$$\int_{x_0}^{x} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} a_{11}dx & \int_{x_0}^{x} a_{12}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{1n}dx \\ \int_{x_0}^{x} a_{21}dx & \int_{x_0}^{x} a_{22}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{2n}dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_0}^{x} a_{n1}dx & \int_{x_0}^{x} a_{n2}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{nn}dx \end{bmatrix} \qquad (76-2)$$

مثال:

احسب التكامل $\int_{1}^{x} Adx$ إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ e^x & x+2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\int_{1}^{x} Adx = \begin{bmatrix} \int_{1}^{x} x^3dx & \int_{1}^{x} 3dx \\ \int_{1}^{x} e^x dx & \int_{1}^{x} (x+2)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x^4-1}{4} & 3(x-1) \\ e^x - e & \dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$$

<u>تمارين محلولة</u>

1- إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد A^2, A^3.

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \;,\; A^3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

2- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\3&1&2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hdashline 3&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

3- برهن أن:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}$$

معدومة القوى من الدرجة 3.

الحل:

$$A^2=\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}0&0&0\\3&3&9\\-1&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3\\5&2&6\\-2&-1&-3\end{bmatrix}=0$$

وهذا يعني أن A معدومة القوى من الدرجة 3.

4- أثبت أنه إذا كان $AB=A$ و $BA=B$ فإن A و B تكونان متساويتي القوى.

الإثبات:

$ABA=A(BA)=AB=A$ و $ABA=(AB)A=A\cdot A=A^2$

وبالتالي $A^2=A$ ، أي أن A متساوية القوى.

بشكل مشابه نثبت أن B متساوية القوى (نستخدم حاصل الجداء BAB).

5- أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -4 & 0 & 5\end{bmatrix}\qquad 2)\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 8\end{bmatrix}\qquad 3)\quad C=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

الحل:

إن رتبة المصفوفة A تساوي 2 لأن $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 0\end{vmatrix}\neq 0$ ولا يوجد صغائر من الدرجة الثالثة.

ورتبة المصفوفة B تساوي 2 لأن $|B|=0$ و $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}\neq 0$

أما رتبة المصفوفة C تساوي 1 لأن $|C|=0$ و الصغائر التسعة من الدرجة الثانية أصفار وليست كل عناصر المصفوفة أصفاراً.

6- احسب $adjA$ حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

7- أوجد A^{-1} حيث: $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

الحل:

إن $\det A = 5 \neq 0$ و $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

8- أوجد A^{-1} حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن $\det A = -10 \neq 0$ وبالتالي:

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

9- حول المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

إلى الشكل الدرجي.

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3 - 3R_1 \\ R_2 - 2R_1}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} = B$$

10- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على الصفوف.

الحل:

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_3-R_1}{\overset{R_2-R_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1-3R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1-3R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= [I_3 \vdots A^{-1}]$$

وبالتالي مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -5 \\ 3 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على أعمدتها.

الحل:

$$[A \vdots I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{C_2-3C_1 \\ C_3-2C_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{C_1-2C_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{C_1-2C_3,\,-C_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

أي أن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A \cdot A^{-1} = I_3$.

12- أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A وأي عدد صحيح موجب n فإن: $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

الإثبات:

لدينا العلاقة $(A^n)(A^n)^{-1} = I$

ومنه بضرب العلاقة من اليسار بـ $(A^{-1})^n$ نجد :

$$(A^{-1})^n A^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n \Rightarrow (AA^{-1})^n (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

وبالتالي: $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$

13- أثبت أنه إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن: A^{-1} إن وجدت تكون أيضاً متناظرة.

الإثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T (A^T) = I$$

ومن ثم نضرب من اليمين بـ $(A^T)^{-1}$ فنجد :

$$(A^{-1})^T (A^T)(A^T)^{-1} = (A^T)^{-1} \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A$$

أي أن: A^{-1} أيضاً متناظرة.

14- أثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A من المرتبة n وأي عدد k فإن: $|kA| = k^n |A|$.

الإثبات:

بفرض $A = [a_{ij}]$ إذن:

$$kA = [ka_{ij}] \Rightarrow |kA| = |[ka_{ij}]| = k.k.k...k|[a_{ij}]| = k^n |A|$$

إن kA تعني ضرب الثابت k في جميع عناصر المصفوفة A ، أما $k|A|$ فهي عملية ضرب الثابت k في أحد صفوف أو أعمدة المحدد $|A|$.

15- أثبت أنه إذا كانت A مصفوفة مرتبتها $(m \times n)$ و B مصفوفة مرتبتها $(n \times m)$ وكان $m > n$ فإن المصفوفة AB تكون شاذة.

الإثبات:

لنفرض $AB = C$ ومنه C مرتبتها $(m \times m)$ ونعلم أن:

$$\rho(B) \le m, \rho(A) \le n$$

لكن:

$$\rho(C) = \rho(AB) \le Min\{\rho(A), \rho(B)\} = \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

وبالتالي فإن:

$$\rho(AB) \le n < m$$

وهذا يعني أن المصفوفة AB تكون شاذة.

16- أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix}$ باستخدام الخاصة:

$$\det(\lambda \mathrm{A}) = \lambda n.\det \mathrm{A}$$

الحل: $\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$

17 – لتكن $A, B \in M_{(3,3)}(R)$ حيث $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 4 \\ 10 & -2 & 5 \\ 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ أثبت أن:

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

الحل:

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$
$$\det B = -9(-8+35) - 8(40-35) + 4(-70+14) = -507$$

$AB = \begin{bmatrix} 29 & 11 & 13 \\ 52 & -34 & 10 \\ 38 & -7 & 28 \end{bmatrix}$ ومنه $\det(AB) = -25350$

وكذلك فإن: $\det(A)\det(B) = -25350$ وبالتالي:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = -25350$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 15 \\ 22 & 33 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 11 & 33 \end{vmatrix} = 22\begin{vmatrix} -5 & 15 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -110\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -330\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -330(2) = 660$$

18 – لتكن $A \in M_{(3,3)}(R)$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

الحل:

$$\det A = -5(-2-2) - 3(-8-2) = 50$$

إن:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$\det(A^T) = 0(2-8) + 2(5+12) + 1(10+6) = 50$$

ومنه نجد:

$$\det(A) = \det(A^T) = 50$$

19- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أضفنا العمود الثاني إلى الثالث ثم أخرجنا العامل المشترك من العمود الثالث مع الاستفادة من الخاصة (3).

20- باستخدام خصائص المحددات أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

أضفنا إلى الصف الثالث الأول والثاني وبإخراج العامل المشترك .وطرح الصف الثاني من الثالث وطرح الصف الثالث من الصف الأول. ثم طرح الصف الأول من الثاني وأخيراً جعل الصف الثالث أول الصفوف.

21–أثبت بدون فك:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$$

الحل:

نطرح الصف الثاني من الأول نجد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 - a_2^2 & a_1 - a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1 - a_2) \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى الخاصة (4) وإلى أن $a_1 - a_2$ عامل لـ $|A|$.أيضاً $a_2 - a_3$ و $a_3 - a_1$ عاملان وإن $|A|$ من الدرجة الثالثة فيكون: $|A| = -(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$

<u>تمارين غير محلولة</u>

1– بفرض لدينا:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

تحقق من أن: $A + (B - C) = (A + B) - C$

أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A + D = B$ وتحقق من أن: $D = B - A = -(A - B)$

2– أثبت أن $AB = 0$ حيث :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3- بفرض لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&-5\\-1&4&5\\1&-2&-4\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-1&3&5\\1&-3&-5\\-1&3&5\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\-1&3&4\\1&-2&-3\end{bmatrix}$$

تحقق من أن:

$AB=BA=0$ أيضاً $AC=A,CA=C$

4- تحقق من الخاصة التجميعية للضرب حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2\\0&1&-1\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\\3&-1\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}4&1&0&-3\\-1&2&-2&5\end{bmatrix}$$

5- أوجد الجداء في كل مما يأتي :

$$1)\begin{bmatrix}2&-1&4\\5&1&-2\\-1&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\4&1&5\\2&2&7\end{bmatrix}\qquad 2)\begin{bmatrix}1-&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\1&1-\\0&3\end{bmatrix}\qquad 3)\begin{bmatrix}1-&0&3\\0&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\6\end{bmatrix}$$

$$4)\begin{bmatrix}2&1-\\4&3\\6&2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2-\\0\end{bmatrix}\qquad 5)\begin{bmatrix}2-&0&1\\1&2-&0\\0&1&2-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1-&2\\3&1-\end{bmatrix}\qquad 6)\begin{bmatrix}1-&3&2\\3&2-&1-\\6&5&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-\\2\\3-\end{bmatrix}$$

6- ليكن لدينا A و B مصفوفتين حيث:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&3\\5&3&0&1\\9&2&1&6\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد $A+B,2A,2A+B$

7- ليكن لدينا:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&2&5\\2&0&3\end{bmatrix}\ ,\ C=\begin{bmatrix}4&1&2\\0&3&2\\1&-2&3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: أوجد المصفوفة D بحيث يكون $A+D=B$ وتحقق من أن:

$D=B-A=-(A-B)$

8- احسب AB إذا علمت :

$$1)\quad A=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&1&1\\ \hdashline 0&0&1\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\\ \hdashline 1&1&0\end{array}\right]$$

$$2)\quad A=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&3\\0&1&2\end{array}\right],\ B=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\ \hdashline -1&2\end{array}\right]$$

9- إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-3&-2\\1&-5\\4&3\end{bmatrix}$$

والمطلوب:

أوجد $C=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\\t&u\end{bmatrix}$ بحيث يكون:

$$A+B-D=0$$

10- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1+i&2+3i\\1-i&2&-i\\2-3i&i&0\end{bmatrix}$$

هرميتية.

11- بين أن المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}i&1+i&2-3i\\-1+i&2i&1\\-2-3i&-1&0\end{bmatrix}$$

هرميتية متخالفة و المصفوفة iA هرميتية.

12- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية:

$$A=\begin{bmatrix}1&1-i&2\\1+i&3&i\\2&-i&0\end{bmatrix}$$

هل المصفوفة kA هرميتية إذا كان k عدد حقيقي ما ، وإذا كان k عدداً مركباً ما؟.

13- ليكن لدينا المصفوفة الهرميتية المتخالفة:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$$

هل المصفوفة kA هرميتية متخالفة إذا كان k عدداً حقيقياً ما ، وإذا كان عدداً مركباً ما، وإذا كان عدداً تخيلياً بحتاً.؟

14- ليكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أحسب A^2, A^3 ثم استنتج A^n.

15- إذا كانت A مصفوفة متساوية القوى فبرهن أن:

$B = I - A$ متساوية القوى

وأن: $AB = BA = 0$

16- إذا كان:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

بين أن A و B متساويتا القوى.

17- برهن أن:

$$1) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

$$2) \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

18- أوجد رتبة كل من المصفوفات التالية: