2 & Q_2D_3 & Q_2D_4 \\
Q_3D_1 & Q_3D_2 & Q_3D_3 & Q_3D_4 \\
Q_4D_1 & Q_4D_2 & Q_4D_3 & Q_4D_4
\end{bmatrix}
\end{array}$$

حيث نلاحظ في المصفوفة السابقة أن:

كل سطر من أسطرها يمثل الأرباح أو الخسائر لخطة واحدة من الخطط مقترنة بحالات الطلب المختلفة، علماً أنه يتم احتساب الربح من العلاقة : سعر المبيع – سعر الشراء وكل عمود من أعمدتها يمثل الأرباح أو الخسائر لحالة واحدة من حالات الطلب للخطط المختلفة.

5 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة $P(D_1)$, $P(D_2)$, $P(D_3)$, $P(D_4)$ في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة .فإذا رمزنا للأرباح أو الخسائر المتوقعة بالرمز F فمصفوفة الأرباح والخسائر تكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}$$

6 – تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة كما يلي:

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الأولى: $EU(Q_1) = F_{11} + F_{12} + F_{13} + F_{14}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الثانية: $EU(Q_2) = F_{21} + F_{22} + F_{23} + F_{24}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الثالثة: $EU(Q_3) = F_{31} + F_{32} + F_{33} + F_{34}$

المنفعة المتوقعة EU من الخطة الرابعة: $EU(Q_4) = F_{41} + F_{42} + F_{43} + F_{44}$

وعلى أساس مقارنة قيم المنافع المتوقعة، يمكن اختيار الخطة المناسبة.

مثـــال: مدير إحدى شركات المثلجات يقوم بتوزيع ثلاثة أنواع على الأكثر من المثلجات خلال موسم الصيف. فإذا كانت المثلجات التي تبقى لدى الشركة دون بيع حتى نهاية الصيف تفقد قيمتها.وإذا كان ثمن شراء الكيلو من المثلجات هو 50 ليرة سورية وثمن بيعها 100 ليرة سورية، وأن الخطط المتاحة لهذه الشركة هي:

الخطة الأولى Q_1 : ألا يتعامل في سلعة المثلجات.

الخطة الثانية Q_2 : أن يتعامل في نوع واحد من المثلجات.

الخطة الثالثة Q_3 : أن يتعامل في نوعين من المثلجات .

الخطة الرابعة Q_4 :أن يتعامل في ثلاثة أنواع من المثلجات.

وأن حالات الطلب المختلفة يتم تحديدها على أساس أنواع المثلجات التي تتعامل بها الشركة:

الحالة الأولى D_1 : طلب سيئ في حالة عدم بيع أي نوع من المثلجات.

الحالة الثانية D_2 :طلب متوسط في حالة بيع نوع واحد من المثلجات .

الحالة الثالثة D_3 : طلب جيد في حالة بيع نوعين من المثلجات .

الحالة الرابعة D_4: طلب ممتاز في حالة بيع ثلاثة أنواع من المثلجات.

تمكنت الشركة من جمع معلومات عن $N=50$ شركة مثلجات أخرى، كل منها تتعامل بنفس عدد وأنواع المثلجات التي تتعامل بها هذه الشركة في موسم الصيف السابق، موزعة حسب عدد أنواع المثلجات المباعة من قبل كل منها فكانت النتائج كما يلي:

عدد أنواع المثلجات المباعة من قبل كل شركة M_k	عدد شركات المثلجات N_i	i
0	5	1
1	10	2
2	13	3
3	22	4
المجموع	50	

المطلوب: تحديد الخطة التي تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة.

الحـل: لتحديد الخطة التي تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة نتبع الخطوات التالية:

1 – حساب احتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة

$$P(D_1), P(D_2), P(D_3), P(D_4)$$

يتم حساب هذه الاحتمالات استناداً إلى البيانات التي تمكنت الشركة من جمعها عن الشركات الأخرى وباستخدام توزيع ثنائي الحدين:

$$P(D_i)=C_M^k.p^k.q^{M-k} \quad , \forall k=0,1,2,3$$

حيث: p احتمال بيع المثلجات.

و q احتمال عدم بيع المثلجات.

- نوجد احتمال بيع سلعة المثلجات من العلاقة: $p=\dfrac{\bar{Y}}{M}$

حيث: M الحد الأعلى لأنواع المثلجات التي تتعامل بها الشركة، $(M=3)$

$\bar{Y}$ متوسط عدد الأنواع المبيعة من المثلجات من قبل كل شركة وتساوي إلى مجموع الأنواع التي باعتها الـ 52 شركة ($\sum_{i=1}^{4} N_i M_i$)على عدد الشركات $(N = 50)$ أي:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{4} N_i . M_i}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{(0)(5)+(1)(10)+(2)(13)+(3)(22)}{50} = \frac{102}{50} = 2.04$$

وبالتالي:

$$p = \frac{\bar{Y}}{M} = \frac{2.04}{3} = 0.68$$

$$q = 1 - p = 1 - 0.68 = 0.32$$

ومنه وبافتراض k عدد أنواع المثلجات:

$$P(D_i) = C_M^k . p^k . q^{M-k} = C_3^k . (o.68)^k . (0.32)^{3-k} \quad , \forall k = 0,1,2,3$$

$$i = 1 \Rightarrow P(D_1) = C_3^0 (0.68)^0 (0.32)^3 = (0.32)^3 = 0.032768$$

$$i = 2 \Rightarrow P(D_2) = C_3^1 (0.68)^1 (0.32)^2 = 0.208896$$

$$i = 3 \Rightarrow P(D_3) = C_3^2 (0.68)^2 (0.32)^1 = 0.443904$$

$$i = 4 \Rightarrow P(D_4) = C_3^3 (0.68)^3 (0.32)^0 = (0.68)^3 = 0.314432$$

1

2 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -50 & 50 & 50 & 50 \\ -100 & 0 & 100 & 200 \\ -150 & -50 & 50 & 150 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array}$$

حيث نلاحظ من مصفوفة الأرباح والخسائر السابقة أن:

- الشركة لا تحقق أي أرباح أو خسائر في الخطة الأولى Q_1 وذلك مهما كانت حالة الطلب.

- بينما في الخطة الثانية Q_2 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 50 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وستحقق ربحاً قدره 50 ليرة سورية إذا تحققت إحدى حالات الطلب: الثانية D_2 أو الثالثة D_3 أو الرابعة D_4.
- وفي الخطة الثالثة Q_3 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 100 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وسوف لا تحقق أي أرباح أو خسائر إذا تحققت حالة الطلب الثانية D_2، وستحقق ربحاً قدره 100 ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الثالثة D_3، وربحاً قدره 200 ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الرابعة D_4.
- وفي الخطة الرابعة Q_4 ستتكبد الشركة خسارة بمقدار 150 ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وخسارة قدرها 50 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2 ، وستحقق ربحاً قدره 50 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثالثة D_3، وربحاً قدره 150 ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الرابعة D_4.

3 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة:

$$P(D_1) = 0.032768\ ,\ \ P(D_2) = 0.208896$$
$$P(D_3) = 0.443904\ ,\ P(D_4) = 0.314432$$

في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة . فنحصل على المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.6384 & 10.4448 & 22.1952 & 15.7216 \\ -3.2768 & 0 & 44.3904 & 62.8864 \\ -4.9152 & -10.4448 & 22.1952 & 47.1648 \end{bmatrix}$$

4 – **تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة:**

المنفعة المتوقعة من الخطة الأولى:

$$EU(Q_1) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثانية:

$$EU(Q_2) = -1.6384 + 10.4448 + 22.1952 + 15.7216 = 46.7232$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثالثة:

$$EU(Q_3) = -3.2768 + 0 + 44.3904 + 62.8864 = 104$$

المنفعة المتوقعة EUمن الخطة الرابعة:

$$EU(Q_4) = -4.9152 - 10.4448 + 22.1952 + 47.1648 = 54$$

وبمقارنة قيم المنافع المتوقعة، نجد أن الخطة الثالثة تحقق للشركة أكبر منفعة ممكنة وتبلغ 104 ، ولذلك ننصح الشركة بأن تبيع نوعين من المثلجات فقط .

مثـــال:

تبين لأحد تجار أجهزة الهاتف الجوال أن عدد أجهزة الهاتف التي يمكن بيعها يومياً خلال عام 2004 م هو 5 أجهزة على الأكثر، وفيما يلي أيام هذه الفترة وفقاً لعدد الأجهزة المباعة.

i	عدد الأيام N_i	عدد أجهزة الهاتف الجوال المباعة يومياً M_k
1	20	0
2	40	1
3	46	2
4	60	3
5	80	4
6	120	5
	366	**المجموع**

فإذا كانت تكلفة الجهاز الواحد 8 آلاف ل. س. وثمن بيعه هو 10 آلاف ل.س، وأراد هذا التاجر الاستفادة من تلك المعلومات في تحديد عدد الأجهزة التي يطلبها يومياً في خلال عام 2005 م كل يوم على حده بحيث يستثمر أمواله استثماراً سليماً، علماً أن الخطط المتاحة لدى هذا التاجر لاختيار إحداها بالنسبة لأي يوم من أيام السنة هي:

الخطة الأولى Q_1 : أن يطلب 3 أجهزة.

الخطة الثانية Q_2 : أن يطلب 4 أجهزة .

الخطة الثالثة Q_3 : أن يطلب 5 أجهزة .

بفرض أن حالات الطلب هي:

طلب رديء D_1 : إذا تم بيع جهازين على الأكثر .

طلب معتدل D_2: إذا تم بيع 3 أو 4 أجهزة .

طلب ممتاز D_3 : إذا تم بيع 5 أجهزة.

المطلوب: تحديد الخطة التي تحقق للتاجر أكبر منفعة ممكنة.

الحـل:

لتحديد الخطة التي تحقق للتاجر أكبر منفعة ممكنة نتبع الخطوات التالية:

1 -حساب احتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة $P(D_1), P(D_2), P(D_3)$:

يتم حساب هذه الاحتمالات استناداً إلى البيانات التي تمكن التاجر من جمعها وباستخدام توزيع ثنائي الحدين:

$$P(D_i)=C_M^k.p^k.q^{M-k} \quad , \forall k = 0,1,2,3,4,5$$

حيث: p احتمال بيع الجهاز .

و q احتمال عدم بيع الجهاز.

- نوجد احتمال بيع الجهاز من العلاقة: $p = \frac{\bar{Y}}{M}$

حيث: M الحد الأعلى لعدد الأجهزة التي تعامل بها التاجر، $(M = 5)$

$\bar{Y}$ متوسط عدد الأجهزة المباعة ويحسب من العلاقة التالية :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{4} N_i.M_i}{N}$$

$$\bar{Y} = \frac{(0)(20)+(1)(40)+(2)(46)+(3)(60)+(4)(80)+(5)(120)}{366}$$

$$= \frac{1232}{366} = 3.366$$

وبالتالي احتمال بيع الجهاز:

$$p=\frac{\bar{Y}}{M}=\frac{3.366}{5}=0.673$$

واحتمال عدم بيع الجهاز: $q=1-p=1-0.673=0.327$

ومنه بافتراض k عدد أجهزة الهاتف المباعة:

$$P(D_i)=C_M^k \cdot p^k \cdot q^{M-k}=C_5^k \cdot (0.673)^k \cdot (0.327)^{5-k} \quad , \forall k=0,1,2,3,4,5$$

$$i=1 \Rightarrow P(D_1)=p(k=0)+p(k=1)+p(k=2)$$
$$=C_5^0(0.673)^0(0.327)^5+C_5^1(0.673)^1(0.327)^4$$
$$+C_5^2(0.673)^2(0.327)^3$$
$$=0.003734+0.038475+0.158344=0.200553\approx 0.2$$

$$i=2 \Rightarrow P(D_2)=p(k=3)+p(k=4)$$
$$=C_5^3(0.673)^3(0.327)^2+C_5^4(0.673)^4(0.327)^1$$
$$=0.32594+0.33541=0.66135\approx 0.66$$

$$i=3 \Rightarrow P(D_3)=p(k=5)$$
$$=C_5^5(0.673)^5(0.327)^0$$
$$=0.138062\approx 0.14$$

2 – إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر من كل خطة مقترنة بحالات الطلب المختلفة.

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} -14 & 6 & 6 \\ -22 & 3 & 8 \\ -30 & -5 & 10 \end{bmatrix} & \begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix} \end{array}$$

حيث نلاحظ من مصفوفة الأرباح والخسائر السابقة أن:

- الخطة الأولى Q_1 تكبد التاجر خسارة قدرها 14 ألف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الأولى D_1 وتحقق له ربحاً قدره 6 ألف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2 أو الثالثة D_3.
- بينما الخطة الثانية Q_2 ستكبد التاجر خسارة قدرها 22 ألف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وستحقق ربحاً قدره 3 آلاف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الثانية D_2 وربحاً قدره 8 آلاف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الثالثة D_3.

- وفي الخطة الثالثة Q_3 ستكبد التاجر خسارة بمقدار 30 ألف ليرة سورية إذا تحققت حالة الطلب الأولى D_1، وخسارة قدرها 5 آلاف ليرة سورية في حالة تحقق حالة الطلب الثانية D_2، وستحقق ربحاً قدره 10 آلاف ليرة سورية فيما لو تحققت حالة الطلب الثالثة D_3.

3 - إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة للخطط المختلفة والمقترنة بحالات الطلب المختلفة، وذلك بضرب احتمالات حالات الطلب المختلفة:

$$P(D_1)=0.2 \quad , \quad P(D_2)=0.66 \quad , P(D_3)=0.14$$

في قيم الأرباح والخسائر في كل عمود من أعمدة المصفوفة السابقة . فنحصل على المصفوفة التالية :

$$\begin{bmatrix} -2.8 & 3.96 & 0.84 \\ -4.4 & 1.98 & 1.12 \\ -6 & -3.3 & 1.4 \end{bmatrix}$$

4 - تحديد المنفعة المتوقعة لكل خطة:

المنفعة المتوقعة من الخطة الأولى:

$$EU(Q_1) = -2.8 + 3.96 + 0.84 = 2$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثانية:

$$EU(Q_2) = -4.4 + 1.98 + 1.12 = -1.3$$

المنفعة المتوقعة من الخطة الثالثة:

$$EU(Q_3) = -6 - 3.3 + 1.4 = -7.9$$

وبمقارنة قيم المنافع المتوقعة ، نجد أن على التاجر الأخذ بالخطة الأولى التي تقتضي التعامل بطلب ثلاثة أجهزة يومياً.

تمارين ومسائل غير محلولة

1 – تبين لأحد مراكز توزيع التجزئة انه يمكن أن يبيع أسبوعياً في عام 2005 أربعة صناديق من الكونسروة على الأكثر ، فإذا علمت أن تكلفة الصندوق 100 ل.س، وأن ثمن بيعه هو 150 ل.س، (علماً أن الكونسروة تتلف إذا لم تباع في نفس الأسبوع) ، وفيما يلي توزيع أسابيع عام 2005 بحسب عدد الصناديق المباعة.

عدد الصناديق المباعة M_k	عدد الأسابيع N_i
0	7
1	8
2	10
3	12
4	15
المجموع	52

فإذا كانت الخطط التي قرر مدير هذا المركز اختيار إحداها بالنسبة لأي أسبوع من أسابيع عام 2006 هي:

الخطة الأولى Q_1 : التعامل في صندوقين.

الخطة الثانية Q_2 : التعامل في ثلاثة صناديق.

الخطة الثالثة Q_3 : التعامل في أربعة صناديق.

وبفرض أن حالات الطلب هي:

الحالة الأولى D_1 : طلب رديء إذا تم بيع صندوقين على الأكثر،

الحالة الثانية D_2 : طلب معتدل إذا تم بيع ثلاثة صناديق .

الحالة الثالثة D_3 : طلب ممتاز إذا تم بيع أربعة صناديق.

فالمطلوب: تحديد الخطة الأفضل لهذا المركز ، والتي بمقتضاها يحقق أكبر منفعة متوقعة نتيجة إتباعها.

2 – قام أحد محلات الحلويات بدراسة الطلب على قوالب الكاتو التي ينتجها أسبوعياً، وقد تبين له أن عدد القوالب التي أنتجها أسبوعياً خلال عام 2005 كان 50 قالباً

على الأكثر، فإذا علمت أن تكلفة إنتاج القالب 100 ل.س، وأن ثمن بيعه هو 150 ل.س، مع العلم أن قوالب الكاتو التي تبقى حتى نهاية الأسبوع تفقد صلاحيتها، وإليك عدد القوالب التي تم إنتاجها وبيعها خلال أسابيع عام 2005، واحتمالات بيعها:

p_k	عدد القوالب المبيعة أسبوعياً N_i
0.06	46
0.15	47
0.27	48
0.32	49
0.2	50
1	$\sum$

فالمطلوب تقديم نصيحتك لمالك هذا المحل حول عدد القوالب التي ينتجها أسبوعياً عام 2006 بحيث تحقق له أكبر منفعة ممكنة، إذا علمت أن:

الخطط المتاحة لهذا المحل هي خمس خطط كما يلي:

الخطة الأولى Q_1 : إنتاج 46 قالباً.

الخطة الثانية Q_2 : إنتاج 47 قالباً.

الخطة الثالثة Q_3 : إنتاج 48 قالباً.

الخطة الرابعة Q_4: إنتاج 49 قالباً.

الخطة الخامسة Q_5: إنتاج 50 قالباً.

وحالات الطلب المختلفة هي كما يلي:

الحالة الأولى D_1: طلب مقبول إذا تم إنتاج 46 أو 47 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثانية D_2: طلب متوسط إذا تم إنتاج 48 قالب كاتو أسبوعياً.

الحالة الثالثة D_3: طلب جيد إذا تم إنتاج 49 أو 50 قالب كاتو أسبوعياً.

3 – تاجر من تجار أجهزة التليفزيون الديجيتال الكبيرة الحجم تبين لـه علـى أسـاس البيانات التي تجمعت لديه عن مبيعاته من عام2002 إلى عام 2005 أن عدد أجهزة التليفزيون التي تم بيعها شهرياً واحتمالات بيعها كانت كما يلي:

احتمالات البيع p_k	عدد الأجهزة N_i
0.05	10
0.15	11
0.35	12
0.25	13
0.13	14
0.07	15

وإذا افترضنا أن ثمن شراء جهاز التليفزيون هو 100 ألف ليرة سورية وثمن بيعه هو 120 ألف ليرة سورية. فإذا أراد هذا التاجر تحديد عدد الأجهزة التي يطلبها شهرياً في خلال عام 2006 كل شهر على حده بحيث يستثمر أمواله استثمارا سليماً . فبماذا تنصحه؟.

4 – تبين لإحدى محال الحلوى أن عدد الفطائر التي يمكن بيعها يومياً خلال الفترة من أول تشرين الثاني حتى آخر كانون الأول 2005 هو 6 مائة فطيرة على الأكثر. وفيما يلي أيام هذه الفترة وفقاً لعدد الفطائر المباعة بالمئات:

عدد الفطائر المباعة يومياً بالمئات	عدد الأيام
3	20
4	50
5	150
6	146
المجموع الكلي	366

فإذا كانت تكلفة الفطيرة الواحدة 2 ليرة سورية، وثمن بيعها هو 3.5 ليرة سورية وأن الفطائر التي تبقى في نهاية اليوم دون بيع تفسد، وتعتبر خسارة على المحل.

المطلوب: تحديد عدد الفطائر التي يمكن للمحل اعدادها يومياً خلال عام 2006 وحتى يكون استثماره لأمواله استثماراً سليماً.

الفصل الثامن

الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى

§ 1- – تمهيد وتعاريف

الاشتقاق والتفاضل مفهومان رياضيان متلازمان من مفاهيم التحليل الرياضي، فعند الحديث عن الاشتقاق لابد من استعراض مفهوم التفاضل، وكلاهما يستخدم في حل المسائل الاقتصادية، وسوف نتعرف على الاشتقاق من أجل التوابع المتعددة المتحولات، والذي يعرف باسم الاشتقاق الجزئي وكذلك سنتطرق لمفاهيم التفاضل الجزئي والكلي لتلك التوابع، ونبين من خلال ذلك العلاقة بين التفاضلات والمشتقات الجزئية والكلية.

1-1 تعريف مشتق تابع :

إن مشتق التابع $y = f(x)$ هو نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تؤول Δx إلى الصفر أي:

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

حيث Δy هو التغير الحقيقي للتابع $f(x)$ و Δx هو التغير الحقيقي للمتحول x. فإذا كان المشتق الأول للتابع $f(x)$ موجوداً فيمكن إجراء الاشتقاق مرة ثانية وبذلك نحصل على المشتق الثاني لذلك التابع. وبشكل عام يمكن الحصول على المشتق الثالث والرابع ... وكذلك على المشتق من المرتبة n طالما مشتق التابع $f(x)$ من المرتبة $(n-1)$ موجوداً. ونرمز للمشتقات من المراتب العليا للتابع $f(x)$ بالرموز التالية:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

أو بالرموز المكافئة: $\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}$

إن ما نحتاج إليه من هذه المشتقات لاحقاً هي المشتقات من المرتبة الثانية خاصة فيما يتعلق بالتوابع متعددة المتحولات.

2-1 تعريف تفاضل تابع :

يعرف تفاضل التابع $y = f(x)$ بأنه الفرق بين ترتيـبي النقطتين $(x+\Delta x, x)$ على المماس المرسوم على منحنى التابع $f(x)$ في النقطة $(x, f(x))$ ويرمز للتفاضل بالرمز dy ، وبعبارة أخرى تفاضل التابع $y = f(x)$ هو حاصل ضرب المشتق y' في مقدار تغير المتحول المستقل Δx عندما تؤول Δx إلى الصفر أي:

$$dy = y' \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$$

وبما أن تغير المتحول المستقل Δx يساوي لتفاضله عندما $\Delta x \to 0$ فإن التفاضل يكتب بالشكل التالي:

$$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx$$

وبشكل مشابه نوجد التفاضل من المرتبة الثانية والثالثة ...

$$d^2 y = f''(x) \cdot dx^2, \quad d^3 y = f'''(x) \cdot dx^3, \ldots$$

في الحقيقة، إن التفاضلات التي تستخدم في المسائل الاقتصادية هي التفاضلات من المرتبة الأولى والثانية للتوابع متعددة المتحولات والتي تأخذ اسم التفاضلات الجزئية. أما التفاضل من المرتبة الأولى للتوابع وحيدة المتحول فتستخدم في حساب التغيرات التقريبية لتلك التوابع خاصة عندما تكون عملية حساب التغيرات الحقيقية صعبة ومعقدة، وبذلك نقع في أخطاء تتمثل بالفرق بين التغيرات الحقيقة والتغيرات التقريبية لتلك التوابع، وعادة يتم حساب القيمة المطلقة لتلك الأخطاء لأن التغير الحقيقي يكون أكبر من التغير التقريـبي من أجل بعض التوابع ويكون على العكس من أجل البعض الآخر.

نرمز للخطأ المطلق المرتكب في حساب التغير للتابع $f(x)$ بالرمز S ويعطى بالعلاقة التالية:

$$S = |\Delta y - dy|$$

في كثير من المسائل نحتاج إلى حساب الخطأ النسبي للتغير خاصة عندما نريد مقارنة تغير تابعين مختلفين نتيجة لتغير في المتحول المستقل ونرمز للخطأ النسبي للتابع $f(x)$ بالرمز T ويعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{|\Delta y - dy|}{\Delta y} = \frac{S}{\Delta y} \cdot 100$$

مثـــال: احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير التابع:

$$y = f(x) = 3x^2 + 7x - 5$$

عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01.

الحـــل:

لإيجاد الخطأ المطلق والنسبي للتابع $f(x)$ لابد من إيجاد التغير الحقيقي Δy وكذلك التغير التقريـــبي dy للتابع $f(x)$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= [3(x+\Delta x)^2 + 7(x+\Delta x) - 5] - [3x^2 + 7x - 5] \\ &= 6x \cdot \Delta x + 7\Delta x + 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

وبتعويض قيم كل من x و Δx يكون:

$$\Delta y = 6(5)(0.01) + 7(0.01) + 3(0.01)^2 = 0.3703$$

وهو التغير الحقيقي الحاصل. ولإيجاد التغير التقريـــبي نجد:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (6x+7) \cdot \Delta x$$

وبتعويض قيم كل من x و Δx يكون: $dy = [6(5)+7](0.01) = 0.37$

إذاً الخطأ المطلق المرتكب في حساب التغير الحاصل هو:

$$S = |\Delta y - dy| = |0.3703 - 0.37| = 0.0003$$

أما الخطأ النسبي المرتكب في حساب التغير الحاصل فهو:

$$T = \frac{S}{\Delta y} \cdot 100 = \frac{0.0003}{0.3703} \cdot 100 = 0.081\%$$

3-1 تعريف المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

كما ذكرنا أن المشتقات الجزئية مفهوم مرتبط بالتوابع متعددة المتحولات. لنتذكر أيضاً أن المشتق الجزئي للتابع $F = f(x,y)$ بالنسبة للمتحول x هو نهاية النسبة $\frac{\Delta F_x}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

كذلك المشتق الجزئي للتابع $f(x,y)$ بالنسبة للمتحول y هو نهاية النسبة $\frac{\Delta F_y}{\Delta y}$ عندما $\Delta y \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

انطلاقاً من ذلك يمكن التعميم على التوابع متعددة المتحولات. ليكن التابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ المعرف والمستمر في كل نقطة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ من ساحة تعريفه. عندما يتغير المتحول المستقل x_i بمقدار Δx_i فإن التابع F سيتغير بمقدار ΔF_x ومنه: نعرف المشتق الجزئي للتابع F بالنسبة للمتحول x_i بأنه نهاية النسبة $\frac{\Delta F_{xi}}{\Delta x_i}$ عندما $\Delta x_i \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

وبشكل مشابه تعرف المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتحولات المستقلة الأخرى ويعبر عن تلك المشتقات بالرموز التالية: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ ... \ , \frac{\partial f}{\partial x_n}$

وتجدر الإشـــارة هنا إلى أنه عند إجراء الاشتقاق الجزئي للتابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

بالنسبة للمتحول x_i حيث $(i = 1, 2, ..., n)$ نعتبر كل المتحولات الأخرى ثابتة ونجري الاشتقاق كما لو أن لدينا تابع بمتحول واحد x_i مستقل هو الذي نشتق إليه.

مثـــال: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_1 x_2^2 + x_2 \cdot \ln x_1$$

الحـــل:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 + 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1 x_2 + \ln x_1$$

4-1 المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات:

ليكن لدينا التابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ المعرف والمستمر في كل نقطة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ من ساحة تعريفه ولتكن $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذا التابع. إن هذه المشتقات الجزئية هي توابع أيضاً لنفس المتحولات وبالتالي يمكن إجراء الاشتقاق الجزئي للمشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمتحولات x_i وبذلك نحصل على المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع F. وهذه المشتقات الجزئية هي:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

مثـــال:

أوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع:

$$F = x_1^4 - 5x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 x_3 - 6$$

واحسب قيمها في النقطة $(1, 2, 3)$.

الحـــل: لنوجد أولاً جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 10x_1 x_2^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -10x_1^2 x_2 + 18x_2^2 x_3 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 6x_2^3 \qquad (3)$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع F نشتق التوابع السابقة مرة ثانية بالنسبة لجميع المتحولات. باشتقاق المعادلة (1) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 - 10x_2^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -20x_1 x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

باشتقاق المعادلة (2) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -20x_1 x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -10x_1^2 + 36x_2 x_3 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 18x_2^2$$

باشتقاق المعادلة (3) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 18x_2^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

لنوجد قيم هذه المشتقات في النقطة (1 , 2 , 3) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -28 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -40 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -40 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 206 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 72$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 72 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

5-1 التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع متعدد المتحولات:

لنتذكر أن التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لتابع بمتحولين $Z = f(x, y)$ هو:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

أي إن التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لمتحولين يساوي إلى مجموع التغيرات في التابع Z الناتجة عن تغيرات لامتناهية في الصغر في كل من المتحولين x و y.

ويمكن تعميم ذلك بهدف الحصول على التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لتابع بـ n متحول.

ليكن لدينا $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ تابعاً لـ n متحول مستقل وقابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. ونظراً لأن المتحولات مستقلة فإنه يمكن أن نثبتها باستثناء أحدها و ليكن x_i فيصبح التابع تابعاً لمتحول واحد x_i يمكن أخذ تفاضله بالنسبة لهذا المتحول فيكون:

$$dF_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

فإذا قمنا بنفس العملية من أجل كل i حيث $i=1,2,\ldots,n$ نحصل على التفاضلات:

$$dF_{x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\ ,\ dF_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\ ,\cdots,dF_{x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

نطلق على مجموع هذه التفاضلات اسم التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع F ونكتب:

$$dF=\sum_{i=1}^{n}dF_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

إذاً التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع F يساوي لمجموع جداءات المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع F في تغيرات تلك المتحولات.

مثـــال: أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع:

$$Z=f(x,y)=2x^2y+3x^3y^5$$

الحــل: نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy+9x^2y^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2+15x^3y^4$$

ومنه نعوض في معادلة التفاضل الكلي للتابع:

$$dZ=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(4xy+9x^2y^5)dx+(2x^2+15x^3y^4)dy$$

وبإعطاء قيم لـــ x , y , dx , dy فإن العلاقة الأخيرة تمكننا من تقدير dZ.

6-1 التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات :

لنتذكر أن التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع بمتحولين $F=f(x,y)$ هو التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع df، حيث df هو التفاضل من المرتبة الأولى للتابع $f(x,y)$ هو أيضاً تابع للمتحولات x, y أي:

$$d^2F=d(df)=d(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy)$$

$$d^2F=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\ dy+\frac{\partial^2 f}{dy^2}dy^2$$

بتعميم ذلك على تابع متعدد المتحولات نجد أنه من أجل التابع $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه، يمكن إيجاد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية.

لنأخذ التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هو:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

إن التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للتابع F هو التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع dF إذاً:

$$d^2F = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\right)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)dx_1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)dx_2 +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\right)dx_n + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)dx_n + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)dx_n$$

بشكل مختصر نكتب:

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}dx_1dx_n +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}dx_2dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2dx_n +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}dx_ndx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}dx_ndx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2$$

وهي العبارة التي تعطينا التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع ذي n متحول.

مثـــال : ليكن لدينا التابع: $Z = 2x^2y + 2xy^2 + 3xy + 5$

والمطلوب: إيجاد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لهذا التابع.

الحــل:

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4xy + 2y^2 + 3y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2x^2 + 4xy + 3x$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 4y \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 4x + 4y + 3$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 4x + 4y + 3 \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 4x$$

ومنه التفاضل الكلي من المرتبة الثانية يعطى بالعلاقة التالية:

$$d^2Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dy^2$$

بالتعويض نجد: $d^2Z = (4y)dx^2 + 2(4x + 4y + 3)dx\, dy + (4x)dy^2$

وهو المطلوب.

7-1 المشتقات الجزئية للتوابع الضمنية:

يسمى التابع الذي يأخذ الشكل $y = f(x)$ بالتابع المحدد أو الصريح لأن المتغير التابع y معبر عنه بوضوح و صراحة بدلالة المتحول المستقل x . مثلاً التابع $y = 6x^2 + 9$ يعد تابعاً صريحاً.

أما في حال أعطينا علاقة تابع بالشكل $f(x, y) = 0$ فإن التابع يسمى تابعاً ضمنياً حيث لا يميز المتحول التابع عن المتحول المستقل، فعلى سبيل المثال الشكل الضمني للتابع السابق هو $f(x, y) = y - 6x^2 - 9 = 0$ وغالباً ما تكون التوابع الاقتصادية في شكلها الضمني، وبالتالي لإيجاد مشتقات تلك التوابع نوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لطرفي علاقة التابع الضمني (دون التمييز بين التابع وبين المتحولات) حيث نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

وبالتالي فإن:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{أو} \qquad x'_y = \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{1}{y'_x}$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على التوابع متعددة المتحولات كما يلي:

ليكن لدينا التابع الضمني $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ ونريد الحصول على المشتقات الجزئية للتابع Z بالنسبة لمتحولاته $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ وذلك دون أن نجعل ذلك التابع ظاهرياً (أي دون أن نجعله من الشكل $(Z = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, z)$)

فإننا نطبق القاعدة التالية: $\forall\ i = 1,2,\dots,n \qquad \frac{\partial Z}{\partial x_i} = -\frac{f'_{x_i}}{f'_Z}$

وهكذا نجد أن للتابع الضمني $f(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = 0$ مشتقات جزئية وهي على التوالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_Z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = -\frac{f'_{x_2}}{f'_Z}$$

....

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = -\frac{f'_{x_n}}{f'_Z}$$

مع ملاحظة أن $f'_Z \neq 0$.

مثـــال: أوجد المشتقات الجزئية $\frac{\partial Z}{dx_1}, \frac{\partial Z}{dx_2}, \frac{\partial Z}{dx_3}$ للتابع الضمني.

$$f(x_1, x_2, x_3, z) = x_1^3 + 3x_1x_2^2x_3 - 2x_2^2x_3^3 + 3x_1^2x_2z + x_1^2z^2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{dx_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_Z} = -\frac{3x_1^2 + 3x_2^2x_3 + 6x_1x_2z + 2x_1z^2}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

$$\frac{\partial Z}{dx_2} = -\frac{f'_{x_2}}{f'_Z} = -\frac{6x_1x_2x_3 - 4x_2x_3^3 + 3x_1^2z}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

$$\frac{\partial Z}{dx_3} = -\frac{f'_{x_3}}{f'_Z} = -\frac{3x_1x_2^2 - 6x_2^2x_3^2}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

§-2- القيم القصوى للتوابع المتعددة المتحولات:

تعريف النقطة الحرجة: نقول عن النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ أنها نقطة حرجة للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إذا انعدمت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ في هذه النقطة أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

تعريف النقطة العظمى الموضعية: ليكن لدينا التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. نقول عن النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ إنها نقطة عظمى موضعية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إذا كانت قيمة التابع عند هذه النقطة أكبر من قيمته عند أية نقطة أخرى مجاورة لتلك النقطة.

وبعبارة أخرى نقول عن النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ إنها نقطة عظمى موضعية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إذا تحققت من أجل كل نقطة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مجاورة للنقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ المتراجحة التالية:

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \geq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تعريف النقطة الصغرى الموضعية: ليكن لدينا التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. نقول عن النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ إنها نقطة صغرى موضعية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إذا كانت قيمة التابع عند هذه النقطة أصغر من قيمته عند أية نقطة أخرى مجاورة لتلك النقطة.

وبعبارة أخرى نقول عن النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ إنها نقطة صغرى موضعية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ إذا تحققت من أجل كل نقطة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مجاورة للنقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ المتراجحة التالية:

$$f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) \leq f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

تعريف النقطة القصوى: كل نقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ عظمى موضعية كانت أم صغرى موضعية تسمى نقطة قصوى موضعية. وقد يوجد أكثر من نقطة عظمى موضعية وأكثر من نقطة صغرى موضعية للتابع وقد لا توجد أية نقطة قصوى للتابع.

وننوه إلى أنه إذا كانت النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ حرجة فليس من الضروري أن تكون قصوى، أما إذا كانت تلك النقطة قصوى فهي حتماً حرجة.

سنستعرض فيما يلي نوعين من القيم القصوى للتابع .

1. **القيم القصوى الحرة:** حيث لا يوجد هناك أية شروط تقيد تغيرات المتحولات ضمن ساحة تعريف التابع.
2. **القيم القصوى المقيدة:** أي المشروطة بتحقيق قيود معينة ، كإيجاد القيم العظمى لتابع إنتاج منشأة ما شرط تحقيق تكلفة ثابتة معطاة.

1-2 القيم القصوى الحرة لتابع ذو n متحول:

ليكن التابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في ساحة تعريفه أي في مجال تغير النقطة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ في الفراغ ذي الـ n بعد.

كي تكون النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ قصوى أي عظمى أو صغرى للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ فإنه يلزم أن تكون تلك النقطة حرجة ، أي يجب أن تكون جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ مساوية الصفر، هذا يعني تحقق المعادلة التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0\,, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

وكما نعلم أنه إذا كانت النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ حرجه فهذا لا يعني أنها قصوى. ومن أجل ذلك يجب إيجاد $d^2 f$ أي المشتق من المرتبة الثانية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. ولمعرفة نوع النقطة القصوى نلجأ عادةً إلى تشكيل ما يسمى **بمعين هيسيان** الذي نرمز له بالرمز H ، وهو معين تتكون عناصره من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث فيه:

السطر الأول يمثل المشتقات الجزئية من الشكل $\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_i})\ ;\ (i=1,2,\ldots,n)$، والسطر الثاني المشتقات الجزئية من الشكل $\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_i});\ (i=1,2,\ldots,n)$ وهكذا نتابع بنفس الأسلوب حتى السطر الأخير n الذي يمثل المشتقات الجزئية من الشكل $\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})\ ;\ (i=1,2,\ldots,n)$. أي له الشكل التالي:

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

ونجد أن هذا المعين هو من المرتبة n المساوية لعدد المتحولات في التابع.

نقوم الآن بتشكيل المعينات الجزئية المشكلة حول القطر الرئيسي لهذا المعين بالترتيب التالي:

$$H_1=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \end{vmatrix}$$

$$H_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$H_3=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

وهكذا حتى نصل إلى المعين H_n الذي له شكل المعين H.

ونلاحظ أن عدد المعينات الجزئية هو n معين ويساوي إلى عدد المتحولات في التابع وتعطى شروط النقاط العظمى والصغرى الموضعية بالتالي:

1- حتى يكون للتابع f قيمة عظمى موضعية في النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ **يكفي أن** تتناوب إشارات قيم معينات هيسيان الجزئية من سالب إلى موجب إلى سالب وذلك اعتباراً من H_1 أي يكون:

$$H_1 < 0 \ , \ H_2 > 0 \ , \ H_3 < 0 \ , \ \ldots \ , \ (-1)^n H_n > 0$$

2- حتى يكون للتابع f قيمة صغرى موضعية في النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ يكفي أن تكون المعينات الجزئية موجبة أي:

$$H_1 > 0, H_2 > 0 \ , H_3 > 0 \ , \ \cdots \ , \ H_n = H > 0$$

3- أما في الحالات المخالفة للحالتين السابقتين بما فيها $H_i = 0$ من أجل أي قيمة لـ i فإن النقطة الحرجة **تكون نقطة شاذة.**

مثال:

أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

الحل:

لنوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونضعها مساوية للصفر.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 3x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 3x_1 - 6x_3 = 0 \qquad (3)$$

من المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = 1$ ومن المعادلة الثالثة نحصل على $x_1 = 2x_3$ نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على:

$$-12x_3^2 + 3x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x_3(-4x_3 + 1) = 0$$

ومنه: إما $x_3 = 0 \ \Leftarrow \ x_1 = 0$ أو $x_3 = \frac{1}{4} \ \Leftarrow \ x_1 = \frac{1}{2}$.

وبالتالي يكون لدينا نقطتان حرجتان هما:

النقطة الأولى $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ والنقطة الثانية $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0,1,0)$.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -6x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 3$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 3 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = -6$$

نشكل معين هيسيان من قيم المشتقات التي حصلنا عليها:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

لدى دراسة النقطة الحرجة الأولى $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$ نعوضها في H نجد:

$$H = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

نشكل معينات هيسيان الجزئية فيكون:

$$H_1 = |-3| = -3 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$H = H_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 < 0$$

ونلاحظ أن إشارات معينات هيسيان الجزئية تتناوب من سالب إلى موجب إلى سالب ومنه حسب التعريف تكون النقطة الحرجة $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$ نقطة عظمى موضعية.

ويأخذ فيها التابع قيمه عظمى نحصل عليها بتعويض النقطة في التابع نجد:

$$F=-(\frac{1}{2})^3+3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+2(1)-(1)^2-3(\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16}$$

أما لدراسة النقطة الحرجة الثانية $(0,1,0)$ نعوضها في معين هيسيان H نجد:

$$H=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

وبما أن $H_1=0$ نجد أن النقطة $(0,1,0)$ ليست بنقطة قصوى.

مثـــال: أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F=\frac{1}{3}x_1^3+x_2^2+x_3^2+x_1x_2$$

الحــل:

لنوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونضعها مساوية للصفر.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_1^2+x_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2+x_1=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}=2x_3=0 \qquad (3)$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $x_3=0$ ومن المعادلة الثانية نحصل على $x_2=-\frac{1}{2}x_1$ نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على:

$$x_1^2-\frac{1}{2}x_1=0 \ \Rightarrow\ x_1(x_1-\frac{1}{2})=0$$

ومنه: إما $x_1=0 \ \Leftarrow\ x_2=0$ أو $x_1=\frac{1}{2} \ \Leftarrow\ x_2=-\frac{1}{4}$.

وبالتالي النقاط الحرجة هي:

النقطة الأولى $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0)$ والنقطة الثانية $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)=(0,0,0)$.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2x_1 \;,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1 \quad,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \quad,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2 \quad,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 2$$

نشكل معين هيسيان من قيم المشتقات التي حصلنا عليها:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

لدى دراسة النقطة الحرجة الأولى $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0)$ نعوضها في H نجد:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

نشكل معينات هيسيان الجزئية فيكون:

$$H_1 = |1| = 1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$H = H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

ونلاحظ أن إشارات معينات هيسيان الجزئية موجبة ومنه حسب التعريف تكون النقطة الحرجة $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0)$ نقطة صغرى موضعية. ويأخذ فيها التابع قيمه صغرى نحصل عليها بتعويض تلك النقطة في التابع نجد:

$$F = (\frac{1}{3})(\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{4})^2 + (0)^2 + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{48}$$

أما لدراسة النقطة الحرجة الثانية $(0\,,0\,,0)$ نعوضها في معين هيسيان H نجد:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

وبما أن $H_1 = 0$ نجد أن النقطة $(0\,,0\,,0)$ ليست بنقطة قصوى.

2-2 القيم القصوى المقيدة بشرط:

ليكن لدينا التابع $F = f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ من نقاط ساحة تعريفه. ولإيجاد القيم العظمى والصغرى لهذا التابع في حال وجود شرط يقيد من تغيرات متحولاته وليكن هذا الشرط من الشكل $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$.

ولإيجاد القيم القصوى المقيدة نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

1. الطريقة المباشرة:

تعتمد هذه الطريقة على أخذ أحد المتحولات من معادلة الشرط بدلالة المتحولات الأخرى وليكن x_n حيث نكتب:

$$x_n = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

نعوض x_n في التابع F فنجد:

$$F = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})\right)$$

بذلك نحصل على تابع لـ $n-1$ متحول نبحث عن القيم القصوى الحرة وهي محققة للشرط كما تم العمل في الفقرة السابقة:

مثـــال:

أوجد القيم القصوى للتابع: $F = f(x, y) = x \cdot y$

والمقيد بالشرط: $x + y = 12$

الحـــل:

من معادلة الشرط نحسب أحد المتحولين x أو y بدلالة الآخر فنجد:

$$y = 12 - x$$

نعوض هذه القيمة في معادلة التابع F فنحصل على صيغة جديدة للتابع F بالشكل:

$$F = x(12 - x) = 12x - x^2$$

إن التابع الجديد الحاصل هو تابع ذو متحول واحد. لذلك نوجد مشتق التابع F بالنسبة للمتحول x ونعدمه فنجد:

$$\frac{dF}{dx} = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$$

وهي نقطة حرجة . نوجد المشتق الثاني للتابع F:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -2 < 0$$

إن المشتق الثاني سالب دائماً فالتابع F يأخذ قيمة عظمى في النقطة $x = 6$ وقيمته العظمى تساوي:

$$F = f(6) = 12(6) - (6)^2 = 36$$

إما قيمة المتحول y الموافقة لهذه القيمة العظمى تساوي $y = 12 - 6 = 6$.

2. طريقة مضاريب لاغرانج :

تعتمد هذه الطريقة في أساسها على تشكيل ما يسمى بتابع لاغرانج.

في هذه الطريقة نأخذ الشرط $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$ ونضعه على الشكل التالي:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c = 0$$

نضرب طرفي الشرط بالوسيط (لمبدا) بـــ λ الذي نطلق عليه أسم مضروب لاغرانج (أو متحول لاغرانج) فيكون:

$$\lambda[g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c] = 0$$

نضيف هذا الناتج إلى التابع f الذي يسمى بتابع الهدف فيتشكل لدينا تابع جديد نرمز له بالرمز L يسمى تابع لاغرانج ويعطى بالشكل التالي:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda[g(x_1, x_2, \dots, x_n) - c]$$

إننا بذلك حصلنا على تابع جديد ذو $n+1$ متحول بدون أي شرط كما هي الحال بالنسبة للقيم القصوى الحرة. إذاً لنبحث عن النقاط الحرجة للتابع L وهي من الشكل $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ نأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذا التابع بالنسبة لكافة

متحولاته x_i , λ ونطابق هذه المشتقات مع الصفر فنحصل على $n+1$ معادلة هي كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_1}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_2}=0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda\frac{\partial g}{\partial x_n}=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=g(x_1,x_2,\dots,x_n)-c=0$$

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الشرط نفسها.

بحل جملة المعادلات السابقة حلاً مشتركاً نحصل على نقاط حرجة من الشكل $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n,\bar{\lambda}\right)$ للتابع L. ولمعرفة ما إذا كان التابع F يأخذ قيم قصوى في النقطة $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n\right)$ الموافقة لإحدى النقاط الحرجة يتوجب علينا دراسة إشارة التفاضل الكلي للتابع F أي d^2F وللسهولة نقوم بتشكيل ما يسمى **بمعين هيسيان الموسع** المؤلف من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L بالنسبة لكافة المتحولات بما فيها λ ونرمز له بالرمز J وذلك كالتالي:

$$J=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

حيث يشمل السطر الأول على المشتقات الجزئية من المرتبة الاولى لمعادلة الشرط وذلك بعد وضع الصفر في الزاوية العلوية اليسارية من J موافقاً لوجود شرط واحد. كما نلاحظ أن العمود الأول ما هو إلا منقول السطر الأول، أما بالنسبة لباقي

المعين فيشكل من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L لنأخذ المعينات الجزئية من J بحيث:

- J_2 يضم المشتقات الجزئية للمتحولين x_2, x_1 وهو من المرتبة الثالثة:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

- J_3 يضم المشتقات الجزئية للمتحولات الثلاثة الأولى فقط وهو معين من المرتبة الرابعة:

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

وهكذا نتابع إيجاد J_4 ، J_5 حتى $J_n = J$.

- لمعرفة طبيعة كل نقطة حرجة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ عظمى للتابع L نعوضها في معين هيسيان الموسع J فتأخذ كافة المعينات قيماً عددية معينة.

1- تكون النقطة الحرجة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ عظمى موضعية للتابع L إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية السابقة من موجب إلى سالب إلى موجب وذلك اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 > 0 \ , \ J_3 < 0 \ , \ J_4 > 0 \ , \ \ldots \ , (-1)^n J_n > 0$$

وهنا تكون النقطة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ الموافقة للنقطة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n\right)$ عظمى موضعية بالنسبة للتابع f ومحققة للشرط بنفس الوقت.

2- **تكون النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ صغرى موضعية للتابع L إذا كانت** جميع إشارات المعينات الجزئية السابقة سالبة أي:

$$J_2 < 0 \; , \; J_3 < 0 \; , \; J_4 < 0 \; , \; \ldots \; , J_n < 0$$

وهنا تكون النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)$ الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ صغرى موضعية بالنسبة للتابع f ومحققة للشرط بنفس الوقت.

3- أما إذا لم تتحقق إحدى المتراجحات السابقة فإن النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)$ تكون نقطة حرجة فقط (شاذة).

مثـال :

أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$

والمحققة للشرط:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 100$$

الحـل:

نكتب الشرط بالشكل التالي: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100 = 0$

نضرب الطرفين بمتحول لاغرانج:

$$\lambda(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100) = 0$$

نشكل التابع L بإضافة الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة إلى التابع F:

$$L = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + \lambda[2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100]$$

نأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لكافة المتحولات بما فيها λ و نجعلها مساوية الصفر فنحصل على المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 2\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_2 + 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 10x_3 + 5\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100 = 0 \qquad (4)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نجد:

$$2x_1 = -\lambda \quad , \quad 2x_2 = -\lambda \quad , \quad 2x_3 = -\lambda$$

ومنه :

$$x_1 = x_2 = x_3$$

نعوض في المعادلة (4) فنجد:

$$2x_1 + 3x_1 + 5x_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -20$$

إذا النقطة الحرجة هي $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}) = (10, 10, 10, -20)$، لمعرفة طبيعة هذه النقطة، نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ونعوض في معين هيسيان الموسع J فنجد:

$$J = J_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -1200 < 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

بما أن إشارة المعينات الجزئية سالبة أي $J_3 < 0$, $J_2 < 0$ فالنقطة (10,10,10) الحرجة الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}) = (10, 10, 10, -20)$ نقطة صغرى موضعية ومحققة للشرط المعطى ويأخذ التابع قيمته الصغرى عندها وهي:

$$F = 2(10)^2 + 3(10)^2 + 5(10)^2 = 200 + 300 + 500 = 1000$$

2-3 القيم القصوى المقيدة بأكثر من شرط:

ليكن لدينا التابع $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق الجزئي مرتين على الأقل في ساحة تعريفه، ونرغب بإيجاد القيم العظمى والصغرى لتابع الهدف f وذلك على أن تتحقق الشروط التالية وعددها m شرط:

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1$$
$$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_m$$

يشترط في حل مسألة من هذا النوع أن لا يزيد عدد الشروط في المسألة عن عدد المتحولات أي $(m \leq n)$. لحل هذه المسألة نحول الثوابت C_j إلى اليسار ونضرب المعادلات الناتجة بمضاريب لاغرنج λ_j $(\forall j;\ j = 1, 2, \ldots, m)$ فنحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\lambda_j \left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j \right] = 0 \quad \forall \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

نأخذ هذه المعادلات ونضيفها إلى التابع f فيتشكل لدينا تابع L يسمى تابع لاغرنج كما يلي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \left[g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_1 \right] + \lambda_2 \left[g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_2 \right] + \cdots + \lambda_m \left[g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_m \right]$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل المختصر التالي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j \right]$$

ومن أجل الحصول على النقاط الحرجة للتابع L نأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع L وذلك بالنسبة لجميع المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ونجعلها تساوي الصفر فنحصل على $(n+m)$ معادلة التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j = 0 \qquad \forall \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

نلاحظ جملة الـ m معادلة الأخيرة تمثل جملة الشروط المعطاة . بحل جملة المعادلات $(n+m)$ نحصل على نقطة حرجة من الشكل $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ أو أكثر للتابع L الموافقة للنقاط الحرجة

لتابع الهدف F. لمعرفة طبيعة تلك النقاط الحرجة للتابع L نشكل $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ معين هيسيان الموسع كما يلي:

1- نخصص الـ m سطر الأولى من المعين للمشتقات الجزئية الأولى للشروط الـ m. نضع في السطر الأول و من اليسار m صفرا ونكمله بالمشتقات الجزئية الأولى للشرط الأول، ثم نضع في السطر الثاني m صفراً ونكمله بالمشتقات الجزئية الأولى للشرط الثاني وهكذا نتابع حتى ينتهي الـ m سطر.

2- نضع الـ m سطراً الأولى في الـ m عموداً الأولى بالترتيب.

3- أما الباقي من المعين فنخصصه للمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L.

ويظهر المعين أخيراً على الشكل المبين أدناه . لقد قسمنا معين هيسيان الموسع إلى أربع مناطق لجعلها واضحة، فالمنطقة العليا اليسرى تتكون من أصفار فقط كما أن المنطقة السفلى اليمنى ما هي إلا معين هيسيان، أما المنطقتين الأخيرتين فتشملان على المشتقات الجزئية للشروط ، وهي تمثل الصورة العكسية للعلاقة بينهما بالنسبة للقطر الرئيسي أما بقية العناصر فهي متناظرة.

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \vdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \vdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} & \vdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

أما لإيجاد المعينات الجزئية التالية : $J_2, J_3, \ldots, J_n = J$. نجد أن كل معين J_i حيث $i = 2,3, \ldots, n$ يتشكل من العناصر الواقعة في الزاوية اليسرى وهو من المرتبة $(m+i)$. فمثلا لدينا المعين J_2 هو معين من المرتبة $(m+2)$ ويأخذ الشكل التالي:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

إن مرتبة المعين J_i هي $(m+i)$ حيث $i = 2,3, \ldots, n$ إذاً مرتبة المعين J_n هي $(m+n)$.

لمعرفة طبيعة كل نقطة من النقاط الحرجة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ للتابع L نوجد قيمة المعينات الجزئية J_i بعد تعويض النقاط الحرجة التي حصلنا عليها في هذه المعينات، وتتم المناقشة كما يلي:

1- إذا كانت m عدد فردي، تكون النقطة الحرجة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ عظمى موضعية، إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية من موجب إلى سالب إلى موجب وهكذا ... اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 > 0 \quad , \quad J_3 < 0 \quad , \quad J_4 > 0, \ldots$$

2- إذا كانت m عدد زوجي تكون النقطة الحرجة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2, \ldots, \overline{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ عظمى موضعية، إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية من سالب إلى موجب إلى سالب وهكذا ... اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 < 0 \quad , \quad J_3 > 0 \quad , \quad J_4 < 0, \ldots$$

3- إذا كانت m عدد فردي، تكون النقطة الحرجة $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n,\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\dots,\overline{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$ صغرى موضعية إذا كانت جميع إشارات المعينات الجزئية سالبة أي:

$$J_2<0\ ,\quad J_3<0\ ,\quad J_4<0,\dots$$

4- إذا كانت m عدد زوجي تكون النقطة الحرجة $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n,\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\dots,\overline{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$صغرى موضعية إذا كانت جميع إشارات المعينات الجزئية موجبة أي:

$$J_2>0\ ,\quad J_3>0\ ,\quad J_4>0,\dots$$

5- أما إذا لم تتحقق أياً من النقاط الأربع السابقة فالنقطة الحرجة $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\dots,\overline{x}_n)$ ليست قصوى.

مثـــال:

أوجد القيم القصوى للتابع: $F=x_1^2+x_2^2-\frac{3}{4}x_3^2$

المقيد بالشرطين التاليين:

$$x_1+x_2=\frac{5}{2}$$
$$x_1=x_3$$

الحـــل:

نقوم بتحويل توابع الشرط إلى معادلات صفرية كما يلي:

$$g_1(x_1,x_2,x_3)-C_1=\frac{5}{2}-x_1+x_2=0$$
$$g_2(x_1,x_2,x_3)-C_2=x_1-x_3=0$$

وبتشكيل تابع لاغرنج فنحصل على:

$$F=x_1^2+x_2^2-\frac{3}{4}x_3^2+\lambda_1\left[\frac{5}{2}-x_1-x_2\right]+\lambda_2\left[x_1-x_3\right]$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها فنحصل على خمس معادلات هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2x_2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -\frac{3}{2}x_3 - \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}x_3 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{5}{2} - x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2} - x_1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 \qquad (5)$$

نعوض (2) و (3) في المعادلة (1) فنجد:

$$2x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \qquad (6)$$

نعوض (4) و (5) في (6) فنجد:

$$2x_1 - 2(\frac{5}{2} - x_1) - \frac{3}{2}x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 2 \quad \Rightarrow x_3 = 2$$

نعوض في (4) فنجد:

$$x_2 = \frac{5}{2} - 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -3$$

أي أن النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = (2, \frac{1}{2}, 2, 1, -3)$ هي نقطة حرجة.

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = -\frac{3}{2}$$

ونوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للشرطين:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=-1 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}=-1 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}=1 \quad , \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=0 \quad , \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=-1$$

نوجد قيمة معينات هيسيان الجزئية فنجد:

$$J=J_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}=\frac{5}{2}>0$$

وبما أنه لم تظهر متحولات وجميع القيم ثوابت عددية فنعتبر كأننا عوضنا النقطة الحرجة:

$$\mathrm{J}_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1>0$$

وبما أن عدد الشروط هو $m=2$ زوجي ، وإشارات معينات هيسيان الجزئية $\mathrm{J}_2>0$ و $\mathrm{J}_3>0$ موجبة ، عندئذ نقول أن النقطة الحرجة:

$$(\overline{\mathrm{x}}_1,\overline{\mathrm{x}}_2,\overline{\mathrm{x}}_3,\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2)=(2,\frac{1}{2},2,1,-3)$$

صغرى موضعية للتابع L أي أن النقطة $(\overline{\mathrm{x}}_1,\overline{\mathrm{x}}_2,\overline{\mathrm{x}}_3)=(2,\frac{1}{2},2)$ هي نقطة صغرى موضعية للتابع F المقيد بالشرطين المعطيين وقيمة التابع الصغرى في تلك النقطة هي:

$$F=f(2,\frac{1}{2},2)=(2)^2+(\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}(2)^2=\frac{5}{4}$$

الجدول المساعد

لقواعد المشتقات الأساسية

1. $y = k$ $\quad y' = 0 \quad (k \in R)$

2. $y = x$ $\quad y' = 1$

3. $y = x^n$ $\quad y' = n x^{n-1}$

4. $y = u(x) \mp v(x)$ $\quad y' = u'(x) \mp v'(x)$

5. $y = u(x) \cdot v(x)$ $\quad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

6. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\quad y' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

7. $y = \log_a x$ $\quad y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

8. $y = \ln x$ $\quad y' = \dfrac{1}{x}$

9. $y = \log u(x)$ $\quad y' = \dfrac{1}{u}\log_a e\dfrac{du}{dx}$

10. $y = \ln u(x)$ $\quad y' = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

11. $y = a^x$ $\quad y' = a^x \log_e a$

12. $y = e^x$ $\quad y' = e^x$

13. $y = [u(x)]^{v(x)}$ $\quad y' = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}v(x)\ln u(x)$

14. $y = a^{u(x)}$ $\quad y' = u'(x)a^{u(x)}\log_e a$

15. $y = e^{u(x)}$ $\quad y' = u'(x)e^{u(x)}$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير التابع:

$$y = f(x) = 6x^2 + 5x - 4$$

عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01.

2- لتكن لدينا العلاقة التالية: $y = 5(2)^x$

المطلوب: احسب التغيرين الحقيقي والتقريبي لـ y عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01 ثم احسب الخطأين المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير هذه العلاقة.

3- احسب التفاضلات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية لكل من التوابع التالية:

(1) $F = \ln x_1 + e^{x_2}$

(2) $F = a x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$

(3) $F = 1 - x_1^2 \cdot x_2$

(4) $F = a(bx_1^{-c} + (1-b)x_2^{-c})^{-\frac{1}{c}}$

4- بين فيما إذا كانت للتوابع التالية نقاط حرجة، ثم حدد نوعها، وأوجد قيمة التابع عند كل منها.

(1) $F = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 - x_2 - x_3$

(2) $F = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1$

(3) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

المقيد بالشرط: $x_1 = 7x_3$

(4) $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

المقيد بالشرط: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

(5) $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

المقيد بالشرطين: $x_1 = x_3$ $\quad$ $x_1^2 + x_2^2 = 6$

الفصل التاسع
المرونات

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض المفاهيم الاقتصادية الشائعة والمستخدمة للمشتقات، وجميع هذه المفاهيم حدية (هامشية)، بمعنى أنها تعكس مدى استجابة التابع لتغير لا متناه في الصغر في المتحول المستقل. يمكن توضيح المعنى الاقتصادي للمشتق من خلال سرد بعض الأمثلة الاقتصادية التطبيقية.

§-1- المرونة:

تعتبر المرونة (Elasticity) من الأدوات الفعالة في الاقتصاد، حيث يستخدمها الاقتصادي عندما يرغب في معرفة الطريقة التي يؤثر فيها تغير أحد العوامل على العوامل الأخرى. فمثلاً عندما نريد معرفة كيفية تأثير التغيرات التي تحدث في الأسعار على الكميات المطلوبة فإنه يمكن معرفة التأثير عن طريق المرونة.

وبصفة عامة **يقصد بالمرونة** مدى استجابة أو حساسية التابع للتغير في المتحول المستقل. فالمرونة السعرية هي الاستجابة للتغير في السعر، ومرونة الدخل هي الاستجابة للتغير في الدخل وهكذا ......

سوف نتحدث في هذا الفصل عن عدة أنواع من المرونة نبدأها بمرونة تابع ما بشكل عام ثم ننتقل بالحديث عن مرونة الطلب السعرية وهي أكثر أنواع المرونة شيوعاً في أدبيات الاقتصاد، ثم ننتقل بالحديث عن مرونة العرض السعرية و بعد ذلك عن مرونة الدخل والمرونة الجزئية للطلب والمرونة التقاطعية.

§-2- مرونة تابع:

إن مرونة تابع ما هي بالتعريف هي مدى حساسية هذا التابع نتيجة التغيرات التي من الممكن أن تطرأ على متحوله x المستقل. إذاً هي تعبير واضح عن درجة حساسية هذا التابع مقدرة بنسبة مئوية.

ومن أجل تعريف مرونة تابع ما $y = f(x)$ بالنسبة لمتحوله x رياضياً نفرض أننا أعطينا تغيراً لـــ x مقداره Δx فنحصل على تغير لـــ y مقداره Δy، عندها نعرف مرونة التابع y بالنسبة للمتغير x ونرمز لها بالرمز $E_x(y)$ بأنها نسبة

التغيرات النســبية للتابع y أي $(\frac{\Delta y}{y})$ إلى التغيرات النسبية للمتحول x أي $(\frac{\Delta x}{x})$

ونكتب ذلك وفق الشكل التالي:

$$E_x(y) = (\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1)$$

وهي ما تسمى بالمرونة بين نقطتين.

وتعرف مرونة التابع عند نقطة ما من نقاطه بالعلاقة التالية:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}) = y' \cdot \frac{x}{y} \qquad (2)$$

كما أنه يمكن إيجاد مرونة التابع $y = f(x)$ باستخدام التفاضل اللوغاريتمي حيث نجد أن:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)}$$

لأنه كما نعلم:

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبالتعويض نجد:

$$E_x(y) = \frac{d(\ln y)}{d(\ln x)} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = y'_x \cdot \frac{x}{y}$$

عند إيجاد المرونة نستطيع تمييز الحالات التالية:

1- إذا كانت المرونة $E_x(y) > 1$ فهذا يعني أن العلاقـة بـين x و y هـي علاقـة طردية، فإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطـرأ على التابع y زيادة (نقصان) بمقدار $E_x(y)\%$ ونقول أن التابع مرن.

2- إذا كان $E_x(y) = 1$ فهذا يدل على أن المرونة متكافئة وتعني إذا طرأ تغيير علـى x بنسبة 1% فإن ذلك يؤدي إلى تغير مقابل في قيمة المتحول y بنـسبة مماثلـة مقدارها 1% ونقول أن التابع (أحادي المرونة).

3- إذا كانت $0 < E_x(y) < 1$ فهذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% يؤدي إلى زيادة y بمقدار أقل من 1% ونقول أن التابع غير مرن.

4- أما إذا كانت $-1 < E_x(y) < 0$ فإن هذا يعني أن العلاقــة بــين x, y علاقــة عكسية. أي أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي إلى تناقص y بمقدار أقل مــن 1% ونقول أن التابع غير مرن.

5- أما إذا كانت $E_x(y) = -1$ فإن هذا يعني أن زيادة x بمقدار 1% ستؤدي إلــى تناقص y بمقدار 1% أيضاً ونقول إن التابع (أحادي المرونة).

6- أما إذا كانت $E_x(y) < -1$ فهذا يعني أن العلاقة بين y ، x علاقة عكسية فــإذا طرأ على المتحول x أية زيادة (نقصان) بمقدار 1% فسوف يطرأ على التــابع y نقصــان (زيادة) بمقدار أكبر من 1% ونقول أن التابع مرن.

7- إذا كانت $E_x(y) = 0$ تسمى بالمرونة الصفرية، فإن ذلك يعني أن أي تغير علــى قيمة المتحول المستقل لن يؤدي إلى تغير على قيمة المتحول y ونقــول أن التــابع عديم المرونة.

ويمكن تلخيص ما سبق على الشكل التالي:

$1 < \left\| E_x(y) \right\|$	التابع مرن
$0 < \left\| E_x(y) \right\| < 1$	التابع غير مرن
$\left\| E_x(y) \right\| = 1$	التابع أحادي المرونة
$E_x(y) = 0$	التابع عديم المرونة

مثـــال:

ليكن لدينا التابع التالي: $y = 3x^3 - 3x^2 + 4x + 8$

ولنفرض أن المتحول x تغير بمقدار 1%. أوجد مرونة التابع وذلك في النقطة $x = 2$.

الحــل: إن مرونة التابع هي:

$$E_x = y'_x \cdot \frac{x}{y}$$

إن قيمة التابع عند النقطة $x = 2$ هي:

$$y = 3(2)^3 - 3(2)^2 + 4(2) + 8 = 24 - 12 + 8 + 8 = 28$$

وقيمة المشتق في النقطة $x = 2$ هي:

$$y'_x = 9x^2 - 6x + 4 = 9(2)^2 - 6(2) + 4 = 36 - 12 + 4 = 28$$

نعوض في تابع المرونة نجد:

$$E_x(y) = 28.\frac{2}{28} = 2$$

وهذا يعني أنه إذا تغير المتحول x بنسبة 1% فإن التابع y سوف يتغير بمقدار 2% بنفس الاتجاه لأن المرونة موجبة.

§-3- خــواص المــرونــة:

تتمتع المرونة بخاصتين:

الخاصة الأولى: مرونة جداء تابعين y , z تساوي لمجموع مرونتي التابعين بالنسبة للمتغير نفسه.

إذا كان لدينا التابعين $y = f(x)$, $z = g(x)$ فإن:

$$E_x(y \cdot z) = E_x(y) + E_x(z)$$

البرهــان: لدينا

$$E_x(y \cdot z) = \frac{d(y \cdot z)}{dx} \cdot \frac{x}{y \cdot z} = \frac{z\,dy + y\,dz}{dx} \cdot \frac{x}{y \cdot z}$$

ومنه:

$$E_x(y \cdot z) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y \cdot z} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{y \cdot x}{y \cdot z}$$

وبالاختصار نجد:

$$E_x(y \cdot z) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} + \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z}$$

ومنه:

$$E_x(y \cdot z) = E_x(y) + E_x(z)$$

وهو المطلوب.

الخاصة الثانية: إن مرونة تابع كسري $\frac{y}{z}$ يساوي مرونة تابع البسط مطروحـاً منـه مرونة تابع المقام بالنسبة للمتغير نفسه، أي:

$$E_x(\frac{y}{z}) = E_x(y) - E_x(z)$$

البرهـــان:

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{d(\frac{y}{z})}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{y}{z}} = \frac{z\,dy - y\,dz}{z^2dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y}$$

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{dy}{z^2dx} \cdot \frac{z^2 \cdot x}{y} - \frac{y\,dz}{z^2dx} \cdot \frac{z \cdot x}{y}$$

بالاختصار نجد:

$$E_x(\frac{y}{z}) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} - \frac{dz}{dx} \cdot \frac{x}{z}$$

ومنه:

$$E_x(\frac{y}{z}) = E_x(y) - E_x(z)$$

وهو المطلوب.

مثـــال:

ليكن لدينا التابع $y = (5x^2 - 3x + 4)e^{5x}$ والمطلوب إيجاد مرونة هذا التابع.

الحــل: نلاحظ أن التابع يكتب بشكل جداء تابعين $y = u \cdot v$ حيث:

$$u = 5x^2 - 3x + 4$$

$$v = e^{5x}$$

وبتطبيق الخاصة الأولى نجد:

$$E_x(u) = u'_x \cdot \frac{x}{u} = (10x - 3) \cdot \frac{x}{5x^2 - 3x + 4} = \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 - 3x + 4}$$

$$E_x(v) = v'_x \cdot \frac{x}{v} = 5e^{5x} \cdot \frac{x}{e^{5x}} = 5x$$

ومنه تكون المرونة الكلية:

$$E_x(y) = E_x(u) + E_x(v) = \frac{10x^2 - 3x}{5x^2 - 3x + 4} + 5x$$

§-4- أنواع المرونات: فيما يلي نستعرض بعض أنواع المرونات:

4-1- مرونة الطلب السعرية :

كما هو معروف في التحليل الجزئي، أن قانون الطلب ينص على وجود علاقة عكسية بين سعر سلعة ما والكمية المطلوبة منها، فإذا زاد السعر انخفضت الكمية المطلوبة، وإذا انخفض السعر زادت الكمية المطلوبة، ولكن قانون الطلب لا يكشف عن درجة التغير أو مدى استجابة الكمية المطلوبة للتغير في سعر السلعة. ويطلق الاقتصاديون على مدى استجابة الكمية المطلوبة للتغير في السعر اسم مرونة الطلب السعرية (Price Elasticity of Demand) أو مرونة الطلب بالنسبة للسعر أو اختصاراً مرونة الطلب. كما أنها تعد من المعايير الاقتصادية الهامة التي تدخل في دراسة سلوك المستهلك، والتي تقيس درجة تغير الكميات المطلوبة حينما يتغير السعر. ليكن لدينا تابع الطلب على سلعة ما D يتعلق بالسعر P بالعلاقة التالية:

$$D = f(P)$$

وبفرض أن سعر السلعة P تغير بمقدار ΔP حينها يتغير الطلب D بمقدار ΔD. تعرف مرونة الطلب السعرية ، بأنها نسبة التغيرات النسبية للكمية المطلوبة من سـلعة معينة إلى التغيرات النسبية لسعر هذه السلعة.

فإذا رمزنا لمرونة الطلب السعرية بالرمز $E_P(D)$ فإن:

$$E_P(D) = \frac{\frac{\Delta D}{D}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D} \qquad (1)$$

ونستطيع التعرف إلى مرونة الطلب على سلعة معينة من أجل نقطة ما وفق العلاقة التالية:

$$E_P(D) = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta P} \cdot \frac{P}{D} = D'_P \frac{P}{D} \qquad (2)$$

إن العلاقة بين الطلب والسعر هي غالباً علاقة عكسية، فإذا زاد سعر الوحدة المنتجة فسوف يقابله نقصان في الكمية المطلوبة (والعكس صحيح). إذاً لـ D و P اتجاهان متعاكسان وإن إشارة النسبة بين تغيراتهما هي إشارة سالبة، وحتى يكون

لعلاقة المرونة السابقة $E_P(D)$ مدلول اقتصادي (أي حتى تكون $E_P(D) > 0$) فقد جرت العادة على إهمال الإشارة السالبة والأخذ بالقيمة المطلقة لمرونة الطلب السعرية[*].

مثـــال:

ليكن تابع الطلب على سلعة ما معطى بالعلاقة التالية: $D = 20 - 2P$. احسب المرونة السعرية عند كل من السعر $P = 2$ وكذلك عند $P = 6$.

الحــل: نوجد مشتق تابع الطلب بالنسبة للسعر فنجد أن: $D'_P = -2$

وبالتعويض بعلاقة مرونة الطلب السعرية نجد أن:

$$E_P(D) = D'_P \cdot \frac{P}{D} = \frac{-2P}{20-2P} = \frac{-P}{10-P}$$

1- عندما $P = 2$ نجد أن مرونة الطلب السعرية هي:

$$E_P(D) = \frac{-(2)}{10-2} = \frac{-1}{4} = -0.25$$

هذا يعني أنه عندما يطرأ تغير على السعر P بمقدار 1% عند القيمة $P = 2$ فإن الطلب على السلعة سيتغير بالاتجاه المعاكس بنسبة أقل من 0.25% أي أنه بالقيمة المطلقة أقل من الواحد الصحيح وهذا يعني أن الطلب غير مرن.

2- عندما $P = 6$ نجد أن:

$$E_P(D) = \frac{-(6)}{10-6} = \frac{-6}{4} = -1.5$$

(*) يمكن كتابة مرونة الطلب السعرية على النحو التالي:

$$E_P(D) = -\frac{dD}{dP} \cdot \frac{P}{D} = -D'_P \cdot \frac{P}{D}$$

وذلك بفرض أن النسبة $\frac{dD}{dP} < 0$ موجبة دائماً، إذا $E_P(D)$ هي سالبة دائماً. وتبين قيمتها المطلقة النسبة المئوية لمدى التناقص الذي طرأ على الكمية المطلوبة D حينما يتغير سعر السلعة بمقدار 1%.

هذا يعني أنه إذا تغير السعر بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة سوف يزداد بمقدار 1.5% بالاتجاه المعاكس. أي أن القيمة المطلقة أكبر من الواحد الصحيح وهذا يعني أن الطلب مرن.

ملاحظات :

1- يوضح المثال السابق أن المرونة هي تابع للسعر وتتغير من نقطة إلى أخرى لـذا تحسب عند نقطة معينة P_0 وتسمى هذه بمرونة النقطة P_0 لتمييزها عن غيرها من المرونات.

2- نلاحظ أنه عندما يكون تابع الطلب خطياً كالذي استخدمناه في المثال السابق، فـإن المشتق الأول له ثابت، إلا أن المرونة متغيرة من نقطة إلى أخـرى، أي أن هنـاك فارق بين ميل التابع (المشتق الأول له) وبين المرونة حيث تختلف المرونة مـن نقطة إلى أخرى للتابع الخطي، بينما الميل ثابت لا يتغير لهذه التوابع.

3 - لا يعني ما ذكرناه سابقاً أن المرونة تتغير دائماً فهنـاك توابـع تتـصف بثبـات المرونة.

مثـال: أوجد مرونة تابع الطلب المعطى بالعلاقة التالية: $D = AP^{-\alpha}$

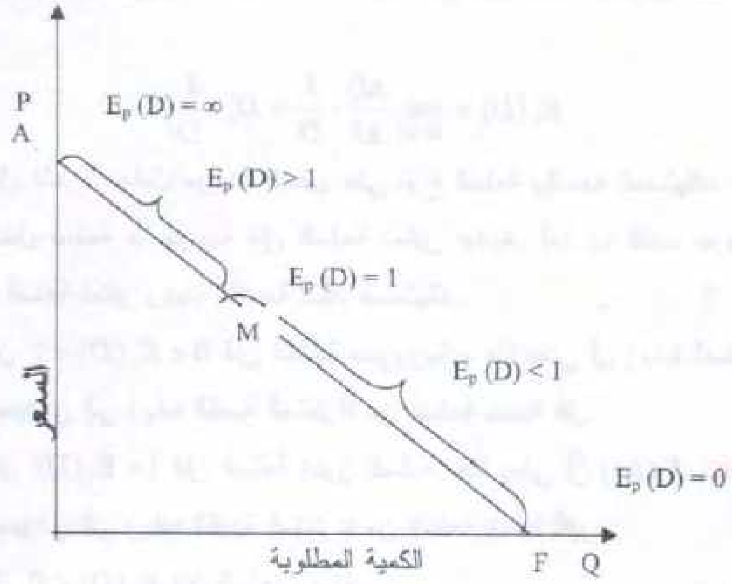
لنحسب المشتق الأول للتابع: $D'_P = -\alpha AP^{-\alpha-1}$

بالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$E_P(D) = (-\alpha AP^{-\alpha-1})\frac{P}{AP^{-\alpha}} = -\alpha$$

وهذا يعني أن المرونة ثابتة دائماً.

4- ومن الحالات الخاصة للمرونة أنه قد لا ترتبط الكمية المطلوبة بالسعر وبالتـالي لا تتغير مع تغيرات السعر (مثال على ذلك الاستهلاك العائلي للملح حيث أنه لا يؤدي عملياً انخفاض سعر الملح إلى ارتفاع استهلاكه وخاصة أن سعره رخيص أصـلاً) وفي هذه الحالة نجد أن تابع الطلب يكون على الشكل التالي $D = K$ حيث K كمية ثابتة. وبتطبيق قانون المرونة نجد أنها تساوي الصفر ويسمى الطلب في هذه الحالة عديم المرونة ويكون منحني الطلب خط مستقيم عامودي عند الكمية K.



الشكل رقم (1)

يبين الشكل اختلاف المرونة السعرية على منحني الطلب في حال كون منحني الطلب خطياً.

2-4- مرونة الطلب الدخلية:

إن مرونة الطلب الدخلية (Income Elasticity of Demand)، أو مرونة الطلب بالنسبة للدخل أو مرونة الدخل، تقيس مدى حساسية واستجابة الكمية المطلوبة من سلعة معينة للتغير في دخل المستهلك.

ليكن لدينا تابع الطلب: $D = f(I)$

حيث أن D تابع الطلب على سلعة معينة خلال فترة زمنية ويتبع الدخل I في تغيراته (حيث I دخل المستهلك) دون النظر إلى المتحولات الأخرى. إذا طرأ تغير على الدخل I بمقدار ΔI أدى ذلك إلى حدوث تغير في تابع الطلب D على السلعة الاقتصادية بمقدار ΔD. تعرف مرونة الطلب الدخلية بأنها نسبة التغيرات النسبية للطلب على سلعة معينة إلى التغيرات النسبية للدخل أي:

$$E_I(D) = \frac{\Delta D}{\Delta I} \cdot \frac{I}{D}$$

ويمكن كتابة مرونة الطلب لسلعة معينة من أجل نقطة ما وفق العلاقة التالية:

$$E_I(D) = \lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta D}{\Delta I} \cdot \frac{I}{D} = D'_I \cdot \frac{I}{D}$$

وتدل إشارة معامل مرونة الدخل على نوع السلعة بالنسبة للمستهلك. فإذا كانت مرونة الدخل لسلعة ما موجبة فإن السلعة تعتبر عادية. أما إذا كانت مرونة الدخل سالبة فإن السلعة تعتبر رديئة بالنسبة لذلك المستهلك.

1- إذا كان $0 < E_I(D) < 1$ فإن السلعة ضرورية ، هذا يعني أن زيادة الدخل بنسبة معينة سيؤدي إلى زيادة الكمية المشتراة من السلعة بنسبة أقل.

2- إذا كان $1 < E_I(D)$ فإن السلعة تكون كمالية. هذا يعني أن زيادة الدخل بنسبة معينة سيؤدي إلى زيادة الكمية المشتراة من السلعة بنسبة أكبر.

3- إذا كان $E_I(D) < 0$ فإن السلعة رديئة.

ويلاحظ أنه ليس هناك سلعة رديئة أو عادية عند جميع مستويات الدخل والواقع هو أن غالبية السلع تكون عادية عند مستويات الدخل المنخفضة، وغالبيتها أيضاً تكون رديئة عند مستويات الدخل المرتفعة، لذلك فإن سلعة ما قد تكون سلعة عادية عند مستوى دخل منخفض، وتكون رديئة عند مستوى دخل مرتفع، ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

مثـــال:

يقوم مســتهلك بشراء كميات مختلفة من أربع سلع (A , B , C , M) فإذا فرضنا أن الدخل الشهري لهذا المستهلك والذي يبلغ 1000 وحده نقدية قد ارتفع بمقدار 10 وحدات نقدية. ونتيجة لذلك طرأت بعض التغيرات على شراء المواد الأربع السابقة وفق الجدول التالي:

الدخل وحدة نقدية	**الكميات المطلوبة من السلع**			
	A	B	C	M
1000	200	100	50	100
1010	202	100	40	99

والمطلوب: دراسة الطلب على السلع السابقة.

الحـــل: من الجدول نجد أن التغير في الدخل هو $\Delta I = 10$

وكذلك نجد التغير في الطلب على السلع A, B, C, M هو:

$$\Delta D_A = 2 \qquad \Delta D_B = 0 \qquad \Delta D_C = -10 \qquad \Delta D_M = -1$$

وبالتالي تكون مرونة الطلب على السلعة الأولى A بالنسبة للدخل هي:

$$E_A(D) = \frac{\Delta D_A}{\Delta I} \cdot \frac{1}{D_A} = \frac{2}{10} \cdot \frac{1000}{200} = 1$$

وهذا يعني أنه إذا تغير دخل المستهلك بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة A سيتغير وبنفس الاتجاه بمقدار 1% أيضاً. أي طردية وأحادية المرونة.

أما بالنسبة للسلعة الثانية B فنجد أن:

$$E_B(D) = \frac{0}{10} \cdot \frac{1000}{100} = 0$$

وهذا يدل على أن المرونة معدومة أي أنه إذا تغير الدخل بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة B لن يتأثر. وهذه المرونة عادة مرتبطة بالطلب على السلع الأساسية (مثلاً مادة الخبز).

أما مرونة الطلب على السلعة الثالثة C بالنســبة للدخل فهي:

$$E_C(D) = \frac{-10}{10} \cdot \frac{1000}{50} = -20$$

أي أن المرونة عكسية وكبيرة وهذا يعني أنه بتغير الدخل 1% فإن طلب المستهلك سوف سيتغير بالاتجاه المعاكس على السلعة C بمقدار 20% وهذا يفسر ظاهرة اتجاه المستهلكين نحو شراء بعض السلع الأخرى البديلة للسلعة C والتي كان من الصعب عليهم شراءها قبل زيادة الدخل.

وأخيراً نجد مرونة الطلب على السلعة M تكون مساوية لـــ:

$$E_M(D) = \frac{-1}{10} \cdot \frac{1000}{100} = -1$$

تعني أن العلاقة بين الدخل والطلب على السلعة M علاقة عكسية ولكنها أحادية المرونة أي أن تغير الدخل بمقدار 1% يؤدي إلى تغير الطلب على السلعة M بالنسبة نفسها ولكن بالاتجاه المعاكس.

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب على سلعة السمن النباتي متمثلة بالمعادلة الآتية:

$$D_1 = 10 - 0.5\,P_1 + 0.8\,P_2 + 0.1\,I$$

حيث D_1 ترمز للكمية المطلوبة، و P_1 ترمز لسعر الوحدة من السلعة و P_2 ترمز لسعر الوحدة من السلعة البديلة (سمن حيواني) و I ترمز للدخل.

1- احسب مرونة الطلب السعرية عندما يكون : $I = 100$ ، $P_2 = 15$ ، $P_1 = 6$

2- احسب مرونة الطلب الدخلية عندما يكون : $I = 200$ ، $P_2 = 6$ ، $P_1 = 3$

الحـــل : 1- إن مرونة الطلب السعرية تعطى بالعلاقة:

$$E_{p_1}(D_1) = \frac{\partial D_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_1}$$

باشتقاق تابع الطلب نجد : $\frac{\partial D_1}{\partial P_1} = -0.5$

نعوض في تابع الطلب عند النقطة $I = 100$ ، $P_2 = 15$ ، $P_1 = 6$

$$D_1 = 10 - 0.5(6) + 0.8(15) + 0.1(100) = 10 - 3 + 12 + 10 = 29$$

ومنه: $E_{p_1}(D_1) = -0.5 \cdot \frac{6}{29} = -0.1$ وهي سالبة دوماً .

2- لحساب مرونة الطلب الدخلية عند النقطة $I = 200$ ، $P_2 = 6$ ، $P_1 = 3$ نجد أن:

$$D_1 = 10 - 0.5(3) + 0.8(6) + 0.1(200) = 10 - 1.5 + 4.8 + 20 = 33.3$$

ومرونة الطلب الدخلية تعطى بالعلاقة التالية:

$$E_I(D) = \frac{\partial D}{\partial I} \cdot \frac{I}{D} = 0.1 \cdot \frac{200}{33.3} = 0.6$$

3-4- مرونة العرض السعرية :

نعرف مرونة العرض السعرية (Price Elasticity of Supply) أو مرونة تابع العرض بالنسبة للسعر بأنها نسبة التغيرات النسبية للكمية المعروضة إلى التغيرات النسبية للسعر ، فإذا رمزنا لمرونة العرض السعرية بالرمز $E_P(S)$ فإن:

$$E_P(S) = \frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S}$$

إن التغير في الكمية المعروضة ΔS نسبةً إلى التغير في السعر ΔP يكون عادةً موجباً، حيث يبدي المنتج استعداداً لزيادة إنتاج وعرض السلعة عند ارتفاع سعرها،

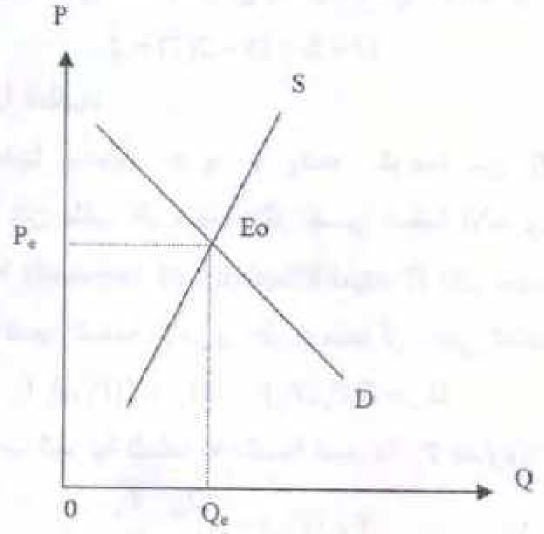
لأن السعر الأعلى يغطي تكاليف الإنتاج المتزايدة ويعطي ربحاً أعلى . وهذا يعني أن العلاقة طردية بينهما ومرونة تابع العرض السعرية $E_P(S)$ موجبة. ويمكن تعريفها بأنها مقياس لدرجة استجابة الكمية المعروضة من سلعة للتغيرات في سعرها.

وتكون مرونة العرض بالنسبة للسعر عند نقطة ما من نقاط التابع معطاة بالعلاقة التالية:

$$E_P(S) = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta P} \cdot \frac{P}{S} = S'_P \cdot \frac{P}{S}$$

4-4- توازن السوق :

يتحقق التوازن في السوق (Market Equilibrium) عندما تتساوى الكمية التي يستطيع ويرغب المستهلك شرائها مع الكمية التي يرغب ويستطيع البائع عرضها في السوق بسعر واحد ويسمى بسعر التوازن. هذا وتجدر الإشارة إلى أن المقصود بالتوازن هو الوضع الذي لا يكون هناك عنده أي اتجاه أو رغبة في التغيير سواء من قبل المنتجين أو المستهلكين وذلك بافتراض ثبات العوامل الأخرى المؤثرة.



الشكل رقم (2)

يمثل الشكل أعلاه منحني العرض والطلب لسلعة عادية مفترضين ثبات جميع العوامل المؤثرة في الكمية المطلوبة والكمية المعروضة باستثناء السعر P_e الذي يمثل السعر التوازني في السوق، وهو السعر الذي يحقق التوافق بين رغبات البائعين

والمشترين ، حيث أن الكمية Q_e التي يرغب البائعين في عرضها عند هذا السعر ، هي **الكمية نفسها*** Q_e التي يرغب المشترين في طلبها عند هذا السعر نفسه وتعرف بكمية التوازن.

ونجد أن هذا التوازن يتحقق عن طريق تحقيق المساواة بين تابعي العرض S والطلب D أي حين يكون: $D = S$

مثـــال:

بفرض أن لدينا النموذج التالي لتوازن السوق:

$$S = -5 + P \text{ ، } D = 16 - 2P$$

أوجد السعر التوازني والكمية التوازنية.

الحــل: كما نعلم أن شرط توازن السوق هو أن يتحقق: $D = S$ أي:

$$16 - 2P = -5 + P$$

ومنه:

$$3P = 21 \quad \Rightarrow \quad P = 7$$

أما القيمة التوازنية فهي بالتعويض في إحدى علاقتي D أو S نجد:

$$D = S = 16 - 2(7) = 2$$

4-5- المرونة الجزئية للطلب:

نفترض أن لدينا سلعتين x و y وسعر الوحدة من كل منهما على الترتيب P_y ، P_x ، إذا كان طلب كل منهما يتأثر بسعر السلعة الأخرى، فيمكن حساب مرونة الطلب الجزئية (Partial Elasticity of Demand) لكل منهما بالنسبة لسعر السلعة نفسها وبالنسبة لسعر السلعة الأخرى. فلو فرضنا أن تابعي الطلب هما:

$$D_x = f(P_x, P_y) \quad , \quad D_y = f(P_x, P_y)$$

فإن مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعرها P_x تساوي:

$$E_{P_x}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x}$$

وهي تمثل نسبة التغير النسبي للطلب على السلعة x إلى التغير النسبي لسعر السلعة x مع بقاء سعر السلعة y ثابتاً و تكون دائماً سالبة، و بشكل مشابه نجد مرونة الطلب الجزئية للسلعة y بالنسبة لسعرها P_y تساوي:

$$E_{P_y}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_y}$$

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب على سلعة بالشكل التالي:

$$D_1 = 10 - 2P_1 + 3P_2$$

أوجد المرونات الجزئية بفرض أن: $P_1 = 0.2$ ، $P_2 = 1$

الحــل:

$$E_{P_1}(D_1) = \frac{\partial D_1}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_1} = -2\frac{P_1}{10 - 2P_1 + 3P_2}$$

$$E_{P_2}(D_1) = \frac{\partial D_1}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{D_1} = 3\frac{P_2}{10 - 2P_1 + 3P_2}$$

1- عندما $P_1 = 0.2$ ، $P_2 = 1$ نجد أن:

$$E_{P_1}(D_1) = -0.03$$

هذا يعني أن تزايد P_1 بمقدار 1% (مع ثبات P_2) سيؤدي إلى تناقص الطلب على السلعة (1) بمقدار 0.03% .

2- عندما $P_1 = 0.2$ ، $P_2 = 1$ نجد أن:

$$E_{P_2}(D_1) = 0.05$$

هذا يعني أن تزايد P_2 بمقدار 1% (مع ثبات P_1) سيؤدي إلى تزايد الطلب على السلعة (1) بمقدار 0.05% .

6-4- مرونة الطلب التقاطعية:

لننتقل الآن إلى نوع آخر من المرونة يتعلق بالسعر وهو مرونة الطلب التقاطعية (Cross Elasticity of Demand) أو مرونة التقاطع بين سلعتين x , y والتي نرمز لها بالرمز $E_{P_y}(D_x)$ أو $E_{P_x}(D_y)$ ، وتسمى التقاطعية لأنها تمثل تقاطع بين سلعتين هما في هذه الحالة السلعة x والسلعة y وهي تبين حساسية أو استجابة الكمية المطلوبة من إحدى السلعتين للتغير الذي قد يحدث في سعر السلعة الثانية. وعليه فمرونة الطلب التقاطعية مقياس إلى مدى ارتباط السلع المختلفة ببعضها البعض.

يمكن تعريف مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين x , y على أنها نسبة التغير في الكمية المطلوبة من السلعة x الناجمة عن تغير سعر السلعة y بنسبة واحد في المائة مع بقاء سعر السلعة x ثابتاً.

إن مرونة الطلب التقاطعية للسلعة x بالنسبة لسعر السلعة y (P_y) تساوي:

$$E_{P_y}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_x}$$

وبشكل مشابه نجد مرونة الطلب التقاطعية للسلعة y بالنسبة لسعر السلعة x (P_x) تساوي:

$$E_{P_x}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_y}$$

ويمكن أن نميز الحالات التالية:

1- عندما تكون مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين موجبة، فإن ذلك يعني أن ارتفاع سعر السلعة الثانية سيؤدي إلى ارتفاع الكمية المطلوبة من السلعة الأولى عند كل سعر، أي زيادة الطلب على السلعة الأولى.

والعكس في حالة انخفاض السعر، هذا يعني أن السلعتين بديلتان (متنافستان) مثلاً (الموز والتفاح) فإن زيادة سعر الموز ستؤدي إلى زيادة كمية التفاح التي يشتريها المستهلكون، والعلاقة طردية أي أن إحداهما تحل محل الأخرى إذا ارتفع سعر أحداهما أي:

$E_{P_y}(D_x) > 0$ $\quad$ $E_{P_x}(D_y) > 0$ موجبتين

2- أما إذا كانت مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين سالبة فإن ذلك يعني أن ارتفاع سعر السلعة الثانية سيؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة من السلعة الأولى عند كل سعر، أي نقص الطلب على السلعة الأولى ، والعكس في حالة انخفاض السعر. هذا يعني أن السلعتين متكاملتان (مكملتان) لبعضهما البعض مثلاً (الشاي والسكر) ارتفاع سعر أحدهما سيؤدي إلى نقص الكمية المطلوبة على الأخرى، والعلاقة عكسية أي:

$E_{P_y}(D_x) < 0$ $\quad$ $E_{P_x}(D_y) < 0$ سالبتين

3- وأخيراً يمكن أن تكون مرونة الطلب التقاطعية بين سلعتين صفراً. ومعنى ذلـك أن ارتفاع أو انخفاض سعر إحدى السلعتين لن يؤدي إلى تغير في الكمية المطلوبة من السلعة الأخرى أي أن السلعتين مستقلتان و لا يمكن أن تحل إحداهما محل الأخرى ولو جزئياً.

$$E_{P_y}(D_x) = E_{P_x}(D_y) = 0$$

تعريف: نقول عن السلعتين y , x أنهما بديلتان (متنافستان) إذ تحقق الشرط التالي:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} > 0 \quad و \quad \frac{\partial D_y}{\partial P_x} > 0$$

كما نقول أنهما متكاملتان (مكملتان) إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} < 0 \quad و \quad \frac{\partial D_y}{\partial P_x} < 0$$

أخيراً نقول أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان:

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_y} = \frac{\partial D_y}{\partial P_x} = 0$$

مثـــال:

إذا كان لدينا تابع الطلب على السلعة A بالمعادلة الآتية:

$$D_A = -5P_A - P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 0.1I$$

إذا علمت أن:

$I = 100$ ، $P_4 = 8$ ، $P_3 = 6$ ، $P_2 = 10$ ، $P_1 = 4$ ، $P_A = 2$ حيث I الدخل.

1- احسب مرونة الطلب الجزئية وفسر النتيجة ؟

2- احسب مرونة الطلب التقاطعية على السلعة A عند كل سعر وحدد نوع العلاقة بـين السلع.

3- احسب مرونة الطلب الدخلية وحدد نوع السلعة وفسر النتيجة ؟

الحـــل:

1- إن مرونة الطلب الجزئية تعطى بالعلاقة:

$$E_{p_A}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A}$$

لنوجد قيمة D_A :

$$D_A = -5(2) - 4 - 2(10) + 3(6) + 4(8) + 0.1(100) =$$
$$= -10 - 4 - 20 + 18 + 32 + 10 = 26$$

بالتعويض نجد:

$$E_{P_A}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_A} \cdot \frac{P_A}{D_A} = -5 \cdot \frac{2}{26} = -\frac{10}{26} = -0.385$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة P_A بمقدار 1% سيؤدي إلى تناقص الكمية المطلوبة من السلعة A بمقدار 0.385% مع ثبات الدخل وأسعار السلع الأخرى.

-2
$$E_{P_1}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_1} \cdot \frac{P_1}{D_A} = -1 \cdot \frac{4}{26} = -\frac{4}{26} = -0.154$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية سالبة هذا يعني أن السلعة الأولى مكملة للسلعة A (مكملتان).

$$E_{P_2}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_2} \cdot \frac{P_2}{D_A} = -2 \cdot \frac{10}{26} = -\frac{20}{26} = -0.769$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية سالبة هذا يعني أن السلعة الثانية مكملة للسلعة A (مكملتان).

$$E_{P_3}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_3} \cdot \frac{P_3}{D_A} = 3 \cdot \frac{6}{26} = \frac{18}{26} = 0.692$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية موجبة هذا يعني أن السلعة الثالثة بديلة للسلعة A (بديلتان).

$$E_{P_4}(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial P_4} \cdot \frac{P_4}{D_A} = 4 \cdot \frac{8}{26} = \frac{32}{26} = 1.231$$

بما أن مرونة الطلب التقاطعية موجبة هذا يعني أن السلعة الرابعة بديلة للسلعة A (بديلتان).

-3
$$E_I(D_A) = \frac{\partial D_A}{\partial I} \cdot \frac{I}{D_A} = 0.1 \cdot \frac{100}{26} = \frac{10}{26} = 0.385$$

بما أن $0 < E_I(D_A) = 0.385 < 1$ فالسلعة عادية ، هذا يعني إذا زاد الدخل بمقدار 1% سيؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة من السلعة A بمقدار 0.385 % مع ثبات أسعار السلع الأخرى.

مثـــال:

لتكن لدينا توابع الطلب للسلعتين x , y على الترتيب معطاة بالعلاقتين التاليتين :

$$D_x = 5000 - 3P_x^2 - 15P_y^2$$
$$D_y = 4500 - 5P_x^2 - 12P_y^2$$

أوجد توابع الطلب الحدية الأربعة. وحدد فيما إذا كانت السلعتان x , y بديلتين أم متكاملتين.

الحـــل: لدينا:

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_y} = -24P_y \text{ ، } \frac{\partial D_y}{\partial P_x} = -10P_x \text{ ، } \frac{\partial D_x}{\partial P_y} = -30P \text{ ، } \frac{\partial D_x}{\partial P_x} = -6P_x$$

بما أن كلاً من P_x و P_y موجب لأنهما تمثلان السعر عندئذ نجد أن:

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_x} < 0 \quad , \quad \frac{\partial D_x}{\partial P_y} < 0$$

إذاً السلعتان x , y متكاملتان.

مثـــال:

لنفرض أنه لدينا تابعي الطلب للسلعتين x , y هي:

$$D_x = \frac{a}{P_x{}^2 P_y} \qquad , \quad D_y = \frac{a}{P_x P_y}$$

حيث P_x تمثل سعر السلعة x ، P_y تمثل سعر السلعة y , a مقدار ثابت موجب.

احسب المرونات الجزئية والتقاطعية.

الحـــل: إن المرونات الجزئية هي:

$$E_{p_x}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x} = \frac{-2a P_x P_y}{(P_x{}^2 P_y)^2} \cdot \frac{P_x}{\dfrac{a}{P_x{}^2 P_y}} = \frac{-2a P_x{}^4 P_y{}^2}{a P_x{}^4 P_y{}^2} = -2$$

$$E_{p_y}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_y} = \frac{-a P_x}{(P_x P_y)^2} \cdot \frac{P_y}{\dfrac{a}{P_x P_y}} = \frac{-a P_x{}^2 P_y{}^2}{a P_x{}^2 P_y{}^2} = -1$$

والمرونات التقاطعية هي:

$$E_{p_y}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_y} \cdot \frac{P_y}{D_x} = \frac{-a P_x^{\,2}}{(P_x^{\,2} P_y)^2} \cdot \frac{P_y}{\dfrac{a}{P_x^{\,2} P_y}} = \frac{-a P_x^{\,4} P_y^{\,2}}{a P_x^{\,4} P_y^{\,2}} = -1$$

$$E_{p_x}(D_y) = \frac{\partial D_y}{\partial P_y} \cdot \frac{P_x}{D_y} = \frac{-a P_y}{(P_x P_y)^2} \cdot \frac{P_x}{\dfrac{a}{P_x P_y}} = \frac{-a P_x^{\,2} P_y^{\,2}}{a P_x^{\,2} P_y^{\,2}} = -1$$

مثـــال:

لتكن لدينا توابع الطلب للسلعتين x وy على الترتيب معطاة بالعلاقتين التاليتين:

$$D_x = 4500 - 4P_x^2 + 12P_y$$

$$D_y = 6000 + 5P_x - 3P_y^2$$

المطلوب:

1- أوجد المرونة الجزئية للطلب على السلعة x عندما $P_x = 25$ & $P_y = 10$.

2- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على الســلعة x بالنسبة لــ P_y عنــدما $P_x = 25$ و $P_y = 10$.

3- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على الســلعة y بالنسبة لــ P_x عنــدما $P_x = 25$ و $P_y = 10$.

الحـــل: 1- حسب تعريف المرونة الجزئية للطلب على السلعة x نكتب:

$$E_{p_x}(D_x) = \frac{\partial D_x}{\partial P_x} \cdot \frac{P_x}{D_x}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial P_x} = -8P_x = -8(25) = -200$$

$$D_x = 4500 - 4(25)^2 + 12(10) = 2120$$

بالتعويض نجد:

$$E_{p_x}(D_x) = -200 \cdot \frac{25}{2120} = -2.36$$

بناءً على ذلك إذا بقي سعر السلعة y ثابتاً وتغير سعر السلعة x بمقــدار 1% فإن معدل التغير في الطلب على السلعة x سيكون 2.36% بالاتجاه المعــاكس وبأثر سالب دائماً.

2- تعطى المرونة التقاطعية للطلب على السلعة x بالنسبة لــ P_y كما يلي:

$$E_{p_y}(D_x)=\frac{\partial D_x}{\partial P_y}\cdot\frac{P_y}{D_x}$$

بالتعويض نجد أن: $\frac{\partial D_x}{\partial P_y}=12$ ، $D_x=2120$

ومنه فإن: $E_{p_y}(D_x)=12\cdot\frac{10}{2120}=0.057$

أي إذا بقي سعر السلعة x ثابتاً وتغير سعر السلعة y بمقدار 1% فإن الطلب على السلعة x سوف يتغير بمقدار 0.057% بالاتجاه نفسه.

3- أما المرونة التقاطعية للطلب على السلعة y بالنسبة لـ P_x فهي:

$$E_{p_x}(D_y)=\frac{\partial D_y}{\partial P_x}\cdot\frac{P_x}{D_y}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial P_x}=5$$

$$D_y=6000+5(25)-3(10)^2=5825$$

$$E_{p_x}(D_y)=5\cdot\frac{25}{5825}=0.021$$

نلاحظ أنه إذا بقي سعر السلعة y ثابتاً وتغير سعر السلعة x بمقدار 1% سوف يسبب تغير في الطلب على السلعة y بمقدار 0.021% بنفس الاتجاه.

مثـــال : بفرض أن تابع الطلب على السلعة A يعطى بالعلاقة التالية:

$$D_A=-2P_A^2\sqrt{P_B^3}+5P_B^{-3}+10$$

حيث P_A سعر السلعة A و P_B سعر السلعة البديلة B. فإذا علمت أن سعري التوازن هي $P_A=2$ و $P_B=1$. المطلوب:

1- احسب مرونة الطلب الجزئية على السلعة A عند وضع التوازن وفسر النتيجة.

2- احسب مرونة الطلب التقاطعية على السلعة A عند وضع التوازن وفسر النتيجة.

3- أوجد مقدار التغير (dD_A) الذي طرأ على تابع الطلب D_A بالنسبة للسلعة A المدروسة عندما يتزايد P_A بمقدار 0.02 وأن P_B يتناقص بمقدار 0.03 وذلك اعتباراً من وضع التوازن، وفسر النتيجة.

4- أوجد (d^2D_A) عندما يتزايد P_A بمقدار 0.01 و P_B بمقدار 0.02 وذلك اعتباراً من وضع التوازن.

الحــل :

1 – إن مرونة الطلب الجزئية على السلعة A بالنسبة لسعرها هي:

$$E_{P_A}(D_A)=\frac{\partial D_A}{\partial P_A}\cdot\frac{P_A}{D_A}=-4P_A\sqrt{P_B^3}\cdot\frac{P_A}{-2P_A^2\sqrt{P_B^3}+5P_B^{-3}+10}$$

$$E_{P_A}(D_A)=\frac{-4(2)^2\sqrt{(1)^3}}{-2(2)^2\sqrt{(1)^3}+5(1)^{-3}+10}=\frac{-16}{-8+5+10}=-\frac{16}{7}=-2.29$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة A بمقدار 1% مع ثبات سعر السلعة B سيؤدي إلى انخفاض الطلب على السلعة A بمقدار 2.29% .

2 – أما المرونة التقاطعية لتابع الطلب على السلعة A بالنسبة لسعر السلعة B فهي:

$$\mathrm{E_{P_B}(D_A)=\frac{\partial D_A}{\partial P_B}\cdot\frac{P_B}{D_A}=\frac{(-3P_A^2\sqrt{P_B}-15P_B^{-4})P_B}{-2P_A^2\sqrt{P_A^3}+5P_B^{-3}+10}}$$

$$=\frac{-3(2)^2\sqrt{(1)}-15(1)^{-4}(1)}{7}=\frac{-27}{7}=-3.86$$

هذا يعني أن تزايد سعر السلعة B بمقدار 1% مع ثبات سعر السلعة A سيؤدي إلى انخفاض الطلب على السلعة A بمقدار 3.86 % أي أن الطلب على السلعة A يتأثر بارتفاع سعر السلعة B.

3 – إن التغير الذي طرأ على تابع الطلب D_A بالنسبة للسلعة A يعطى بالتفاضل الكلي:

$$\mathrm{dD_A=\frac{\partial D_A}{\partial P_A}dP_A+\frac{\partial D_A}{\partial P_B}dP_B} \qquad (1)$$

لنحسب المشتقات الجزئية: ونعوض عندما: $P_A=2\ ,\ P_B=1$

$$\frac{\partial D_A}{\partial P_A}=-4P_A\sqrt{P_B^3}=-4(2)\sqrt{(1)^3}=-8$$

$$\frac{\partial D_A}{\partial P_B} = -2P_A^2(\frac{3}{2}\sqrt{P_B}) - 15P_B^{-4} =$$

$$= -2(2)^2(\frac{3}{2}\sqrt{1}) - 15(1)^{-4} = -12 - 15 = -27$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد:

$$\mathrm{dD_A} = -8(0.02) + (-27)(-0.03) = -0.16 + 0.81 = 0.65$$

وهذا يعني أن التغير الذي حصل على سعر السلعة A وكذلك سعر السلعة B قد أدى في المحصلة إلى زيادة الطلب على السلعة A بمقدار 0.65.

4 – إن (d^2D_A) هو التفاضل الكلي من المرتبة الثانية ويعطى بالعلاقة التالية:

$$d^2D_A = \frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A^2}dP_A^2 + 2\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A \partial P_B}dP_A dP_B + \frac{\partial^2 D_A}{\partial P_B^2}dP_B^2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A^2} = -4\sqrt{P_B^3} = -4\sqrt{(1)^3} = -4$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_A \partial P_B} = -4P_A(\frac{3}{2}\sqrt{P_B}) = -4(2)\frac{3}{2}\sqrt{1} = -12$$

$$\frac{\partial^2 D_A}{\partial P_B^2} = -2P_A^2(\frac{3}{4\sqrt{P_B}}) + 60P_B^{-5} = -2(2)^2\frac{3}{4\sqrt{1}} + 60(1)^{-5} = -6 + 60 = 54$$

وبالتعويض في العلاقة (2) نجد:

$$d^2D_A = -4(0.01)^2 + (-12)(0.01)(0.02) + (54)(0.02)^2$$
$$= -0.0004 - 0.0024 + 0.0216 = 0.0188$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- لنفرض أن موظفاً يتقاضى راتباً شهرياً قدره 3000 ل.س و هو ينفق راتبه كما يلي 50% على المواد الغذائية ، 10% على السكن و التدفئة 15% للكساء و 25% للمصاريف المتفرقة . ولنفترض أن راتب هذا الموظف ازداد 10% مع بقاء الأسعار ثابتة وأن معاملات مرونة طلبه بالنسبة لراتبه على فئات الإنفاق المذكورة هي كما يلي 0.5 بالنسبة للمواد الغذائية 0 بالنسبة للسكن 0.8 بالنسبة للكساء 1 للمصاريف المتفرقة.

المطلوب: احسب معامل مرونة الطلب الكلي لهذا الموظف بعد زيادة راتبه.

2 – ليكن لدينا تابع الطلب للسلعة x التالي:

$$D_x = -5P_x^2\sqrt{P_y} + \frac{3}{\sqrt{P_y}} + 500$$

حيث P_x تعبر عن سعر الوحدة الواحدة من السلعة x و P_y تعبر عن سعر الوحدة الواحدة من السلعة y **والمطلوب:**

1- أوجد المرونة الجزئية للطلب على السلعة x عندما يكون $P_x = 5$ ، $P_y = 9$.

2- أوجد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة x عندما يكون $P_x = 5$ ، $P_y = 9$.

3- أوجد dD_x مقدار التغير في الطلب على السلعة x عندما يتزايد P_x بمقدار 0.01 و P_y بمقدار 0.02 ، حيث $P_x = 5$ و $P_y = 9$.

4- أوجد d^2D_x عندما يتزايد P_x بمقدار 0.01 و P_y بمقدار 0.02 .

3 – أفادت إحصائيات عام 2000 لإحدى الدول أن دخلها القومي بلغ (48) ألف مليون وحدة نقدية وأن عدد سكانها يبلغ (12) مليون نسمة. فإذا كان دخل الفرد الواحد يستهلك سنوياً ما مقداره (100) كغ من السلعة A . وبفرض أن تنبؤات عام 2001 تفيد ما يلي:

1 – عدد السكان سيبلغ (13.2) مليون نسمة.

2 – الدخل السنوي للفرد الواحد سيزداد بمعدل 20% .

3 – أسعار السلعة A ستتغير من 20 وحدة نقدية إلى 23 وحدة نقدية.

فما هي الكميات الواجب توفرها في الأسواق بالعام القادم من هذه السلعة بأخذ تغيرات الدخل والأسعار معاً. علماً أن مرونة الطلب على الاستهلاك بالنسبة للدخل الفردي (1.5) ومرونة الطلب على الاستهلاك بالنسبة لسعر السلعة (2–) (فسر النتائج اقتصاديا).

4 – قامت المؤسسة العامة للمنتجات النسيجية بدراسة مرونة الطلب على الأقمشة القطنية بالنسبة للسعر فوجدت قيمتها هي (4–) علماً أن سعر الوحدة من هذه السلعة هو (20) وحدة نقدية، وقدر متوسط استهلاك الفرد من الأقمشة القطنية سنوياً بمقدار (5) وحدات. فإذا علمت أن عدد السكان في العام الحالي هو (6) مليون نسمة وإن نسبة نمو السكان (7%)ويتوقع للدخل الفردي أن يزداد بمقدار (2%)فإذا قررت الشركة تخفيض سعر الوحدة إلى (18) وحدة نقدية وكان معامل مرونة الطلب بالنسبة للدخل هو (2.5).

المطلوب: أحسب حجم وقيمة الطلب في العام القادم.

5 – يتحدد الطلب على السلعتين A , B بالتابعين التاليين:

$$D_A = 35 - 2P_A + P_B$$
$$D_B = 5 + 0.5P_A - P_B$$

حيث P_A سعر الوحدة من السلعة A ويساوي 10 وحدات نقدية أما P_B فهو سعر الوحدة الواحدة من B و يساوي 5 وحدات نقدية. و**المطلوب:**

1– إيجاد مرونة الطلب على السلعة A بالنسبة لسعرها وفسر النتائج.

2– إيجاد المرونة التقاطعية للطلب على السلعة B وفسر النتائج.

6 – لنفرض أن الطلب على سلعة يرتبط بسعرها وفق العلاقة:

$$P = \frac{600}{Q + 20}$$

حيث P سعر السلعة . Q تمثل عدد الوحدات المطلوبة. و**المطلوب:**

1– دراسة كيفية تغير الإيراد بتغير الطلب.

2– إيجاد الخطأ المطلق المرتكب عندما يتغير الطلب من 5 وحدات إلى 5.01 .

3– تقدير مرونة الإيراد بالنسبة للطلب عند النقطة $Q = 5$ وتفسير النتائج.

الفصل العاشر
سلوك المستهلك

§1-1 – مفهوم المنفعة

تعتبر المنفعة بصورة عامة الأداة الأساسية المستخدمة في تحليل طلب المستهلك، وفكرتها نشأت من كون المستهلك يحصل على إشباع مادي أو رضا معنوي ناتج من استهلاك السلع أو الخدمات. عند تحليل سلوك المستهلك، نقصد بالمنفعة، بأنها مستوى الرضا أو الإشباع الذي يحصل عليه المستهلك من استهلاك سلعة أو الحصول على خدمة معينة.

وتجدر الإشارة إلى أن منفعة السلعة تختلف من شخص إلى آخر وعلى هذا الأساس لا يوجد معيار موضوعي لقياس المنفعة التي تعود على المستهلك، لأن الإشباع يختلف من مستهلك لآخر. إلا أن الاقتصادي يستطيع أن يقوم بتحليل سلوك المستهلك اعتماداً على اختيار المستهلك لسلعة ما، وبالتالي المنفعة التي تعود عليه من جراء هذا الاختيار.

لنفرض أن لدينا في السوق n سلعة وضمن إمكانية الدخل المتاح يقوم المستهلك بشراء كميات معينة من كل سلعة لاستهلاكها. ولتكن تلك الكميات من مختلف السلع (i) حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$ هي $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$، من هنا يمكن تمثيل منفعة المستهلك بتابع رياضي من الشكل:

$$U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

نسمي هذا التابع بتابع المنفعة حيث يفترض أن هذا التابع مستمر وقابل للاشتقاق مرتين على الأقل من أجل كل شكل استهلاكي ممكن $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. إذا كان من المستحيل أن نقيس بموضوعية القيمة الفعلية التي يمنحها شكل استهلاكي معين للمستهلك فان هذا المستهلك قادر على ترتيب المنافع الناتجة من مختلف الأشكال الاستهلاكية.

مثـــال:

لنفرض أنه لدينا ثلاثة أنواع من السلع الاســـتهلاكية وأن تـــابع المنفعـــة يأخـــذ الصيغة التالية:

$$U = g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sqrt[3]{x_2 \cdot x_3}$$

لنأخذ مثلا الشكلين الاستهلاكيين التاليين: $(1,2,4)$, $(3,1,1)$ واضح أن تـــابع المنفعة U يشير إلى أن الشكل الثاني أفضل من الأول وذلك لأن:

$$g(1,2,4) = 1.\sqrt[3]{2 \cdot 4} = 2$$

بينما:

$$g(3,1,1) = 3.\sqrt[3]{1 \cdot 1} = 3$$

أي أن:

$$g(3,1,1) > g(1,2,4)$$

ليكن لدينا الآن تابع منفعة آخر:

$$\varphi(U) = U^3 \quad \Rightarrow \quad \varphi(U) = \varphi\left[g(x_1, x_2, x_3)\right] = x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3$$

إن التابع $\varphi(U)$ يصلح أن يكون تابع منفعة شأنه في ذلك شأن التابع U. لنأخذ نفس الشكلين الاستهلاكيين السابقين أي: $(1,2,4)$, $(3,1,1)$ فنجد أن:

$$\varphi(U) = 1^3 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

بينما الشكل الاستهلاكي الثاني هو:

$$\varphi(U) = 3^3 \cdot 1 \cdot 1 = 27$$

أي أن التابع: $\varphi(U) = x_1^3 \cdot x_2 \cdot x_3$ يشير إلى أن الشكل الاســـتهلاكي الثـــاني أفضل من الأول.

من المثال السابق نجد أن المستهلك قادر على ترتيب أفضليات أشكال اســـتهلاكه حسب المنفعة. وهذا ما يسمح لنا عملياً بالتأكيد على وجود تابع المنفعة، إلا أننا نلاحظ هنا أن تابع المنفعة ليس بتابع وحيد ، فكل تابع يرتب الأشـــكال الاســـتهلاكية حـــسب منفعتها ، وبذلك الترتيب نفسه يمثل تابع المنفعة. المهم في تابع المنفعة أن يحـــدد لنـــا الشكل الاستهلاكي الأمثل، ونقصد بالشكل الأمثل الشكل الذي يعطي المـــستهلك أكبـــر منفعة وبأقل التكاليف الممكنة، آخذين بعين الاعتبار أن المستهلك ليس حرا في اختيـــار أحد الأشكال الاستهلاكية إلا ضمن حدود إمكانية دخله.

§-2- المنفعة العظمى لمستهلك

يحاول المستهلك، الذي يملك دخلا محدوداً M ويواجه عدداً من السلع والخدمات $(x_1, x_2, ..., x_n)$ والتي أسعارها على الترتيب $(P_1, P_2, ..., P_n)$، أن يحقق أكبر منفعة ممكنة لتابع المنفعة:

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1)$$

للتبسيط نفترض أن المستهلك ينفق كل دخله M على شراء السلع الاستهلاكية أي:

$$M = P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \qquad (2)$$

هنا نجد نفسنا أمام مسألة إيجاد القيم العظمى للتابع $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ مع وجود شرط إنفاق كل الدخل أي: $M - (P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n) = 0$

لنشكل تابع لاغرانج التالي:

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda(M - P_1x_1 - P_2x_2 - \cdots - P_nx_n)$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونجعلها مساوية للصفر.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda P_1 = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda P_2 = 0 \\
\quad \cdots\cdots \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda P_n = 0 \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = M - P_1x_1 - P_2x_2 - \cdots - P_nx_n = 0
\end{array}\right\} \qquad (3)$$

بحل جملة المعادلات السابقة وعددها $(n+1)$ معادلة نحصل على نقطة حرجة واحدة أو أكثر من الشكل $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ معينة لقيم مركبات أحد الأشكال الاستهلاكية بالإضافة لتعيين قيمة مضروب لاغرانج، ولكي يمثل الشكل الاستهلاكي $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n)$ الشكل الأمثل لتابع المنفعة U يجب أن تحقق النقطة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n, \overline{\lambda})$ تناوب في إشارات المعينات الجزئية لمعين هيسيان الموسع من الموجب إلى السالب إلى الموجب إلى السالب وهكذا ... أي:

$$J_2 > 0 \;,\; J_3 < 0 \;,\; J_4 > 0 \;,\cdots,(-1)^n J_n = J > 0$$

حيث أن معين هيسيان الموسع هو:

$$J = J_n = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ P_1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ P_2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

- إذا كان لدينا تابع منفعة من سلعتين x_1, x_2 أي: $U = f(x_1, x_2)$ ومنه يصبح شرط الدخل كما يلي:

$$M = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

أو:

$$M - (P_1 x_1 + P_2 x_2) = 0$$

ويصبح تابع لاغرانج في هذه الحالة:

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda(M - P_1 x_1 - P_1 x_2)$$

ومنه الشروط اللازمة:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda P_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda P_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - P_1 x_1 - P_2 x_2 = 0 \qquad (3)$$

بقسمة العلاقة (1) على (2) نجد:

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{P_1}{P_2}$$

أي أن المستهلك يحقق التوازن عندما تكون:

$$\frac{\text{المنفعة الحدية للسلعة الأولى}}{\text{المنفعة الحدية للسلعة الثانية}} = \frac{\text{سعر السلعة الأولى}}{\text{سعر السلعة الثانية}}$$

أي عندما تتساوى نسب المنفعة الحدية للسلع مع نسب أسعارها. كما أن التوازن يتحقق أيضا عندما:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{P_2} = \lambda$$

من هذه العلاقة نلاحظ أن المنفعة الحدية لكل سلعة في الشكل الاستهلاكي المطلوب تكون متناسبة مع سعر الواحدة من تلك السلعة. أي أن التوازن يتحقق عندما يحصل المستهلك على المنفعة الحدية نفسها أيا كان شكل إنفاقه. أما الشرط الكافي للتوازن في هذه الحالة فيعطى من معين هيسيان الموسع التالي:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ P_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0$$

كما أنه يمكن أن نلاحظ أن λ (مضروب لاغرانج) يمثل في هذه الحالة المنفعة الحدية لوحدة النقد ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالآتي:

بأخذ التفاضل الكلي لتابع المنفعة ($U = f(x_1, x_2)$ نجد:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

وبأخذ التفاضل الكلي لشرط الدخل مع مراعاة أن الأسعار ثابتة نجد:

$$dM = P_1 dx_1 + P_2 dx_2$$

نعوض قيمة كلاً من: $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda P_1$ ، $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda P_2$ في معادلة dU فنجد:

$$dU = \lambda P_1 dx_1 + \lambda P_2 dx_2$$

وعليه فان المنفعة الحدية للنقود تساوي:

$$MU_{money} = \frac{dU}{dM} = \frac{\lambda\ (P_1 dx_1 + P_2 dx_2)}{(P_1 dx_1 + P_2 dx_2)} = \lambda$$

أي أن مضروب لاغرانج يمثل المنفعة الحدية لوحدة النقد، أي هو ما يحصل عليه المستهلك من منفعة ناتجة عن الوحدة الأخيرة من دخله النقدي أي المنفعة الحدية للنقود.

مثال:

ليكن تابع منفعة أحد المستهلكين بالشكل التالي:

$$U = x_1 x_2 + 2x_1$$

وليكن $P_1 = 4$ وحدة نقدية سعر السلعة الواحدة من السلعة الأولى و $P_2 = 2$ وحدة نقدية سعر السلعة الواحدة من السلعة الثانية. لنفرض أن دخل المستهلك في الفترة المعينة $M = 60$ وحدة نقدية. والمطلوب:

- إيجاد الشكل الاستهلاكي (x_1, x_2) الأمثل لهذا المستهلك.

الحل: الطريقة الأولى: من معادلة الشرط لدينا: $M = P_1 x_1 + P_2 x_2$

$$60 = 4x_1 + 2x_2 \Rightarrow 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

لنكتب x_2 بدلالة x_1 فنجد:

$$x_2 = \frac{(60 - 4x_1)}{2} = 30 - 2x_1$$

نعوض x_2 في تابع المنفعة U نجد:

$$\begin{aligned} U &= x_1(30 - 2x_1) + 2x_1 \\ &= 30x_1 - 2x_1^2 + 2x_1 \\ &= 32x_1 - 2x_1^2 \end{aligned}$$

لنبحث عن القيم العظمى لـ U، حيث النقطة العظمى تحقق شرط الدخل حتماً. بإيجاد المشتق الأول وجعله مساويا للصفر نجد:

$$\frac{dU}{dx_1} = 32 - 4x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 8$$

بأخذ المشتق الثاني نجد:

$$\frac{d^2U}{dx_1^2} = -4 < 0$$

بما أن المشتق الثاني سالب في تلك النقطة، إذن فالنقطة $x_1 = 8$ هي نقطة عظمى للتابع U. لإيجاد النقطة x_2 نعوض قيمة x_1 في العلاقة السابقة فنجد:

$$x_2 = 30 - 2x_1 = 30 - 2(8) = 30 - 16 = 14$$

إذاً الشكل الاستهلاكي الأمثل لتابع المنفعة U مع وجود الشرط يتحقق عند النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (8,14)$ وقيمته هي:

$$U = 8(14) - 2(8) = 128$$

من الجدير بالذكر أن هذه الطريقة (طريقة التعويض) تعد غير ملائمة لحل العديد من المشكلات الاقتصادية المحددة بقيود ولاسيما تلك الحالات التي يكون فيها تابع الشرط من التوابع المعقدة أو عند وجود أكثر من قيد محدد للمشكلة ولذلك يستعاض عنها باستخدام طريقة لاغرانج والتي يمكن استخدامها في حل جميع المشكلات الاقتصادية المحددة بقيود ولا سيما تلك الحالات ذات الطبيعة التحليلية.

الطريقة الثانية: نجد أن المستهلك مقيد بحدود دخله فإنه لا يستطيع شراء السلع إلا بحدود هذا الدخل:

$$M = P_1 x_1 + P_2 x_2$$

$$60 = 4x_1 + 2x_2 \Rightarrow 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0$$

أما تابع الهدف الذي نرغب في إيجاد القيم العظمى له فهو:

$$U = x_1 x_2 + 2x_1$$

لنشكل تابع لاغرانج:

$$L = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda\,(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$x_2 = 2x_1 - 2 \qquad (4)$$

نعوض (4) في (3) فنحصل على:

$$60 - 4x_1 - 2(2x_1 - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = 8 \quad , \quad x_2 = 14 \quad , \quad \lambda = 4$$

إذاً النقطة الحرجة هي $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}) = (8, 14, 4)$. لمعرفة طبيعة النقطة الحرجة السابقة نشكل معين هيسيان الموسع، ومن أجل ذلك نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية كما يلي:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \, , \, \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 0$$

نعوض المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية في معين هيسيان الموسع ونعوض النقطة الحرجة فيه ويأخذ الشكل التالي:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

وهكذا نجد أن النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}) = (8, 14, 4)$ هي نقطة عظمى لتابع لاغرانج وبالتالي فالنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (8, 14)$ هي نقطة عظمى لتابع المنفعة U . هذا يعني أنه ضمن شرط الدخل المعطى للمستهلك والمحدد بـ (60) وحدة نقدية، فإن أفضل شكل استهلاكي ممكن هو أن يختار (8) وحدات من السلعة الأولى و (14) وحده من السلعة الثانية، أما أعظم منفعة ممكنة فهي:

$$U = 8(14) + 2(8) = 128$$

وتكون المنفعة الحدية للنقود مساوية:

$$MU_{money} = \frac{dU}{dM} = \lambda = 4$$

كما أنه يمكن إثبات أن الشرط الأول للتوازن يتحقق عندما:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{P_2} = \lambda \qquad \text{المنفعة الحدية للنقود}$$

بأخذ المشتقات الجزئية من مرتبة الأولى نجد أن:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = x_2 + 2 = 16 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = x_1 = 8$$

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{P_2} = \frac{16}{4} = \frac{8}{2} = 4 = \lambda$$

أما الشرط الثاني للتوازن فهو:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{P_1}{P_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{8} = \frac{4}{2}$$

§-3- المنفعة الحدية لسلعة ومرونة تابع المنفعة:

ليكن لدينا تابع المنفعة $U = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ وهو تابع للكميات المستهلكة x_i الممكنة، حيث $x_i \geq 0$ وذلك مهما تكن $i = 1,2,\cdots,n$. لنثبت قيم كافة المتحولات ماعدا إحدى السلع ولتكن السلعة (i) فيصبح U تابعاً لمتحول واحد وهو المتحول المقابل للسلعة (i) أي:

$$U = f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(x_i)$$

لنعطي من نقطة معينة، أي من شكل استهلاكي معين $(x_1, x_2, ..., x_n)$ تغيراً معيناً للمتحول الوحيد بمقدار Δx_i فيأخذ U تغيرا معينا بمقدار ΔU ، لنأخذ النسبة $\frac{\Delta U}{\Delta x_i}$ وننهي المقدار Δx_i إلى الصفر فيكون:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

أي أن نهاية النسبة $\frac{\Delta U}{\Delta x_i}$ عندما $\Delta x_i \to 0$ هي قيمة المشتق في تلك النقطة المعينة $(x_1, x_2, ..., x_n)$. نسمي قيمة المشتق الجزئي $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ للتابع U بالمنفعة الحدية للسلعة (i). ونلاحظ أن المنفعة الحدية لسلعة من أجل شكل استهلاكي معين هي مقدار الزيادة في قيمة التابع U إذا ازداد حجم ما يستهلك من تلك السلعة (i) بمقدار وحدة

واحدة مما كان عليه في الشكل الاستهلاكي المفروض. وتتغير قيمة المنفعة الحدية بشكل عام من شكل استهلاكي إلى آخر.

نعرّف مرونة تابع المنفعة U بالنسبة إلى سلعة معينة (i) من أجل شكل استهلاكي مفروض بأنها النسبة بين التغيرات النسبية لتابع المنفعة الكلية والتغيرات النسبية للكمية المستهلكة x_i من السلعة (i) ونرمز لها بالرمز $E_{x_i}(U)$ ونكتب:

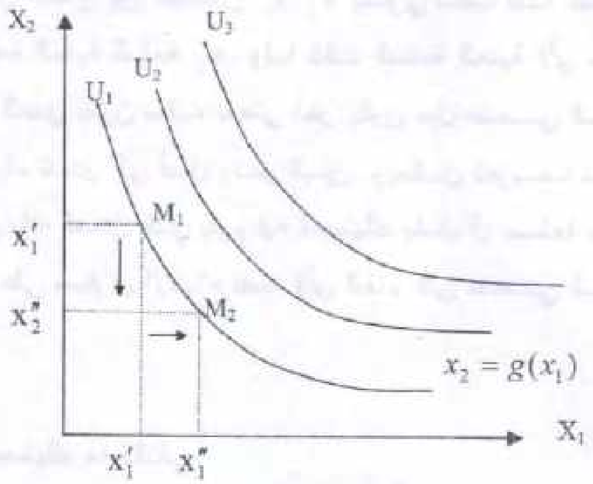
$$E_{x_i}(U)=\frac{\frac{\partial U}{U}}{\frac{\partial x_i}{x_i}}=\frac{\partial U}{\partial x_i}\cdot\frac{x_i}{U}=\frac{\partial \ln U}{\partial \ln x_i}$$

يفيدنا حساب مرونات التابع U من أجل شكل استهلاكي معين في ترتيب السلع الاستهلاكية بحسب أهميتها من وجهة نظر القيمة الاستهلاكية لكل منها في ذلك الشكل الاستهلاكي. فتحتل رأس القائمة تلك السلعة التي تكون فيها مرونة التابع U بالنسبة لها أكبر من غيرها، بينما يقع في نهاية القائمة تلك السلعة التي تكون فيها مرونة التابع U بالنسبة لها أصغر من غيرها.

§-4- منحنيات السواء:

يوضح منحني السواء جميع المجموعات السلعية أو السلع السوقية التي تعطي المستهلك نفس المستوى من المنفعة، وهذا يعني أن منحني السواء يمر عبر مجموعة من النقاط تشكل كل منها مجموعة سلعية ويكون لدى المستهلك التفضيل نفسه لكل من هذه المجموعات التي تقع على منحني السواء نفسه، أي أنه سيان بين أي من هذه المجموعات السلعية. ومن خواص منحنيات السواء أن المنحني الذي يقع في الأعلى يعبر عن إشباع أكبر في حين يعبر المنحني الذي يقع في الأسفل عن إشباع أقل. كما أن تلك المنحنيات ذات ميل سالب ولا تتقاطع مع بعضها البعض ويوجد عدد غير منته من منحنيات السواء. وهكذا فانه يمكننا أن نفترض أن لكل فرد تفضيلاً محدداً للسلع التي ينفق عليها دخله. فإذا كان هناك سلعتان x_1, x_2 لأمكن التعبير عن المنفعة بواسطة منحني سواء معين كالآتي:

$$U=f(x_1, x_2)=conc\tan t$$



الشكل رقم (1)

أي أن المنفعة على أي نقطة من منحني سواء تكون ثابتة، ويحصل المستهلك على منفعة أكبر فقط إذا انتقل إلى منحني سواء أعلى. وعليه فانه يمكن التعبير عن ثبات درجة الإشباع أو المنفعة على منحني السواء الواحد من خلال العلاقة التالية:

$$dU = 0$$

أو:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

ويمكن استخدام هذه المعادلة في إيجاد معدل الإحلال الحدي بين السلعتين (Marginal Rate of Substitution) والذي يقيس الكمية المطلوبة من السلعة x_2 لتعوض النقص الحدي من السلعة x_1 حتى يبقى المستهلك عند مستوى الإشباع نفسه:

$$MRS = \frac{dx_2}{dx_1}$$

وبالتعويض في معادلة dU نحصل على:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

أي أن معدل الإحلال الحدي بين السلعتين x_2, x_1 يساوي سالب نسبة المنفعة الحدية للسلعة x_1 إلى المنفعة الحدية للسلعة x_2. ولما كانت المنفعة الحدية لأي سلعة موجبة فان معدل الإحلال الحدي يكون سالبا، بمعنى آخر يكون ميل منحنى السواء سالبا، أي أن منحنيات السواء تنحدر إلى أسفل ونحو اليمين. ويمكن تعريف معدل الإحلال الحدي بين سلعتين بأنه المعدل الذي يقوم فيه المستهلك باستبدال سلعة محل سلعة أخرى مع المحافظة على مستوى الإشباع نفسه (أي البقاء على منحنى السواء نفسه).

مثـال:

ليكن تابع المنفعة لمستهلك ما كالتالي:

$$U(x, y) = x \cdot y$$

إذا كان سعر الوحدة من x هو $(P_x = 10)$ وحدات نقدية وسعر الوحدة من y هو $(P_y = 20)$ وحدة نقدية وكان المستهلك يمتلك دخلا قدره $(M = 600)$ وحدة نقدية

والمطلوب:

- إيجاد كميات السلع (x, y) التي تحقق التوازن و المنفعة العظمى لهذا المستهلك.
- أوجد المنفعة الحدية لكل من السلع عند الوضع الذي يحقق التوازن لهذا المستهلك.
- أوجد مرونة تابع المنفعة بالنسبة لكل من نوعي السلع عند الوضع السابق نفسه.
- احسب قيمة معدل الإحلال بين عاملي الاستهلاك عند الوضع السابق.

الحـل: نشكل تابع الدخل:

$$M = P_x \cdot x + P_y \cdot y \quad \Rightarrow \quad 600 = 10x + 20y$$

نشكل تابع لاغرانج: $L = x \cdot y + \lambda[600 - 10x - 20y]$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 10\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{y}{10} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x - 20\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{x}{20} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 600 - 10x - 20y = 0 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$\frac{y}{10}=\frac{x}{20} \Rightarrow 10x=20y \Rightarrow x=2y \qquad (4)$$

نعوض المعادلة (4) في (3) نجد:

$$600-10(2y)-20y=0 \Rightarrow y=15 \quad , \quad x=30 \quad , \quad \lambda=1.5$$

وبالتالي فالكميات التوازنية من السلعتين هي: $x=30$, $y=15$ والنقطة الحرجة هي: $(30,15,1.5)$.

لتحديد نوعها نشكل معين هيسيان الموسع، فنوجد المشتقات الجزئية مـن المرتبـة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}=1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0$$

$$J_2=\begin{vmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 0 \end{vmatrix}=400>0$$

إذا المعين $J_2=J>0$ ، وبالتالي النقطة (30,15) نقطة عظمى لتابع المنفعة.

وقيمة تابع المنفعة عند هذه النقطة هي قيمة عظمى. بالتعويض في التابع نجد:

$$U=(30)(15)=450 \quad \text{وحدة نقدية}$$

- المنفعة الحدية للسلعة x: $\frac{\partial U}{\partial x}=y=15$ وحدة نقدية

المنفعة الحدية للسلعة y: $\frac{\partial U}{\partial y}=x=30$ وحدة نقدية

- مرونة تابع المنفعة بالنسبة لـ x:

$$E_x(U)=\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{x}{U}=y\cdot\frac{x}{x\cdot y}=1$$

ومرونة تابع المنفعة بالنسبة لـ y:

$$E_y(U)=\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{y}{U}=x\cdot\frac{y}{x\cdot y}=1$$

أي أن أهمية السلعتين بالنسبة للمستهلك بنفس الدرجة.

- إن قيمة معامل الإحلال الحدي:

$$MRS = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{15}{30} = -0.5$$

مثـــال:

ليكن لدينا تابع المنفعة التالي:

$$U = -2x_1x_2 - 2.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - 4x_3^2 + 29.5x_3 + 25x_1$$

ولنفرض أن سعر الوحدة من السلعة x_1 هـــو $(P_1 = 1)$ والســـلعة x_2 هـــو $(P_2 = 2)$ ومن السلعة x_3 هو $(P_3 = 3)$ وأن دخل المـــستهلك $M = 25$ وحـــدة نقدية.

المطلوب: تحديد كميات السلع التي يتعين على المستهلك شرائها حتى يتحقق التوازن.

الحـــل: إن شرط الدخل هو: $M = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3$

$$25 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad \Rightarrow \quad 25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

لنشكل تابع لاغرانج:

$$L = -2x_1x_2 - 2.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - 4x_3^2 + 29.5x_3 + 25x_1 + \lambda[25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3]$$

بإيجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى وجعلها مساوية للصفر نجد:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2x_2 - 5x_1 + 25 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2x_1 + x_2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -8x_3 + 29.5 - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

يمكن حل المعادلات الأربع السابقة باستخدام قاعدة كرامر فنحصل على:

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|D|} \quad , \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|D|} \quad , \quad x_3 = \frac{|D_3|}{|D|} \quad , \quad \lambda = \frac{|D_4|}{|D|}$$

حيث:

$$|D|=\begin{vmatrix}-5 & -2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -8 & -3\\ -1 & -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=-7$$

$$|D_1|=\begin{vmatrix}-25 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ -29.5 & 0 & -8 & -3\\ -25 & -2 & -3 & 0\end{vmatrix}=-17.5$$

$$|D_2|=\begin{vmatrix}-5 & -25 & 0 & -1\\ -2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -29.5 & -8 & -3\\ -1 & -25 & -3 & 0\end{vmatrix}=-42$$

$$|D_3|=\begin{vmatrix}-5 & -2 & -25 & -1\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -29.5 & -3\\ -1 & -2 & -25 & 0\end{vmatrix}=-24.5$$

$$|D_4|=\begin{vmatrix}-5 & -2 & 0 & -25\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -8 & -29.5\\ -1 & -2 & -3 & -25\end{vmatrix}=-3.5$$

ومنه: $x_1=\frac{-17.5}{-7}=2.5\ ,\ x_2=\frac{-42}{-7}=6\ ,\ x_3=\frac{-24.5}{-7}=3.5\ ,\ \lambda=\frac{-3.5}{-7}=0.5$

وهي القيمة التي تحقق الشرط الضروري للتوازن.

لمعرفة ما إذا كانت هذه النقطة قصوى نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=-5\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_2}=-2\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_1}=-2\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=1\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3\partial x_1}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3\partial x_2}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2}=-8$$

$$J = J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -7 < 0 \ , \ J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

وبمـــا أن $J_3 < 0 \ , \ J_2 > 0$ فـــان النقطـــة الحرجـــة $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{\lambda}) = (2.5, 6, 3.5, 0.5)$ هي نقطة عظمى لتابع المنفعـة وعليـه فـان المستهلك يحقق أقصى منفعة ممكنة عندما يستهلك (2.5) وحدة من السلعة الأولـى (6) وحدات من السلعة الثانية و (٣,٥) وحدة من السلعة الثالثة وتكون المنفعة الكلية هي:

$$U = -2(2.5)(6) - 2.5(2.5)^2 + 0.5(6)^2 - 4(3.5)^2 + 29.5(3.5) + 25(2.5)$$
$$= 89.125$$

وتكون المنفعة الحدية للنقود مساوية (Marginal Utility Money):

$$MU_{money} = \frac{dU}{dM} = \lambda = 0.5$$

كما أنه يمكن إثبات أن التوازن يتحقق عندما:

المنفعة الحدية للنقود $$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{P_1} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{P_2} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_3}}{P_3} = \lambda$$

نعوض النقطة (2.5,6,3.5) في المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى فنجد:

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0.5 \ , \ \frac{\partial U}{\partial x_2} = 1 \ , \ \frac{\partial U}{\partial x_3} = 1.5$$

وبالتالي فالمنفعة الحدية للنقود هي:

$$\frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1.5}{3} = 0.5$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- بفرض أن هناك مستهلكين B , A وأن تابع منفعة كل منهما كالآتي:

المستهلك الأول: $U = x^{0.4} \cdot y^{0.6}$

المستهلك الثاني: $U = 2x^{0.5} \cdot y^{0.25}$

حيث y , x تمثل كميتي سلعتين، فإذا كان سعر الوحدة من x هو $P_x = 2$ وسعر الوحدة من y هو $P_y = 3$ ، وكان كل مستهلك يملك دخلا قدره $M = 45$.

1- احسب كميات السلع التي تحقق التوازن لكل مستهلك ، وتأكد من شروط التوازن الضرورية والكافية.

2- بفرض أن الأسعار تضاعفت مرتين وكذلك الدخل. أوجد الطلب الجديد من خلال الشروط الجديدة للمستهلك A.

3- بين كيف يؤدي زيادة الدخل $M = 60$ إلى تغيير شروط التوازن السابقة.

2- إذا كان تابع منفعة مستهلك يعطى بالعلاقة:

$$U = 2x_1x_2 - 3x_2^2$$

حيث x_2 , x_1 كميات السلع الاستهلاكية ، وأسعار واحدات السلع هي على الترتيب $P_2 = 4 , P_1 = 2$ وحده نقدية . والمطلوب:

1- أوجد الشكل الاستهلاكي الأمثل لهذا المستهلك علما أن دخله 140 وحده نقدية.

2- أوجد المنفعة الحدية لكل من السلع عند الوضع الاستهلاكي $(50,10)$.

3- أوجد مرونة تابع المنفعة بالنسبة لكل من نوعي السلع عند الوضع الاستهلاكي $(50,10)$.

4- أوجد درجة تجانس التابع وأثبت أن مجموع المرونات يساوي درجة التجانس.

5- احسب قيمة معامل الإحلال بين عاملي الاستهلاك عند الوضع الاستهلاكي $(50,10)$.

3- إذا كان تابع منفعة مستهلك معطى بالعلاقة:

$$U = x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_2$$

المطلوب:

1- أوجد الوضع الاستهلاكي الأمثل علما أن دخله 100وحده نقدية وسعر وحدتي السلعتين x_2 , x_1 هي $P_2 = 1 , P_1 = 3$ وحده نقدية على الترتيب.

2- أوجد المنفعة الحدية لكل من السلعتين عند الوضع الاستهلاكي $x_2 = 10 \ , \ x_1 = 5$.

4- بفرض أن: $U = 10x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{5}{2} x_2^2$ تابع المنفعة لأحد المستهلكين. حيث x_2 , x_1 كميتا السلع المستهلكة، $P_2 = 5 , P_1 = 2$ أسعار الوحدة الواحدة من السلع x_2 , x_1 على الترتيب. أما دخل المستهلك فهو 90 وحده نقدية. والمطلوب إيجاد الشكل الاستهلاكي الأمثل.

5- إذا كان تابع منفعة مستهلك يعطى بالعلاقة:

$$U = 2x_1 x_2^2 + 6x_2^2$$

حيث x_2 , x_1 كميات السلع المستهلكة، وأسعار وحدات السلع $P_2 = 4 , P_1 = 2$ وحدات نقدية المطلوب:

1- أوجد الشكل الاستهلاكي الأمثل لهذا المستهلك علما أن دخله (1212) وحده نقدية.

2- أوجد المنفعة الحدية لكل من هذه السلع عند الوضع الاستهلاكي $(20,10)$.

3- أوجد مرونة تابع المنفعة بالنسبة لكل من نوعي السلع عند الوضع الاستهلاكي $(20,10)$.

6- ليكن تابع المنفعة الخاص بأحد المستهلكين: $U = x_1 \cdot x_2$، إذا كان سعر الوحدة من السلعة الأولى وحدتين نقديتين، وسعر الوحدة من السلعة الثانية خمس وحدات نقدية. وبفرض أن دخل المستهلك هو 1000 وحده نقدية.

المطلوب: أوجد الشكل الاستهلاكي الأمثل لهذا المستهلك.

7- أوجد الشكل الاستهلاكي الأمثل لتابع منفعته:

$$U = (x + 2)(y + 1)$$

حيث أسعار السلع y, x همـــا علـــى الترتيـــب $P_x = 4$ ، $P_y = 6$ و الـــدخل $W = 130$ وحدة نقدية.

8- إذا كان تابع منفعة مستهلك يعطى بالعلاقة:

$$U = y_1^{\frac{3}{2}} \cdot y_2$$

حيث y_1, y_2 كميات استهلاك السلع، وأسعار واحدات الـــسلع $P_1 = 3$ ، $P_2 = 4$

المطلوب:

1- أوجد المنفعة العظمى لهذا المستهلك علما أن دخله $W = 100$ وحده نقديـــة، و أنه ينفق كامل دخله على شراء السلع الاستهلاكية.

2- أوجد كلا من المنفعة الحدية ومرونة تابع المنفعة بالنـــسبة لكـــل مـــن هـــاتين السلعتين عند الوضع الاستهلاكي $(10,5)$.

3- أوجد معدل الإحلال الحدي عند الوضع الاستهلاكي $(5 , 10)$.

الفصل الحادي عشر
توابع الإنتاج

سنتعرض في هذه الفصل لدراسة خواص تابع الإنتاج وما يترتب على تلك الخواص من نتائج دون النظر إلى الطريقة التي تم بواسطتها بناء ذلك التابع. أي أننا سنفترض أن هناك تابعا معينا يمثل حصيلة النشاط الإنتاجي في المنشأة، وغايتنا هي دراسة خواص ذلك التابع لنصل منها إلى بعض النتائج المفيدة. أما كيفية الحصول على ذلك التابع فهي موضوع يتناوله الاقتصاد القياسي.

§-1 - مفهوم توابع الإنتاج :

الإنتاج هو العملية أو الوظيفة التي تقوم بها المنشآت وذلك من خلال مزج عناصر الإنتاج المختلفة (مثل العمل والأرض ورأس المال) للحصول على حجم أو مقدار معين من السلع والخدمات. فالمنشآت عادة ما تقوم بتحويل المدخلات أو عناصر الإنتاج المختلفة إلى مخرجات أو سلع وخدمات وذلك من خلال ما يعرف بالعملية الإنتاجية. أما تابع الإنتاج فيعبر عن العلاقة الفنية أو التقنية التي تربط بين مدخلات ومخرجات العملية الإنتاجية ، وبناء عليه فان العلاقة التقنية التي تربط بين خدمات عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية (المدخلات) وما يترتب عليها من منتجات مختلفة كسلع وخدمات (مخرجات) توصف بتابع الإنتاج، ويمكن تعريف تابع الإنتاج بأنه علاقة فنية توضح لنا أقصى ما يمكن إنتاجه أو الحصول عليه من سلع وخدمات باستخدام كمية معينة من عناصر الإنتاج وذلك عند مستوى معين من التقنية والتكنولوجيا . ويمكن التعبير عن تابع الإنتاج رياضيا بالصورة:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

حيث F – تمثل الكمية المنتجة في وحدة زمنية معينة. x_i – الكمية المستخدمة من العنصر i خلال الفترة الزمنية نفسها $(i = 1,2,3,\dots,n)$. وللتوابع الإنتاجية صيغ رياضية مختلفة وكثير منها:

$$F = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$F = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$$

$$F = a_0 a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot \dots \cdot a_n^{x_n}$$

وسنتناول في هذه الفقرة تابع الإنتاج لمنشأة في فترة زمنية قصيرة نسبيا كالسنة. ليكن تابع الإنتاج:

$$F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

لنرمز بـ P_i لسعر استخدام الواحدة من عامل الإنتاج i في تلك السنة و P لسعر الواحدة من المنتجات F، C تكلفة الإنتاج في المنشأة. وسنفترض فيما يلي أن المنتج لا يستطيع التأثير على أسعار عناصر الإنتاج التي يستخدمها و لا على سعر السلعة التي ينتجها (أي الأسعار ثابتة لا علاقة للمنتج بتحديدها). ولنبدأ بمعالجة المسائل التالية:

§-2 – الحصول على أكبر حجم من المنتجات من خلال تكلفة معينة :

لنفرض أن المنشأة تنتج نوعا واحدا من المنتجات بالكمية F التابعة للكميات المتحولة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ الخاصة بعوامل الإنتاج. فإذا كانت أسعار عوامل الإنتاج P_i معطاة في السوق بحيث يصبح من الممكن تشكيل تابع التكلفة كما يلي:

$$C = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n$$

حيث على المنشأة هنا إنفاق C على عوامل الإنتاج بشكل تكون فيه قيمة تابع الهدف $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ أكبر ما يمكن. وتصبح مسألتنا إيجاد القيمة العظمى لتابع الهدف في حالة وجود شرط . لنشكل تابع لاغرانج:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \left(C - \sum_{i=1}^{n} P_i x_i\right)$$

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونجعلها مساوية للصفر:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda P_i = 0 \qquad \forall \; i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = 0$$

بحل جملة المعادلات السابقة والتي عددها $(n+1)$ معادلة نحصل على نقطة أو نقاط حرجة من الشكل $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$. ولكي تكون النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$

التي يأخذ فيها التابع F أعظم قيمـة مـع تحقـق شـرط التكلفـة يجـب أن تحقـق النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ تناوب في إشارات المعينات الجزئيـة لمعـين هيـسيان الموسع من الموجب إلى السالب إلى الموجب ... أي:

$$J_2 > 0 \ , \ J_3 < 0 \ , \ J_4 > 0 \ , \ \cdots \ , \ (-1)^n J_n = J > 0$$

حيث أن معين هيسيان الموسع هو:

$$J = J_n = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ P_1 & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ P_2 & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_n^n} \end{vmatrix}$$

مثـال:

شركة تنتج سلعة متجانسة باستخدام كميتي عاملي الإنتاج (x_1, x_2) فإذا كانـت الميزانية التي تخصصها هذه الشركة للإنتاج هي (400) وحدة نقدية وكان سعر الوحدة من عامل الإنتاج الأول هو (1) وحدة نقدية ، وسعر الوحدة من عامل الإنتـاج الثـاني هو (2) وحدة نقدية وكانت كمية الإنتاج معطاة بالعلاقة التالية :

$$F = 200x_1 + 100x_2 - 0.5x_1^2 - 0.5x_2^2$$

أوجد كميات عناصر الإنتاج التي لو استخدمتها الشركة لحصلت على أكبر إنتاج ممكن ثم أوجد كمية الإنتاج الأعظمي.

الحـل: لدينا تابع الإنتاج هو:

$$F = 200x_1 + 100x_2 - 0.5x_1^2 - 0.5x_2^2$$

وتابع التكلفة (الشرط) هو:

$$C = \sum_{i=1}^{2} P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad 400 = x_1 + 2x_2$$

لنشكل تابع لاغرانج:

$$L = 200x_1 + 100x_2 - 0.5x_1^2 - 0.5x_2^2 + \lambda(400 - x_1 - 2x_2)$$

بالاشتقاق نجد:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 200 - x_1 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 200 - x_1 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 100 - x_2 - 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 50 - \frac{x_2}{2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 400 - x_1 - 2x_2 = 0 \qquad (3)$$

بمساواة العلاقة (1) مع (2) نجد:

$$200 - x_1 = 50 - \frac{x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 - 300$$

نعوض في (3) فنجد:

$$400 - x_1 - 2(2x_1 - 300) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$x_1 = 200 \quad , \quad x_2 = 100 \quad , \quad \lambda = 0$$

ومنه النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}) = (200, 100, 0)$ نقطة حرجة.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = -1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = -1$$

نعوض في معين هيسيان نجد:

$$J_2 = J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad J_2 > 0$$

أي النقطة $(200, 100)$ نقطة عظمى لتابع الإنتاج ، وحجم الإنتاج الأعظمي عند هذه النقطة هو :

$$F = 200(200) + 100(100) - 0.5(200)^2 - 0.5(100)^2 = 25000$$

§8-3 – الحصول على حجم معين مسبقا من المنتجات بأقل تكلفة ممكنة:

لنفرض أننا نود الحصول على حجم معين F_0 من المنتجات في منشأة بأقل تكلفة ممكنة. هنا نجد أنفسنا أمام مسألة رياضية يطلب فيها إعطاء التابع:

$$C = P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \qquad \forall \ i = 1, 2, \ldots, n$$

أقل قيمة ممكنة مع تحقق الشرط التالي:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_0$$

لحل هذه المسألة نشكل تابع لاغرانج:

$$L = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i + \lambda \left[f(x_1, x_2, \dots, x_n) - F_0 \right]$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = P_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall \ i = 1,2,\dots,n \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - F_0 = 0 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلات السابقة نحصل على مـا أسـميناه النقطـة (أو النقـاط) الحرجة وقد وجدنا سابقا حتى تكون هذه النقطة أو النقاط الحرجة (صغرى) أي أقـل تكلفة ممكنة يجب أن تكون إشارات المعينات الجزئية لمعين هيسيان الموسع أصغر من الصفر أي:

$$J_2 < 0 \ , \ J_3 < 0 \ , \ J_4 < 0 \ , \ \cdots , J_n = J < 0$$

أي أن:

$$J = J_n = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^n} \end{vmatrix} < 0$$

بتعويض المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية في معين هيسيان الموسع الناتجـة عن اشتقاق المعادلات (1):

$$J = J_n = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^n} \end{vmatrix} < 0$$

من العلاقة (1) نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{P_1}{\lambda} \qquad (3)$$

من العلاقة (2) نجد أن المقـدار $\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq 0$ كمـا أن $P_i > 0$ وبالتـالي فـان المقدار $\lambda > 0$ وبتبديل العلاقة (3) في آخر معين لدينا نجد:

$$J = J_n = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{P_1}{\lambda} & -\frac{P_2}{\lambda} & \cdots & -\frac{P_n}{\lambda} \\ -\frac{P_1}{\lambda} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ -\frac{P_2}{\lambda} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{P_n}{\lambda} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \lambda\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^n} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) J'_n < 0$$

حيث J'_n هو:

$$J' = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ P_1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ P_2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^n} \end{vmatrix}$$

أي:

$$J_n = \lambda^n (-\frac{1}{\lambda})(-\frac{1}{\lambda^2})\, J'_n = \lambda^n \frac{1}{\lambda^3} J'_n$$

بما أن $\lambda < 0$ فانه يمكن كتابة العلاقة الأخيرة بالشكل التالي:

$$J_n = (-1)|\lambda|^n \frac{1}{(-1)^3|\lambda|^3} J'_n \quad \Rightarrow J_n = -(-1)^n |\lambda|^{n-3} J'_n$$

وبالتالي إشارات معين هيسيان J_n هي نفسها إشارة المعين $-(-1)^n J'_n$. وكما نعلم حتى تكون النقطة الحرجة صغرى يجب أن تكون جميع معينات هيسيان الجزئيــة سالبة أي:

$$-(-1)^n J'_n < 0$$

الآن عندما:

$$n = 2 \quad \Rightarrow \quad -(-1)^2 J'_2 < 0 \quad \Rightarrow \quad J'_2 > 0$$
$$n = 3 \quad \Rightarrow \quad -(-1)^3 J'_3 < 0 \quad \Rightarrow \quad J'_3 < 0$$
$$n = 4 \quad \Rightarrow \quad -(-1)^4 J'_4 < 0 \quad \Rightarrow \quad J'_4 > 0$$

أي يجب أن تكون إشارات المعينات الجزئية J'_n متناوبة الإشارات من الموجب إلى السالب اعتبارا من J'_2 أي يجب أن يكون:

$$J'_2 > 0 \;,\; J'_3 < 0 \;,\; \ldots \;,\; (-1)^n J'_n > 0$$

حيث أن المعين J'_n هو:

$$J'_n = (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 & \cdots & P_n \\ P_1 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ P_2 & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_n & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^n} \end{vmatrix} > 0$$

[illegible]

نفسه الشرط الكافي للحصول على حجم إنتاج أعظمي من تكلفة معينة.

مثـــال:

حدد الوضـــع الإنتاجي الذي يحقق حجم إنتاج قدره $F_0 = 90$ وحدة في مؤسسة إنتاجية وحيدة المنتج تابع إنتاجها:

$$F = 9x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}}$$

علما أن أسعار وحدات عوامل الإنتاج هي $P_1 = 3$, $P_2 = 6$ تكون فيه التكلفـــة أقل ما يمكن.

الحـــل: لنشكل تابع التكلفة:

$$C = \sum_{i=1}^{2} P_i x_i = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad C = 3x_1 + 6x_2$$

وضمن الشرط:

$$9x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} = 90$$

لنوجد أقل تكلفة ممكنة . لحل هذه المسألة نشكل تابع لاغرانج:

$$L = 3x_1 + 6x_2 + \lambda \left[9x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} - 90 \right]$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 + 3\lambda\, x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6 + 6\lambda\, x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{-\frac{1}{3}} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 9\, x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} - 90 = 0 \qquad (3)$$

من المعادلتين (1) , (2) نجد: $x_1 = x_2$

نعوض في (3) نجد: $x_1 = x_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1$

ومنه النقطة الحرجة: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\lambda}) = (10,10,-1)$

بإيجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع F نجد:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2x_1^{-\frac{5}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 2x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{-\frac{4}{3}}$$

نشكل معين هيسيان J'_2 ونعوض النقطة (10 , 10) في هذا المعين نجد:

$$J'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & -2x_1^{-\frac{5}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} & 2x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{-\frac{1}{3}} \\ 6 & 2x_1^{-\frac{2}{3}} \cdot x_2^{-\frac{1}{3}} & -2x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{-\frac{4}{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 3 & -\frac{2}{10} & \frac{2}{10} \\ 6 & \frac{2}{10} & -\frac{2}{10} \end{vmatrix} = 16.2 > 0$$

نجد أن $J'_2 > 0$ أي النقطة الحرجة (10,10) نقطة صغرى لتابع التكلفة وتحقق الشرط:

$$9x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}} = (10)^{\frac{1}{3}}(10)^{\frac{2}{3}} = 90$$

وبالتالي الوضع (10,10) هو الوضع الذي يحقق إنتاج 90 وحده وذلك بأقل تكلفة ممكنة لحساب قيمتها نعوض في تابع التكلفة نجد:

$$C = 3(10) + 6(10) = 90$$ وحده نقدية

4-§ -الربح الأعظم في حالة عدم وجود أية قيود على استخدام عوامل الإنتاج:

ليكن لدينا تابع الإنتاج $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$، وتابع التكاليف الكلية $C = P_1x_1 + P_2x_2 + \cdots + P_nx_n$ حيث $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ أسعار عوامل الإنتاج على الترتيب، وحتى يكون الربح أعظمياً يجب أن يكون الفرق بين ما تبيعه المنشأة من الإنتاج F بسعر واحدة الإنتاج P المحدد في السوق وقيمة ما تتكلفه من الإنفاق على عوامل الإنتاج C أكبر ما يمكن. لنشكل تابع الربح π:

$$\pi = P \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

وهنا نلاحظ أننا أمام مسألة إيجاد القيمة العظمى للتابع π في حالة عدم وجود شرط. بأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى وجعلها مساوية للصفر:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = P\frac{\partial f}{\partial x_i} - P_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ولكي يكون الربح في نهايتـه العظمـى يجـب أن تحقـق النقطـة الحرجـة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ الناتجة عن حل جملة المعادلات السابقة عند تطبيقها فـي معـين هيسيان H التالي:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 \pi}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

تناوب في إشـارات المعينات الجزئية لمعين هيسيان من سالب إلى موجب إلى سالب اعتبارا من H_1 أي:

$$H_1 < 0 \ , \ H_2 > 0 \ , \ H_3 < 0 \ , \ \dots$$

مثـال:

بفرض أن تابع الإنتاج معطى بالعلاقة التالية:

$$F = 50 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 4)^2$$

حيث x_2, x_1 كمية عاملي الإنتاج فإذا كانت $P_2 = 8 \ , \ P_1 = 2$ أسعار الوحـدة الواحدة من عاملي الإنتاج على الترتيب، وأن سعر الوحدة الواحدة مـن المنـتج هـي $P = 1$ وأن تكاليف عناصر الإنتاج الثابتة هي 6 وحدة نقدية.

المطلوب:

1- شكل تابع الربح.

2- حدد الوضع الإنتاجي الذي يحقق ربحا أعظمياً وأوجد قيمة هذا الربح.

الحـل:

1- الربح = الإيراد – التكلفة أو **بعبارة رياضية** $\pi = I - C$

$$I = P \cdot F = (1)\left[50 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 4)^2\right]$$

$$C = 6 + 2x_1 + 8x_2$$

ويصبح تابع الربح بالشكل التالي:

$$\pi = 50 - (x_1 - 6)^2 - 4(x_2 - 4)^2 - 6 - 2x_1 - 8x_2$$

2- نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = -2(x_1 - 6) - 2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = -8(x_2 - 4) - 8 = 0 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (5, 3)$.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} = -8$$

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

نجد أن $H_2 = 16 > 0 \ , \ H_1 = -2 < 0$ إذا إشارات المعينات الجزئية لمعين هيسيان تتناوب من سالب إلى موجب، إذاً النقطة عظمى موضعية ومنه:

الإنتاج الأمثل هو: وحده $F = 50 - (5-6)^2 - 4(3-4)^2 = 45$

وتكاليف هذا الإنتاج الأمثل هي:

$$C = 6 + 2(5) + 8(3) = 40 \qquad \text{وحده نقدية}$$

أما الأرباح فهي:

$$\pi = P \cdot F - C = (1)(45) - (40) = 5 \qquad \text{وحده نقدية}$$

إذا الربح الأعظمي 5 وحدات نقدية.

§5- توابع الإنتاج الضمنية والربح الأعظمي:

تستخدم توابع الإنتاج الضمنية في المنشأة في حالة إنتاجها لعدد معين من السلع. لنرمز بالرمز m لعدد أنواع المنتجات و بالرمز F_j لحجم ما ينتج من j حيث $(j = 1, 2, \ldots, m)$. بالرمز x_i لحجم ما يستخدم في المنشأة من عامل إنتاج i حيث $(i = 1, 2, \ldots, n)$ وفي هذه الحالة لا يكون لدينا توابع إنتاج ظاهرية بالنسبة إلى كل

نوع من المنتجات و إنما توابع ضمنية أو علاقة واحدة فقط تربط بين أحجام الإنتـــاج $F_1, F_2, \ldots, F_m$ وأحجام عوامل الإنتاج $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ من الشكل:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n, F_1, F_2, \ldots, F_m) = 0$$

نحن نعلم أن ربح المنشأة يتمثل بالفرق بين قيمة ما تبيعه من منتجات وقيمة مـــا تستخدمه من عوامل إنتاج فإذا رمزنا P_i لسعر الواحدة من عامل الإنتاج i و P_j سعر الواحدة من المنتج j حيث تكون هذه الأسعار محددة في السوق. ويكون تابع الربح:

$$\pi = \sum_{j=1}^{m} P_j F_j - \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$$

ويشكل التابع الضمني شرطاً على هذا الربح، عندها يكون تابع لاغرانج:

$$L = \sum_{j=1}^{m} P_j F_j - \sum_{i=1}^{n} P_i x_i + \lambda G(x_1, x_2, \ldots, x_n, F_1, F_2, \ldots, F_m)$$

نلاحظ أن لدينا $n+m+1$ متحولا في التابع L.

نأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع بالنسبة لهذه المتحولات ونجعلها مساوية للصفر فنجد:

$$\frac{\partial L}{\partial F_j} = P_j + \lambda \frac{\partial G}{\partial F_j} = 0 \qquad \forall \ j = 1,2,\ldots,m$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = P_i + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall \ i = 1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = G(x_1, x_2, \ldots, x_n, F_1, F_2, \ldots, F_m) = 0$$

وهي $m+n+1$ معادلة ممثلة للمشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لـــ F .

بحل جملة المعادلات هذه نحصل على النقاط الحرجة . نشكل معين هيسيان الموسع J. النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m, \bar{\lambda})$ المحققة لتناوب إشارات المعينات الجزئية لمعين هيسيان الموسع من موجب إلى سالب إلى موجب... اعتبـارا مـــن J_2 توافـــق النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_m)$ العظمى للتابع π والذي يأخذ فيها الربح أكبر قيمة ممكنة، حيث أن معين هيسيان:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial G}{\partial F_1} & \frac{\partial G}{\partial F_2} & \cdots & \frac{\partial G}{\partial F_m} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_m} \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial F_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial F_m} \\ \frac{\partial G}{\partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial F_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial F_m} \\ \frac{\partial G}{\partial F_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial F_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial F_m} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m \partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m \partial F_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial F_m^2} \end{vmatrix}$$

مثـــال:

ليكن لدينا التابع الضمني:

$$G(x_1, x_2, F_1, F_2) = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot F_1^2 - F_2^2 - 4 = 0$$

يربط بين حجوم عوامل الإنتاج x_1, x_2 والمنتجات F_1, F_2 **والمطلوب:**

1- تشكيل تابع الربح.

2- إيجاد الوضع الإنتاجي الأمثل من خلال تحديد قيم (x_1, x_2, F_1, F_2) إذا علمت أن $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ أسعار وحدات عوامل الإنتاج و $P_1^* = 8$, $P_2^* = 4$ أسعار وحدات المنتجات.

3- تحديد مقدار الربح في الوضع الأمثل.

الحـــل: 1- لتشكيل تابع الربح لدينا: $\pi = \sum_{j=1}^{m} P_j^* \cdot F_j - \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot x_i$

ومنه: $\pi = 8F_1 + 4F_2 - 2x_1 - 4x_2$

2- لإيجاد الوضع الإنتاجي الذي يكون فيه الربح أعظميا نشكل تابع لاغرانج:

$$L = 8F_1 + 4F_2 - 2x_1 - 4x_2 + \lambda\left[x_1 \cdot x_2 - x_2 F_1^2 - F_2^2 - 4\right]$$

نوجد المشتقات الجزئية بالنسبة للمتحولات $F_1, F_2, x_1, x_2, \lambda$ ونعدمها:

$$\frac{\partial L}{\partial F_1} = 8 - 2\lambda x_2 F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{4}{x_2 F_1} \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial F_2} = 4 - 2\lambda F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{F_2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + \lambda x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{x_2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -4 + \lambda\left[x_1 - F_1^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{x_1 - F_1^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot F_1^2 - F_2^2 - 4 = 0 \quad (5)$$

بمساواة العلاقتين (2) , (3) نجد:

$$\frac{2}{F_2} = \frac{2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = x_2 \quad (6)$$

بمساواة العلاقتين (3) مع (1) نجد:

$$\frac{4}{x_2 F_1} = \frac{2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad 2x_2 F_1 = 4x_2 \quad \Rightarrow$$

$$2x_2 F_1 - 4x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(2F_1 - 4) = 0$$

إما: $x_2 = 0$ وهذا مرفوض.

أو: $2F_1 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 2 \quad (7)$

بمساواة العلاقة (1) مع (4) وتعويض قيمة F_1 نجد:

$$\frac{4}{x_2} = \frac{4}{x_1 - 4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2x_2 + 4 \quad (8)$$

نعوض العلاقات (6) , (7) , (8) في المعادلة (5) نجد:

$$(2x_2 + 4)x_2 - (2)^2 x_2 - (x_2)^2 - 4 = 0$$

$$x_2^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm 2$$

نجد أن قيمة $x_2 = -2$ مرفوض من فروض المسألة ومنه نجد:

$$F_2 = x_2 = 2 \;,\; x_1 = 8 \;,\; F_1 = 2 \;,\; \lambda = 1$$

إذا النقطة الحرجة هي: $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2, , \bar{\lambda}) = (8, 2, 2, 2, 1)$

لتشكل معين هيسيان الموسع، نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}=\lambda \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_2}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}=\lambda \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_1}=-2\lambda F_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_2}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_2}=-2\lambda F_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_1^2}=-2\lambda x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial F_2}=0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial F_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial F_2^2}=-2\lambda$$

نوجد المشتق الجزئي من المرتبة الأولى لتابع الشرط:

$$\frac{\partial G}{\partial x_1}=x_2 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial x_2}=x_1-F_1^2$$

$$\frac{\partial G}{\partial F_1}=-2x_2F_1 \quad , \quad \frac{\partial G}{\partial F_2}=-2F_2$$

نكتب معين هيسيان:

$$J=\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial G}{\partial F_1} & \frac{\partial G}{\partial F_2} \\ \frac{\partial G}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial F_2} \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial F_2} \\ \frac{\partial G}{\partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_1 \partial F_2} \\ \frac{\partial G}{\partial F_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2 \partial F_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial F_2^2} \end{vmatrix}$$

نعوض المشتقات الجزئية التي حصلنا عليها في معين هيسيان فنجد:

$$J=\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_1-F_1^2 & -2x_2F_1 & -2F_2 \\ x_2 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ x_1-F_1^2 & \lambda & 0 & -2\lambda F_1 & 0 \\ -2x_2F_1 & 0 & -2\lambda F_1 & -2\lambda x_2 & 0 \\ -2F_2 & 0 & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$$

نعوض النقطة (1 , 2 , 2 , 2 , 8) في المعين الأخير فنحصل على:

$$J = J_4 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -8 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 0 \\ -8 & 0 & -4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 64 > 0$$

نوجد المعينات الجزئية لمعين هيسيان الموسع:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0 \quad , \quad J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & -8 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -4 \\ -8 & 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -64 < 0$$

نجد أن: $J_2 > 0 \quad , \quad J_3 < 0 \quad , \quad J_4 > 0$

المعينات الجزئية لمعين هيسيان الموسع تتناوب من موجب إلى سالب إلى موجب أي أن الوضع الإنتاجي السابق $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{F}_1, \bar{F}_2) = (8, 2, 2, 2)$ يعطينا الربح الأعظمي في هذه النقطة.

3- قيمة الربح الأعظمي عند هذا الوضع الإنتاجي:

$$\pi = 8(2) + 4(2) - 2(8) - 2(2) = 16 + 8 - 16 - 8 = 0$$

§6-8 - الإنتاجية الحدية ومرونة تابع الإنتاج :

ليكن لدينا تابع الإنتاج $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هو تابع لـ x_i حيث x_i حجم ما يستخدم من عامل الإنتاج i وذلك مهما تكن $(i = 1,2,\dots,n)$. نعرف الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج i في وضع إنتاجي معين بأنها نهاية نسبة تغير الإنتاج F على تغير x_i عندما يتناهى التغير الأخير إلى الصفر مع بقاء قيم المتحولات الأخرى دون تغيير. أي هي عبارة عن قيمة المشتق الجزئي للتابع F لأجل x_i.

يمكن القول أن الإنتاجية الحدية لعامل الإنتاج i في وضع إنتاجي معين تساوي الزيادة في حجم الإنتاج المقابلة لاستخدام وحدة واحدة إضافية من العامل i زيادة على ما يستخدم منه في ذلك الوضع مع بقاء كميات عوامل الإنتاج الأخرى دون تغيير. وواضح من هذا التعريف أن الإنتاجية الحدية تمثل أثر الوحدة الأخيرة من عامل الإنتاج i على العملية الإنتاجية في وضع مفروض.

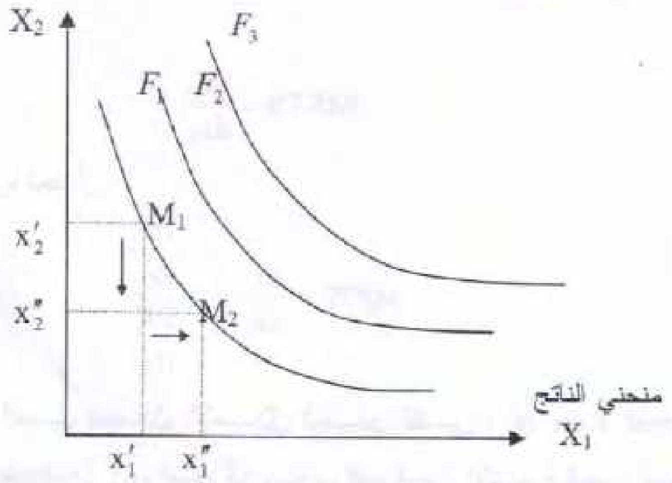
نعرف مرونة تابع الإنتاج بالنسبة إلى عامل الإنتاج i في وضع إنتاجي معين ونرمز لها بالرمز $E_{x_i}(F)$ بأنها النسبة بين التغيرات النسبية لتابع الإنتاج F والتغيرات النسبية المقابلة للمتحول x_i بالنسبة لعامل الإنتاج i ونكتب:

$$E_{x_i}(F) = \frac{\partial \ln F}{\partial \ln x_i} = \frac{\frac{\partial F}{F}}{\frac{\partial x_i}{x_i}} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{F}$$

تفيدنا معرفة مرونة تابع الإنتاج في وضع إنتاجي معين بأن نقدر مباشرة قيمة التغير النسبي للإنتاج الذي يقابل تغيرا طفيفا في كمية عامل الإنتاج i ، وبالتالي فان حساب مرونة التابع F بالنسبة إلى كل عامل من عوامل الإنتاج في وضع إنتاجي معين يمكننا من تقدير الأهمية النسبية لكل عامل في ذلك الوضع الإنتاجي.

§7-7 – منحنيات الناتج المتساوي :

نعرّف منحني الناتج المتساوي (Isoquant) بأنه المنحني الذي يظهر جميع المجموعات أو التوليفات المختلفة من عناصر الإنتاج التي تعطي نفس الكمية من الإنتاج. ويوضح الشكل أدناه مجموعة من منحنيات الناتج المتساوي كل منها تمثل مستوى مختلف من الإنتاج، حيث أن كل نقطة تمثل إنتاجا متساويا يمكن على أساسها الجمع بين عنصري الإنتاج لتحقيق ذلك المستوى من الإنتاج المطلوب.



الشكل رقم (1)

ومن خصائص منحنيات الناتج المتساوي أنه يزداد مستوى الإنتاج كلما انتقلنا إلى منحني ناتج متساوي أعلى كما أنها ذات ميل سالب ولا تتقاطع، ويوجد عدد لا نهائي من منحنيات الناتج المتساوي.

معدل الإحلال الحدي الفني

بفرض أن المنشأة تقوم بإنتاج سلعة ما باستخدام كميات عاملي الإنتاج x_1 , x_2 وبالتالي فان تابع الإنتاج يأخذ الشكل التالي:

$$F = f(x_1, x_2)$$

فإذا غيرت المنشأة الكمية المستخدمة من العنصر الأول بمقدار dx_1 والكمية المستخدمة من العنصر الثاني بمقدار dx_2، فان مقدار الإنتاج يتغير بكمية قدرها dF أي:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2$$

إذا فرضنا أن $dF = 0$ فأن:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

تمثل هذه المعادلة منحني الناتج المتساوي الذي يعطي مجموعات من عنصري الإنتاج x_1 , x_2 تمثل كل منها كمية إنتاج ثابتة . ولنرمز لميل منحني الناتج المتساوي بما يلي:

$$MRTS = \frac{dx_1}{dx_2}$$

ومن المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$MRTS = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}$$

ويعرف هذا الميل بمعدل الإحلال الحدي الفني (Marginal Rate of Technical Substitution) وواضح أنه يساوي النسبة بين الإنتاجية الحدية لعنصري

الإنتاج. فإذا كانت الإنتاجية الحدية لكل عنصر موجبة، فإن معدل الإحلال الحدي يكون سالبا. أي أن منحنيات الناتج المتساوي تتجه يمينا إلى الأسفل.

§-8 –مرونة الإحلال:

تهدف مرونة الإحلال (Elasticity of Substitution) إلى معرفة مدى سـهولة إحلال عنصر إنتاجي محل عنصر إنتاجي آخر للحصول على المستوى نفسه من الإنتاج. وتعرف على أنها التغير النسبي في نسب عناصر الإنتاج إلى التغير النسبي في الأسعار النسبية لهذه العناصر ونرمز لها بالرمز (σ) ويمكن صياغتها بالشكل التالي:

$$\sigma = \frac{d(\frac{x_1}{x_2})}{(\frac{x_1}{x_2})} \div \frac{d(\frac{P_2}{P_1})}{(\frac{P_2}{P_1})}$$

حيث x_1 تمثل الكمية المستخدمة من العنصر الأول، x_2 الكمية المستخدمة من العنصر الثاني، P_1 تمثل سعر الوحدة من العنصر الأول، P_2 تمثل سعر الوحدة من العنصر الثاني ويمكن كتابتها بالشكل التالي:

$$\sigma = \frac{d(\frac{x_1}{x_2})}{(\frac{x_1}{x_2})} \cdot \frac{(\frac{P_2}{P_1})}{d(\frac{P_2}{P_1})}$$

ومن تعريف مرونة الإحلال نجد أنها تتعلق بشكل منحنـي النـاتج المتـساوي. وبالتحديد في درجة انحنائه أو تقعره، وتبحث عن مدى سهولة إحلال عنصر محل آخر. عند تغير أسعارهم النسبية مع البقاء على المنحني نفسه. إضافة إلـى ذلـك إن قيمـة معامل مرونة الإحلال يتراوح بين صفر وما لانهاية فمثلا تكون $\sigma = \infty$ عندما يأخـذ منحني الناتج المتساوي شكل خط مستقيم أي أن هناك إحلالا تاما بين عناصر الإنتاج، أما عندما يأخذ منحني الناتج المتساوي شكل زاوية قائمة فإن مرونة الإحلال سـتكون مساوية للصفر $\sigma = 0$ وذلك لأنه ليس هناك إمكانية للإحلال بين عناصر الإنتـاج لأن النسبة $(\frac{x_1}{x_2})$ستكون ثابتة.

تمارين ومسائل غير محلولة

1 – إذا كان تابع الإنتاج في مؤسسة وحيدة المنتج يعطى بالعلاقة:

$$F(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{2}} \cdot x_2$$

حيث x_2, x_1 **كميات عوامل الإنتاج، وأسعار وحدات عوامل الإنتاج على الترتيب** $P_2 = 4$, $P_1 = 3$ **وحده نقدية**. والمطلوب:

1- احسب حجم الإنتاج الأعظمي الذي يمكن تحقيقه في ظروف تكلفة ثابتة على عوامل الإنتاج قدرها $C = 500$ وحده نقدية.

2- احسب قيمة معدل الإحلال عند الوضع الإنتاجي $(100, 50)$.

2- إذا كان تابع الإنتاج لمؤسسة وحيدة المنتج معطى بالعلاقة:

$$Z = 2\sqrt{x_1} + 5\sqrt{x_2}$$

حيث x_2, x_1 كميتي عاملي الإنتاج، وأسعار وحدتي عاملي الإنتاج $P_2 = 10$, $P_1 = 5$ وحده نقدية على الترتيب. وسعر وحدة المنتج $P = 20$ وحدة نقدية. والمطلوب:

1– أوجد الإنتاجية الحدية لكل من عاملي الإنتاج . ثم أوجد معامل الإحلال بين عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي $(100, 25)$. ووضح المدلول الاقتصادي.

2– حدد الوضع الإنتاجي الأمثل الذي يحقق ربحا أعظمياً لهذه المؤسسة.

3- لنفرض أن تابع الإنتاج معطى بالعلاقة:

$$F = 6x_1^{\frac{1}{2}} + 4x_2^{\frac{3}{4}}$$

حيث x_2, x_1 عاملي الإنتاج، فإذا كانت $P_2 = 6$, $P_1 = 3$ أسعار الوحدة الواحدة من عاملي الإنتاج على الترتيب، وأن سعر الوحدة الواحدة من المنتج $P = 10$ **والمطلوب:**

1– شكل تابع الربح.

2– حدد الوضع الإنتاجي الذي يحقق ربحا أعظميا.

3– احسب قيمة معدل الإحلال بين عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي $(100, 625)$.

4- أوجد مرونة تابع الإنتاج بالنسبة لكل من عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي $(100,625)$.

4- إذا كان حجم الإنتاج في مؤسسة وحيدة المنتج يعطى بالعلاقة:

$$F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

حيث: x_2, x_1 الكميتين المستهلكتين من عاملي الإنتاج، وكان سعر وحدتي عاملي الإنتاج على الترتيب $P_2 = 2 , P_1 = 1$ وحده نقدية. **والمطلوب:**

1- احسب حجم الإنتاج الأعظمي لهذه المؤسسة في ظروف تكلفة ثابتة على عوامل الإنتاج قدرها 400 وحده نقدية.

2- احسب معدل الإحلال التقني بين عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي $x_2 = 100 , x_1 = 200$.

5- أوجد حجم الإنتاج الأعظمي من تكلفة ثابتة على عوامل الإنتاج قدرها 90 وحده نقدية في مؤسسة إنتاجية يعطى تابع إنتاجها:

$$Z = 9x_1^{\frac{1}{3}} \cdot x_2^{\frac{2}{3}}$$

علما أن أسعار واحدات عوامل الإنتاج هي : $P_2 = 6 , P_1 = 3$.

6- إذا كان تابع الإنتاج في مؤسسة وحيدة المنتج يعطى بالعلاقة:

$$Z = f(x, y) = x^2 + x \cdot y + 4y$$

حيث y , x كميتا عاملي الإنتاج. **والمطلوب:**

1- أوجد حجم الإنتاج الأعظمي لهذه المؤسسة في ظروف تكلفة ثابتة على عوامل الإنتاج قدرها 1000 وحده نقدية ، علما أن أسعار عاملي الإنتاج $P_2 = 1 , P_1 = 2$ وحده نقدية.

2- أوجد مرونة الإنتاج بالنسبة لكل من عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي $y = 10 , x = 100$.

3- احسب قيمة معدل الإحلال بين عاملي الإنتاج عند الوضع الإنتاجي السابق .

7- نفرض أن تابع التكاليف الكلية TC في منشأة تعطى بالعلاقة:

$$TC = -2y^3 + 15y^2 - 20y + 100$$

حيث y تشير إلى حجم ما يتم صنعه في المنشأة من المنتجات. **والمطلوب:**

1- إذا كان سعر الواحدة من المنتجات يساوي (4) فأوجد حجم الإنتاج الذي يكـــون فيه الربح أعظمياً.

2- أوجد التكلفة الحدية والتكلفة الوسطى وذلك في الوضع الإنتاجي الذي يكون فيه الربح أعظمياً.

3- أوجد مرونة تابع التكلفة بالنسبة إلى حجم الإنتاج في الوضع الإنتــاجي الــذي يكون فيه الربح أعظميا.

8- يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع y, x فإذا كانت التكاليف الكلية لإنتاج السلعتين هي:

$$TC = x^2 + 2y^2 - x\,y$$

المطلوب: احسب كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع ، لتحقيق أقل تكلفة ممكنــة بشرط أن لا يزيد مجموع إنتاج السلعتين عن 8 وحدات.

9- إذا كانت العلاقة بين المبيعات S ، والمبالغ المنفقة على الإعلان في التلفزيون x ، والجرائد y ، كالآتي:

$$S = \frac{200x}{5+x} + \frac{100y}{10+y}$$

فإذا كان الربح الصافي يعادل $\frac{1}{5}$ من المبيعات ناقصا منه تكلفــة الإعــلان، وكانت ميزانية الإعلان تساوي 25 وحده نقدية.

المطلوب: احسب كيف يجب أن توزع هذه الميزانية بين التلفزيــون والجرائــد حتــى يتحقق أقصى ربح ممكن.

10- ليكن لدينا تابع الإنتاج الخاص بمصنع السكر:

$$F = 0.5\ln L + \ln K$$

حيث K, L هما عنصري العمل ورأس المال على الترتيب، وحيث P_L سعر الوحـــدة الواحدة من العمل وتساوي (0.10) وحدة نقدية. و P_K سعر الوحدة الواحدة مـــن رأس المال وتساوي (1) وحدة نقديه. إذا كانت التكاليف الثابته لهذا المـصنع هـــي (550) وحدة نقدية **المطلوب:** إيجاد حجم الإنتاج الأعظمي بظروف تكلفة قدرها (1000) وحدة نقدية.

الفصل الثاني عشر

التكاملات واستخداماتها الاقتصادية

§-1- تمهيد و تعاريف

1-1 التكامل غير المحدد :

إن عملية المكاملة غير المحددة لتابع ما مثل $f(x)$ هي عملية البحث عن كل التوابع الأصلية (التابع الأصلي) لذلك التابع. ونرمز للتابع الأصلي للتابع $f(x)$ بالرمز $F(x)$ ونكتب:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

حيث $\int f(x)\,dx$ هو التكامل غير المحدد للتابع $f(x)$ و $F(x)$ هو التابع الأصلي لـ $f(x)$، أما العدد c فهو ثابت التكامل.

مثـال:

إن التابع الأصلي للتابع $f(x) = x^2$ يفترض أن يكون دائما هو $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

وبسهولة نجد أن التابع $f(x)$ يقبل عدداً لانهائياً من التوابع الأصلية على سبيل المثال:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2 \quad , \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - 5 \quad , \quad F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{4}{5}$$

وبشكل عام نكتب: $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ حيث c ثابت التكامل. إذاً يعبر عن كل التوابع الأصلية للتابع $f(x)$ بالشكل: $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$

2-1 التكامل المحدد :

إن التكامل المحدد لتابع ما مثل $f(x)$ في المجال $[a,b]$ هو عبارة عن حساب السطح المحصور بين منحني التابع $f(x)$ وبين المحور OX في المجال $[a,b]$ ونرمز للتكامل المحدد للتابع $f(x)$ كما يلي:

$$S = \int_a^b f(x).dx$$

3-1 العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد:

إذا كان $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$ المعرف والمستمر والقابل للمكاملة في المجال $[a,b]$ عندئذ يكتب التكامل المحدد للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$ بدلالة التابع الأصلي $F(x)$ بالشكل التالي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث $F(b)$ قيمة التابع الأصلي عند النقطة $x = b$.

$F(a)$ قيمة التابع الأصلي عند النقطة $x = a$.

مثـــال:

احسب التكامل المحدد للتابع $f(x) = 3x^2$ باستخدام التابع الأصلي في المجـــال $[-2,3]$.

$$S = \int_{-2}^{3} 3x^2.dx = \left[x^3 + c\right]_{-2}^{3} = \left[(3)^2 + c\right] - \left[(-2)^3 + c\right] = 27 + c + 8 - c = 35$$

نلاحظ أنه ليس من الضروري إضافة الحد الثابت c في التكـــاملات المحـــدودة لأنه يختزل عند الطرح.

§-2- التطبيقات الاقتصادية للتكامل

أثناء دراسة المسائل الاقتصادية الجوهرية يستخدم الباحثون العديد مـــن الأدوات الرياضية المساعدة بالحل. وغالباً ما يستخدم التكامل وخاصة المحـــدود فـــي عمليـــة التحليل الاقتصادي والمراقبة المستمرة على الإنتاج والاستهلاك ومستوى العمالة.

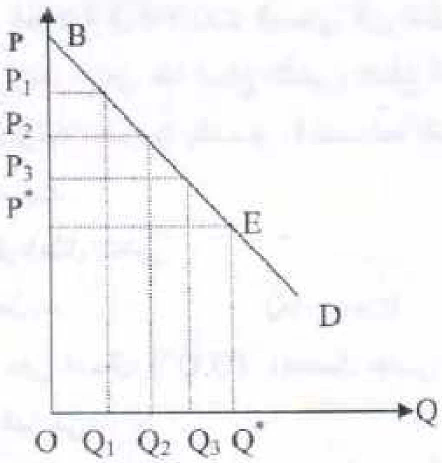
نعرض فيما يلي بعض التطبيقات الاقتصادية للتكامل:

2-1 فائض المستهلك :

إن التوازن في نظام المنافسة الكاملة يتحقق عندما تتساوى الكميات المطلوبـــة من سلعة ما مع الكميات المعروضة منها. وتعطي علاقة الطلب السعر الذي يمكـــن أن تباع عنده كمية معينة من السلعة ، أما تابع العرض فيوضـــح الـــسعر الـــذي يرغـــب البائعون الحصول عليه لبيع كمية معينة. نحن نعلم أن السعر في سوق المنافسة الكاملة

لا يعكس ما يرغب الفرد في دفعه لكل وحدة من هذه السلع، إلا أن هذا السعر يعكس التقييم الذي يعطيه الفرد لآخر وحدة يشتريها.

ليكن تابع الطلب BD كما في الشكل رقم (7−1) حيث يمثل عادة السعر على المحور العامودي والكميات على المحور الأفقي.



الشكل رقم (7-1) فائض المستهلك

لو فرضنا أن سعر التوازن في السوق هو OP^* فإن المستهلك سيشتري الكمية OQ^* ويدفع السعر OP^* لكل وحدة مشتراة، أي أن المستهلك سيدفع المبلغ $(OP^*)\cdot(OQ^*)$ في حين أن المستهلك كان مستعداً لأن يدفع المبلغ OP_1 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_1 وأن يدفع المبلغ OP_2 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_2 وأن يدفع المبلغ OP_3 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_3، أي أن المستهلك مستعد لأن يدفع سعراً لكل وحدة من وحدات الكمية OQ^* يفوق السعر التوازني OP^* باستثناء الوحدة الأخيرة حيث أنه يدفع فيها السعر التوازني. إذاً، إن المستهلك مستعد لأن يدفع المبلغ $OPEQ^*$ وهو العائد الذي يحصل عليه، في حين أنه يدفع فعلاً المبلغ OP^*EQ^*. عندئذ الفرق بين المبلغين P^*PE يعطينا فائض المستهلك الذي يعبر عنه بالعلاقة التالية:

فائض المستهلك = العائد على المستهلكين − القيمة المدفوعة

$$C_S = P^*PE = OPEQ^* - OP^*EQ^*$$

وهكذا يمكن أن نعرف فائض المستهلك (Consumer's Surplus) بكونه الفرق بين المبلغ الذي كان المستهلك مستعداً لدفعه للحصول على كمية معينة من سلعة ما والمبلغ الذي دفعه فعلاً لتلك الكمية حسب ما حددته آلية الأسعار بالسوق.

من الشكل (7 – 1) نلاحظ أن فائض المستهلك يمثل المساحة المحصورة بين منحني الطلب وسعر التوازن. ولحساب هذه المساحة نكامل تابع الطلب على المجال $[O,Q^*]$ فنحصل على المساحة الواقعة تحت المنحني التي تمثل المبلغ الذي يكون المستهلك مستعداً لدفعه، ويطرح من هذا المبلغ الأخير، المبلغ الذي يدفعه المستهلك فعلاً ويساوي الكمية التوازنية مضروباً بالسعر (مساحة المستطيل OP^*EQ^*) فنحصل على فائض المستهلك.

لنستعرض ذلك من خلال المثال التالي:

ليكن لدينا تابع الطلب: $P = a - bQ$

نكامل هذا التابع على المجال $[O,Q^*]$ ونحصل على المبلغ الذي يكون المستهلك مستعداً لدفعه كما يلي:

$$OPEQ^* = \int_0^{Q^*}(a - bQ)\,dQ = [aQ - \frac{b}{2}Q^2]_0^{Q^*} = aQ^* - \frac{b}{2}Q^{*2}$$

ومنه فائض المستهلك C_s يساوي إلى:

$$C_s = aQ^* - \frac{b}{2}Q^{*2} - PQ^*$$

ولكن عند النقطة E لدينا:

$$P = a - bQ^*$$

وبالتعويض في معادلة فائض المستهلك C_s:

$$C_s = aQ^* - \frac{b}{2}Q^{*2} - (a - bQ^*)Q^* = aQ^* - \frac{b}{2}Q^{*2} - aQ^* + bQ^{*2}$$

نجد أن: $$C_S = \frac{b}{2}Q^{*2}$$

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب معطى بالعلاقة غير الخطية التالية: $P = aQ^{-b}$، حيث b ، a ثوابت. المطلوب:

1- أثبت أن مرونة تابع الطلب ثابتة.

2- احسب فائض المستهلك.

الحـــل:

-1
$$E_P(Q)=\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{-1}{\frac{dP}{dQ}}\cdot\frac{P}{Q}=\frac{+1}{-abQ^{-b-1}}\cdot\frac{aQ^{-b}}{Q}$$

$$=\frac{-1}{abQ^{-b-1}}aQ^{-b-1}=\frac{-1}{b}$$ مقدار ثابت.

2- لحساب فائض المستهلك C_S : C_S = العائد على المستهلكين – القيمة المدفوعة

$$\int_0^{Q^*}\left[aQ^{-b}\right]dQ=\left[\frac{aQ^{-b+1}}{-b+1}\right]_0^{Q^*}=\frac{a\left(Q^*\right)^{-b+1}}{-b+1}$$

إن الثابت a مقدار موجب و $b<1$. عندها يكون فائض المستهلك:

$$C_S=\frac{a}{-b+1}\left(Q^*\right)^{-b+1}-PQ^*$$

$$=\frac{a}{-b+1}\left(Q^*\right)^{-b+1}-a\left(Q^*\right)^{-b+1}=a\left(Q^*\right)^{1-b}\left[\frac{1}{1-b}-1\right]$$

$$C_S=a\left(Q^*\right)^{1-b}\left(\frac{b}{1-b}\right)$$

لكن القيمة $a\left(Q^*\right)^{1-b}=P\cdot Q^*$ تمثل الكمية التي يدفعها المستهلكون ، وعليه إذا كانت مرونة الطلب ثابتة فإن فائض المستهلك يكون ثابتاً (في هـــذه الحالـــة $\left(\frac{b}{1-b}\right)$ مضروباً في الكمية المنفقة على السلعة).

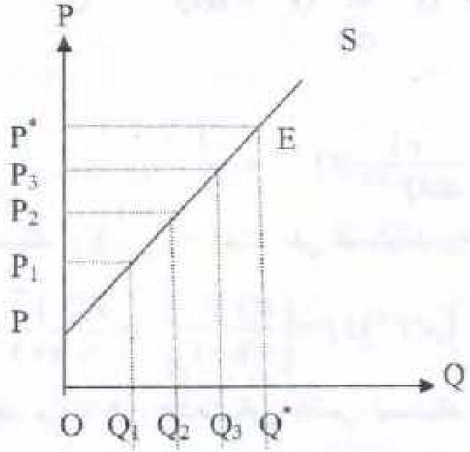
مثـــال: ليكن تابع الطلب $P^3Q=1000$ أو $P=10Q^{-\frac{1}{3}}$ ، فـــإذا كـــان الـــذي يدفعـــه المستهلكون عندما يكون السعر P=2 يساوي 250 عندها يكون فائض المستهلك:

$$C_S=250\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right)=125$$

حيث أن : $b = \frac{1}{3}$.

2-2 فائض المنتج:

ليكن لدينا تابع العرض DS الممثل بالشكل البياني (7 – 2):



الشكل رقم (7-2) فائض المنتج

لو فرضنا أن سعر التوازن في السوق هو OP^* فإن المنتج سيبيع الكمية OQ^* بالسعر OP^* لكل وحدة مباعة، أي أن المنتج سيحصل على المبلغ $(OP^*)\cdot(OQ^*)$ في حين أن المنتج مستعد لأن يقبل السعر OP_1 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_1 وأن يقبل السعر OP_2 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_2 وأن يقبل السعر OP_3 لقاء الوحدة الواحدة من الكمية OQ_3. أي أن المنتج مستعد لقبول سعر لكل وحدة من وحدات الكمية OQ^* يقل عن السعر التوازني OP^* باستثناء الوحدة الأخيرة حيث أنه يقبل فيها السعر التوازني. إذاً فهو مستعد لأن يقبل المبلغ $OPEQ^*$، في حين أنه يحصل فعلاً على المبلغ OP^*EQ^*. عندئذ الفرق بين المبلغين PP^*E يعطينا فائض المنتج (Producer's Surplus) الذي يعبر عنه بالعلاقة:

فائض المنتج = العائد الذي يحصل عليه المنتج فعلاً – العائد الذي هو مستعد لقبوله

$$P_S = PP^*E = OP^*EQ^* - OPEQ^*$$

وبالتالي يمكن أن نعرف فائض المنتج بأنه الفرق بين المبلغ الذي يحصل عليه فعلاً والمبلغ الذي يكون المنتج مستعداً لقبوله.

من الشكل (7 – 2) نلاحظ أن فائض المنتج يمثل بالمساحة المحصورة بين منحني العرض وسعر التوازن. لحساب هذه المساحة نكامل تابع العرض على المجال $[O,Q^*]$ فنحصل على المساحة الواقعة تحت المنحني التي تمثل المبلغ الذي يكون المنتج مستعداً لقبوله، وبطرحه من المبلغ الذي يحصل عليه فعلاً ويساوي الكمية التوازنية مضروباً بالسعر (مساحة المستطيل OP^*EQ^*) نحصل على فائض المنتج.

لنستعرض ذلك من خلال المثال التالي:

نفرض أن تابع العرض: $P = g + hQ$

بمكاملة هذا التابع على المجال $[O,Q^*]$ نحصل على المبلغ الذي يكون المنتج مستعداً لقبوله كما يلي:

$$OPEQ^* = \int_0^{Q^*}(g + hQ)\,dQ = [gQ + \frac{h}{2}Q^2]_0^{Q^*} = gQ^* + \frac{h}{2}Q^{*2}$$

ومنه فائض المنتج P_s يساوي إلى:

$$P_s = PQ^* - (gQ^* - \frac{h}{2}Q^{*2})$$

ولكن عند النقطة E لدينا:

$$P = g + hQ^*$$

بالتعويض في معادلة فائض المنتج P_s يكون:

$$P_s = (g + hQ^*)Q^* - (gQ^* + \frac{h}{2}Q^{*2}) = gQ^* + hQ^{*2} - gQ^* - \frac{h}{2}Q^{*2}$$

ونجد أن:

$$P_S = \frac{h}{2}Q^{*2}$$

مثـــال:

إذا كان تابع الطلب على سلعة غذائية كالآتي:

$$2Q + Q^2 = 42 - 2P$$

وتابع العرض كالآتي: $3Q = P - 9$

والمطلوب:

1- احسب سعر وكمية التوازن.

2- احسب فائض المستهلك وفائض المنتج عند القيم التوازنية.

3- إذا قدمت إعانة من قبل الدولة للمنتجين مقدارها $S=2$ على الوحدة الواحدة المعروضة من هذه السلعة بين أثر هذه الإعانة على فائض المستهلك وفائض المنتج.

1- مثل النتائج بيانياً.

الحـل:

1- من تابع الطلب نجد:

$$2Q+Q^2=42-2P \quad\Rightarrow\quad P=21-Q-\frac{1}{2}Q^2 \qquad (1)$$

ومن تابع العرض نجد:

$$3Q=P-9 \quad\Rightarrow\quad P=3Q+9 \qquad (2)$$

لإيجاد سعر وكمية التوازن بمساواة (١) مع (٢) نجد:

$$21-Q-\frac{1}{2}Q^2=3Q+9$$

$$\frac{1}{2}Q^2+4Q-12=0$$

$$Q=-4\mp\sqrt{40}=-4\mp 6.3 \quad\Rightarrow\quad Q=2.3$$

إذاً الكمية التوازنية هي $Q^*=2.3$ حيث أهملنا القيمة السالبة للكمية. بالتعويض في إحدى المعادلتين نجد السعر التوازني:

$$P=9+3(2.3)=9+6.9=15.9 \quad\Rightarrow\quad P^*=15.9$$

2- لحساب فائض المستهلك نحسب المساحة الواقعة تحت منحني الطلب بين نقطة الأصل والكمية التوازنية ويتحقق ذلك بمكاملة معادلة منحني الطلب:

$$P=21-Q-\frac{1}{2}Q^2$$

إن المساحة تحت المنحني تساوي:

$$=\int_0^{2.3}\left(21-Q-\frac{1}{2}Q^2\right)dQ=\left[21Q-\frac{1}{2}Q^2-\frac{1}{6}Q^3\right]_0^{2.3}$$

$$=\left[21(2.3)-\frac{1}{2}(2.3)^2-\frac{1}{6}(2.3)^3\right]-0=[48.3-2.6-2]=43.7$$

والمبلغ المدفوع فعلاً من قبل المستهلك هو:

$$P^*Q^* = (15.9)(2.3) = 36.57$$

ومنه فائض المستهلك: $C_S = 43.7 - 36.57 = 7.13$

ولحساب فائض المنتج نوجد المساحة الواقعة تحت منحنى العرض ونقطة الأصل والكمية التوازنية ويتحقق ذلك بمكاملة منحني العرض:

$$\int_0^{2.3}(9+3Q).dQ = \left[9Q + 1.5Q^2\right]_0^{2.3} = \left[9(2.3) + 1.5(2.3)\right] - 0 = 28.64$$

نطرح هذه النتيجة من المبلغ المدفوع فعلاً من قبل المستهلك فنحصل على فائض المنتج:

$$P_S = 36.57 - 28.64 = 7.9$$

3- يصبح تابع العرض الجديد بعد تقديم الإعانة كالآتي:

$$P + 2 = 9 + 3Q \quad \Rightarrow \quad P = 7 + 3Q$$

لنوجد من جديد سعر وكمية التوازن: $21 - Q - \frac{1}{2}Q^2 = 7 + 3Q$

$$\frac{1}{2}Q^2 + 4Q - 14 = 0$$

$$Q = -4 \mp \sqrt{44} = -4 \mp 6.63 \quad \Rightarrow \quad Q = 2.63$$

أي الكمية التوازنية بعد الإعانة هي $Q^* = 2.63$ حيث تهمل القيمة السالبة.

لإيجاد سعر توازن نعوض في إحدى المعادلتين:

$$P^* = 7 + 3(2.63) = 14.89$$

إذاً الكمية التوازنية بعد الإعانة هي 2.63 والسعر التوازني هو 14.89، وهذا يعكس في الحقيقة انتقال منحني العرض بسبب الإعانة، فانخفض السعر التوازني وازدادت الكمية التوازنية.

ويصبح فائض المستهلك عند التوازن الجديد كالآتي:

المساحة تحت منحنى الطلب بعد الإعانة تساوي:

$$= \int_0^{2.63}\left[21 - Q - \frac{1}{2}Q^2\right].dQ = \left[21Q - \frac{1}{2}Q^2 - \frac{1}{6}Q^3\right]_0^{2.63}$$

$$= 55.23 - 3.46 - 3.09 = 48.68$$

المبلغ المدفوع فعلاً من قبل المستهلك بعد الإعانة:

$$=(14.89)(2.63)=39.16$$

ومنه فائض المستهلك هو : $C_S = 48.68 - 39.16 = 9.52$

لحساب فائض المنتج نستخدم المساحة الواقعة تحت منحني العرض بين نقطة الأصل والكمية التوازنية الجديدة:

$$\int_0^{2.63}(7+3Q).dQ = \left[7Q+\frac{3}{2}Q^2\right]_0^{2.63} = 18.41+10.38 = 28.79$$

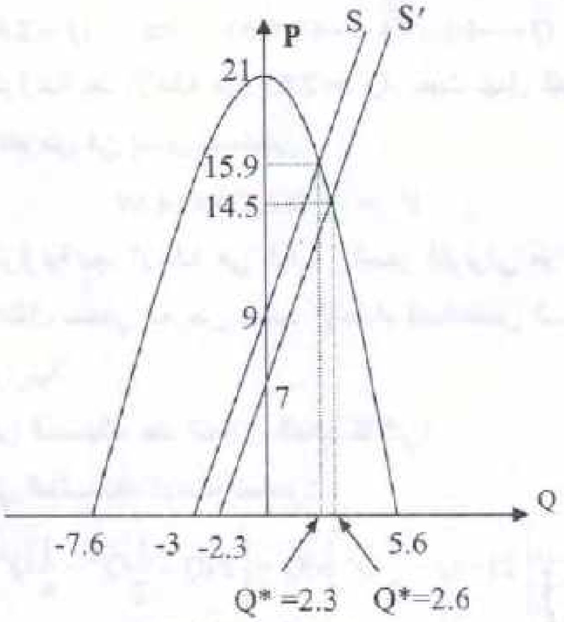
ونطرحه من المبلغ المدفوع من قبل المستهلك فعلاً:

$$P_S = 39.16 - 28.79 = 10.37$$

أي فائض المنتج هو : $P_S = 10.37$

وهكذا نلاحظ أن الإعانة البالغة ٢ لكل وحدة منتجة أدت إلى انخفاض السعر التوازني وازدياد الكمية التوازنية. كما أدت إلى زيادة فائض المستهلك وفائض المنتج في آن واحد نتيجة زيادة الكمية التوازنية .

4- نقوم الآن بتمثيل النتائج بيانيا كما هو مبين في الشكل (7 – 3).



الشكل رقم (7-3)

مثـــال:

احسب التغير في فائض المستهلك، عندما يقرر المحتكر تحقيق أقصى إيراد كلي بدلاً من تحقيق أقصى ربح علماً بأن الطلب على إنتاجه هو:

$$3Q = 60 - 10P$$

وأن تابع التكاليف الكلية هو:

$$TC = 20 + Q + 0.2Q^2$$

الحـــل: من تابع الطلب نجد:

$$3Q = 60 - 10P \quad \Rightarrow \quad P = 6 - \frac{3}{10}Q$$

ومنه: تابع الربح = الإيراد الكلي− التكاليف الكلية

$$\pi = TR - TC = P.Q - \left(20 + Q + 0.2Q^2\right)$$

$$= \left(6 - \frac{3}{10}Q\right)Q - \left(20 + Q + 0.2Q^2\right)$$

$$= 6Q - \frac{3}{10}Q^2 - 20 - Q - 0.2Q^2$$

$$\pi = 5Q - 0.5Q^2 - 20$$

لكي يكون لدينا أقصى ربح يجب أن يكون:

1) المشتق الأول لتابع الربح صفر: $\frac{d\pi}{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 5$

2) المشتق الثاني سالب: $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -1 < 0$

وعندها يتحقق أقصى ربح عندما تكون الكمية $Q = 5$ ويكون عندها سعر المبيع:

$$P = 6 - \frac{3}{10}(5) = 6 - 1.5 = 4.5$$ وحدة نقدية.

أما فائض المستهلك عند الكمية $Q = 5$ والسعر $P = 4.5$ اللذان يحققـــان أقـــصى ربح هو:

$$C_S = \int_0^5 \left(6 - \frac{3}{10}Q\right).dQ - P^*Q^* = \left[6Q - \frac{0.3}{3}Q^2\right]_0^5 - (4.5)(5)$$

$$C_S = (30 - 3.75) - 22.5 = 26.25 - 22.5 = 3.75$$

أما إذا قرر المحتكر تحقيق أقصى إيراد كلي فإن ذلك يتحقق عند تعظيم تابع الإيراد الكلي:

$$TR = P.Q = (6-0.3Q)Q = 6Q - 0.3Q^2$$

حتى يتحقق أقصى إيراد يجب أن يتحقق الشرطان التاليان:

١) $$\frac{dTR}{dQ} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - 0.6Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 10$$

٢) $$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -0.6 < 0$$

عندها يتحقق أقصى إيراد عندما تكون الكمية $Q = 10$ والسعر $P = 6 - 3 = 3$

أما فائض المستهلك عند الكمية $Q = 10$ والسعر $P = 3$ فيساوي:

$$C_S = \int_0^{10}(6-0.3Q)dQ - P_1^*Q_1^* = \left[6Q - \frac{0.3}{2}Q^2\right]_0^{10} - (3)(10)$$

$$C_S = [60-15] - 30 = 45 - 30 = 15$$

أي أن فائض المستهلك قد ازداد من 3.75 إلى 15 فقد حقق منفعة أكبر مقدارها:

$$15 - 3.75 = 11.25$$

مثـــال:

إذا كان تابع الإيراد الكلي لمنشأة احتكارية كالآتي:

$$TR = 24Q - 1.5Q^2$$

وتابع التكاليف الكلية لهذه المنشأة كالآتي:

$$TC = 15 + 4Q + 0.6Q^2$$

احسب فائض المستهلك إذا كان هدف المنشأة:

1- تحقيق أقصى ربح.

2- تحقيق أقصى إيراد.

3- قارن بين الأرباح في الحالتين.

الحـــل: 1- لنوجد تابع الربح π : $\pi = TR - TC$

$$\pi = 24Q - 1.5Q^2 - 15 - 4Q - 0.6Q^2$$
$$\pi = 20Q - 2.1Q^2 - 15$$

لتحديد الكمية التي يتحقق عندها أقصى ربح نجعل المشتق الأول مساوياً للصفر ونتأكد من كون المشتق الثاني سالباً:

1) $\frac{d\pi}{dQ} = 0 \Rightarrow 20 - 4.2Q = 0 \Rightarrow Q = 4.76$

2) $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -4.2 < 0$

إذاً الكمية التي تحقق أقصى ربح تساوي $Q^* = 4.76$. من تابع الإيـراد يمكـن استخراج تابع الطلب:

$$TR = P.Q \qquad (1)$$
$$TR = 24Q - 1.5Q^2 = (24 - 1.5Q)Q \qquad (2)$$

من العلاقتين (1) و (2) نجد :

$$P = 24 - 1.5Q \qquad (3)$$

بتعويض قيمة $Q = 4.76$ التي تحقق أقصى ربح في العلاقة (3) نجد:

$$P = 24 - 1.5(4.76) = 16.86$$

لإيجاد فائض المستهلك، نكامل العلاقة (3) للحصول على المساحة الواقعة تحت المنحني بين نقطة الأصل والكمية التي تحقق أقصى ربح.

$$C_S = \int_0^{4.76}(24 - 1.5Q)dQ - (16.86)(4.76) = \left[24Q - 0.75Q^2\right]_0^{4.76} - 80.25$$
$$C_S = (97.25 - 80.25) = 16.996 \approx 17$$

إذاً يكون فائض المستهلك $C_S = 17$ عندما يكون الهدف تحقق أقصى ربح.

2- إذا كان هدف المنشأة تحقيق أقصى إيراد فيمكن حساب حجم الإنتاج الـذي يحقـق ذلك الهدف كالآتي:

$$TR = 24Q - 1.5Q^2$$
$$\frac{dTR}{dQ} = 24 - 3Q = 0 \Rightarrow Q = 8$$

$$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -3 < 0$$

إن الكمية $Q = 8$ تعطي أقصى إيراد ولإيجاد السعر المقابل لهذه القيمة نعوض في معادلة (3) نجد:

$$P = 24 - 1.5(8) = 12$$

ولحساب فائض المستهلك عند قيمة الإنتاج التي تحقق أقصى إيراد، نكامل تابع الطلب أي العلاقة (3) لحساب المساحة الواقعة تحت المنحني ناقصاً منه المبلغ المدفوع فعلاً من قبل المستهلك:

$$C_S = \int_0^8 (24 - 1.5Q)dQ - P^*Q^* = \left[24Q - 075Q^2\right]_0^8 - (12)(8)$$

$$C_S = 144 - 96 = 48$$

إذاً فائض المستهلك يساوي $C_S = 48$ عندما يكون الهدف تحقق أقصى إيراد.

3- عندما يكون الهدف تحقيق أقصى ربح تبلغ كما رأينا أعلاه كمية الإنتاج $Q = 4.76$، نعوض في تابع الربح:

$$\pi = -15 + 20(4.76) - 2.1(4.76)^2 = -15 + 95 - 47.38$$
$$\pi = 32.62$$

أما عندما يكون الهدف تحقيق أقصى إيراد تبلغ كمية الإنتاج $Q = 8$ نعوض في تابع الربح نجد:

$$\pi = -15 + 20(8) - 2.1(8)^2 = -15 + 160 - 134.4$$

$$\pi = 10.6$$

نجد أن المستهلك يحقق فائضاً أكبر عندما يكون الإيراد أعظمياً وليس الربح أعظمياً بمقدار:

$$48 - 17 = 31$$

أما الربح فيتناقص عندما يكون الإيراد أعظمياً عما هو عليه في الحالة الأولى بمقدار:

$$32.62 - 10.6 = 22.02$$

2-3 تطبيقات التكامل في التحليل الحدي:

إن تابع التكلفة الحدية (MC) وتابع الإيراد الحدي (MR) وتابع الربح الحدي (MP) هي مشتقات تابع التكاليف وتابع الإيراد الكلي وتابع الربح الكلي على الترتيب بالنسبة للكمية Q أي أن:

$$TC' = MC$$

$$TR' = MR$$

$$\pi' = MP$$

وعليه فإن تكامل MC و MR و MP على المجال $[a, b]$ يعطى:

$$\int_a^b (MC)dQ = \int_a^b TC'dQ = TC(b) - TC(a)$$

هو التغير في التكلفة عندما تتغير Q من a إلى b.

$$\int_a^b (MR)dQ = \int_a^b TR'dQ = TR(b) - TR(a)$$

هو التغير في الإيراد عندما تتغير Q من a إلى b .

$$\int_a^b (MP)dQ = \int_a^b \pi'dQ = \pi(b) - \pi(a)$$

هو التغير في الربح عندما تتغير Qمن a إلى b .

مثـــال:

وجد مصنع أن التكلفة الحدية والإيراد الحدي للمصنع هي:

$$MC = 100 - 0.1Q$$

$$MR = 100 + 0.9Q$$

1- أوجد التغير الحاصل في الإيراد عندما يزداد مستوى المبيعات من20 إلى 30 وحدة.

2- أوجد الإيراد الحاصل من بيع 30 وحدة.

3- إذا كانت التكاليف الثابتة (تكلفة الإنتاج عندما Q=0 من الوحدات) يساوي 400 وحدة نقدية، أوجد تكلفة إنتاج 30 وحدة.

الحــل:

1- عند ازدياد مستوى المبيعات من Q=20 إلى Q=30 يتغير الإيراد بمقدار:

$$\int_{20}^{30}(MR)dQ = \int_{20}^{30}(100+0.9Q)dQ = \left[100Q+0.45Q^2\right]_{20}^{30}$$

$$= 3405-2180 = 1225$$

وعليه فإن الإيراد يزداد بمقدار 1225 وحدة نقدية.

2- إذا فرضنا أن الإيراد من بيع $Q=0$ من الوحدات يساوي الصفر فإن الإيراد الحاصل من بيع $Q=30$ وحدة يمكن النظر إليه كأنه التغير في الإيراد الحاصل عندما تزداد المبيعات من $Q=0$ وحتى $Q=30$ ويحسب:

$$\int_{0}^{30}(MR)dQ = \int_{0}^{30}(100+0.9Q)dQ = \left[100Q+0.45Q^2\right]_{0}^{30} = 3405-0 = 3405$$

أي أن الإيراد الذي نحصل عليه من بيع 30 وحدة هو 3405 وحدة نقدية.

3- بزيادة مستوى الإنتاج من $Q=0$ إلى $Q=30$ تتغير التكلفة بمقدار:

$$\int_{0}^{30}(MC)dQ = \int_{0}^{30}(100-0.1Q)dQ = \left[100Q-0.05Q^2\right]_{0}^{30} = 2955-0 = 2955$$

إذاً المجموع الكلي لتكاليف إنتاج $Q=30$ وحدة هي التكاليف الثابتة مضافاً إليها التكاليف المتغيرة الناتجة عن زيادة الإنتاج من $Q=0$ إلى $Q=30$ وحدة.

ومنه: $TC = 400+2955 = 3355$ وحدة نقدية.

مثــال:

لدى شركة تجارية تابع التكاليف الحدية معطى بالعلاقة التالية:

$$MC = \frac{12}{\sqrt[3]{Q}}$$

فإذا علمت أن التكاليف الكلية لهذه الشركة من أجل Q=10 هي $TC(10)=25$

أوجد تابع التكاليف الكلية ثم التكاليف المتوسطة لهذه الشركة.

الحــل:

$$TC = \int MCdQ = \int\frac{12}{\sqrt[3]{Q}} = \int 12Q^{-\frac{1}{3}}dQ = 12\frac{3}{2}Q^{\frac{2}{3}} + C$$

بأخذ الشرط $TC(10)=25$ بعين الاعتبار نجد:

$$12\frac{3}{2}(10)^{\frac{2}{3}}+C=25 \quad \Rightarrow \quad C=25-83.5=-58.5$$

ومنه تابع التكاليف الكلية يأخذ الشكل التالي:

$$TC=18Q^{\frac{2}{3}}-58.5$$

أما تابع التكاليف المتوسطة فيحسب كما يلي:

$$AC=\frac{TC}{Q}=\frac{18Q^{\frac{2}{3}}}{Q}-\frac{58.5}{Q}$$

$$AC=18Q^{-\frac{1}{3}}-\frac{58.5}{Q}$$

مثـــال :

منشأة صناعية تعمل في سوق تسودها المنافسة الكاملة، فــإذا علمــت أن تــابع تكاليفها الحدية معطى بالعلاقة التالية:

$$MC=0.06Q+15$$

وأن سعر الوحدة الواحدة من إنتاجها ٤٥ وحدة نقدية والمطلوب:

1- ما هي كمية الإنتاج التي تصنعها المؤسسة لتصل لمرحلة التوازن في السوق.

2- إذا فرضنا أن التكاليف الثابتة لهذه المؤسسة هي $FC=70$ وحدة نقديــة ،أوجــد الربح الكلي عند القيمة التوازنية و التكاليف المتوسطة.

الحــل: 1- نعلم أن التوازن في سوق تسودها المنافسة الكاملة يتحقق عندما يكون:

$$MC=P$$

$$0.06Q+15=45$$

وتكون كمية الإنتاج المحققة للتوازن $Q=500$.

2- أما تابع الربح فيعطى بالعلاقة التالية:

$$\pi=TR-TC$$

$$\pi=P\cdot Q-TC$$

إن تابع التكاليف الكلية TC ينتج عن مكاملة تابع التكلفة الحدية أي أن:

$$TC = \int MC\, dQ = \int (0.06Q + 15)\, dQ = 0.03Q^2 + 15Q + C$$

$$FC = 70 = C \quad \Rightarrow \quad TC = 0.03Q^2 + 15Q + 70$$

بالتعويض في تابع الربح نجد:

$$\pi = 45Q - 0.03Q^2 - 15Q - 70$$

$$\pi_1 = 30Q - 0.03Q^2 - 70$$

لإيجاد الربح الأعظمي نوجد المشتق الأول لتابع الربح ونعدمه:

$$MR = \frac{d\pi}{dQ} = 30 - 0.06Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = 500$$

نجد أن المنشأة التي تعمل في ظل المنافسة الكاملة، تحقق أقصى ربح ممكن عند مستوى الإنتاج الذي يحقق التساوي بين التكاليف الحدية والسعر، وهي كميـــة الإنتـــاج نفسها التي تحقق التوازن وتساوي 500 وحدة:

$$\pi(500) = 30(500) - 0.03(500)^2 - 70 = 7430$$ وحدة نقدية

أما التكاليف المتوسطة فنحصل عليها:

$$AC = \frac{TC}{Q} = 0.03Q + 15 + \frac{70}{Q}$$

وقيمتها:

$$AC(500) = 0.03(500) + 15 + \frac{70}{500} = 30.14$$ وحدة نقدية

يمكن إيجاد قيمة الربح الأعظمي بالطريقة التالية أيضاً:

الإيراد الكلي: وحدة نقدية. $TR = P \cdot Q = 45(500) = 22500$

التكلفة الكلية: وحدة نقدية. $TC = AC \cdot Q = 31.14(500) = 15070$

ومنه الربح الكلي يساوي: وحدة نقدية. $\pi(500) = 22500 - 15070 = 7430$

2-4 تطبيقات التكامل في تحليل الثروات الطبيعية :

لنفرض أن $R(t)$ تمثل المعدل المعلوم لاستهلاك ثروة طبيعيـــة مـــا (كـــالفحم، والنحاس، والغاز، والنفط، والزنك... إلخ) فإذا أخذنا نقطة بداية زمنية أو نقطة أصـــل $t = 0$ وفرضنا $Q(t)$ الكمية المستهلكة خلال الفترة الزمنية $[0,t]$ فإن:

$R(t) =$ معدل الاستهلاك $= Q'(t)$

نستنتج أن الثروة الطبيعية المستهلكة خلال فترة زمنية $[0,T]$ هي:

$$Q(T)=\int_0^T Q'(t)dt = Q(T)-Q(0)$$

أو :
$$Q(T)=\int_0^T R(T)dt$$

مثـــال :

في بداية عام 1994 $(t = 0)$ كان استهلاك النحاس بمعدل 478.850 طن فـي السنة، وكان معدل الاستهلاك يزداد بمقدار 4.5% في السنة. فإذا فرضـنا أن معـدل الاستهلاك له نموذج أسي فإن.

$$R(t)=478.850\,e^{0.045\,t}$$

قدر كمية النحاس التي ستستعمل من عام 1994 وحتى العام 2004.

الحـل: نجد أن المجموع الكلـي للاسـتهلاك مـن $(t = 0)$ أي عـام 1994 وحتـى $(t = 10)$ أي عام 2004 سيكون:

$$Q(10)=\int_0^{10} R(t)dt=\int_0^{10} 478.850\,e^{0.045\,t}dt$$

$$=\left[\frac{478.850}{0.045}e^{0.045\,t}\right]_0^{10}=\frac{478.850}{0.045}\left[e^{0.45}-e^{0}\right]$$

$$=10641.111\,(0.5683)=6047.343$$ طن

مثـــال :

نفرض أن محطة كهربائية تستطيع تقديم طاقة محددة تبعاً للزمن وفـق التـابع التالي:

$$f(t)=30t^2$$

المطلوب: حدد إجمالي الطاقة التي تقدمها المحطة على مدار اليوم.

الحـل: يمكن اختيار اللحظة الزمنية كما نريد إما بالساعة أو بالدقيقة أو بالثانيـة مـع ملاحظة أن اليوم يساوي 86400 ثانية أو 1440 دقيقة أو 24 ساعة.

$$\int_0^{24} f(t)dt=\int_0^{24} 30t^2dt=\left[10t^3\right]_0^{24}=10(24)^3-0=138240$$ ساعة / فولت

مثـــال:

لنفرض أن معدل تغير السكان $P(t)$ لبلد معين بالنسبة للزمن t هو:

$$P'(t) = 25000 + 4t^{\frac{2}{5}}$$

وعندما $(t = 0)$ يكون عدد السكان $P(0) = 50000$.

1- أوجد $P(t)$ بدلالة t.

2- أوجد عدد السكان عندما $T = 20$.

الحـــل:

1- بمكاملة العلاقة $P'(t)$:

$$P(t) = \int P'(t)dt = \int \left(25000 + 4t^{\frac{2}{5}}\right)dt$$

$$= 25000\int dt + 4\int t^{\frac{2}{5}}dt$$

$$= 25000t + \frac{20}{7}t^{\frac{7}{5}} + C$$

لحساب قيمة ثابت التكامل، نعلم أنه عندما: $t = 0 \quad \Leftarrow \quad P(0) = 50000$

نعوض في العلاقة الأخيرة فنجد:

$$P(0) = 0 + 0 + C = 50000 \;\Rightarrow\; C = 50000$$

ومنه:

$$P(t) = \frac{20}{7}t^{\frac{7}{5}} + 25000t + 50000$$

2- لإيجاد عدد السكان عندما $t=20$ ، نعوض في العلاقة الأخيرة:

$$P(20) = 189.4 + 500000 + 50000 \approx 550184$$

مثـــال:

سيارة قيمتها المبدئية 10000 وحدة نقدية، تنقص هذه القيمة بحيث أنــه عنــدما يكون عمر السيارة x من السنوات يكون معدل نقصان قيمتها هو $200x - 2000$ وحدة نقدية في السنة.

1- أوجد قيمة السيارة بعد x من السنوات.

2- أوجد قيمة السيارة بعد خمس سنوات.

الحـــل:

1- إذا كانت قيمة السيارة بعد x من السنوات هي $V(x)$، فإن العلاقة $200x - 2000$ هي مشتق التابع $V(x)$. وعليه فإن:

$$\frac{dV}{dx} = 200x - 2000$$

بمكاملة الطرفين نجد:

$$V = \int (200x - 2000)dx = 100x^2 - 2000x + C$$

بما أن قيمة السيارة في البداية أي عندما $x = 0$ هي $V = 10000$ فنجد أن:

$$C = 10000$$

إذاً قيمة السيارة بعد x من السنوات هي:

$$V = 100x^2 - 2000x + 10000$$

2- في نهاية (٥) سنوات أي $x = 5$ تكون قيمة السيارة هي:

$$V = 100(5)^2 - 2000(5) + 10000 = 2500 - 10000 + 10000$$

$$V = 2500$$

5-2 تطبيقات التكامل في الاستثمار وتكوين رأس المال:

Investment and capital formation

التكوين الرأسمالي هو عملية تحقيق إضافات إلى حجم معـين مـن الموجـود الرأسمالي. وباعتبار أن هذه العملية مستمرة فيمكن اعتبار الموجود الرأسمالي (كتـابع للزمن t) أي $K(t)$. ويشير المشتق $\frac{dK}{dt}$ إلى معدل التكوين الرأسمالي. لكـن معـدل التكوين الرأسمالي في زمن معين t يتطابق مع معدل تدفق الاستثمار الصافي في ذلـك الزمن ونرمز له بالرمز $I(t)$. إذاً يمكن الربط بين الموجود الرأسمالي K والاسـتثمار الصافي بالمعادلة التالية:

$$I(t) = \frac{dK}{dt}$$

يمكن التعبير عن التراكم الرأسمالي أي المعدل الاستثماري $I(t)$ خلال فترة $[0,t]$ بالتكامل التالي:

$$\int_0^t I(t)dt = [K(t)]_0^t = K(t) - K(0)$$

أو:

$$K(t) = K(0) + \int_0^t I(t)dt$$

حيث $K(0)$ الموجود الرأسمالي الأصلي في بداية الفترة، $K(t)$ هي الرصيد المتراكم في الفترة t ، أي أن الكمية K عند أية نقطة زمنية t ما هي إلا كمية رأس المال الأصلية مضافاً إليها إجمالي التراكم الذي حدث خلال هذه الفترة.

مثـــال :

إذا كان معدل الاستثمار معطى بالعلاقة التالية:

$$I(t) = 140\,t^{\frac{3}{4}}$$

وأن $K(0) = 150$ عندما T=0. المطلوب: استنتاج تابع التكوين الرأسمالي K بدلالة الزمن.

الحـل:

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 140\,t^{\frac{3}{4}}dt = 140\int t^{\frac{3}{4}}dt =$$

$$= 140\frac{4}{7}t^{\frac{7}{4}} + c = 80t^{\frac{7}{4}} + C$$

بأخذ الشرط $K(0) = 150$ بعين الاعتبار نجد:

$$K(0) = 80(0)^{\frac{7}{4}} + C = 150 \quad \Rightarrow \quad C = 150$$

ومنه تابع التكوين الرأسمالي يأخذ الصيغة التالية:

$$K(t) = 80t^{\frac{7}{4}} + 150$$

مثـــال:

ليكن لدينا تابع الاستثمار $I = 9t^{\frac{1}{2}}$ أوجد حجم التكوين الرأسمالي:

1- خلال 8 سنوات. 2- خلال أربع سنوات في المجال [4,8] .

الحـل: 1- بعد 8 سنوات:

$$K(t)=\int I(t)dt=\int_0^8 9t^{\frac{1}{2}}dt=\left[9\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^8=\left[6t^{\frac{3}{2}}\right]_0^8=135.76$$

2- في المجال [4,8] :

$$K(t)=\int_4^8 I(t)dt=\int_4^8 9t^{\frac{1}{2}}dt=\left[6t^{\frac{3}{2}}\right]_4^8=6\left(8^{\frac{3}{2}}\right)-6\left(4^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=135.76-48=87.76$$

مثـــال:

إذا كان تابع الاستثمار $I=0.5t^{0.8}$، فاحسب مقدار التراكم الرأســمالي خــلال خطة خمسية.

الحـــل:

$$\int_0^5 I(t)dt=\int_0^5 0.5t^{0.8}dt=\left[\frac{0.5}{1.8}t^{1.8}\right]_0^5=\frac{0.5}{1.8}(5)^{1.8}-0=5.03$$

مثـــال:

مؤسسة إنتاجية بدأت برأس مال قدره ٥٠ مليون ل.س. إذا كــان تــابع معــدل الاستثمار الصافي لهذه المؤسسة هو:

$$I(t)=50t^{\frac{4}{5}}$$

المطلوب: أوجد تابع التكوين الرأسمالي $K(t)$ لهذه المؤسسة:

$$K(t)=\int 50t^{\frac{4}{5}}dt=50\frac{5}{9}t^{\frac{9}{5}}+K_0$$
$$=27.8t^{\frac{9}{5}}+K_0$$

وبما أن رأس مال المؤسسة عند بداية المشروع هو ٥٠ إذاً يصبح تابع التكــوين الرأسمالي لهذه المؤسسة هو:

$$K(t)=27.8t^{\frac{9}{5}}+50$$

2-6 تطبيقات التكامل في الميل الحدي للاستهلاك والادخار:

من المعلوم في العلوم الاقتصادية أن الميل الحدي للاستهلاك هو المــشتق الأول لتابع الاستهلاك بالنسبة للدخل. وكذلك من المعلوم أيضاً أن الميل الحدي للادخار هــو

المشتق الأول لتابع الادخار بالنسبة للدخل. وبالتالي يمكن إيجاد تابع الاستهلاك وتـابع الدخل بحساب تكامل تابع الميل الحدي للاستهلاك والادخار بالنسبة للدخل. إذا رمزنا:

للميل الحدي للاستهلاك بالرمز Marginal Propensity to Consume (MPC)

وللميل الحدي للادخار بالرمز Marginal Propensity to Save (MPS)

فإن C و S تابعي الاستهلاك والادخار على الترتيب يحـسبان بـالعلاقتين التكـامليتين التاليتين:

تابع الاستهلاك بالنسبة للدخل $C = f(Y) = \int (MPC)dY = C(Y) + C_0$

تابع الادخار بالنسبة للدخل $S = f(Y) = \int (MPS)dY = S(Y) + S_0$

ويجب الإشارة إلى أن مجموع الميل الحدي للاستهلاك والميل الحدي للادخـار يساوي الواحد الصحيح أي أن:

$$MPS + MPC = 1$$

أو بعبارة أخرى مكافئة، الدخلY يساوي مجموع كل من الاستهلاك والادخار أي:

$$Y = C + S$$

مثـال:

إذا علمت أن الميل الحدي للاستهلاك $MPC = 0.9$ وأن الاسـتهلاك يـساوي 100 عندما ينعدم الدخل. أوجد تابعي الاستهلاك والادخار.

الحـل : يحسب تابع الاستهلاك بالتكامل التالي:

$$C = f(Y) = \int (MPC)\,dY = \int 0.9\,dY = 0.9\,Y + C_0$$

عندما الدخل $Y = 0$ ، فإن الاستهلاك $C_0 = 100$ ومنه:

$$C = f(Y) = 100 + 0.9Y$$

أما لحساب تابع الادخار نستخدم العلاقة بين الـدخل و الاسـتهلاك والادخـار التالية:

$$Y = C + S$$

فنجد: $Y = 100 + 0.9Y + S \quad \Rightarrow \quad S = -100 + 0.1Y$

مثـال:

إذا كان الميل الحدي للادخار MPS معطى بالعلاقة التالية:

$$MPS = 0.5 - 0.2Y^{-0.5}$$

وإذا علمنا أن هناك مسحوبات من المدخرات قدرها 3.5 عندما يكـون الـدخل مساوياً 25 والمطلوب أوجد تابع الاستهلاك.

الحــل :

$$S = \int (MPS)\,dY = \int \left(0.5 - 0.2Y^{-0.5}\right) dY = 0.5Y - 0.4Y^{0.5} + S_0$$

وعندما يكون الدخل Y=25، فإن مسحوبات الادخار S = −3.5 وبالتالي:

$$-3.5 = 0.5(25) - 0.4(\sqrt{25}) + S_0 \quad \Rightarrow \quad S_0 = -14$$

إذاً تابع الادخار هو:

$$S = -14 + 0.5Y - 0.4Y^{\frac{1}{2}}$$

أما تابع الاستهلاك فهو: $Y = C + S$

إذاً:

$$Y = C - 14 + 0.5Y - 0.4Y^{0.5} \quad \Rightarrow \quad C = 14 + 0.5Y + 0.4Y^{0.5}$$

أهم قواعد التكامل المستخدمة في العلوم الاقتصادية

1) $\int dx = x + c$

2) $\int \alpha dx = \alpha \int dx = \alpha x + c$ حيث α ثابت مقدار

3) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad n \neq -1$

4) $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + c \qquad a > 0, a \neq -1$

5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad a > 0, a \neq 1$

6) $\int e^x dx = e^x + c$

7) $\int x e^x dx = e^x (x-1) + c$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

9) $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

10) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \qquad (\text{if } x^2 > a^2)$

11) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \qquad (\text{if } a^2 > x^2)$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

13) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c$

14) $\int \ln x . dx = x \ln|x| - x + c$

15) $\int x^n \ln|x| . dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln|x|}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + c \quad n \neq 1$

16) $\int \frac{dx}{x \ln|x|} = \ln(\ln|x|) + c$

17) $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- إذا كان تابع الطلب: $P = 10 - Q - Q^2$

وتابع العرض: $P = Q + 2$

احسب فائض المستهلك وفائض المنتج.

2- إذا كان تابع طلب محتكر ما يساوي: $3Q = 60 - 10P$

وكان تابع تكاليفه المتوسطة تساوي: $AC = \frac{20}{Q} + 1 + 2Q$

وإذا قرر المحتكر تعظيم إيراده بدلاً من ربحه. المطلوب توضيح كيف يؤثر هذا القرار على حجم فائض المستهلك.

3- إذا كان تابع الطلب على إنتاج محتكر هو: $Q = 20 - \frac{10}{3}P$

وتابع تكاليفه المتوسطة : $AC = \frac{20}{Q} + 0.2Q + 1$

فاحسب مقدار التغير في فائض المستهلك إذا ما قرر المحتكر تحقيق أقصى إيراد بدلاً من أقصى ربح.

4- أوجد فائض المستهلك وفائض المنتج إذا كان تابع الطلب والعرض على الترتيب هما:

$$P = \ln(16 - Q)$$
$$P = \ln(2Q + 4)$$

5- إذا كان تابع الطلب لسلعة ما معطى بالعلاقة: $P = e^{5 - \frac{Q}{10}}$

احسب فائض المنتج من أجل $Q = 30$.

6- إذا كان تابع الطلب على سلعة ما معطى بالعلاقة: $P = 50.2^{-\frac{5}{Q}}$

احسب فائض المنتج من أجل $Q = 10$.

7- إذا كان منحني الطلب معطى بالعلاقة $P = 3 - \sqrt{Q}$ والسعر ثابت P=2 أوجد فائض المستهلك.

8- إذا كان منحني العرض معطى بالعلاقة $P=(Q+2)^2$ والسعر ثابت عند $P=16$ أوجد فائض المنتج.

9- إذا علمت أن تابعي الطلب والعرض على سلعة ما هما على الترتيب:

$$P = 30 - 2Q^2$$

$$P = 3 + Q^2$$

فاحسب كلاً من فائض المستهلك وفائض المنتج عند السعر التوازني .

10- بفرض أن تابعي الطلب والعرض معطيان بالمعادلتين:

$$P = Q - 21$$

$$P = \frac{Q}{2}$$

1- أوجد سعر التوازن وكمية التوازن.

2- احسب فائض المستهلك وفائض المنتج.

11- وجدت شركة أن تابع التكاليف الحدية معطى بالعلاقة التالية:

$$MC = Q^2 - 3Q$$

أوجد تابع التكاليف الكلية TC مع العلم أن التكاليف الثابتة هي 1000 وحدة نقدية.

12- وجد منتج أن تابعي التكاليف الحدية والإيراد الحدي هي:

$$MC = 200 - 0.4x$$

$$MR = 200 + 0.2x$$

1- أوجد التغير في الإيراد الناتج عن زيادة مستوى المبيعات من 10 إلى 50 وحدة.

2- أوجد الإيراد الناتج عن بيع 70 وحدة.

3- إذا كانت التكاليف الثابتة هي 1000 وحدة نقدية، أوجد تكلفة 70 وحدة .

4- أوجد الربح الكلي الناتج عن إنتاج وبيع 70 وحدة (يجب أخذ التكاليف الثابتة بعين الاعتبار).

5- أوجد الربح الناتج عن إنتاج وبيع X من الوحدات.

13- نتيجة لحملة دعائية لمدة خمسة أيام تتوقع شركة أن تزداد مبيعاتها بمعدل $r(t)=50e^{t}$ مقدرة بالليرات في اليوم، حيث t تمثل عدد الأيام التي مضت على البدء بالحملة الدعاية. أوجد الزيادة في المبيعات الكلية خلال فترة الحملة.

14- منشأة زراعية تابع تكاليفها الحدي معطى بالعلاقة التالية:

$$MC=10+5e^{2Q-1}$$

والتكاليف الثابتة لها $TC(0)=210$.

المطلوب: حساب التكاليف الكلية والتكاليف المتوسطة لهذه المنشأة.

15- تبين أن التكاليف الحدية لمؤسسة تجارية زراعية معطاة بالعلاقة التالية:

$$MC=7\sqrt[3]{Q^{2}}$$

فإذا علمت أن التكاليف الكلية من أجل $Q=16$ هو $TC(16)=111$.

أوجد تابع التكاليف الكلية والتكاليف المتوسطة لهذه المؤسسة.

16- أوجد تابع التكاليف الكلية لمنشأة زراعية علماً بأن تابع التكلفة الحدية لها هو:

$$MC=-\frac{1530}{\sqrt[3]{Q^{3}}}$$

إذا علمت أن التكاليف الثابتة للمنشأة هي 100، ثم أوجد التكاليف المتوسطة من أجل $Q=5$.

17- لنفرض أن تابع التكاليف الحدية لمنشأة اقتصادية هو:

$$MC=3Q^{2}-2Q+5$$

فإذا علمت أن التكاليف الثابتة هي 25 وحدة نقدية وأن السعر معطى بالعلاقة التالية:

$$P=5-0.3Q$$

والمطلوب:

1- حجم التكاليف المتوسطة للإنتاج من أجل $Q=3$.

2- ما هي قيمة Q التي تجعل تابع الربح أعظمياً، ثم ما هي قيمة الربح الأعظمي.

3- ما هي قيمة Q التي تجعل الإيراد أعظمياً،ثم ما هي قيمة الدخل الأعظمي .

4- ما هي قيمة كل من التكاليف الكلية والإيراد الكلي من أجل Q الأعظمي.

18- أوجد تابع الإيراد الكلي لمؤسسة ما إذا علمت أن الإيراد الحدي لهذه المنشأة $MR = 300 - 8Q$ حيث (Q حجم الإنتاج) وإيرادها الكلي يساوي 60 ألف وحدة نقدية حينما يبلغ حجم مبيعاتها 100 وحدة.

19- إذا علمت أن رأس المال الأصلي عندما $(t = 0)$ كان 75 وحدة نقدية وأن معدل التراكم هو $I(t) = 9\sqrt{t}$. أوجد مستوى التكوين الرأسمالي :

1- خلال الفترة من السنة الرابعة إلى السنة الثامنة.

2- بعد 8 سنوات.

20- لنفرض أن معدل الاستثمار يعطى بالعلاقة $I(t) = 12t^{\frac{1}{3}}$ وأن $K(0) = 25$.

1- أوجد التكوين الرأسمالي.

2- أوجد كمية التراكم الرأسمالي خلال الفترات الزمنية $[0,1]$ ، $[1,3]$ على التوالي.

21- ليكن معدل الاستثمار الصافي $I = 40t^{\frac{3}{5}}$ ومخزون رأس المال في سنة الأساس $K = 0$ عندما $(t = 0)$ أوجد تابع التكوين الرأسمالي.

22- ليكن معدل الاستثمار الصافي $I = 60t^{\frac{1}{3}}$ ومخزون رأس المال في سنة الأساس $K(1) = 85$ عندما $(t = 1)$ أوجد تابع التكوين الرأسمالي.

23- إذا كان تابع الميل الحدي للاستهلاك MPC هي $MPC = 0.6 + \frac{0.1}{\sqrt[3]{y}}$. فإذا كانت $(y = 0)$ فإن $(C = 45)$ المطلوب:

1- أوجد تابع الاستهلاك.

2- أوجد تابع الادخار.

24- إذا كان الميل الحدي للادخار MPS هو $MPS = 0.3 - 0.1y^{-\frac{1}{2}}$ وأن المدخرات الإجمالية S تساوي الصفر عندما يكون الدخل y مساوياً 81 المطلوب: أوجد تابع الدخل وتابع الاستهلاك.

25- زورق بخاري قيمته الابتدائية 20000 وحدة نقدية تنقص قيمته في السنة x بمعدل $2000 - 100x$ وحدة نقدية في السنة.

1- أوجد قيمة الزورق بعد x من السنوات.

2- أوجد قيمة الزورق بعد 10 سنوات.

26- إذا كانت التكاليف الحدية في مؤسسة وحيدة المنتج تعطى بالعلاقة:

$$MC = 0.6Q + 8$$

حيث Q هي كمية الإنتاج، وكانت التكاليف الثابتة لهذه المؤسسة 100 وحدة نقدية وسعر وحدة المنتج المعد للبيع $P = 38$ وحدة نقدية المطلوب:

1- أوجد تابع التكاليف الإجمالي لهذه المؤسسة.

2- أوجد كلاً من تابع الإيراد والربح لهذه المؤسسة.

3- إذا توقعنا أن تكون كمية الإنتاج واقعة في المجال [40,50] وحدة فأوجد متوسط تكلفة القطعة الواحدة.

27- إذا علمت أن تابع التكاليف الحدية لمنشأة اقتصادية:

$$MC = 3Q^2 + 12Q - 6$$

حيث Q تعبر عند عدد الوحدات المنتجة، وكانت التكاليف الثابتة لهذه المنشأة 100 وحدة نقدية وأن سعر مبيع الوحدة المنتجة 30 وحدة نقدية. والمطلوب:

1- أوجد تابع التكاليف الكلية للمنشأة.

2- أوجد تابع الإيراد للمنشأة.

3- أوجد قيمة الربح الأعظمي.

4- أوجد قيمة التكاليف الكلية الموافقة للربح الأعظمي والإيراد الكلي.

أوجد التكاليف المتوسطة عندما يتراوح الإنتاج بين وحدة واحدة وأربع وحدات.

الملحق

تذكير بأهم أساسيات
المصفوفات والمعينات وحلول جمل المعادلات

نستعرض في هذا الملحق تلخيصاً وتذكيراً ببعض المواضيع الرياضية التي كان القارئ قد درسها سابقاً، وذلك لسببين:

الأول: تشكل هذه المواضيع بعضاً من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة على صعيد النماذج الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية .

الثاني: وضع هذه الأدوات بمتناول يد القارئ في هذا الكتاب بهدف التسهيل والعودة إليها في أي لحظة.

§-1- أنواع المصفوفات والعمليات عليها:

1-1- مفهوم المصفوفة وأشكالها:

المصفوفة A ، كما عرفت سابقاً، هي مجموعة عناصر (أعداد) a_{ij} مرتبة في أسطر ، حيث $i=1,2,...,m$ وأعمدة، حيث $j=1,2,...,n$ وموضوعة ضمن قوسين، مثال المصفوفة التالية:

$$A_{m.n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

يشير الرمز $m\cdot n$ في $A_{m.n}$ لما نسميه مرتبة (سعة) المصفوفة، حيث يدل m على عدد الأسطر و n على عدد الأعمدة فيها. كما يشير الدليلان i,j في a_{ij} إلى موقع العنصر a_{ij} حيث يدل i على رقم السطر ويدل j على رقم العمود. نذكر فيما يلي بأغلب الأشكال المعروفة للمصفوفة:

1- مصفوفة سطر (صف): هي مصفوفة من المرتبة $m\cdot n=1,n$. عناصرها تتوضع على سطر واحد و n عمود.

2- مصفوفة عمود: هي من المرتبة $m\cdot n=m,1$ عناصرها تتوضع في عمود واحد و m سطر.

3- مصفوفة العنصر الوحيد: هي مصفوفة من المرتبة $m\cdot n=1,1$ مثال: $A=[a]$.

4- المصفوفة الصفرية: هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n$ جميع عناصرها مساوية للصفر، وغالباً ما تكتب على الشكل $A_{m \cdot n} = 0$.

5- المصفوفة المستطيلة: هي مصفوفة من المرتبة $m \cdot n$ حيث: $m \neq n$، أي أن عدد الأسطر يختلف عن عدد الأعمدة.

6- المصفوفة المربعة: هي مصفوفة من المرتبة $n \cdot n$ أو $m \cdot n$ وعموماً نقول أن لدينا مصفوفة مربعة من المرتبة n ونكتب A_n أي أنها مصفوفة من المرتبة $n \cdot n$.

نشير هنا أننا إذا كنا أمام مصفوفة مربعة فيمكننا الحديث عما يسمى بالقطر الرئيسي للمصفوفة. إن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة B مربعة هي $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn}$ وهي العناصر الواقعة على المستقيم الوهمي الواصل ما بين b_{11} و b_{nn} . ونلفت الانتباه أيضاً إلى أن الحديث عن عناصر القطر الرئيسي لمصفوفة يعني ضمناً أن المصفوفة المذكورة هي مصفوفة مربعة.

7- المصفوفة القطرية: هي مصفوفة مربعة حتماً. فيها جميع العناصر غير القطرية مساوية للصفر.

8- المصفوفة السلمية (العددية): هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي متساوية، فهي إذن حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

9- المصفوفة الواحدة: هي مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي مساوية للواحد الموجب الصحيح. يرمز لها بالرمز I . فهي إذن حالة خاصة جداً من المصفوفة القطرية.

10- المصفوفة المثلثة: هي مصفوفة مربعة جميع العناصر الواقعة أعلى القطر الرئيسي أو تحته مساوية للصفر.

11- المصفوفة المتناظرة: هي مصفوفة مربعة يتحقق فيها $a_{ij} = a_{ji}$. وتكون المصفوفة متناظرة عكسيا إذا كان $a_{ij} = -a_{ji}$ وذلك من أجل جميع عناصرها باستثناء عناصر القطر الرئيسي فيها.

2-1- العمليات على المصفوفات:

1- عملية المساواة:

نقول عن المصفوفتين A و B أنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا كانت لهما المرتبة نفسها $m\cdot n$ وكانت جميع عناصرهما المتقابلة، أي الواقعة الموقع نفسه $i\,j$ متساوية، أي إذا كانت إحداهما صورة طبق الأصل عن الثانية.

2- عملية جمع المصفوفات:

يمكن جمع المصفوفات مع بعضها إذا كانت جميعها من المرتبة نفسها ، ويتم ذلك بجمع العناصر المتقابلة في تلك المصفوفات. ونلاحظ هنا أن عملية جمع مصفوفتين A و B هي عملية تبديلية أي: $A+B=B+A$.

3- عملية طرح المصفوفات:

يمكن طرح مصفوفة B من أخرى A ونكتب $A-B$ إذا كانت المصفوفتان من المرتبة نفسها. ويتم ذلك بطرح العناصر المتقابلة في الموقع $i\,j$ من بعضها ، أي b_{ij} من a_{ij}. ونلاحظ هنا أن عملية الطرح ليست عملية تبديلية.

ملاحظة: إذا لم تكن المصفوفات من نفس المرتبة $m\cdot n$ تصبح عمليتا الجمع والطرح عليها غير معرفة.

4- عملية ضرب المصفوفة بثابت:

هنا يتم ضرب الثابت λ بكل عنصر من عناصر المصفوفة المعنية.

كأمثلة توضيحية على العمليات السابقة نأخذ:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{وليكن} \quad \lambda=3$$

حسب تعريف العمليات الجبرية أعلاه لدينا:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 7 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن: $A+B=B+A$

وكذلك لدينا

$$B-A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A-B=\begin{bmatrix}3 & -1 & -3\\ -1 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن: $A - B \neq B - A$

أما فيما يخص عملية ضرب المصفوفة بثابت، فهي موضحة على الشكل التالي:

$$\lambda A = 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

5- عملية ضرب المصفوفات:

تذكّر أن عملية ضرب المصفوفتين الأولى A في الثانية B ينتج عنها مصفوفة C قيمة كل عنصر فيها c_{ij} عبارة عن مجموع نواتج ضرب عناصر السطر i من الأولى بعناصر العمود j من الثانية. أي ضرب عناصر سطر i من الأولى بعناصر عمود j من الثانية يتم كما في المثال التالي:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[2(3) + 5(2) + (-2)(-1) + 1(1)\right]$$

$$A.B = [19]$$

لكي تكون عملية الضرب معرّفة يشترط أن يكون عدد أعمدة الأولى مساوياً لعدد أسطر الثانية. كما نذكّر هنا أن عملية ضرب المصفوفات ببعضها هي عملية ليست تبديلية. فمثلاً دعنا نوجد مصفوفة ناتج الضرب التالي:

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

مع ملاحظة أن عملية الضرب $A.B$ ممكنة نجد:

$$A.B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -9 & -7 & -5 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

بينما نجد:

$$B.A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

من الواضح أن عملية الضرب غير تبديلية حيث وجدنا: $A.B \neq B.A$ وهذا لا يعني طبعاً عدم وجود حالات خاصة تكون فيها عملية ضرب المصفوفات تبديلية.

لنورد الآن بعض الملاحظات الهامة:

– المصفوفة الصفرية: ونرمز لها بالرمز 0 هي مصفوفة حيادية في الجمع. أي:

$$0 + A = A$$

– المصفوفة الواحدة: التي هي حالة خاصة من السلمية، هي حيادية في الضرب، أي:

$$I \cdot A = A$$

كما أن عملية ضرب المصفوفة الواحدة بمصفوفة أخرى A هي عملية تبديلية:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

– ضرب مصفوفة مربعة بمصفوفة سلمية هي عملية تبديلية.

لتكن لدينا المصفوفة السلمية λ والمصفوفة B التاليتين:

$$\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

لنأخذ λB و $B\lambda$:

$$\lambda B = B\lambda = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن عملية الضرب هنا هي عملية تبديلية. كما نلاحظ أيضاً أن عملية ضرب المصفوفة B بالمصفوفة السلمية λ، والتي قيمة كل عنصر قطري فيها يساوي 2 ، هي عملية تكافئ عملية ضرب المصفوفة B المعطاة بالعدد 2 :

$$2 \cdot B = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

بهذا، يمكن القول أن المصفوفة السلمية والتي قيمة كل عنصر قطري فيها α مثلاً لها عدد حقيقي يقابلها في مجموعة الأعداد الحقيقية وهو العدد α. كما يمكن القول أيضاً أن كل عدد حقيقي كالعدد α يقابله بلغة المصفوفات المصفوفة السلمية αI. ويظهر ذلك جلياً من خلال المثال التالي:

مثـــال 1:

ليكن لديك كثير الحدود التالي: $f(x) = 3x^2 - 2x + 7$

ولتكن لديك المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

والمطلوب إيجاد $f(A)$.

من أجل إيجاد $f(A)$ يلزم إحلال A محل كل x في $f(x)$. ونصبح أمام مـــا يسمى بكثير الحدود للمصفوفة A : $f(A) = 3A^2 - 2A + 7$ ، الذي لا يسمح لنـــا بإجراء عمليات الجمع بسبب عدم إمكانية جمع عدد إلى مصفوفة. ولكن بما أن العـــدد الحقيقي 7 يقابل بالمصفوفة $7I$. يكون لدينا:

$$\mathrm{f(A)} = 3\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A} + 7\mathrm{I}$$

$$\mathrm{f(A)} = 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = \begin{bmatrix} 18 & 4 \\ 8 & 34 \end{bmatrix}$$

§-2- المعينات

كما نعلم، يربط بكل مصفوفة مربعة A عـــدد a خـــاص بهـــا يـــسمى معـــين المصفوفة A ، ويكتب $|A|$ أو $\det A$. نذكر فيما يلي بأهم طرق حساب قيمة المعين وبأهم الخصائص التي تساعدنا في التعامل مع المعينات ذات المراتب العليا.

1-2 حساب قيمة المعين :

إذا كان المعين لمصفوفة العنصر الوحيد فقيمة المعين تساوي لقيمة ذلك العنصر الوحيد.

مثـــال 2:

$$|A| = |-3| = -3$$

إذا كان المعين لمصفوفة من المرتبة الثانية ، فتحسب قيمته كالتالي:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{vmatrix} = \mathrm{ad} - \mathrm{cb}$$

مثـــال 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(3) - 2(4) = -5$$

إذا كان المعين لمصفوفة من المرتبة الثالثة أو أكثر فهناك العديد مــن الطــرق لحساب قيمته. نعرض منها هنا ، وعلى سبيل التذكير، طريقة (**Sarrus**) الخاصــة فقط بمعينات المرتبة الثالثة والطريقة العامة التي يطلق عليها أحياناً طريقــة الفــك أو أيضاً طريقة النشر.

الطريقة الخاصة بمعينات المرتبة الثالثة:

فيها يضاف العمود الأول والعمود الثاني على الترتيب إلى يمين المعين المعطى، كما يلي:

$$0+1+8=9=S$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

$$6-2+0=4=T$$

ثم ننشئ ثلاثة أسهم قطرية هابطة وثلاثة أسهم قطرية صاعدة كما فــي الــشكل أعلاه . نضرب العناصر الواقعة على كل سهم ببعضها ونجمع نتائج الضرب بالطريقة المبينة في الشكل ونحصل على قيمة المعين $|A|$ بالتالي:

$$|A| = T - S$$

$$|A| = 4 - 9 = -5$$

الطريقة العامة: طريقة النشر.

وهي طريقة تصلح لحساب قيم معينات المرتبة الثالثة فأكثر. في هذه الطريقة يتم حساب قيمة المعين المعطى كمايلي :

- أولا بنشره بالنسبة لأحد أسطره فقط أو أحد أعمدته فقط وذلك بأخذ قيمة كل عنصر نوذ النشر بالنسبة لسطره أو عموده مسبوقاً بإشارة جبرية محسوبة من $(-1)^{i+j}$ وضربه بالصغير (المعين) المتبقي بعد حذف سطر وعمود العنصر المعتبر.
- وثانياً بجمع الحدود الناتجة عن أولاً.

مثـــال 4:

احسب قيمة المعين السابق المعطى وذلك بالطريقة العامة.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$|A| = (-1)^2(1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^3(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^6(0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5 - 10 + 0 = -5$$

نلاحظ هنا أن عملية النشر بالنسبة للسطر أو العمود الذي يحوي أكبر عدد من العناصر الصفرية يسهل عملية الحساب.

2-2 خصائص المعينات:

نعرض هنا أهم خصائص المعينات التي تساعدنا كثيراً في إجراء العمليات الحسابية عليها وإيجاد قيمها بسرعة، ولنتذكر دائماً أن الحديث عن معين مصفوفة يعني أن المصفوفة هي حتماً مصفوفة مربعة .

1- إذا كانت جميع عناصر أحد الأسطر أو الأعمدة أصفاراً فإن قيمة المعين تساوي الصفر .

2- إذا نتج $|B|$ عن $|A|$ بعملية تبديل بين موقعي سطرين (أو عمودين) فإن :

$$|A| = -|B|$$

3- إذا نتج $|B|$ عن $|A|$ بضرب أحد أسطر (أو أحد أعمدة) $|A|$ بعدد k ثابت فإن:

$$|B| = k\ |A|$$

4- إذا كانت A مصفوفة قطريه أو مثلثية فقيمه معينها تساوي إلى ناتج ضرب عناصر القطر الرئيسي ببعضها البعض . وينتج عن ذلك أن:

معين المصفوفة الواحدة : $|I_n| = 1$

وإذا كانت المصفوفة A سلمية عناصر القطر الرئيسي فيها a فيكون:

$|A| = a^n$ ، حيث n مرتبة المصفوفة السلمية .

5- إذا نتج المعين $|B|$ عن المعين $|A|$ بضرب أحد أسطر $|A|$ (أو أحد أعمدته) بعدد ثابت k وأضفنا الناتج إلى سطر آخر (عمود آخر) فقيمة المعين لا تتغير :

$$|A| = |B|$$

مثلاً العملية التالية: $kC_3 + C_5 \rightarrow C_5$

تعني ضرب السطر الثالث بالعدد k وإضافة الناتج على الترتيب إلى السطر الخامس ووضع الناتج الأخير بدلاً عن عناصر السطر الخامس السابق . أما السطر الثالث فتبقى عناصره كما كانت عليه قبل الضرب بـ k. هذه الخاصة تفيد في إظهار أصفار كثيرة يسهل معها حساب قيمة المعين المعطى.

مثال 5:

أوجد قيمة معين المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل: نلاحظ أن ثلاثة عناصر من السطر الأول تنتج عن ضرب عناصر السطر الثاني بـ 2 . إذن، من أجل إظهار الأصفار في السطر الأول يمكن ضرب عناصر السطر الثاني C_2 بـ -2 وإضافة الناتج إلى عناصر السطر الأول C_1 ووضع الناتج الأخير في C_1 علماً أن هذه العملية لا تغير قيمة $|A|$. فيكون بتطبيق:

$$-2C_2 + C_1 \rightarrow C_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -13 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ولحساب قيمة $|A|$ نستخدم النشر بالنسبة للسطر الذي يحوي أكبر عدد من الأصفار وهو السطر الأول:

$$|A| = -(-13)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-13)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -130$$

أما الخاصتان التاليتان فتنتجان في الحقيقة عن الخاصة الخامسة.

1- إذا تساوت عناصر سطرين ما (أو عمودين ما) في A فإن $|A| = 0$.

2- إذا كان في A عناصر أحد الأسطر (الأعمدة) من مضاعفات سطر آخر (عمود آخر) فإن $|A| = 0$.

§-3- عمليات التحويل البسيطة ومعكوس المصفوفة

1-3 عمليات التحويل البسيطة على المصفوفات:

يطلق على العمليات التالية عمليات التحويل البسيطة:

أ- ضرب كل عنصر من عناصر السطر i بثابت k حيث $k \neq 0$. سنرمز لهذه العملية بالرمز $C_i(k)$.

ب- التبديل بين موضعي السطرين i و j. نرمز لهذه العملية بالرمز C_{ij} .

ح- ضرب عناصر السطر j بـ k مرة وإضافة العناصر الناتجة إلى عناصر السطر i وإحلال الناتج محل عناصر السطر i . نرمز لهذه العملية بالرمز $C_{ij}(k)$.

كنا قد ذكرنا هذه العمليات أعلاه عندما تحدثنا عن خصائص المعينات، حيث رأينا أن العملية الأولى تضاعف من قيمة معين المصفوفة k مرة، وأن العملية الثانية تغير فقط الإشارة الجبرية لقيمة المعين، أما العملية الثالثة فلا تغير شيئاً في قيمته.

مثـــال 6:

طبّق على المصفوفة A أدناه:

I - $C_{21}(-2)$ و C_{23} على ناتج الطلب الأول، إذا أعطيت المصفوفة كما يلي:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

الحـل: 1- العملية الأولى $C_{21}(-2)$ تعني ضرب السطر الأول بـــ 2- وإضـــافة الناتج للسطر الثاني وإحلال الناتج الأخير محل عناصر السطر الثـاني وتكـون لـديناً المصفوفة الجديدة B.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

2- العملية C_{23} تعني إحلال السطر الثاني محل الثالث وإحلال السطر الثالـث محـل الثاني ونحصل على المصفوفة :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2-3 تعاريف وتسميات أخرى في المصفوفات

1- المصفوفة النظامية والمصفوفة الشاذة: نقول عن مصفوفة مربعة A أنها نظاميـه إذا كانت قيمة معينها لا تساوي الصفر. بخلاف ذلك تكون المصفوفة شاذة.

2- منقول مصفوفة: إن منقول مصفوفة A من المرتبة $m \cdot n$ هو مصفوفة من المرتبـة $m \cdot n$، نحصل عليها بتبديل الأسطر بالأعمدة (الأعمدة بالأسطر)، فنضع الـسطر الأول عموداً أولاً ونضع السطر الثاني عموداً ثانياً وهكذا الخ. نرمـز لمنقـول A بالرمز A^t ونلاحظ أن: $|A| = |A^t|$

1- صغير عنصر في مصفوفة مربعة: صغير عنصر ما a_{ij} في مصفوفة مربعة هـو بالتعريف المعين الناتج بعد حذف السطر i والعمود j المتعلقين بهذا العنصر. نرمز لهذا الصغير بالرمز Δ_{ij}.

2- المتمم الجبري للعنصر a_{ij} في معين A.

نرمز له بالرمز A_{ij} ويعرف بالعلاقة : $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

3- صغار مصفوفة: لتكن لدينا مصفوفة A من المرتبة $m \cdot n$، لننشئ مستقيمين أفقيين يمران من سطرين ما ومستقيمين يمران على طول عمودين ما منها، نـشكل مـن العناصر الواقعة على نقاط تقاطع المستقيمات، وبنفس ترتيب وقوعها، معينا نسميه

صغير المصفوفة A وهو في مثالنا هنا من المرتبة الثانية. ولو أخـذنا عناصـر تقاطع ثلاثة أسطر مع ثلاثة أعمدة لحصلنا على صغير لـ A من المرتبة الثالثـة، وهكذا الخ، فإذا كان $m \neq n$ فإن أكبر مرتبـة لـصغير لا يمكـن أن تتجـاوز أصغرهما.

4- رتبة مصفوفة A: يرمز لها بالرمز $r(A)$ وهي بالتعريف أعلى مرتبـة لـصغير واحد على الأقل تختلف قيمته عن الصفر. فإذا قلنا أن رتبة مصفوفة معطـاة هـي الثانية $r(A) = 2$

فنفهم من ذلك أن جميع الصغار الممكنة التشكيل من المرتبة الثالثة فأعلى هـي ذات قيم صفرية وأن هناك معيناً واحداً على الأقل من المرتبة الثانية قيمته لا تـساوي الصفر.

5- المصفوفات المتكافئة: نقول عن مصفوفتين A و B أنهمـا متكافئتـان إذا نتجـت إحداهما عن الأخرى بتطبيق واحدة أو أكثر من عمليات التحويل البسيطة ونكتـب $A \sim B$. ونشير هنا أن للمصفوفات المتكافئة نفس الرتبة r.

6- المصفوفة المرافقة (المساعدة): لتكن A مصفوفة مربعة. يرمز للمصفوفة المرافقـة لـ A بالرمز $\Gamma(A)$ أو أحياناً $\tilde{A}$ ويتم الحصول عليها بخطوتين:

أولاً: إحلال المتمم الجبري للعنصر a_{ij} محل العنصر a_{ij} نفسه وذلك من أجل جميـع العناصر a_{ij}.

ثانياً: أخذ منقول مصفوفة المتممات الجبرية.

مع ملاحظة إمكانية تطبيق الخطوة الثانية كخطـوة أولـى ، أي يمكـن أخـذ منقول A أولاً ومن ثم إحلال المتممات الجبرية لعناصر المنقول محل عناصر المنقول.

المصفوفة المرافقة في الحقيقة، ترافق أو تساعد في الحصول على مـا يـسمى معكوس مصفوفة نظامية وتتميز المرافقة بخصائص عديدة من أهمها أن:

$$\Gamma(A).A = A \cdot \Gamma(A) = |A|\, I$$

أي أن عملية الضرب بين المصفوفة ومرافقتها هي عمليـة تبديليـة وناتجهـا مصفوفة سلمية مرتبتها من مرتبة A ، كما أن عناصر القطـر الرئيـسي متـساوية

ومساوية لقيمة معين المصفوفة A . أما إذا لم تكن A نظامية فيكون نـاتج الـضرب مصفوفة صفرية .

3-3 مقلوب مصفوفة:

1 – تعريف:

إذا كانت A مصفوفة مربعة نظامية فإن مقلوبها موجود ووحيد وهو مـصفوفة مربعة يرمز لها بالرمز A^{-1} ويكون: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

أي أن عملية الضرب بين مصفوفة نظامية ومقلوبها (معكوسـها) هـي عمليـة تبديلية وناتج الضرب هو حتماً مصفوفة واحدية.

2 – إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية:

هناك العديد من الطرق التي تسمح لنا بإيجاد مقلوب مصفوفة، إلا أننا سنقتـصر هنا على التذكير بطريقتين. الأولى يمكن أن تستخدم في حالة كون مرتبـة المـصفوفة غير كبيرة والثانية تستخدم عادة من أجل مراتب عالية.

أ- المقلوب عن طريق المرافقة:

إذا كانت A مصفوفة نظامية فمقلوبها موجود ووحيد ويعطى بالعلاقة:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$$

وعادة نحسب قيمة $|A|$ قبل البدء بإيجاد $\Gamma(A)$ وذلك للتأكـد أولاً مـن وجـود A^{-1} . فإذا كان $|A| = 0$ فمقلوب A غير موجود ولا داعي إذن للبحث عنه.

ب- المقلوب بطريقة جوردان :

تعتمد هذه الطريقة على استخدام عمليات التحويلات البسيطة على المـصفوفات. إذا كانت A مصفوفة نظامية نشكل المصفوفة $[A\,|\,I]$. أي نضيف مـصفوفة واحديـة مرتبتها من مرتبة A إلى يمين عناصر A، ثم باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر فقط ، نحول المصفوفة A في $[A\,|\,I]$ إلى مصفوفة واحدية ، فتتحول عنـدها المصفوفة I إلى A^{-1} . أي:

$$[A\,|\,I] \xrightarrow{\text{الأسطر}} [I\,|\,A^{-1}]$$

مثـــال 7:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

أوجد A^{-1} ، أولاً عن طريق المرافقة وثانيا بطريقة جوردان:

الحــل: أولاً: المقلوب عن طريق المرافقة:

لدينا القانون $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\Gamma(A)$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&0&1\\1&2&3\end{vmatrix}=4\neq 0$$

إذن المصفوفة A نظامية ولها مقلوب موجود. نوجد المنقول A^t والمرافقة $\Gamma(A)$.

$$\Gamma(A)=\begin{bmatrix}-2&-4&2\\4&2&-2\\-2&0&2\end{bmatrix} \quad و \quad A^t=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&2\\1&1&3\end{bmatrix}$$

وبتطبيق القانون نجد A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-2&-4&2\\4&2&-2\\-2&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/2&-1&1/2\\1&1/2&-1/2\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$$

ثانياً: المقلوب بطريقة جوردان:

لنبحث عن A^{-1} بتحويل $[A\,|\,I]$ إلى $[I\,|\,A^{-1}]$ باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر.

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]$$

للوصول إلى النتيجة بأبسط وأسرع أسلوب يفضل التفكير بتحويل أعمدة A عموداً عمودا وعلى الترتيب بحيث تصبح بالشكل المطلوب أي شكل المصفوفة I . فنبدأ بالعمود الأول الذي يتطلب لوضعه بالشكل المطلوب تطبيق عمليتي التحويل $C_{21}(1)$ و $C_{31}(-1)$. ثم ننطلق لوضع العمود الثاني بشكله المطلوب وهكذا.

$$[A\,|\,I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\1&2&3&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_{31}(-1)]{C_{21}(1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&2&2&1&1&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_{2}(0.5)]{C_{21}(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&0&-1&0\\0&1&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[C_{23}(-0.5)\,,\,C_{3}(0.5)]{C_{13}(0.5)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\0&1&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{array}\right]=\left[I\,\middle|\,A^{-1}\right]$$

و منه:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

§5 – المعادلات الخطية المتعددة المتغيرات:

5-1 الشكل المصفوفي لجملة n معادلة بـ n متغير

إن الشكل العام لجملة n معادلة خطية بـ n متغير هو:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\dots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\dots+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(1)$$

حيث أن الأعداد a_{ij} تسمى بمعاملات الجملة و x_j هي متغيرات الجملة و b_i تمثل ثوابت الجملة وذلك من أجل $i=1,2,\dots,n$ و $j=1,2,\dots,n$.

تسمى المصفوفة A :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بمصفوفة معاملات الجملة. وتسمى مصفوفة العمود X :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

بمصفوفة عمود المتغيرات. وتسمى مصفوفة العمودB:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix},$$

بمصفوفة عمود ثوابت الجملة. هذا ويمكن كتابة الجملة (I) بالشكل المصفوفي:

$$A \cdot X = B \qquad (II)$$

حيث يسمى هذا الشكل الأخير أيضاً بالمعادلة الشعاعية (المصفوفية).

2-5 حل جملة n معادلة خطية بـ n متغير.

إذا أعطيت جملة المعادلات (I) و كانت A مصفوفة المعاملات نظامية، أي $|A| \neq 0$ فيكون لجملة المعادلات المذكورة حل وحيد. يمكن الحصول على هذا الحل بطرق عديدة. نذكر منها هنا ثلاث فقط.

آ - طريقة الشكل المصفوفي لقاعدة كرامر

بالعودة للشكل المصفوفي لجملة المعادلات السابقة:

$$A \cdot X = B \qquad (II)$$

نجد أن حل الجملة يعني تحديد قيم المتغيرات x_i حيث $i = 1,2,\dots,n$ أي تحديد قيم عناصر المصفوفة X . لإيجاد قيم عناصر X يمكن ضرب طرفي العلاقة (II) ومن اليسار بـ A^{-1} ، فيكون:

$$X = A^{-1}B$$

و نظراً لأن عناصر المصفوفتين A و B عناصر معطاة، يمكن عندها إيجاد A^{-1} مقلوب A النظامية والحصول على X بإجراء عملية الضرب $A^{-1}B$. لنلاحظ أخيرا أنه لايمكن استخدام هذه الطريقة لحل الجملة (I) إذا كان $|A| = 0$، وذلك بسبب عدم وجود A^{-1} .

ب – طريقة قاعدة كرامر:

مفادها أن لجملة المعادلات السابقة (I) حلاً وحيداً إذا كان $|A| \neq 0$، ويعطى هذا الحل كما يلي:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \cdots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

حيث:

- $\Delta = |A|$ ويسمى هنا بالمعين الأساسي.
- Δ_i هو معين المتغير i والناتج عن تبديل العمود i في المعين الأساسي بعمود ثوابت الجملة وذلك من أجل $i = 1,2,...,n$.

ح– طريقة المصفوفة الموسعة:

مفادها توسيع مصفوفة المعاملات بعمود الثوابت B الذي نضعه إلى يمين العمود الأخير فتتشكل المصفوفة الموسعة $[A|B]$. باستخدام عمليات التحويل الأولية على الأسطر فقط يمكن وضع المصفوفة الموسعة على الشكل:

$$[I|C]$$

وهذا عملياً يكافئ وضع الجملة (I) على الشكل:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= C_1 \\ x_2 \qquad &= C_2 \\ \cdots \\ x_n &= C_n \end{aligned}$$

حيث يظهر الحل أن:

$$x_1 = C_1 \ , \ x_2 = C_2 \ , \ \cdots, \ x_n = C_n$$

مثـال 8: أوجد حل جملة المعادلات التالية:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$

وذلك: 1- بطريقة الشكل المصفوفي لقاعدة كرامر (معادلة المصفوفات).

2- بطريقة المعينات (قاعدة كرامر).

3- بطريقة المصفوفة الموسعة.

الحـــل: 1- الحل باستخدام معادلة المصفوفات

لدينا:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

لنحسب A^{-1} و مـــن ثـــم نجـــد X. حيـــث $X = A^{-1}B$ وحيـــث $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)$

فنجد:

$$\Gamma(A) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad |A| = 1$$

وأخيرا: $X = \frac{1}{|A|}\Gamma(A)B$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

إذن: $x_1 = -8$ ، $x_2 = -4$ ، $x_3 = 7$

2- الحل استخدام قاعدة كرامر (المعينات):

نحسب قيمة المعين الأساسي فنجد : $\Delta = |A| = 1$

أما من أجل Δ_i معينات المتغيرات $i = 1,2,3$، فإننا نحصل عليهـــا باســـتبدال العمود i في المعين الأساسي بعمود ثوابت الجملة. ويكون:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \ ، \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \ ، \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

وبذلك نحصل على الحل:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{1} = -8 \ ، \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-4}{1} = -4 \ ، \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{1} = 7$$

3 – لحل باستخدام المصفوفة الموسعة: نضع عمود الثوابت إلى جانب مصفوفة المعاملات فنحصل على المصفوفة الموسعة. بتطبيق العمليات المرافقة للأسهم نجد:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{21}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{21}(-2)\,,\,C_{31}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{12}(1)\,,\,C_{32}(-2);\,C_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{C_{13}(-1)\,,\,C_{23}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

ونجد من المصفوفة الموسعة الأخيرة:

$$x_1 = -8 \quad ، \quad x_2 = -4 \quad ، \quad x_3 = 7$$

3-5 حلول جمل أخرى من المعادلات:

يمكن استخدام طريقتي كرامر السابقتين فقط بحاله كون $m = n$ وشرط كون $|A| \neq 0$ حيث سيكون للجملة (I) حل وحيد. والحقيقة، أنه إذا أعطينا جملة m معادلة خطية فيها n متغير والتي تظهر بالشكل العام:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

سنكون عند محاولة حلنا للجملة أمام إحدى ثلاث حالات:

1- للجملة حل وحيد.

2- لا حل للجملة.

3- للجملة ما لا نهاية من الحلول.

نعرض هنا ما يسمى بطريقة الاختزال المحوري، وهي تمثل إحدى أهم الطرق العملية في اختبار وجود حل لجملة المعادلات (III) ووضع الجملة في صورة تسمح بإيجاد الحل المشترك بسرعة وسهولة نسبية.

باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر يمكن وضع الجملة (III) على الشكل المختزل التالي:

$$
\begin{aligned}
(1)x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \cdots + c_{1r}x_r + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\
(1)x_2 + c_2x_3 + \cdots + c_{2r}x_r + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\
(1)x_3 + \cdots + c_{3r}x_r + \cdots + c_{3n}x_n &= d_3 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
(1)x_r + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r \qquad (IV) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
0 &= d_{r+1} \\
0 &= d_{r+2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
0 &= d_m
\end{aligned}
$$

حيث $r \leq m$

مع ملاحظة أن تطبيق عمليات التحويلات البسيطة على المصفوفات لا تغير من حل الجملة الناتجة عن الاختزال ، فإن حل الجملة (IV) هو نفسه حل الجملة (III) .

وهنا نورد الملاحظات التالية:

1– إذا كان على الأقل لأحد الثوابت $d_{r+1},...,d_m$ قيمة مختلفة عن الصفر فليس لجملة المعادلات المعطاة (III) أو (IV) حل.

2– إذا كانت جميع الثوابت $d_{r+1},...,d_m$ مساوية للصفر تكون جملة المعادلات المعطاة قابلة للحل. ولدينا حالتان:

- إذا كان في الجملة (IV) عدد المعادلات غير الصفرية يساوي لعدد المتغيرات فلجملة المعادلات حل وحيد نجده بالحل فقط بالنسبة للمتغيرات $x_1, x_2, ..., x_r$ من المتغيرات المتبقية بعد الاختزال.
- إذا كان في الجملة (IV) عدد المعادلات غير الصفرية أقل من عدد المتغيرات، فللجملة لا نهاية من الحلول. لحل الجملة في هذه الحالة نبحث عما يسمى بالحل العام أولاً، فنعطي قيماً عامة رمزية لـ $x_{r+1}, ..., x_n$ متغير ونحل بالنسبة للمتغيرات المتبقية. ويمكن الحصول على ما لا نهاية من الحلول الخاصة للجملة بتعيين عددا لا نهائيا من القيم للقيم الرمزية في الحل العام.

مثال 9:

أوجد حل جملة المعادلات:

$$\begin{aligned} (1)\quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ (2)\quad & 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ (3)\quad & 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{aligned}$$

الحل : نشير إلى أن الطلب في المثال لم يجبر الطالب على اتباع طريقة معينة لحل الجملة. فإذا بدأنا لحلها مثلاً بطريقة كرامر، سنجد أن معين المعاملات $|A| = 0$ ولن نستطيع تطبيق قاعدة كرامر لحل الجملة. في هذه الحالة نلجأ إلى طريقة الاختزال ونضع الجملة المعطاة على الشكل (IV) باستخدام عمليات التحويل البسيطة.

من أجل وضع العمود الأول بالشكل المناسب، نطبق $c_{21}(-2)$ و $c_{31}(-4)$ فينتج:

$$\begin{aligned} (4)\quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ (5)\quad & -5x_2 + 10x_3 = -10 \\ (6)\quad & -5x_2 + 10x_3 = -10 \end{aligned}$$

من أجل وضع العمود الثاني بشكله المناسب ، نطبق $c_{32}(-1)$ و $c_2(-\frac{1}{5})$ فينتج:

$$\begin{aligned} (7)\quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ (8)\quad & x_2 - 2x_3 = 2 \\ (9)\quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

إذن الجملة المعطاة قابلة للحل ولها لا نهاية من الحلول لأن عدد المتغيرات فيها $n=3$ أكبر من عدد المعادلات فيها $m=2$ للحصول على الحل العام، نعطي للمتغيرات الزائدة (الإضافية) وعددها $n-m=3-2=1$ في مثالنا، وليكن المتغير x_3 ، قيمة عامة $x_3 = a$ فيكون من $x_2 = 2a+2 \quad (8)$

وبالتعويض في (7) يكون: $x_1 = -a+2$

والحل العام من أجل $x_3 = a$ هو:

$$(x_1, x_2, x_3) = [(-a+2), (2a+2), (a)]$$

من أجل $\forall a : a \in R$ نجد أن هناك لا نهاية من الحلول الخاصة . فمثلاً من أجل الحالة الخاصة $x_3 = a = 2$ نجد الحل الخاص:

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 6, 2)$$

إذا كنا أمام جملة معادلات متجانسة ، وهي الجملة التي تكون فيها جميع الثوابت مساوية للصفر:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right. \quad (V)$$

نجد أنها دائماً قابلة للحل، فلها على الأقل الحل الصفري $(x_1, x_2, ..., x_n) = (0, 0, ..., 0)$ لمعرفة إن كان لها حلول أخرى (لا نهاية من الحلول) فيمكن اللجوء إلى طريقة الاختزال السابقة.

أخيراً، لنلاحظ أننا إذا كنا أمام جملة خطية متجانسة وكان فيها $m=n$ أي: عدد المعادلات يساوي لعدد المتغيرات وكان $|A| \neq 0$ فيكون لجملة المعادلات المذكورة هنا حل وحيد، هو حتماً الحل الصفري . أما إذا كان $|A| = 0$ فلها لا نهاية من الحلول، نظراً لأن حالة عدم وجود حل غير واردة في جمل المعادلات المتجانسة.

4-1 نظرية القيمة الوسطى:

إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً ومستمراً وقابلاً للمكاملة في المجال $[a, b]$ ولتكن x_0 نقطة من هذا المجال، فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)F(x_0)$$

أو بشكل مكافئ:

$$F(x_0) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x).dx$$

نسمي $F(x_0)$ بالقيمة المتوسطة للتابع $f(x)$ في المجال $[a,b]$. تستخدم القيمة المتوسطة بشكل واسع في المسائل الاقتصادية وبالأخص تلك التي تتعلق بإنتاجية العمل المتوسطة والإنتاجية الوسطى للمحركات الكهربائية.

مثـــال:

إذا كان حجم التكاليف المتغيرة للإنتاج يتحدد بالعلاقة التالية:

$$VC = 3x^2 - 8x - 10$$

حيث x عدد الوحدات المنتجة والمطلوب :

أوجد التكاليف المتوسطة AC للإنتاج إذا علمت أن حجم الإنتاج يتحدد بالمجـــال [2,6] الدال على عدد الوحدات.

الحل:

يتم حساب التكاليف المتوسطة للإنتاج اعتماداً على نظريـــة القيمـــة الوســـطى بالعلاقة التالية:

$$AC = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x).dx = \frac{1}{6-2}\int_2^6 (3x^2 - 8x - 10).dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^3 - 4x^2 - 10x\right]_2^6$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[(6)^3 - 4(6)^2 - 10(6)\right] - \left[(2)^3 - 4(2)^2 - 10(2)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left[216 - 144 - 60 - 8 + 16 + 20\right] = \frac{40}{4} = 10$$

فإذا أردنا معرفة عدد الوحدات التي تقابل التكـــاليف المتوســـطة $AC = F(x_0)$ فإننا نعوض في تابع التكاليف المتغيرة قيمة VC بـــ ١٠ فنجد:

$$3x_0^2 - 8x_0 - 10 = 10 \quad \Rightarrow \quad 3x_0^2 - 8x_0 - 20 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـــ x_0 ، بإيجاد جذورها نجد قيمتين:

الأولى $(-1,6)$ وهي قيمة مرفوضة (عدد الوحدات موجب حتماً)، أما القيمـــة الثانية فهي $(4,2)$ وهو عدد الوحدات الذي يقابل التكاليف المتوسطة .

§-2- التكامل المتعدد

سبق وأن درسنا مسألة إيجاد مساحة المنطقة المحددة بتابع أو أكثر ذات متغيـــر واحد فمثلاً وجدنا أن التكامل المحدد للتابع: $y = f(x) \geq 0$

من $x = a$ إلى $x = b$ يمكن استخدامه للحصول على مساحة المنطقة المحـــددة بالمنحني $y = f(x)$ والمحور OX والخطين $x = a$ و $x = b$. وقد يبـــدو أن إيجـــاد المنطقة تحت سطح ما ليس سوى تعميم لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحن ما ، لإيجاد حجم المنطقة تحت سطح ما يجب أن نكامل مرتين ولهذا السبب تسمى هـــذه العمليـــة بالتكامل المضاعف (الثنائي) أو التكامل المتعدد (Multiple Integration) .

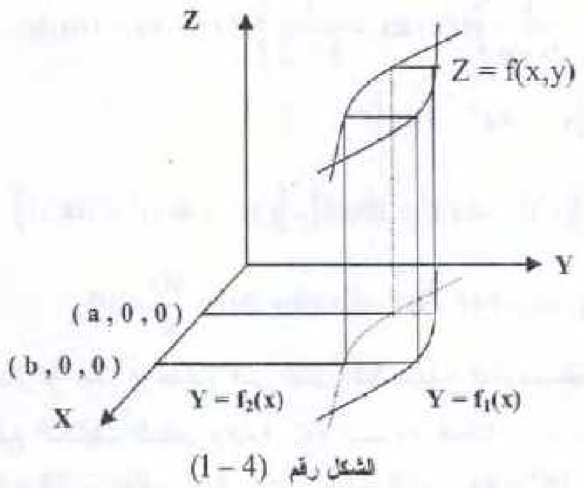
لنفرض أن لدينا المنطقة A في المستوي XOY والمحدودة بالتابعين:

$$y = f_2(x) \qquad y = f_1(x)$$

والخطين $x = a$ ، $x = b$ ، ولنفرض أن لدينا سطحاً لتابع ذي متغيرين: $z = f(x,y)$

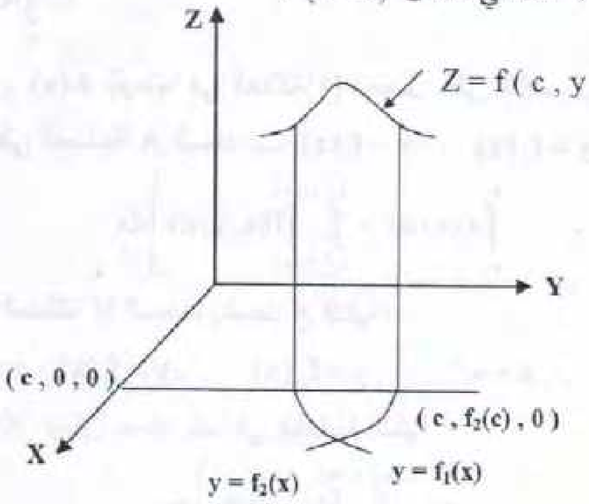
وأن هذا السطح يقع فوق المنطقة كما في الشكل $(4-1)$ وأننا نرغب في إيجاد الحجم المحصور بين السطح $z = f(x,y)$ والمستوي XOY و المحصور بين:

$$x = a \ , \ x = b \ ، \ y = f_1(x) \ ، \ y = f_2(x)$$



الشكل رقم $(4-1)$

لإيجاد الحجم تحت السطح $z = f(x,y)$ نأخذ المستوي $x = c$ بحيث يقطع المنطقة الفراغية V كما في الشكل $(2-4)$.



الشكل رقم $(2-4)$

هذا المستوي ما هو إلا شريحة، وهذه المنطقة محددة بالتابع $z = f(c,y)$ (الناتج عن تقاطع السطح $z = f(x,y)$ والمستوي $x = c$) والمستوي XOY والقيمتان $f_1(c)$ و $f_2(c)$ ويمكن إيجاد مساحة هذه المنطقة باستخدام التكامل المحدد :

$$\int_{f_1(c)}^{f_2(c)} f(c,y)\,dy$$

وبما أن $a \le c \le b$ فإنه يمكن إجراء التكامل لكل قيمة ممكنة لـ c وبجمع هذه المساحات نحصل على الحجم المطلوب. وهو حجم المنطقة الواقعة تحت السطح $z = f(x,y)$ والمستوي XOY المحصورة بين:

$x = a$ و $x = b$ و $y = f_1(x)$ و $y = f_2(x)$.

إذا فرضنا أن $A(x)$ مساحة المقطع الذي نحصل عليه لكل مستوي $x = c$ والذي يمر بالمجسم نحصل على العلاقة:

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (1)$$

وبجمع مساحات هذا المقطع من $x = a$ إلى $x = b$ نحـصل علـى التكامـل المحدد $\int_a^b A(x)\,dx$.

بتعويض $A(x)$ بقيمتها في العلاقة(١) نحصل على التكامـل الثنـائي للتـابع $z = f(x,y)$ على المساحة A المحدد بـ $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$.

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

إن حجم المنطقة V المحددة بالسطوح التالية:

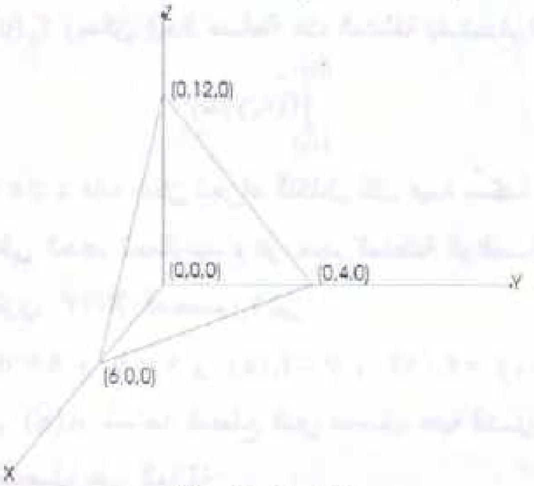
$z = f(x,y)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$ ، $x = b$

والمستوي XOY يمكن حسابه كما في المعادلة التالية :

$$V = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

مثـال:

أوجد حجم المجسم تحت المستوي: $z = 12 - 2x - 3y$



الشكل رقم $(3-4)$

المحدود بالسطوح $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$

الحـل: نوجد نقاط تقاطع المستوي $z = 12 - 2x - 3y$ مع المحاور:

$$y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow z=12$$
$$z=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=4$$
$$z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=6$$

من الشكل $(4-3)$ واضح أن حدود x هي من $x=0$ وحتى $x=6$ ، أما حدود y فهي من $y=0$ وحتى المستقيم $y=\frac{1}{3}(12-2x)$. إذاً:

$$V=\int_0^6\int_0^{\frac{1}{3}(12-2x)}(12-2x-3y)dy.dx=\int_0^6\left[12y-2xy-\frac{3}{2}y^2\right]_0^{\frac{1}{3}(12-2x)}dx$$
$$=\int_0^6\left[12\left(\frac{12-2x}{3}\right)-2x\left(\frac{12-2x}{3}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{12-2x}{3}\right)^2\right]dx$$
$$=\int_0^6\left[48-8x-8x+\frac{4}{3}x^2-24+8x-\frac{2}{3}x^2\right]dx$$
$$=\int_0^6\left[\frac{2}{3}x^2-8x+24\right]dx=\int_0^6\frac{2}{3}\left(x^2-12x+36\right)dx$$
$$=\int_0^6\frac{2}{3}(x-6)^2dx=\frac{2}{9}\left[(x-6)^3\right]_0^6=0-\frac{2}{9}(-6)^3$$
$$=-\frac{2}{9}(-216)=\frac{432}{9}=48$$

28- إذا كانت إنتاجية العامل في مؤسسة إنتاجية تعطى بالعلاقة :

$$y=-3t^2+18t$$

حيث t ترتيب ساعة عمل العامل بدأ من لحظة وقوفه وراء آلته والمطلوب :

- حدد حجم الإنتاج الذي يمكن أن يقدمه العامل خلال الساعات لخمسة الأولى.
- احسب الإنتاجية المتوسطة لهذا العامل علماً أن يوم العمل يستمر ســت ســاعات متواصلة.

29- أوجد قيمة كل من التكاملات الثنائية التالية :

(1) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy$

(2) $\int_{0}^{2}\int_{y}^{2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

(3) $\int_{1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$

(4) $\int_{2}^{4}\int_{1}^{x^2} \frac{x}{y^2}\,dy\,dx$

30- أوجد حجم المجسم تحت المستوي $z = 16 - 4y - 12x$

والمحدد بالتوابع التالية : $x = 0$ $y = x^2$

31- أوجد حجم المجسم المحدد من الأعلى بالسطح $z = 12 - y - x$

ومن الأسفل بالمستطيل في المستوي XOY والخطوط :

$x = 3\ ,\ x = 6\ ,\ y = 5\ ,\ y = 9$