جامعة حماة
كلية الاقتصاد

الأساليب الكمية

مفهوم الأساليب الكمية

يفهم من مصطلح الأساليب الكمية بأنها مجموعة من الأدوات Tools أو الطرق Methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري المزمع اتخاذه بخصوص حالة معينة ، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة. ويتطلب تطبيقها واستخدامها أيضاً تحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر.

وقد عرفها البعض بأنها تلك الأطر الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها. ويتم تدعيم هذه الأطر الرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الآخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة. وبذلك تكون هذه الأطر الرياضية بمثابة الوسيلة أو الأسلوب التي من خلالها يتم معالجة المشكلة في الواقع العملي بعد أن يتم استيعاب معظم متغيراتها وثوابتها بحيث يتم التوصل في النهاية إلى الحل المطلوب لها.

تتصف هذه الأساليب بأن بعضها ذات طابع أو صفة احتمالية والبعض الآخر يتصف في كونه ثابت أو ساكن والبعض الآخر يتصف في كونه متغير بشكل مستمر حسب طبيعة العامل الزمني. إضافة إلى ذلك هنالك تقسيمات وتصنيفات لهذه الأساليب الكمية حسب طبيعة الاستخدام وحسب طبيعة العوامل الداخلة فيها كما سيرد ذلك أدناه.

أنواع الأساليب الكمية:

ضمن المنهج الكمي لإدارة الأعمال يمكن أن نميز بين الكثير من أنواع الأساليب الكميه التي تستخدم من قبل متخذ القرار في مجال ترشيد القرار الإداري أو لغرض حل مشكلة معينة في أحد مجالات إدارة المنشأة من أجل الحصول على الحلول المطلوبة. وفي هذا الصدد يمكن أن يتم الحصول على ثلاثة أنواع من الحلول حسب ما هو وارد في أدبيات المنهج الكمي لإدارة الأعمال وهي :

1- الحل الممكن Feasible Solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal Solution .

أن هذه الأساليب تقع تحت تسميات مختلفة في أدبيات المنهج الكمي إلا أن

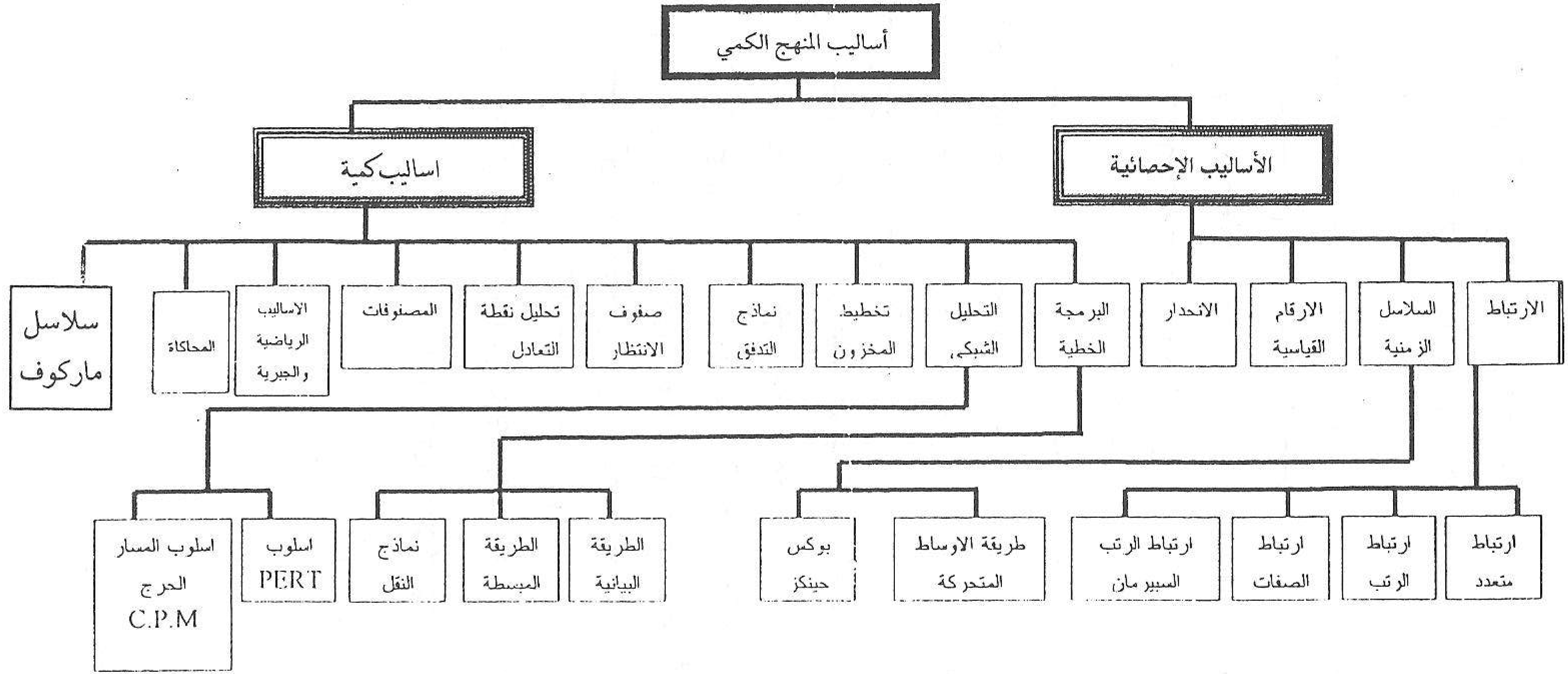
الشائع منها يقع تحت عنوان بحوث العمليات. يضاف إلى ذلك الأساليب الإحصائية كما هو واضح في الشكل رقم (1-1) حيث يتضح في الشكل المذكور ما يلي :

أولاً : أساليب كمية مختلفة :

1. البرمجة الخطية	Linear Programming
2. البرمجة الديناميكية	Dynamic Programming
3. نماذج الخزين	Inventory Models
4. شبكات العمل	Networks
5. نماذج الانتظار	Queuing Models
6. نظرية القرار	Decision Theory
7. المحاكاة	Simulation
8. نظرية الاحتمالات	Probabilities Theory
9. نظرية المباريات	Games Theory
10. الأساليب الرياضى والجبرية	Mathematical & Algebric
11. سلاسل ماركوف	Markov Chians
12. أسلوب المصفوفات	Matrices Methods
13. نماذج التدفق	Transshipment

ثانياً : الأساليب الإحصائية:

1. أسلوب الارتباط.
2. أسلوب الانحدار.
3. نماذج التوقع.
4. المقاييس والاختبارات الإحصائية.



الشكل (1-1) أنواع الأساليب التي يمكن أن تستخدم ضمن المنهج الكمي

البرمجة الخطية Linear Programming

من أجل البدء بخطوات توضح الأفكـار المتعلقـة باستخدام هكـذا نـوع مـن الأساليب يتطلب الأمر في البداية تحديد مفهوم البرمجة الخطية وكذلـك مستلزمات تطبيقها في مختلف المجالات الإدارية لمتطلبات الأعمال.

1.5 مفهوم ومستلزمات تطبيق البرمجة الخطية:

البرمجة الخطية هي أحد الأساليب الرياضية المهمة التي تستخدم في ترشيد عملية اتخاذ القرارات المختلفة في منظمات الأعمال. بدأ استخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي George Dantzing لحل بعض مشكلات التخطيط في المجالات العسكرية، وقد ازداد تطبيقها من الآونة الأخيرة لحل الكثير من المشكلات الصناعية والاقتصادية والعسكرية وذلك بالتوافق مع الزيادة في استخدام الحواسيب وتطورها وظهور البرامجيات الحديثة على نطاق واسع.

أن البرمجة الخطية تبحث عادة في توزيع الموارد المحددة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والمحددات المفروضة وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمة الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (Maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العائد النقدي المتوقع من خطة إنتاج معينة وما شابه ذلك. وقد يتعلق الأمر بتقليل أو تدنية (Minimize) قيمة الهدف، كما هو الحال في عملية تقليل تكاليف النقل أو تدنية تكاليف الإنتاج وما شابه ذلك. وقد عرفت المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية، بأنها الطريقة الرياضية التي بموجبها يتم تخصيص الموارد النادرة أو المحددة من أجل تحقيق هدف معين ومحدد. وعادة يكون من المستطاع التعبير عن هذا الهدف والقيود المرتبطة به في صيغة معادلات أو متباينات خطية. وهناك تعريف آخر ومختصر للبرمجة الخطية ينص على أنها ذلك الأسلوب الرياضي الذي يهتم

بشكل أو بآخر بالاستغلال الأمثل للموارد المحددة (بشرية أو مادية وما شابه ذلك) لتلائم الأهداف المطلوبة. ويتم ذلك وفق أسلوب علمي مبرمج. وهنا لابد من الإشارة والتوضيح بأن مصطلح البرمجة Programming الوارد ذكره أعلاه يشير إلى استخدام الأسلوب المنطقي والعلمي في تحليل المشكلة وعلاجها. أما مصطلح الخطية فإنه يعني أن هناك علاقة ثابتة بين المتغيرات الأساسية الداخلة في تركيب دالة الهدف والقيود يمكن تمثيلها في هيئة خط مستقيم.

أن من مستلزمات استخدام البرمجة الخطية في حل المشاكل التي تواجه منظمة الأعمال، هو توفر الشروط التالية:

1- تحديد الهدف الذي تسعى المنظمة إلى تحقيقه، وقد ينطوي الهدف المذكور على تحقيق أقصى عائد أو الوصول بالكلفة إلى أدنى مستوى ممكن. والصيغة الرياضية للهدف يطلق عليها اصطلاحاً دالة الهدف (objective function).

2- ينبغي أن تكون الموارد المتاحة لتحقيق الهدف محدودة، وهذا يعني أنه ليس هناك حاجة لبرمجة استخدام الموارد التي لا تتصف بالمحدودية حتى وإن كانت تمثل عنصراً أساسياً في تحقيق الهدف.

3- وجود بدائل مختلفة لاستخدام الموارد المتاحة قيد البرمجة، بحيث يكون بمقدور متخذ القرار اختيار واحد من هذه البدائل.

4- إمكانية التعبير عن كافة بيانات المشكلة وهدف الدراسة والمتغيرات بصورة كمية أو رقمية.

5- وجود علاقة بين المتغيرات أو العوامل المتغيرة في المشكلة الخاضعة للبرمجة. وينبغي أن تكون هذه العلاقة خطية، وهذا يعني أن دالة الهدف والقيود المفروضة على المشكلة هي علاقات رياضية من الدرجة الأولى سواء كانت مكتوبة في صيغة معادلات أم متباينات.

أن الواقع العملي يمكن أن يكشف عن استخدامات واسعة للبرمجة الخطية، وأهم هذه الاستخدامات هي:

1- توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة من مواد أولية، قوى عاملة مكائن ومعدات ومستلزمات إنتاج مختلفة، وذلك بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد.

2- صياغة جداول أو برامج عمل بما يضمن تقليل كلفة الإنتاج إلى أدنى مستوى ممكن وبما يضمن أفضل المزايا لمتخذ القرار في المنظمة.

3- تخطيط الإنتاج بأنواعه لاختيار ذلك الهيكل أو التشكيلة في المنتجات التي تضمن أعلى العوائد للمنظمة ويحقق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

4- التوزيع الأمثل للمنتجات أو البضائع بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام. أو الاستهلاك بأقل كلفة كلية للنقل والتوزيع.

يكون تطبيق أو استخدام البرمجة الخطية وفق خطوات واضحة ومحددة، يمكن إجمالها على النحو التالي:

أولاً: دراسة وتحليل المشكلة وجمع البيانات اللازمة عنها مع تحديد كافة الفرضيات والثوابت اللازمة لتطبيق الأسلوب المذكور.

ثانياً: تحديد الهدف المطلوب، حيث قد يكون بلوغ أقصى ربح ممكن أو تخفيف التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن. ويتم صياغة الهدف ضمن النموذج الرياضي للمشكلة في صيغة علاقة رياضية تكتب بشكل دالة وتسمى بدالة الهدف (objective function).

ثالثاً: تحديد القيود Constraints التي تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف، وتعبر هذه القيود عن طبيعة الموارد المتاحة من مواد أولية، وقوى عامل ومكائن وحدات وغير ذلك من مستلزمات الإنتاج المحددة، ويتم التعبير عن هذه القيود من خلال متباينات أو معادلات من الدرجة الأولى.

بالإضافة إلى ما تقدم فإن هناك قيوداً من نوع آخر يطلق عليها اسم قيود اللاسلبية (Non - negativity constraints) والتي تعني أن جميع قيم المتغيرات حقيقية وغير سالبة. ويعني أيضاً لا يجوز أن تكون الأعداد والكميات سالبة.

2.5 النموذج العام للبرمجة الخطية

General form of linear Programming:

في ضوء ما تقدم من توضيحات حول طبيعة البرمجة الخطية ومفهومها ومكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية، نجد أن بالإمكان التعبير عن النموذج بأبسط صورة

له كما يلي :

إذا كان المطلوب هو العمل على إيصال قيمة دالة الهدف إلى القيمة المثلى لها، أي أن :

$$\text{Optimize } Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

بعد إستيعاب الشروط المعبر عنها كما يلي :

Subject to:

$$\text{constraints} \begin{cases} g\,i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq, =, \geq bi \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots d\ m\ n) \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

ويمكن إعادة صياغة هذا النموذج الرياضي بعد الأخذ بنظر الاعتبار كافة الحدود الممكنة للنموذج من حيث عدد المتغيرات (j) وعدد القيود و (i) (حيث أن $j = 1, 2, \ldots, n,\ i = 1, 2, m$). وكذلك بعد الأخذ بنظر الاعتبار إمكانية أن يكون المطلوب هو تعظيم الهدف إلى أعلى مستوى ممكن أو تدنيته إلى أدنى مستوى ممكن، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي :

القيود $$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j \leq, =, \geq bi \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

دالة الهدف $$Z = \sum_{j=1}^{n} c\,j\,x\,j \rightarrow \text{Max. or Min}$$

$x\,j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots n)$ قيد اللاسلبية

تعتبر هذه الصيغة الأساس الرياضي للعديد من الصيغ الرياضية وعلى أساسها يمكن كتابة الصيغة التفصيلية التي تأخذ نظر الاعتبار الصفوف والأعمدة الممكنة الخاصة بالنموذج. وأن كتابة الصيغة التفصيلية يعرف أيضا بعملية فتح النموذج العام أن الصيغة التفصيلية تكتب كما يلي :

القيود
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq\ =\ \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq\ =\ \geq b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq\ =\ \geq b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow$ Max. or Min.

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$

من الصيغ الرياضية الواردة أعلاه يتم اشتقاق نوعين أساسيين في الصيغ الرياضية وهي :

أولاً : الصيغة القانونية Canonical Form :

أن من أهم صفات هذه الصيغة هي أن القيود في النموذج الرياضي تظهر بعلامة (≤) أقل أو يساوي أو (≥) أكبر ما يساوي أو كليهما معاً. وعادة تصل دالة الهدف إلى أقصى قيمة لها (.Max) مع الصيغة التي تكون قيودها الرياضية مكتوبة بعلامة (≤). في حين تصل دالة الهدف إلى اقل قيمة لهما (Min) إذا كانت قيود النموذج الرياضي مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي وتعرف هذه الصيغة بأنها الصيغة الرياضية الغير مستقرة. ويمكن كتابة الصيغة القانوية canonical form للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية كما يلي :

1- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≤) أقل أو يساوي :

القيود

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \quad b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ am_1x_1 + am_2x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

دالة الهدف $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \rightarrow$ Max.

قيود الأسلوب $x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j \leq,=,\geq bi \;\; (i=1,2,...,m)$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c\,j\,x\,j \rightarrow Xj \geq 0\,\text{Max}\,(j=1,2,...,n)$$

2- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

القيود $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots n)$$

3- عندما تكون القيود مكتوبة بعلامات مختلفة (≤) أقل أو يساوي وكذلك علامة (≥) أكبر أو يساوي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

القيود $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

دالة الهدف $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Max\ .\ or\ Min$

قيود اللاسلبية $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

علماً بأن الصيغة المختصرة لهذا النموذج هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq,\geq b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow Max.or\ Min$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,\ldots n)$$

ثانياً: الصيغة القياسية Standard Form :

أن الصيغة القياسية هي الحالة المستقرة للنموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية يتم اشتقاقها من الصيغة القانونية السابقة بعد أن يتم إضافة عدد من المتغيرات وطبقاً لكل نوع من أنواع العلامات الرياضية (≤ ، = ، ≥) وذلك كما هو واضح في الجدول(5-1).

جدول رقم (5-1) قواعد إضافة المتغيرات

نوع المتغير الذي يضاف إلى دالة الهدف	نوع المتغير الذي يضاف إلى القيد	نوع العلامة الرياضية في القيد
Max. Z =...+0.S Min. Z =...+0.S	+S	≤أقل أو يساوي
Max. Z =...+0.S-MR Min. Z =...+0.S + MR	-S + R	≥ أكبر أو يساوي
Max Z =...-MR Min.Z =...+ MR	+R	= يساوي

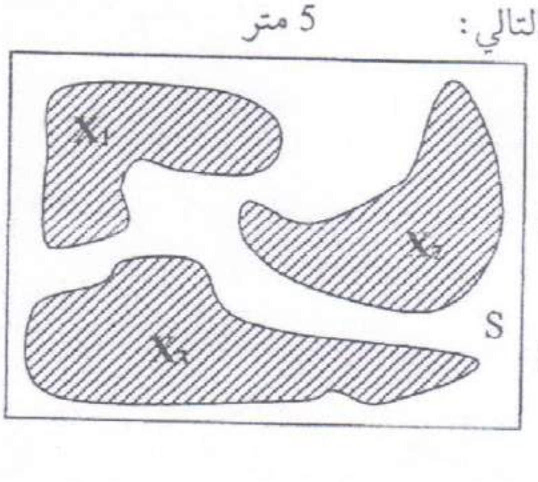
حيث أن :

+ S هي متغير slack variable يضاف إلى طرق المعادلة الأصغر ويسمى أيضاً المتمم الرياضي ويلغه الإنتاج يعرف بمقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة. والمثال التالي يوضح فكرة المتغير المذكور:

إذا كان لدينا قطعة قماش طولها 5 متر وعرضها 3 متر ومطلوب استغلالها لإنتاج بدلات معينة فإنها يمكن أن تأخذ الشكل التالي:

5 متر

3 متر



ومن الشكل المذكور نستنتج أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 15$$

وإذا كان S هو مقدار الفضلات بعد فإن :

$$x1 + x2 + x3 + S = 15$$

حيث أن S تمثل في هذه الحالة أيضاً بمثابة المتمم الرياضي أو المتغير الراكد المشار إليه أعلاه.

S- ⇐ ويسمى بالتغير الفائض (sur pluse) ويعبر عن مقدار المواد الفائضة - أي على سبيل المثال إذا كانت الحاجة إلى مادة أولية معينة هي 100 وحدة وكان الموجود هو 120 فإن الـ 20 الإضافية هي مقدار الفائض عن الحاجة. وعادة تطرح من الطرف الكبير في العلاقة التي تحمل العلاقة ≤ أكبر أو يساوي.

R ⇐ المتغير الاصطناعي Artificial variable وهو ذلك المتغير الذي يستخدم بهدف معالجة الإشارة السالبة للتغير الفائض (S-). ويضاف هذا المتغير أيضا إلى القيد الذي يحمل علامة المساواة من أجل تكوين ما تسمى بمصفوفة الوحدة identity Matirix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ضمن طريقة السمبلكس التي هي ضرورية لإكمال عملية الحل.

ومن الجدير بالذكر هنا أن هذا المتغير ليس له أي معنى ضمن المشكلة المدرسة. وأن وجوده في المشكلة هو فقط لأغراض رياضية بحتة وبالتحديد من أجل معالجة الإشارة السالبة للمتغير الفائض التي تتعارض مع قيد اللاسلبية ($Si \geq 0$)، وبذلك فإن من المفروض التخلص من هذا المتغير في المراحل الأولى من عمليات الحل، ومن أجل تنفيذ هذه المهمة يستخدم معامل كبير بمقدار (M) لمرافقة هذا المتغير وعادة يكون أكبر من أي معامل آخر موجود في النموذج الرياضي وذلك من أجل التعمد بعدم ظهور هذا المتغير في النتائج النهائية للمشكلة.

M ⇐ معامل المتغير الاصطناعي R وهو كمية كبيرة جدا افتراضية وعلى الأغلب تكون من مضاعفات الرقم (10) عشرة أي (الخ ... ، 1000 ، 100 ، 10) وعلى أساس هذا المعامل يتم تسمية طريقة الحل المسماة M-Technique أو ما يسمى أيضا (Big - M).

وعلى أساس ما تقدم فإن الصيغ القياسية لنماذج البرمجة الخطية هي كما يلي:

1- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≥) أقل أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + s_1 &= b_2 \\ am_1x_1 + am_2x_2 + \ldots + a_{mn}x_{n} + s_m &= b_m \end{aligned}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + 0.5_1 + 0.5_2 ....0.5\ m \rightarrow Max.$$

$$x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$$

$$s_1, s_2 , ... , s_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{n} a\,i\,j\,x\,j + si = bj \qquad (i=1,2,...,m)$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} cjxj+0.Si \rightarrow Max.$$

$$xj \geq 0 \qquad si \geq 0$$

2- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامة (≥) أكبر أو يساوي فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n - S+R \ = \ b_1$$

$$a_{21}\ x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n\ -S+R_2 = \ b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$am_1x_1 +am_2x_2 +....+ a_{mn}\ x_n -Sm + Rm = b_m$$

$$Z= c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+0.S_1+0.S_2+...0.Sm+MR_1+MR_2+...+MR_m\rightarrow Min$$

$$x_1, x_2, ... , x_n \geq 0$$

$$s_1, s_2 , ... , s_m \geq 0$$

$$R_1 , R_2 , ... , R_m \geq 0$$

الصيغة المختصرة لهذا النموذج الرياضي هي :

$$\sum_{j=1}^{m} a\,i\,j\,x\,j - si +Ri = bi \qquad (i=1,2,...,m)$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n} cjxj+0.si+MRi \rightarrow Min$$

$$xj \geq 0 \quad , \quad si \geq 0 \quad , \quad Ri \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3- عندما تكون قيود النموذج مكتوبة بعلامات رياضية مختلطة (≥ = ≤)، فإن تحويلها إلى الصيغة القياسية يكون كما يلي (على افتراض لدينا ثلاثة قيود فقط فإن دالة

الهدف تصل إلى Min).

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow Min$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

يصبح النموذج أعلاه مكتوباً بالصيغة القياسية كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - s_2 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n + R_3 = b_3$$
$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0.S_1 - 0.S_2 + MR_2 + MR_3 \rightarrow Min$$
$$X_1, x_2, \ldots, xn \geq 0$$
$$S_1, s_2 \geq 0$$
$$R_2, R_3 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

3.5 افتراضات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

يتميز النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية بعدد من الافتراضات كي يكون مناسباً ومقبولاً من الناحية العلمية والعملية، وهي:

أولاً: التناسبية Proportionality :

يعني هذا الافتراض أن المساهمة في حالة الهدف من جهة والكمية المستخدمة من المصادر من جهة أخرى أن تكون متناسبة مع قيمة كل متغير من متغيرات القرار. ولتوضيح ذلك نفرض أن أحد قيم المتغيرات الأساسية لمشكلة معينة هو 10 ($X_1 = 10$) وأن هامش الربح للوحدة الواحدة من هذا المتغير يساوي 5 دينار، وأن كل وحدة واحدة من هذا المتغير الأساسي يتطلب وحدة من المادة الأولية الأصلية الأولى ووحدة واحدة من المادة الأولية الثانية، وعليه فإن مساهمة هذا المتغير الأساس في دالة الهدف هي 50 دينار (5×10) وأن انتاج 10 وحدات من هذا المتغير يتطلب 30 وحدة (10×2 + 10 × 1 = 30) وحدة من المواد الأولية المتاحة.

ثانياً: الإضافية Additivity :

أن هذا الافتراض يعني أن قيمة دالة الهدف والموارد الكلية المستخدمة في المشكلة يمكن إيجادها من خلال جمع مساهمة دالة الهدف والموارد المستخدمة لجميع المتغيرات. أي أن قيمة دالة الهدف تمثل مجموع مساهمات جميع المتغيرات الأساسية ، وكذلك فإن الموارد الكلية المستخدمة تمثل مجموع الموارد المستخدمة لكل متغير من هذه المتغيرات.

ثالثاً: قابلية القسمة Divisibility :

وتعني هذه المتغيرات يمكن أن تأخذ قيماً كسرية وليس بالضرورة أن تكون جميع قيم المتغيرات أعداداً صحيحة.

رابعاً: اللاسلبية Negativity–Non :

وتعني هذه أن متغيرات القرار لا يمكن أن تكتب كميات ومقادير سالبة ، حيث أن من المعروف من الناحية المنطقية أن القيم السالبة للكميات والمقادير تعتبر مستحيلة. إذ لا يمكن أن يكتب الإنتاج أو التسويق للبضائع والسلع بالسالب. وعادة يعبر عن هذه الافتراض ($xj \geq 0$).

4.5 طرق حل نماذج البرمجة الخطية:

بعد أن يتم صياغة النموذج الرياضي الخطي للمشكلة المدروسة ومن ثم التأكد من توفر كافة الافتراضات المشار إليها أعلاه تبدأ بعد ذلك مرحلة حل النموذج الرياضي لاستخراج النتائج والحلول النهائية للمشكلة. يتفق معظم الكتاب المهتمين بأسلوب البرمجة الخطية بأن هناك ثلاث طرق أساسية لحل نموذج البرمجة الخطية ، وهي :

أولاً : الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphical Method .

ثانياً : الطريقة الجبرية Algebric Method .

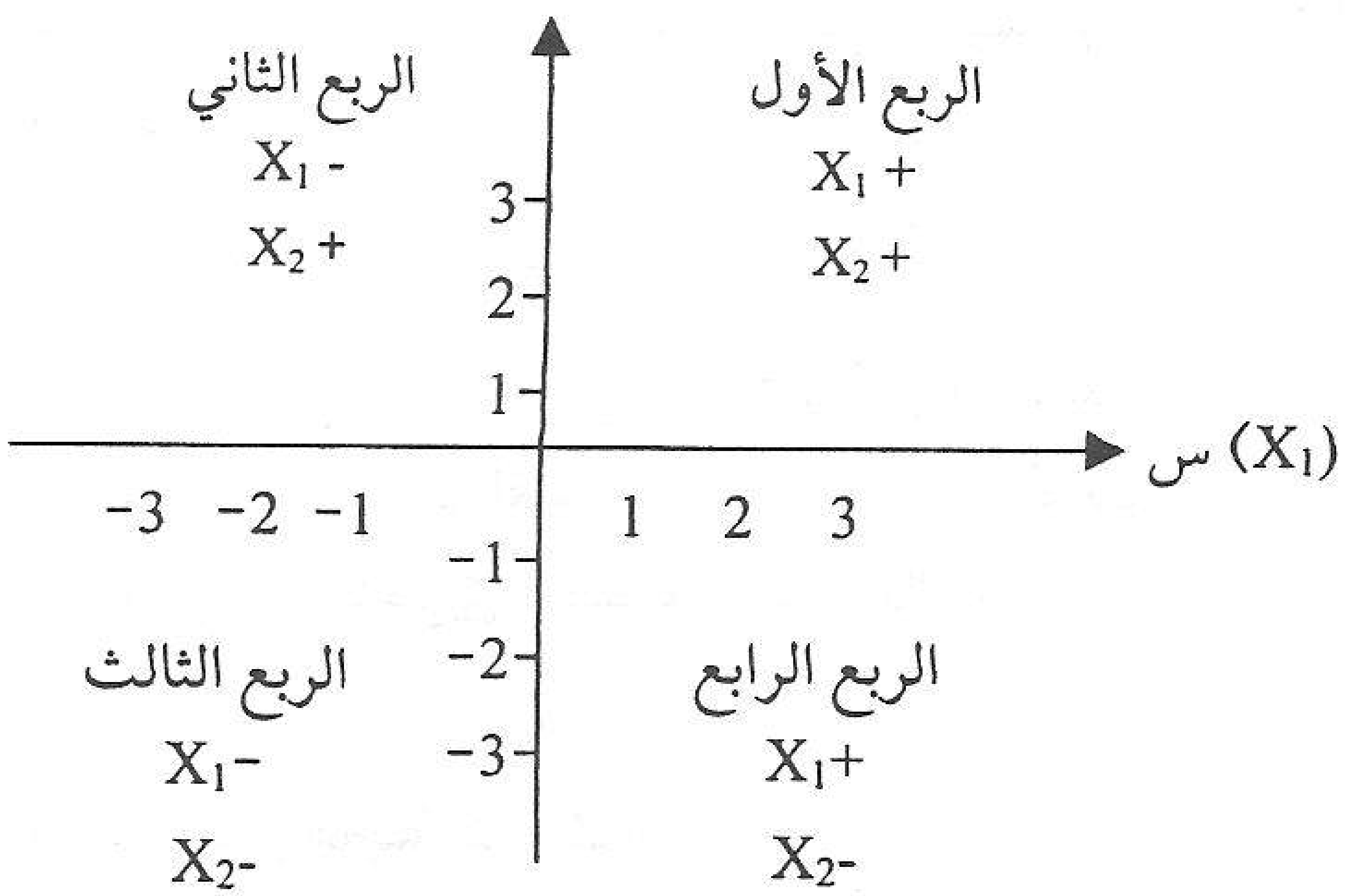
ثالثاً : الطريقة المبسطة (السيمبلكس) Simplex Method .

الطريقة البيانية (طريقة الرسم) Graphic Method :

تعتبر الطريقة البيانية من الطرق الأساسية في حل النموذج الرياضي للبرمجة

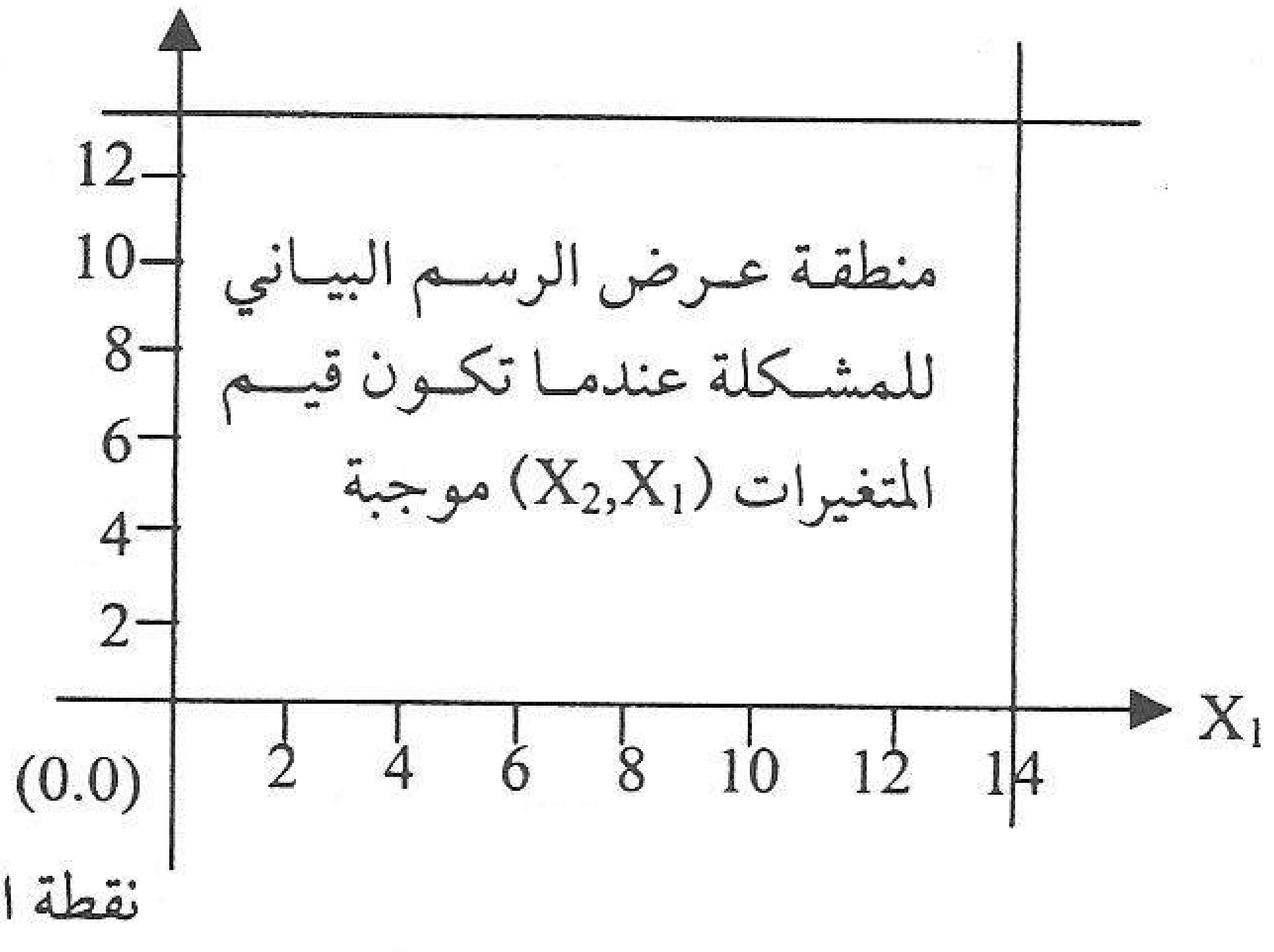
الخطية. وتستخدم هذه الطريقة فقط عندما يكون عدد المتغيرات للمشكلة اثنين فقط (X_1, X_2). أن فكرة هذه الطريقة تعتمد بالدرجة الأساس على الرسم البياني لمتغيرات المشكلة ، الذي من المفروض أن يتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية. ومن أجل توضيح فكرة هذه الطريقة ينبغي تقديم فكرة أولية عن هذه الإحداثيات. حيث تعبر هذه الاحداثيات عن ما يسمى بالمحاور السينية (الأفقية) والمحاور الصادية (العمودية) التي يشيع استخدامها في الهندسة التحليلية وهي كما في الشكل رقم (5-1).

الشكل رقم (5-1) المحاور الأفقية والعمودية



يلاحظ من الشكل رقم (5-1) أن كل قيم المتغيرات (X_2,X_1) في الربع الأول موجبة ، في حين كانت مختلفة الإشارة في الأرباع الأخرى. لذلك فإن الطريقة البيانية تعتمد بشكل أساسي على إظهار الحلول والنتائج النهائية للمشكلة في الربع الأول لكون قيم المتغيرات (X_2,X_1) تتفق مع الافتراض الرابع الوارد ذكره أعلاه والذي ينص على أن كل قسم المتغيرات (Xj) ينبغي أن تكون موجبة ($Xj \geq 0$) أي لا يمكن قبول القيم السالبة. ولهذا السبب يتم التركيز على الربع الأول فقط وعدم إظهار بقية الأرباع كما هو واضح في الشكل رقم (5-2).

الشكل رقم (5-2) الربع الأول الذي قيم فيه عرض الرسم البياني للمشكلة حيث قيم المتغيرات (X_2,X_1) موجبة.



من أجل توضيح فكرة الحل بالطريقة البيانية نعتمد المثال التالي:

تتوفر لدى إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية نوعين من المواد الأولية البديلة وذلك بكميات محدودة. ترغب هذه المنظمة في خرج نوعين من المنتجات الغذائية وهما (المنتجA ، المنتج B).

يحتاج المنتج A إلى 2 وحدة من المادة الأولية الأولى، في حين يحتاج إلى 6 وحدة من المادة الأولية الثانية حتى يمكن إنتاجه. المنتج الثاني B يحتاج إلى 4 وحدة من المادة الأولية الأولى، أما إذا قررت استخدام المادة الأولية الثاني فإنه سوف يحتاج إلى 3 وحدة.

وقد علمت ما يلي:

1- كمية المواد الأولية المتوفرة من النوع الأول هي بحدود (40) وحدة ومن النوع لثاني (60) وحدة.

2- الربح المتوقع الحصول عليه عند بيع المنتج هو 8 دينار وعند بيع المنتج B الربح المتوقع هو 4 دينار.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- استخدام طريقة الرسم البياني Graphical Method لتحديد أفضل كمية من المنتج A. والمنتج B تم مصلحة المنشأة إنتاجها وبما يؤدي إلى تحقيق أكبر كمية من الأرباح في ظل تحقيق حالة الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسيين.

الحل:

لحل هكذا نوع من المشاكل يفترض في بداية الأمر عرض البيانات المتوفرة في إطار جدول خاص كما هو واضح أدناه:

المنتجات / المواد الأولية	المنتج A	المنتج B	مقدار المتوفر من المواد الأولية
المادة الأولية I	2	4	40 وحدة
المادة الأولية II	6	3	60 وحدة
الأرباح المتوقعة	8	5	

نفرض أن كمية الإنتاج ⇐ X

كمية الإنتاج من المنتج الأول .A ⇐ X_1

كمية الانتاج من المنتج الثاني .B ⇐ X_2

الأرباح الكلية المتوقعة ⇐ Z

وعليه فإن مقدار ما نحتاجه الكمية X_1 من المنتج A_1 من المادة الأولية الأولى هي X_1 مضروبة في 2 ما نحتاجه الوحدة الواحدة من المنتوج المذكور، أي بعبارة أخرى يكون لدينا ($2X_1$). وهكذا بالنسبة لبقية القيم، علماً بأن مقدار ما يتم استهلاكه من المادة الأولية الأولى لطرح المنتج . A والمنتج B ينبغي أن يكون مساوياً أو أقل من الكمية المتوفرة في المخازن من المادة الأولية المذكورة والبالغة 40 وحدة، أي أن:

$2x_1 + 4 \times 2 \leq 40$ .... (1) فيه استخدام المادة الأولية .I

وهكذا بالنسبة للمادة الأولية الثانية، وعندها نحصل على:

$6x_1\ 3 \times 2 \leq 60$ .... (2) فيه استخدام المادة الأولية II

وإذا ما علمنا أن الأرباح الكلية المتوقعة في بيع المنتج A.ومن بيع المنتج B تحسب من خلال معادلة تجمع الاثنين، ينبغي أن تصل إلى أعلى قيمة ممكنة، أي أن:

$$Z=5x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$$

فإن بناءاً على ما تقدم يمكن جمع كافة عناصر النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدرس وذلك كما يلي:

القيود
$$\begin{cases} 1 \ldots.\quad 2x_1 + 4x_2 \leq 40 \\ 2\ldots.\quad 6x_1 + 3x_2 \leq 60 \end{cases}$$

دالة الهدف $Z = 8x_1 + 5x_2 \rightarrow Max$

قيود اللاسلبية $x1\ ,\ x2 \geq 0$

أن القيد الأول والثاني مكتوبان بصيغة المتراجحات أو المتباينات لذلك لا يمكن رسم أو التعامل مع هذه العلاقات الرياضية إلا بعد تحويلها إلى صيغة المعادلات الرياضية المستقرة. وبشكل عام هنالك ثلاثة طرق أساسية يتم بموجبها تحويل المتراجحة أو المتباينة إلى معادلة رياضية، وهي:

1. طريقة إضافة المتغير الراكد (s+) أو طرح المتغير الفائض (s-).
2. طريقة تجزئة العلامة الرياضية.
3. طريقة الفرضية.

بالنسبة للطريقة الأولى سبق التطرق إليها عند الحديث عن تحويل النموذج الرياضي المكتوب بالصيغة القياسية، وسوف يتم التطرف لذلك عند توضيح الحل الجبري لاعتماد هذه الطريقة عليها.

أما بالنسبة لطريقة تجزئة العلامة الرياضية فإن المقصود بها تجزئة العلامة:

≤ إلى أقل < ويساوي =

والعلامة : ≥ إلى أكبر < ويساوي =

وعليه فإن القيد الأول يمكن أن يكتب كما يلي:

$$2x_1 = 4x_2 < 40$$

$$2x_1 + 4x_2 = 40$$

أما الطريقة الثالثة فإن المقصود بهذه الطريق وضع افتراض سبق وهـو أن كـل ما هو متوفر من مـواد أولية أو مستلزمات إنتاج يتم استخدامه بشكل كامل في العملية الإنتاجية، على هذا الأساس فإن من المفـروض اعتمـاد الصيغـة الرياضية للقيد الـذي يكتب بعلامة المساواة، أي أن : (1)

$$2x_1 + 4x_1 = 40$$

العلاقة الرياضية هذه تعبر عن استغلال المادة الأصلية الأولى بالكامل لطرح كـل من المنتج الأول والمنتج الثاني بالكميات x_2 ، x_2 وهـي معادلـة رياضية مـن الدرجـة الأولى. تعبر هذه المعادلة عن خط مستقيم، ولرسم الخط المستقيم ينبغي معرفة عنه نقطتين تقع أحد هاتين النقطتين على المحور الأفقي والثانية على المحور العمودي، ويتـم التعرف على هذه النقاط وفق الفرضيات التالية : (1)

1- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.1 فقط، لذلك سوف لن يطرح المنتج No.2، أي أن :

$$X_2 = 0$$

$$\therefore\ 2X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{2} = 20$$

وعليه فإن إحداثيات النقطة الأولى هي : (2 , 20) .

2- نفرض أن كل ما هو متوفر من مواد أولية (40) قد تم استخدامه لطرح المنتج No.2 فقط، لذلك لن يطرح المنتج No.1 ، أي أن :

$$X_1 = 0$$

$$\therefore\ 2X_2 = 40$$

$$X_2 = \frac{40}{2} = 20$$

---

(1) إذا كان أحد التغيرات مرفوع للقوة الثانية أي $\left(x_1^2 \text{ أو } x_2^2\right)$ فإن هذه المعادلة تعبر عن منحني.

(1) تستخدم هذه الفرضيات سواء كـانت الطريقـة المعتمـدة في تحويـل المتباينة إلى معادلـة هي طريقة تجزئة العلامة الرياضية أم طريقة الفرضية.

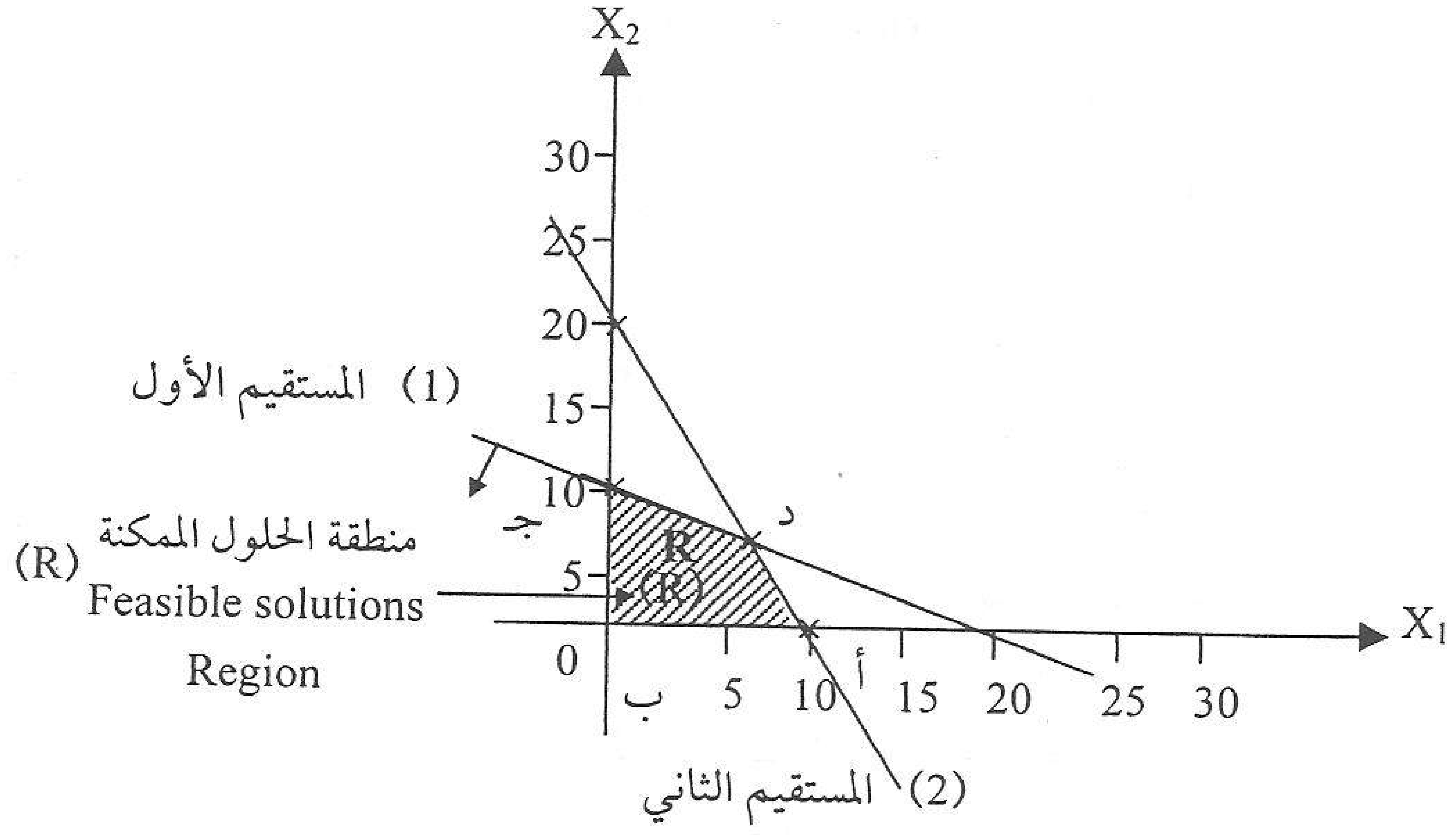
وعليه فإن إحداثيات النقطة الثانية هي : (10 ، 0)

وبنفس الطريقة بالنسبة للقيد الثاني نحصل على النقاط التالية :

النقطة الأولى : (10,0)

النقطة الثانية : (0.20)

بعد ذلك يتم رسم كلا المستقيمين ضمن الإحداثيات الأفقية والعمودية التي تم توضيحه سابقاً ونحصل الرسم البياني للمشكلة كما هو واضح في الشكل رقم (5-3).

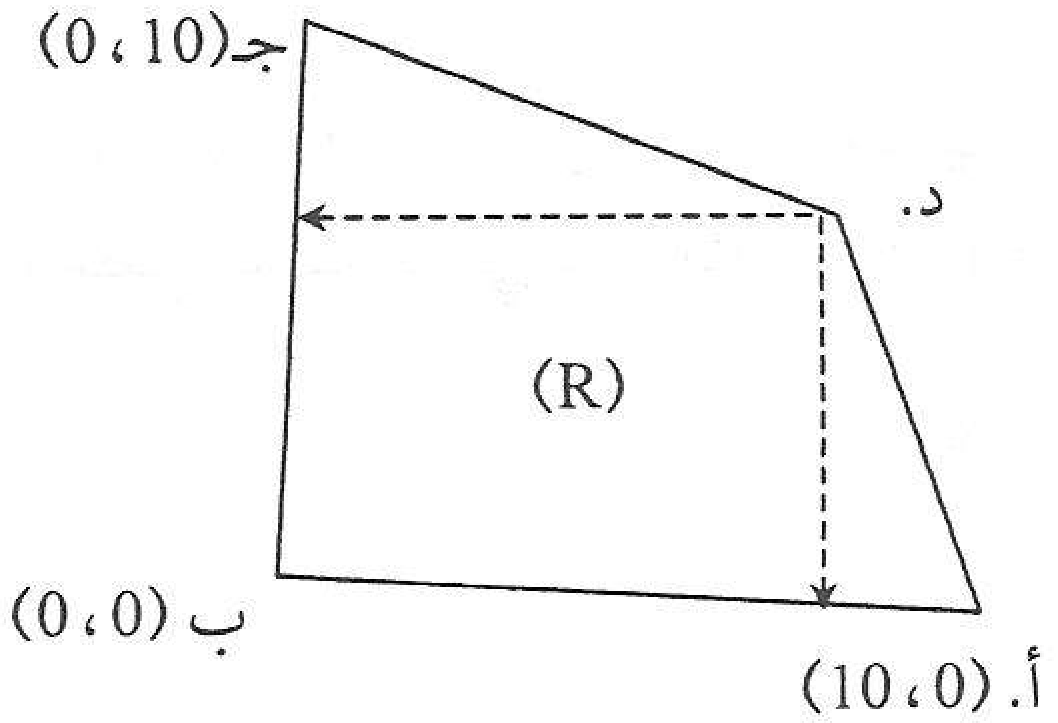


أن المساحة الواقعة تحت المستقيم الأول تحقق العلاقة الرياضية الأولى ($2x_1 + 4x_2 \leq 40$) بحيث أن أي نقطة واقعة تحت المستقيم أو عليه تؤخذ بشكل عشوائي وعند تعويضها في العلاقة المذكورة ينبغي أن تحققها. في حين أن أي نقطة لو أخذت خارج المستقيم أو عليه ينبغي أن تحقق العلاقة ($2X_1 + 4X_2 \geq 40$). وعلى هذا الأساس فإن السهم المثبت على المستقيم يتجه إلى الداخل ونفس الشيء يقال عن العلاقة الرياضية الثانية والتي تم تمثيلها من خلال المستقيم الثاني.

أن تقاطع المساحة التي تحقق المستقيم الأول مع المساحة التي تحقق المستقيم الثاني إلى ظهور منطقة مشتركة يطلق عليها اسم منطقة الحلول Solutions region

ويرمز لها من خلال الحرف R وأن الشكل الهندسي لهذه المنطقة موضح بالشكل رقم (5-4).

الشكل رقم (5-4) منطقة الحلول المركبة (R)



أن منطقة الحلول (R) هي عبارة عن شكل هندسي متوازي الأضلاع أو رباعي أو ما شابه ذلك وهو بمثابة مستوي ظهر بسبب تقاطع عدد من المستقيمات. لهذا الشكل نقاط أو زوايا متطرفة يتم التعرف عليها من خلال إحداثيات معينة. وفي مثالنا هذا نلاحظ أن النقطة (.د) مجهولة الاحداثيات، حيث يتم التعرف عليها بموجب أحد الطريقتين التاليتين :

1- طريق الرسم البياني، وذلك من خلال إنزال المساقط العمودية من نقطة تقاطع المستقيمان الأول والثاني عند النقطة (د) إلى المحور الأفقي والعمودي حيث نلاحظه أن إحداثيات هذه النقطة هي تقريباً (7,7).

2- الطريقة الجبرية، حيث بموجب هذه الطريقة يتم حساب إحداثيات هذه النقطة بالاعتماد على المستقيمات المتقاطعة عند النقطة (د) وذلك من خلال حل معادلات هذه المستقيمات أنياً وذلك كما يلي :

$2X1 + 4X2 = 40$ معادلة المستقيم الأول

$6X_1 + 3X_2 = 60$ معادلة المستقيم الثاني

ويتم في البداية توحيد معادلات أحد متغيرات المعادلات أعلاه وليكن ذلك هو المتغير X_1 مع تغير الإشارة لأجل عملية الطرح ويكون ذلك بضرب المعادلة الأولى بـ (3-) ونحصل على ما يلي :

$$-6X_1 - 12X_2 = -120$$

$$+6_1 + 3X_2 \quad = +60$$

وبالحذف نحصل على:

$$X\text{-}1 \qquad -9X_2 = -60$$

$$9X_2 = 60$$

$$\therefore X_2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3} \cong 6.7$$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على:

$$6X_1 = 3\ (6.7) = 60$$

$$6X_1 + 20.01 = 60$$

$$6X_1 = 60\text{-}20.0$$

$$6X_1 = 40$$

$$X_1 = \frac{40}{6} \cong 6.7$$

يتضح مما تقدم إن الطريقة الجبرية هي أكثر دقة من طريقة الرسم.

بعد أن تم تحديد إحداثيات النقطة (د) يتم التعريف في معادلة دالة الهدف لتحديد قيمة الحل الأمثل الذي يعبر عن الأرباح الكلية المتوقعة، وذلك كما يلي:

$$Z = 8X_1 + 5X_2 \rightarrow \text{Max}$$

أ. (10,0) $\quad Z = 8\ (10) + 5\ (0) \rightarrow 80$

ب. (0,0) $\quad Z = 8\ (0\ ) + 5(0) \rightarrow 0$

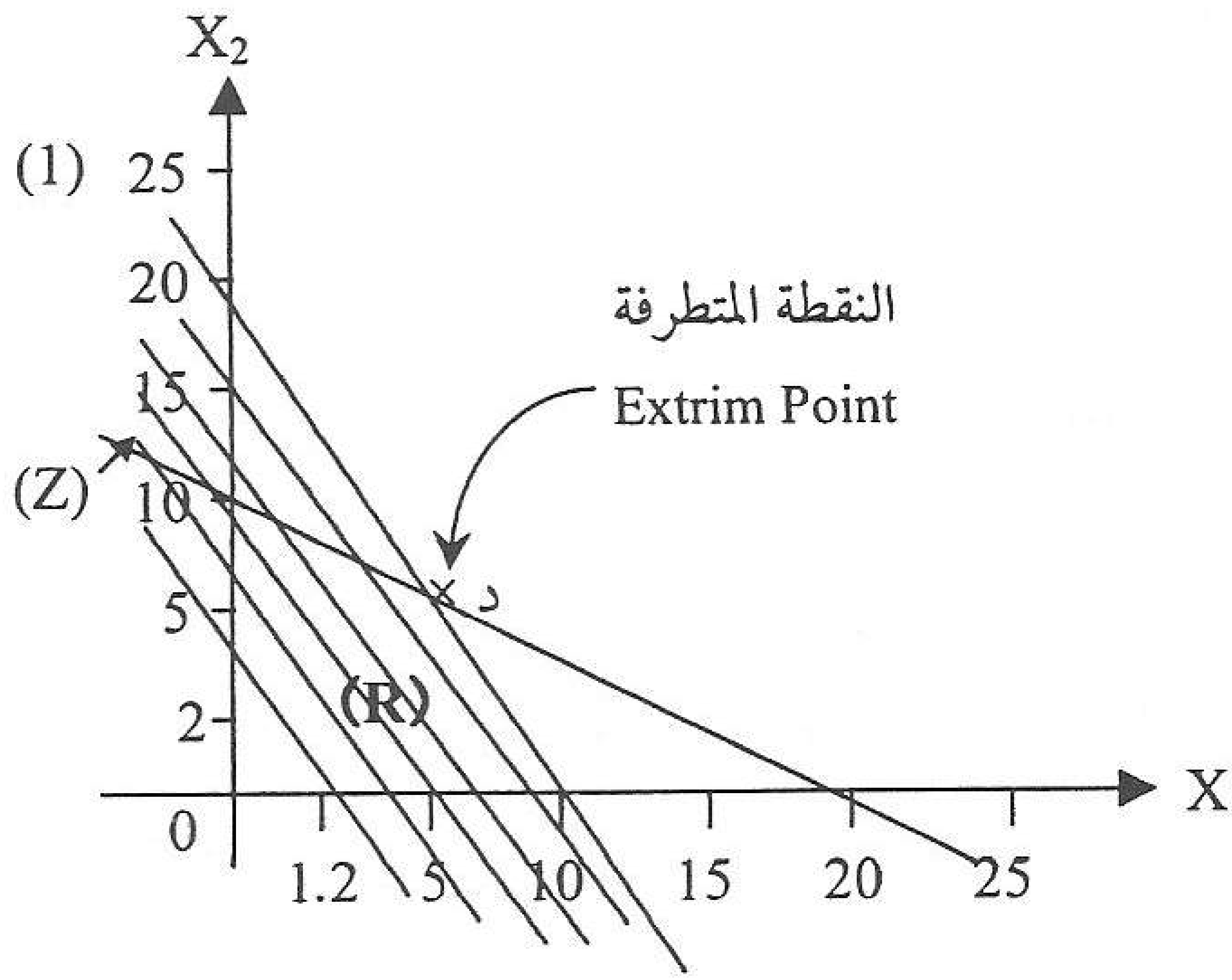
جـ. (0,10) $\quad Z = 8(0) + 5\ (10) \rightarrow 50$

د. (6.7, 6.7) $\quad Z = 8(6.7) + 5(6.7) \rightarrow 87.1$ الحل الأمثل

يتضح مما تقدم أن الحل الأمثل هو عند النقطة (د) لكون قيم احداثيات النقطة أدت إلى الحصول على أكبر قدر ممكن من الأرباح المتوقعة. وتفسر هذه النقاط الأربعة بأنها عبارة عن أربعة بدائل من خطط الإنتاج المقترحة، وأن خطة الإنتاج المثلى هي التي تقع عند النقطة (د) والتي بموجبها ينبغي طرح كل من المنتج الأول والثاني بنفس المقدار وهو (6.7) وحدة وهذا القرار يؤدي إلى الحصول على 87.1 وحدة نقدية من

... ومن ثم يتم رسم مستقيمات موازية بالاتجاه البعيد عن نقطة الأصـل، وأن آخر مستقيم يمس المنطقة (R) بنقطة واحدة لابد وأن تكون هذه النقطة هي (د) التي هي عادة تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل وتعرف بالنقطة المتطرفة (Expreim point) كما هو واضح في الشكل رقم (5-5).

الشكل رقم (5-5) تأكيد أن نقطة د وتمثل نقطة الحل الأمثل.



ويتم رسم مستقيم معادلة دالة الهدف بعد أن تؤخذ قيم افتراضية للمقدار Z وذلك كما يلي:

$$Z = 8X_1 + 5X_2$$
$$10 = 8X_1 + 5X_2$$

نفرض أن : $Z = 10$

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 0 \\ 8X_1 &= 10 \\ X_1 &= \frac{10}{3} = 1.2 \end{aligned}\right\} (1.2\ ,\ 0)$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= 0 \\ 5X_2 &= 10 \\ X_2 &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}\right\} \quad (0.2)$$

من الشكل رقم (5-5) يتضح أن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل، وبعبارة أخرى عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف فإن نقطة الحل الأمثل تقع أبعد ما يكون عن نقطة الأصل.

أن نقطة الحل الأمثل يمكن أن تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل، وذلك إذا كان المطلوب تصغير دالة الهدف، وهذه هي الحالة الأخرى من حالات الحل بطريقة الرسم، وذلك عندما تكون منطقة الحلول الممكنة واقعة بين المستقيمات المتقاطعة والزاوية البعيدة من الربع الأول، ولأجل توضيح هذه الحالة نعتمد المثال التالي :

تعاقدت إحدى دور الحضانة مع إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية المتخصصة بصناعة المواد الغذائية ذات المواصفات الخاصة، لتجهيزها بكميات من المواد الغذائية المذكورة. وتم الاتفاق على أن تحوي هذه المواد الغذائية على أنواع معينة من الفيتامينات، وهي الفيتامين (A) بمقدار (40) وحدة، الفيتامين (B) بمقدار (50) وحدة والفيتامين (C) بمقدار (49) وحدة. وإذا علمت أن منظمة الأعمال الإنتاجية التي تم التعاقد معها تنتج نوعين من المواد الغذائية، وهي المادة الغذائية رقم (1) والمادة الغذائية رقم (2). والجدول رقم (5-2) يوضح المواصفات الإنتاجية لهذه المواد الغذائية من حيث مقدار الفيتامينات المطلوبة لكل نوع من أنواع المواد الغذائية مع كلفة الإنتاج للوحدة الواحدة.

جدول رقم (5-2) بيانات المشكلة

المنتجات / المواد الأولية	المنتج رقم (1)	المنتج رقم(2)	مقدار المتوفر من المواد الأولية
vitamin A	2	4	40 وحدة
Vitamins B	10	5	50 وحدة
Vitamin C.	7	7	49 وحدة
الكلفة المتوقعة	8	5	

المطلوب:

ما هي الكمية المثلى التي ينبغي إنتاجها من المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) بحيث تكون مقدار الفيتامينات المكتسبة من الأنواع الثلاث هي أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج هي أقل ما يمكن.

الحل:

أن حل هذه المشكلة بطريقة الرسم يتم بنفس الخطوات التي تم اعتمادها في المثال السابق ، وعادة في البداية الخطوة الأولى صياغة النموذج الرياضي ، وذلك كما يلي :

الخطوة الأولى :

صياغة النموذج الرياضي بعد وضع الافتراضات التالية :

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Rightarrow X$

$\therefore$ كمية المادة الغذائية رقم (1) $\Rightarrow X_1$

كمية المادة الغذائية رقم (2) $\Rightarrow X_2$

التكاليف الكلية المتوقعة $\Rightarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية لنموذج المشكلة هي :

$4X1 + 10X2 \geq 40$ .... (1) قيد احتواء الفيتامين (A)

$10X_1 + 5X_2 \geq 50$ .... (2) قيد احتواء الفيتامين (B)

$7X1 + 7X2 \geq 49$ .... (3) قيد احتواء الفيتامين (C)

$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$.

$X_1 , X_2 \geq 0$

الخطوة الثانية :

تحديد إحداثيات المستقيمات التي تعبر عن القيود أعلاه وذلك كما يلي :

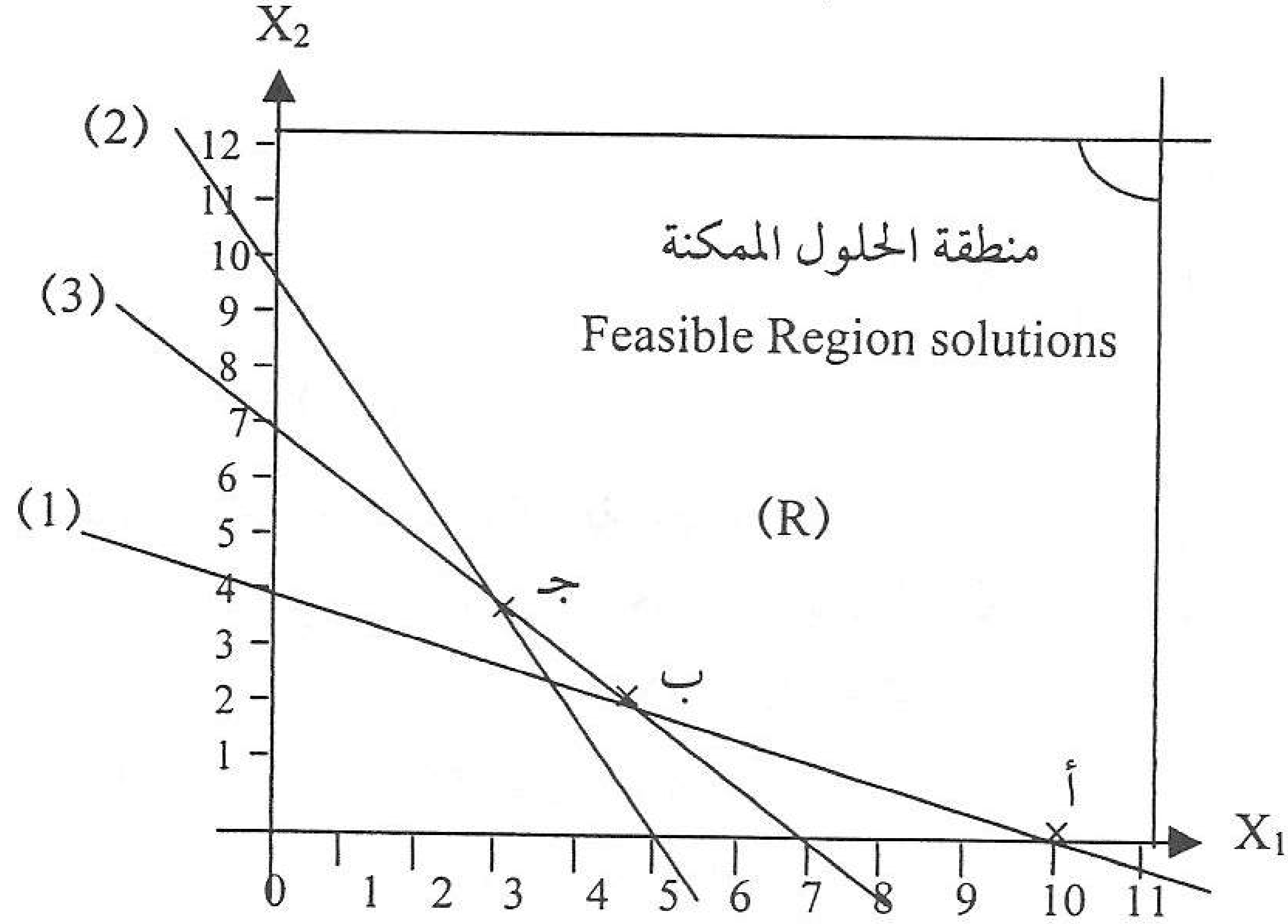
إحداثيات المستقيم الأول (0.4) و (10.0)

إحداثيات المستقيم الثاني (10.0) و (5.0)

إحداثيات المستقيم الثالث (0.7) و (7.0)

وعلى هذا الأساس يتم تصميم الشكل البياني الذي يعبر عن المشكلة ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-6).

الشكل رقم (5-6) منطقة الحلول الممكنة للمشكلة



من الشكل البياني رقم (5-6) يتضح أن النقاط التي تعبر عن الحل الأفضل هي أربعة نقاط (أ، ب، جـ، د). أن إحداثيات النقطة (أ) والنقطة (د) معروفة بينما نجد أن إحداثيات النقطة (ب) والنقطة (جـ) مجهولة. وأفضل طريقة لتحديدها هي طريقة الحل باستخدام الطريقة الجبرية أو ما يعرف بطريقة حل المعادلات الآنية وذلك كما يلي :

النقطة (ب) : نحدد من تقاطع المستقيم الثالث والأول، أي أن :

$4X_1 = 10X_2 = 40$ .... (1) بضرب طرفي المعادلة × 7-

$7X_1 + 7X_2 = 49$ .... (2) بضرب طرفي المعادلة × 4

بالحذف

$$-28X_1 - 70X_2 = -280$$

$$+28X_1 + 28X_2 = +196$$

$$-42X_2 = -84 \qquad -1\ X$$

$$42X_2 = 84$$

$$\therefore X_2 = \frac{84}{42} = 2$$

وبالتعويض في أحد المعادلتين أعلاه، نحصل على قيمة X_1 كما يلي :

$$4X_1 + 10(2) = 40$$

$$4X_1 + 20 = 40$$

$$4X_1 = 40 - 20$$

$$4X_1 = 20$$

$$\therefore X1 = \frac{20}{4} = 5$$

$\therefore$ إحداثيات النقطة ب هي (5.2) .

وبنفس الطريقة تحسب إحداثيات النقطة (جـ) من خلال تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (3) حيث نحصل على (3.4)، بذلك يكون التعريف في دالة الهدف كما يلي :

$$Z = 5X_1 + 8X_2 \rightarrow \text{Min}$$

أ . (10.0) $Z = 5\ (10) + 8\ (0) \rightarrow 50$

ب. (5.2) $* Z = 5\ (5) + 8(2) \rightarrow 41$

جـ . (3.4) $Z = 5\ (3) + 8(4) \rightarrow 47$

د . (0.10) $Z = 5\ (0) + 8\ (10) \rightarrow 80$

ومن ذلك يتضح أن على دار الحضانة التعاقد للحصول على 5 وحدة من المنتج رقم (1) و (2) وحدة من المنتج رقم (2) حيث عند هذه الكميات من الإنتاج سوف تكون كمية الفيتامينات المكتسبة من قبل الأطفال أكبر ما يمكن وأن التكاليف الكلية للإنتاج سوف تكون أقل ما يمكن وهي 41 وحدة نقدية، وهذه النتائج تعبر عن الحل الأمثل للمشكلة.

2.4.5 الطريقة الجبرية Algerbric Method :

أن هذه الطريقة هي من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري وفق احتمالات القيم المتوقعة للمتغيرات (X_2, X_1) وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد المتغيرات في النموذج الرياضي اثنين فقط، وهي لا تتطلب أي رسم عند تحديد الحلول الممكنة والحل الأفضل والحل الأمثل للمشكلة. الفكرة الأساسية

لهذه الطريقة تقوم على أساس تقسيم المتغيرات إلى نوعين :

1- المتغيرات الأساسية Basic Variables وهـي تلـك المتغـيرات الـتي لهـا دور مـهم المشكلة وذلك لكون قيم هذه المتغيرات عادة أكبر من الصفر ، أي أن :

$Xj > Si > 0$

2- المتغيرات غير الأساسية Non - Basic Variables وهـي تلـك المتغيرات الـتي ليس لها دور مهم في المشـكلة وتكـون قيـم هـذا المتغـيرات عـادة مسـاوية إلى الصفـر ، أي أن : $Si = 0$ ، $Xj = 0$.

من المبادئ الأخرى التي تعتمد عليها هذه الطريقة هي إضافـة المتغـيرات الراكـدة (+S) في تحويل الصيغ الرياضية للمتباينات إلى معادلات رياضية ثابتة.

لتوضيح فكرة هذه الطريقة نعتمد نفس المثال الذي ورد في حالة الطريقة البيانيـة وذلك كما يلي :

$$1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 2X_1 + 4X_2 \leq 40$$

$$2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; 6X_1 + 3X_2 \leq 60$$

$$Z = 8X_1 = 5X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

يتم إضافة المتغيرات الراكدة Slack Variables (+s) ذلك

$$2X_1 + 4X_2 + S_1 = 40$$

$$6X_1 + 3X_2 + S_2 = 60$$

$$Z = 8X_1 + 5X_2 = 0.5_1 + 0.5_2 \rightarrow Max$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

بعد أن تم تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة المستقرة التي هي الصيغة القياسية (Standard Form) تتم بعدها عملية في إطار جدول خاص لذلك وكما يلي : د

رقم المحاولة	المتغيرات غير الأساسية Non -Basic Variable Xj >0 , Si> 0		المتغيرات الأساسية Basic Variables Xj=0 , Si = 0		قيمة دالة الهدف
1	$X_1 = 0$	$X_2 = 0$	$S_1 = 40$	$S_2 = 50$	$Z = 0$
2	$X_1 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 10$	$S_2 = 20$	$Z = 50$
3	$X_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_2 = 20$	$S_1 = -40$	$Z = 100$ تهمل
4	$X_2 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 10$	$S_1 = 20$	$Z = 80$
5	$X_2 = 0$	$S_1 = 0$	$X_1 = 20$	$S_2 = -60$	$Z = 140$ تهمل
*6	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$	$X_1 = 6.7$	$X_2 = 6.7$	$Z = 87.1$

يلاحظ من الجدول رقم (5-3) أن النتائج في المحاولة الثانية والمحاولة الخامسة قد أهملت بسبب كون قيمة المتغير (S) كانت سالبة وهذا يتعارض مع شرط اللاسلبية (Si ≥0). وعلى هذا الأساس تم اختيار الحل الأمثل من بين المتبقية، حيث كانت في آخر محاولة وهي مشابهة لما تم التوصل إليه بطريقة الرسم البياني.

3.4.5 الطريقة المبسطة Simples Method :

أن مبتكر هذه الطريقة هو العالم الرياضي Dantzig وذلك في عام 1947 وتعتبر هذه الطريقة من أهم الطرق التي يتم اعتمادها في حل مشاكل البرمجة الخطية، وذلك لكونها تعالج ذلك النوع من المشاكل التي يكون فيها عدد كبير من المتغيرات (اثنين فأكثر). إن فكرة هذه الطريقة هي إيجاد الحل للمشكلة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي) في مراحل متسلسلة. يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسينه وذلك لايجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه ❖ لأكثر من مرحلة واحدة. وفي المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل.أن هذه المراحل من عمليات لحل تتم في إطار جدول خاص لذلك يعرف باسم (جدول السمبلكس Simplex Table) كما هو واضح في الجدول

(*) تم الحل وفق طريقة الحل الآني أو ما يعرف بحل المعادلات الآنية.

رقم (5-4). في المرحلة الأولى من الجدل المذكورة يتم إدخـال كافـة البيانـات المتوفرة في النمـوذج الرياضي. ويفـترض في النمـوذج المذكـور أن يكـون مكتوباً بالصيغـة القياسـية Standard Form ، وبعد أن يتم نقل البيانات بشكل كامل يتـم بعدهـا إجـراء عمليـات حسابية معينة على مثال تطبيقي. ومن الجديـر بالذكر هنـا أن الحـل الـذي يتـم الحصـول عليه في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس

جدول رقم (5-4) الصيغة العامة لجدول السمبلكس Simplex Table

	Xj المتغيرات Variables Si	X$_1$	X$_2$	X$_3$	....	X$_n$	S$_1$	S$_2$	.....	S$_m$	قيمة المتغير الأساس bi (الحل)	
جدول الحل (الأولي) الابتدائي	Cj معامل المتغيرات في دالة الهدف											
	المتغيرات الأساسية Basic Variables											
	Zj											قيمة دالة الهدف
	(cj - zj)											
الجدول الثاني	المتغيرات الأساسية Basic Variables											
	zj											قيمة دالة الهدف
	(cj-zj)											
... وهكذا حتى ...	المتغيرات الأساسية											
الجدول الأخير (الحل الأمثل)	Basic Variables											
	Zj											قيمة دالة الهدف
	(cj-zj)											

يقع في نقطة الأصل، حيث تكون كل قيم المتغيرات ($x_1, x_2, \dots x_n$) مساوية للصفر، في حين تكون قيم المتغيرات الراكدة ($s_1, s_2, \dots, s_m$) تساوي القيم الواقعة إلى الجهة اليمنى من العلاقات الرياضية والتي هي موجودة في جدول السمبلكس تحت اسم (قيمة المتغير الأساس bi).

أن خطوات حل مشكلة تكون فيها دالة الهدف تصل إلى أعلى ما يمكن (Max)، وأن القيود مكتوبة في حالة (أقل أو يساوي ≤) تختلف بعض الشيء عن الحالة عندما تكون المشكلة فيها دالة الهدف تصل إلى اقل ما يمكن، وأن القيود مكتوبة في حالة. (أكبر أو يساوي ≥) أو خليط من العلاقات (≤ ، = ، ≥). لذلك سوف يتم التمييز بين ما يلي:

أولاً: الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة البسيطة) في حالة تعظيم دالة الهدف.

ثانياً: الحل بطريقة السمبلكس عندما تكون المطلوب تصغير دالة الهدف مع وجود قيود مكتوبة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي)

وفيما يلي مثال يوضح فكرة الحل للمشكلة بطريقة السمبلكس عندما يكون المطلوب تعظيم دالة الهدف مع وجود قيود تحمل علامة (≤ أقل أو يساوي).

مثال رقم (1):

إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية، ترغب في طرح ثلاث أنواع من المنتجات، وكان لديها نوعين من المواد الأولية البديلة، علماً بأنه يتوفر منها كميات محدودة، وكان الربح المتوقع من بيع كل واحد من هذه المنتجات الثلاث وبقية البيانات موضحة كما في الجدول رقم (5-5).

جدول رقم (5-5) البيانات الأساسية للمشكلة

المنتجات / مستلزمات الإنتاج الأساسية	المنتج No.3	المنتج No.2	المنتج No.3	مقدار المتوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية
المادة الأولية .I	2	1	3	6 طن
المادة الأولية .II	1	4	2	4 طن
الربح المتوقع	3	2	1	

المطلوب:

حل المشكلة بطريقة السمبلكس موضحاً كمية المنتج No.1 ، المنتج No.2 ، المنتج No.3 التي تجعل الأرباح المتوقعة أعلى ما يمكن وتحقق الاستغلال الأمثل لما هو متوفر من مستلزمات الإنتاج (المواد الأولية).

الحل:

من أجل حل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة ، وذلك كما يلي :

نفرض أن كمية الإنتاج هي $\Leftarrow X$

$\therefore$ كمية الإنتاج من المنتج No.1 $\Leftarrow X_1$

كمية الإنتاج من المنتج No.2 $\Leftarrow X_2$

كمية الإنتاج من المنتج ..No $\Leftarrow X_3$

مقدار الأرباح الكلية المتوقعة $\Leftarrow Z$

وعليه فإن الصيغة الرياضية القانونية لهذه المشكلة هو كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 \rightarrow Max.$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

نفرض أن :

S $\Leftarrow$ مقدار مستلزمات الإنتاج(المواد الأولية) غير المستغلة.

$S_1 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية .I غير المستغلة.

$S_2 \Leftarrow$ مقدار المادة الأولية II غير المستغلة.

وعليه فإن الصيغة القياسية بعد إضافة المتغير الراكد (S) سوف تكون كما يلي :

$$(1) \ldots\ldots \quad 2X_1 + X_2 + 3X_3 + S_1 = 6$$

$$(2) \ldots\ldots \quad X_1 + 4X_2 + 2X_3 + S_2 = 4$$

$$Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow \text{Max.}$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

$$S_1, S_2 \geq 0$$

تنقل بعد ذلك البيانات إلى جدول السمبلكس وعلى النحو التالي :

جدول رقم (5-6) جدول السمبلكس

الجدول الأساسي	Xj المتغيرات Variables Si			X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	
	معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف			3	2	1	0	0		
	Basic Variables	← S_1	0	2	1	3	1	0	6	$6 \div 2 = \boxed{3}$
		← S_2	0	1	4	2	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
	Zj			0	0	0	0	0	0	قيمة دالة الهدف Z ←
	(cj - zj)			3	2	1	0	0		
الجدول الثاني	Basic Variables	X_1	3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3	$3 \div \frac{1}{2} = 6$
		← S_2	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$1 \div \frac{7}{2} = \boxed{\frac{2}{7}}$
	zj			3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	9	حالة الهدف Z←
	(cj-zj)			0	$\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0		
الجدول الثالث والأخير	المتغيرات الأساسية	X_1	3	1	0	10/7	-1/7		20/7	
		X_2	2	0	1	1/7	2/7		2/7	
	Zj			3	2	32/7	10/7	1/7	64/7	قيمة دالة الهدف Z ←
	(cj-zj)			0	0	-25/7	-10/7	-1/7		

من الجدول رقم (5-6) تتضح النتائج التالية :

في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، وهي مرحلة الحل الابتدائي الأساسي الممكن، نقرأ النتائج التالية :

المتغيرات الأساسية $\begin{cases} S_1 = 6 \\ S_2 = 4 \end{cases}$

المتغيرات غير الأساسية $\{ X_1 = X_2 = X_3 = 0$

وهو يعني أن إدارة المنظمة لم تستغل أي من المواد الأولية المتوفرة والبديلة لذلك لم يتم طرح أي نوع من المنتجات الثلاث، وكانت قيمة دالة الهدف في جدول السمبلكس، التي فيها يتم البدء بتحسين الحل السابق، حيث النتائج التالية :

متغيرات أساسية $\begin{cases} X_1 = 3 \\ S_2 = 1 \end{cases}$

متغيرات غير أساسية $\begin{cases} X_2 = X_3 = 0 \\ S_1 = 0 \end{cases}$

$$Z \Rightarrow 9$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار 3 وحدات، وعدم طرح بقية المنتجات. وهذا القرار سوف يحق الاستغلال الكامل للمادة الأولية الأولى (S_i=0) ويبقي على احتياطي من المادة الأولية الثانية بمقدار (1) طن . إن خطة الإنتاج هذه سوف تؤدي إلى تحقيق أرباح بمقدار (9) وحده نقدية.

للتعرف على طبيعة الحل أعلاه الذي تم الحصول عليه، من حيث كونه حل أفضل أو حد أمثل، يتطلب الأمر الرجوع إلى جدول السمبلكس وبالتحديد للحقل (Cj-Zj)، وذلك كما يلي :

إذا كانت كل القيم في الحقل المذكور كما يلي :

$$(Cj - Zj) \leq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الأمثل :

وإذا كانت كل أو بعض قيم الحقل المذكور

$$(Cj - Zj) \geq 0$$

فإن الحل الذي تم التوصل إليه هو الحل الأفضل، ويتطلب الأمر الاستمرار في عملية النتائج تحسين التي تم الحصول عليها. ولما كان في مثالنا هذا المرحلة الثانية تحقق

الشرط $[(cj\text{-}zj) \geq 0]$ أي وجود قيمة موجبة ، لذلك تم حساب المرحلة الثالثة وكانت فيه كل قيم $(cj\text{-}zj)$ هي سالبة وأصفار وهذا يعني أنه تم الحصول على الحل الأمثل ، والذي كان كما يلي :

$$\text{متغيرات أساسية} \begin{cases} X_1 = \dfrac{20}{7} & \text{وحدة} \\ X_2 = \dfrac{2}{7} & \text{وحدة} \end{cases}$$

$$\text{متغيرات غير أساسية} \begin{cases} X_3 = 0 \\ S1 = S2 = 0 \end{cases}$$

$$Z \Rightarrow \frac{64}{7} \ \text{وحدة نقدية}$$

وهو يعني طرح المنتج رقم (1) بمقدار $\frac{20}{7}$ وحدة والمنتج رقم (2) بمقدار $\frac{2}{7}$ وحدة ، وعدم طرح المنتج رقم (3). وفي ظل هذه الخطة يتم تحقيق حالة الاستغلال الكامل لكل من المادة الأولية الأولى والثانية مع تحقيق أكبر عائد ربح ممكن وهو $\frac{64}{7}$ وحدة نقدية.

وقد تم حساب المراحل الثلاث (مرحلة الحل الأساسي الممكن ، مرحلة الحل الأفضل ، ومرحلة الحل الأمثل) وفق قواعد العمليات الحسابية التالية :

أولاً : يتحدد المتغير الداخل في أي مرحلة بأنه ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحقل (Cj-Zj) ويسمى المتغير الداخل Entering variable.

ثانياً : العمود الذي يقع فيه المتغير الداخل يسمى العمود المحوري Pirotal clum

ثالثاً : يتحدد المتغير الخارج Learing variable من خلال قسمة القيم الواقعة في عمود قيمة المتغير الأساس (bi) على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري ، ويخرج المتغير الذي له أقل قيمة ويصبح متغير خارج ، وفي المثال السابق تم تحديد المتغير الخارج كما يلي :

$$S1 \Rightarrow \frac{6}{2}=3$$

$$S_2 \Rightarrow \frac{4}{1} = 4$$

لذلك يكون S_1 المتغير الخارج.

رابعاً: الحقل الذي يقع فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري Pirotal Row .

خامساً: العنصر الواقع في نقطة تقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يسمى بالعنصر المحوري Pirotal Element .

سادساً: تنقل كافة البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى من جدول السمبلكس. ويدخل في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس إلى مرحلة الأساس (المتغيرات الأساسية) المتغيرات الراكدة S_2,S_1. حيث توضع أمام كل متغير المعاملات للمتغيرات في القيود. أي أمام المتغير S_1 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الأولى. وأمام S_2 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الثانية. وفي العمود b_i توضع القيم الموجودة في الطرف الأيمن من كل علاقة رياضية. أما في العمود الأخير C_B فإنه توضع فيه معاملات المتغيرات الأساسية S_2,S_1 في دالة الهدف. وفي بقية الحقول تتم عمليات حسابية معينة وذلك على النحو التالي:

1. تحسب القيم (Z_j) ، (c_j-z_j) ، z كما يلي:

$$Z_j \Rightarrow C_B * P_j$$

حيث أن:

$C_B \Leftarrow$ معامل المتغيرات الأساس في دالة الهدف.

$P_j \Leftarrow$ عمود القيم الواقعة تحت المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

$(c_j = z_j) \Leftarrow$ تحسب هذه القيمة من حاصل طرح القيم التي تم إيجادها في أعلاه Z_j من معاملات المتغيرات في دالة الهدف والتي يرمز لها C_j.

وفي مثالنا السابق تم حساب القيم المذكورة في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس كما يلي:

Cj	-	Zj		
3	-	0	=	3
2	-	0	=	2
1	-	0	=	1
0	-	0	=	0
0	-	0	=	0

أما القيمة Z قيم حسابها كما يلي :

$$Z \Rightarrow C_B * b_i$$

حيث على سبيل المثال في المرحلة الثانية من جدول السمبلكس في مثالنا السابق كانت قيمة Z كما يلي :

$$Z \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 9$$

2- تحسب القيم في المرحلة التي تلي المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفق عمليات حسابية معينة. حيث تعتمد العمليات الحسابية في المرحلة الثانية على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى. أي بعبارة أخرى لحساب القيم للمتغيرات في المرحلة الثانية ، فإن ذلك يعتمد على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى ، ولحساب قيم المتغيرات في المرحلة الثالثة ، فإن ذلك يعتمد على قيم المتغيرات في المرحلة الثانية وهكذا.

3- في المراحل التالية للمرحلة الأولى من جدول السمبلكس ، تعطي الأولوية في عمليات الحساب لقيم المتغير الداخل Entering Variable ، حيث تحسب قيم هذا المتغير بقسمة ما يقابلها من قيم في المرحلة السابقة على العنصر المحوري ، وفي مثالنا السابق تم حساب قيم المتغير X_1 في المرحلة الثانية كما يلي :

$$X_1 \Rightarrow \frac{2}{2} = 1 \ , \frac{1}{2} , \frac{3}{2} , \frac{1}{2} , \frac{0}{2} = 0 \ , \frac{6}{2} = 3$$

4- قيم المتغيرات الأخرى (غير المتغير الداخل) تحسب وفق العلاقة الرياضية التالية :

$$N_j = K - \frac{M * y}{a_{ij}}$$

حيث أن :

$N_j \Leftarrow$ القيمة الجديدة المطلوب وضعها في الحقل (j).

$K \Leftarrow$ القيمة الحالية .

$M \Leftarrow$ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في الصف المحوري.

$y \Leftarrow$ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في العمود المحوري.

$a_{ij} \Leftarrow$ العنصر المحوري.

وبذلك فقد تم حساب القيم للمتغير S_2 في المرحلة الثانيـة في مثالنا السابق على النحو التالي :

$$N_1 = 1 - \frac{2*1}{2} = 0$$

$$N_2 = 4 - \frac{1*1}{2} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

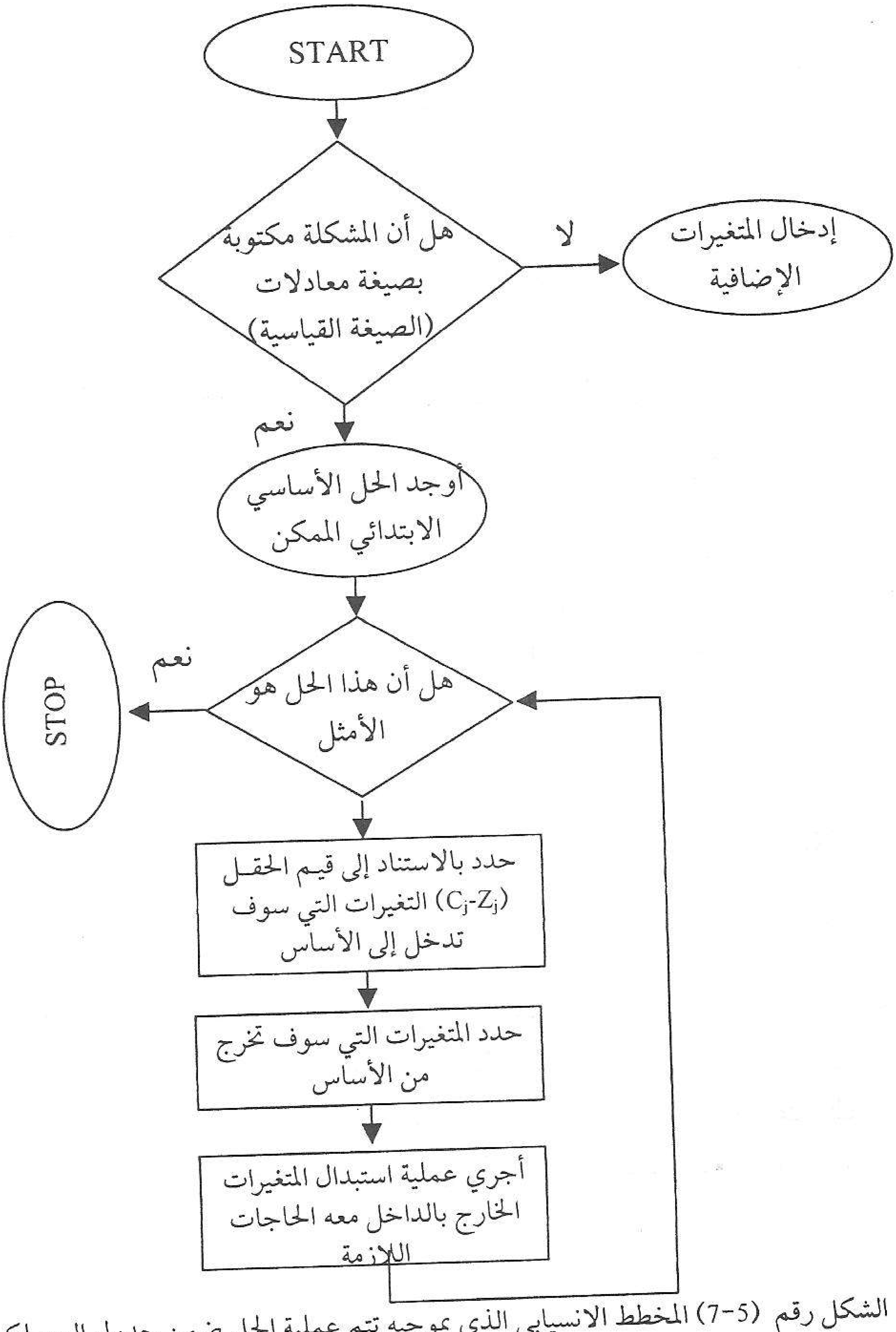
$$N_3 = 2 - \frac{3*1}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$N_4 = 0 - \frac{1*1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$N_5 = 1 - \frac{0*1}{2} = -1$$

$$N_6 = 4 - \frac{6*1}{2} = 1$$

أن العمليات الحسابية السابقة ، ينبغي في النهاية أن تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل وذلك ضمن خطوات متسلسلة منطقية كما أشرنا إلى ذلك أعلاه. أن هـذه العمليات ابتدأت من صياغة النموذج الرياضي وكتابته بصيغة معـادلات (الصيغة القياسية). لغاية الحصول على الحل الأمثل يمكن التعبير عنها مـن خـلال المخطط الانسيابي الموضح بالشكل رقم (5-7).



الشكل رقم (5-7) المخطط الانسيابي الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس

ثانياً:الحل بطريقة السمبلكس (الطريقة المبسطة) في حالة تصغير دالـة الهدف (Min Z) مع وجود خليط من العلاقات الرياضية (≤ ، = ، ≥) في القيود.

أن بعض المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، يتم التعبير عنها من خلال نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن وتكتب قيود النموذج الرياضي عادة بصيغة (≥ أكبر أو يساوي) مع وجود بعض الحالات للأنواع الأخرى من القيود التي تحمل العلامات الرياضية (= يساوي ، ≤ أقل ويساوي). أن تحويل هذا النوع من النماذج الرياضية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، يتم بعد أن تضاف ونطرح متغيرات معينة/ وقد سبق أن تم توضيح ذلك في الفصل السابق. أن المتغيرات التي تضاف هي :

1- المتغير الفائض (S) surplus الذي يطرح من الطرف الأيمن للعلاقة الرياضية التي تعبر عن القيود وهذه قد تطرح أو تضاف في معادلة دالة الهدف.

2- المتغير الاصطناعي (R) Artificial variable الذي يضاف إلى القيود وتطرح أو يضاف في دالة الهدف، حيث تظهر هذه المتغيرات في الدالة المذكورة بمعامل كبير جداً يسمى (M - الكبيرة)((1)).

أن حل النموذج الرياضي الذي يحمل المواصفات أعلاه، وتحويله إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات (S+وR, S) يتم وفق اثنين من الطرق الأساسية، وهذه الطرق هي :

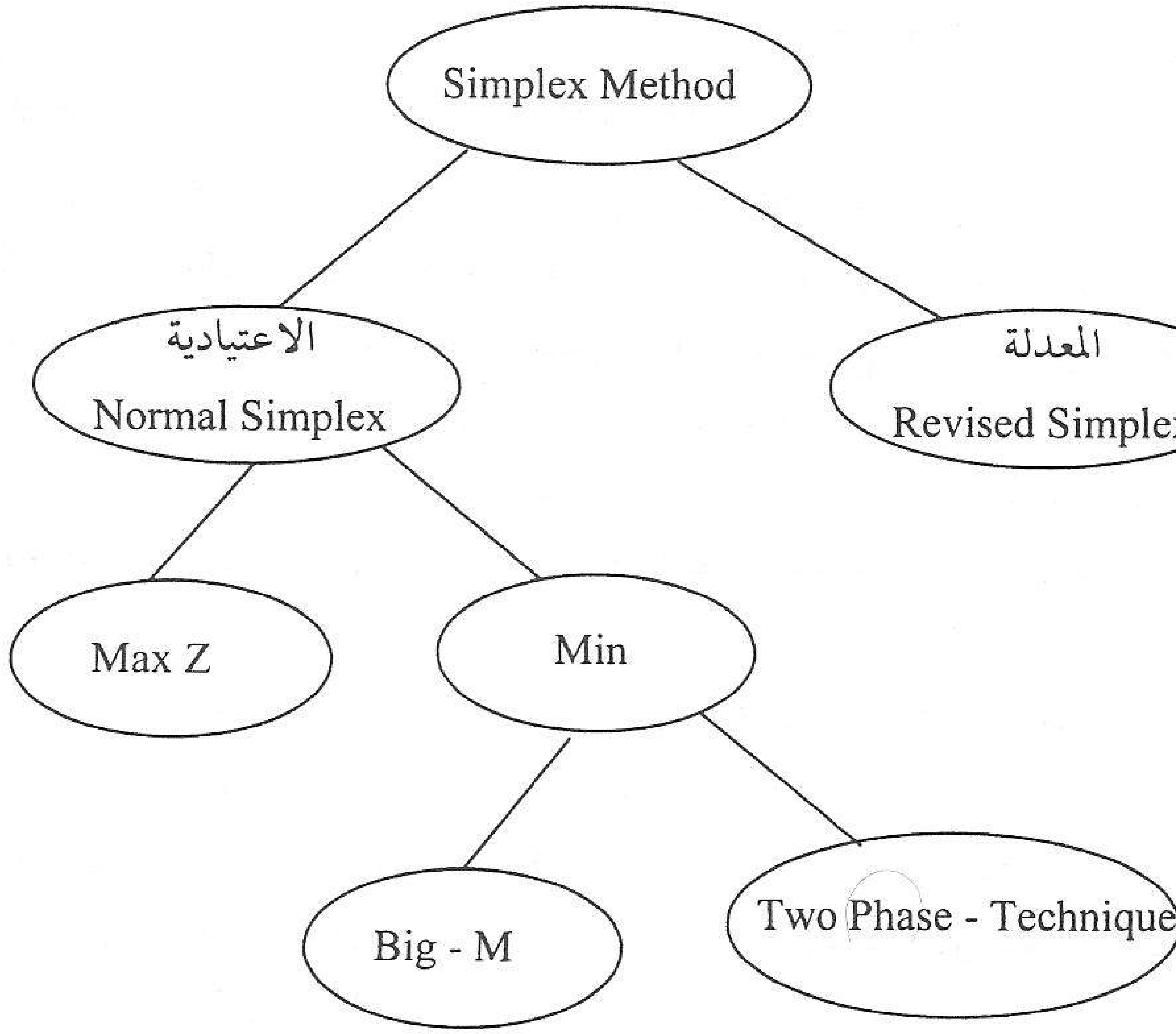
1- طريقة (M - الكبيرة) M- Technique Method.

2- طريقة المرحلتين Two - Phase Technique .

وأن موقع هاتين الطريقتين بالنسبة لطريقة السمبلكس يمكن توضيحهما من خلال الشكل رقم (5-8).

---

(1) لمزيد من التفاصيل راجع الجدول الخاص بإضافة المتغيرات ($+S, R_1-S$) في الفصل السابق.



شكل رقم (5-8) موقع طريقة M - الكبيرة وطريقة المرحلتين ضمن طريقة السمبلكس

من أجل توضيح فكرة الطريق السابقة ، يتطلب الأمر الاستعانة بأمثلة تطبيقية كما سيرد أدناه.

أولاً : تطبيق طريقة (Big - M) أم الكبيرة.

أن فكرة هذه الطريقة هي إضافة معامل كبير جداً لكل متغير إصطناعي Artificial Variables (R) في دالة الهدف ويحمل هذه المعامل في معادلة الهدف إشارة موجبة في حالة تصغير دالة الهدف وإشارة سالبة في حالة التعظيم ، حيث أن هذه الإضافة لهذا التغير كفيلة بإخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل الأمثل. وفيما يلي مثال يوضح فكرة تطبيق هذه الطريقة.

مثال رقم (1):

النموذج الرياضي التالي يعبر عن أحد المشاكل المستمدة من الواقع العملي لأحد منظمات الأعمال الإنتاجية، والذي يتعلق بطرح نوعين من المنتجات:

(1) .... $X_1 + 3X_2 \geq 30$

(2) .... $4X_1 + 2X_2 \geq 40$

$$Z = 2X_1 + X_2 \rightarrow Min$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

المطلوب:

حل النموذج الرياضي واستخراج النتائج النهائية لهذه المشكلة مستخدماً طريقة (Big - M).

الحل:

لحل هذه المشكلة يتطلب الأمر في البداية تحويل صيغة النموذج الرياضي من الحالة القانونية الغير مستقرة إلى الحالة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (Surplus - S) وإضافة المتغيرات الاصطناعية (Artificial Variables R) وذلك كما يلي:

(1) .... $X1 + 3X2 \;\; S1 + R1 = 30$

(2) .... $4X1 + 2X2 - S2 + R2 = 40$

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.5\ _1 + 0.5_2 + MR_1 + MR_2 \rightarrow Min$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$S_1 , S_2 \geq 0$$

$$R_1 , R_2 \geq 0$$

$M \Rightarrow$ كمية كبيرة جداً

أن عملية الحل تتم من خلال تنظيم جدول السمبلكس، الذي من خلاله تتم العمليات الحسابية كما هو واضح في الجدول رقم (5-7). أن العمليات الحسابية في هذا

الجدول تتم وفق نفس القواعد السابقة عندما تكلمنا عن جدول السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف (Max - Z) ما عدا وجود بعض الاختلافات يمكن إجمالها كما في النقاط التالية أدناه:

1- المتغير الداخل، ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة وذلك في الحقل $(C_j - Z_j)$.

2- يتم الوصول إلى حالة الحل الأمثل إذا كانت كل قيم الحقل $(C_j - Z_j)$ موجبة وأصفار، أي $(C_j - Z_j) \geq 0$.

3- إن قيمة دالة الهدف (Z) في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس تكون أعلى ما يمكن، وبعد ذلك تبدأ في التناقص، حيث تكون في آخر جدول السمبلكس (الذي فيه يكون الحل الأمثل) أقل ما يمكن. وفي مثالنا الحالي، ومن الجدول رقم (5-7) يتضح أن قيمة دالة الهدف المثلى هي 20 وحدة وأن قيم المتغيرات هي:

$X_1 = 6$ وحدة ، $X_2 = 8$ وحدة

جدول رقم (5-7) الحل وفق طريقة (Big M)

Xj المتغيرات Variables Si			X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi
معاملات المتغيرات في Cj دالة الهدف			2	1	0	0	M	M	
Basic Variables	R_1	M	1	3	−1	0	1	0	30
	R_2	M	4	2	0	−1	0	1	40
Zj			5M	5M	−M	-M	M	M	قيمة دالة الهدف Z ←
(cj - zj)			2-5M	(1-5M)	M	M	0	0	70M الهدف
Basic Variables	X_2	1	1/3	1	−1/3	0	1/3	0	10
	R_2	0	10/3	0	2/3	−1	−1/3	1	20
zj			(1/3+10M/3)	1/3-2M/3	-1/3+3M/3	-M	1/3-M/3	M	قيمة دالة الهدف 10+20M
(cj-zj)			(5/3-10M/3)	0	1/3-2M/3	M	-1/3+5M/3	0	
Basic Variables	X_2	1	0	1	−3/5	1/10	3/5	−1/10	8
	X_1	2	1	0	1/5	3/10	−1/5	3/10	6
Zj			2	1	−1/5	−1/2	1/5	1/5	20 قيمة دالة الهدف Z ←
(cj-zj)			0	0	1/5	1/2	M−1/5	M−1/5	

وفي المرحلة الأخيرة من عملية الحل، نجد أن قيم المتغيرات X_j هي كما يلي:

$X_3 = 40$	$X_1 = 0$
$X_5 = 20$	$X_2 = 0$
$X_4 = 30$	$X_6 = 0$

وبما أن X_j يمثل عدد البدلات التي يتم الحصول عليها باعتماد بديل القص رقم (j) فإن:

1- اعتماد بديل القص رقم (3) يؤدي إلى الحصول على 40 بدلة رجالية (.A) وذلك لأن المتغير X_3 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (1).

2- اعتماد بديل القص رقم (5) يؤدي إلى الحصول على 20 بدلة شبابية (.B) وذلك لأن المتغير X_5 كان ضمن العلاقة الرياضية رقم (2).

3- اعتماد بديل القص رقم (4) يؤدي إلى الحصول على 30 بدلة رجالية (.C) وذلك لأن المتغير X_4 فإن ضمن العلاقة الرياضية رقم (3).

ولو تم تعويض هذه القيم في المعادلات السابقة لتحقق الشرط المطلوب ألا وهو الحصول على (100) بدلة من كل نوع.

ثانياً: تطبيق طريقة المرحلتين (Two - Phase Technique):

أن الحصول على الحل الأمثل باستخدام هذه الطريقة كما هو واضح من الاسم يتم على مرحلتين، وذلك كما يلي:

1- **المرحلة الأولى**: والتي بموجبها يتم تكوين دالة هدف جديدة والتي تعبر عن مجموع المتغيرات الاصطناعية المضافة إلى القيود. وباستخدام طريقة السمبلكس يتم إيجاد أصغر قيمة لهذه الدالة (بغض النظر عن الهدف الأصلي للمشكلة)، أما قيود المشكلة فهي نفس قيود النموذج الأصلي.

أن قيم المتغيرات الاصطناعية التي يتم الحصول عليها من هذا النموذج في هذه المرحلة تكون جميعها مساوية للصفر وبهذا نحصل على حلاً أساسياً ممكناً خالياً من المتغيرات الاصطناعية والذي يعتبر حلاً ابتدائياً للمرحلة الثانية.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة نأخذ مثال تطبيقي كما سيرد أدناه.

مثال رقم (1): من أجل التواصل في فكرة طريقة السمبلكس نورد هنا المثال الوارد في حالة تطبيق طريقة (Big - M) وذلك كما يلي :

$$(1) \quad \ldots\ldots X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$(2) \quad \ldots\ldots 4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: أن عملية الحل في المرحلة الأولى تتم من خلال خطوتين متتابعتين في الخطوة الأولى لعملية حل هذا النموذج الرياضي هي تحويلة من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية وذلك بطرح المتغيرات الفائضة (surplus) من الجهة اليسرى من القيود وذلك كما يلي :

$$(1) \quad \ldots\ldots X_1 + 3X_2 - S_1 \Rightarrow \geq 30$$
$$(2) \quad \ldots\ldots 4X_1 + 2X_2 - S_2 \Rightarrow \geq 40$$
$$Z = 3X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow \text{Min}$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$

يلاحظ في النموذج القياسي السابق عدم الحصول على مصفوفة الوحدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Identity Matrix ، لذلك يتم إضافة متغيرات اصطناعية كما يلي :

$$(1) \quad \ldots\ldots X_1 + 3X_2 - S_1 + R_1 = 30$$
$$(2) \quad \ldots\ldots 4X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 = 40$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$
$$S_1 , S_2 \geq 0$$
$$R_1 , R_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية : يتم بموجبها صياغة دالة هدف جديدة وذلك على النحو التالي :

$$w = (R_1 + R_2) \rightarrow \text{Min}$$

وفقاً للقيود الواردة أعلاه والمرتبطة بالنموذج الرياضية القياسي يتم حل هذه المشكلة بالجدول رقم (10-5). ويلاحظه في هذا الجدول أن جميع قيم $(c_j - w_j)$ في المرحلة الأخيرة موجبة وأصفار $0 \leq (c_j - w_j)$.

وهذا يعني أنه تم التوصل إلى الحل النهائي للمرحلة الأولى ويلاحظه في هذه المرحلة أنه تم استبعاد المتغيرات الاصطناعية (R_1,R_2) من الحل الأساسي الممكن وعليه ينبغي الانتقال إلى المرحلة الثانية.

2- **المرحلة الثانية**: حيث يتم بدء الحل في هذه المرحلة بالحل النهائي الأساسي الممكن (الذي هو امتداد للمرحلة الأولى) باستخدام دالة الهدف الأصلية للنموذج الرياضي للمشكلة ، أي أن الجزء الأخير لجدول السمبلكس في المراحل الأولى سوف يعتبر بمثابة الجزء الأول لجدول السمبلكس في المرحلة الثانية مع تغيير في دالة الهدف ، وبعد ذلك يتم تحسين الحل لغاية بلوغ الحل الأمثل النهائي. وفيما توضيح لفكرة هذه المرحلة مع الاستعانة كما ذكرنا بدالة الهدف الأصلية.

$$Z = 2X_1 + X_2 + 0.S_1 + 0.S_2 \rightarrow Min$$

والجدول رقم (5-10) يوضح ذلك.

Xj المتغيرات Variables Si	X_1	X_2	S_1	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj في دالة الهدف	0	0	0	0	1	1		
المتغيرات الأساسية R_1	1	3	−1	0	1	0	30	1
R_2	(4)	2	0	−1	1	1	40	1
W_j	5	5	−1	−1	1	1	70	قيمة دالة الهدف ←w
$(C_j\text{-}W_j)$	(−5)	−5	1	1	0	0		
المتغيرات الأساسية R_1	0	(5/2)	−1	1/4	1	−1/4	20	1
X_1	1	1/2	0	−1/4	0	1/4	10	0
Wj	1	5/2	−1	1/4	1	1/4	20	قيمة دالة الهدف ← w
$(C_j\text{-}W_j)$	0	(−5/2)	1	−1/4	0	5/4		
المتغيرات الأساسية X_2	0	1	−2/5	1/10	2/5	−1/10	8	0
X_1	1	0	1/5	−3/10	1/5	3/10	6	0
W_j	0	0	0	0	0	0	0	قيمة الهدف w
$(C_j\text{-}W_j)$	0	0	0	0	1	1		

جدول رقم (5-11) الحصول على الحل الأمثل

المتغيرات Xj		X_1	X_2	S_1	S_2	قيمة المتغير الأساس bi	معامل تغير الأساس دالة الهدف CB
معاملات المتغيرات في Cj		2	1	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_2	0	1	-2/5	1/10	8	1
	X_1	1	0	5/1	-3/10	6	2
Z_j		2	1	0	-1/5	20	قيمة دالة الهدف Z
(C_j-Z_j)		0	0	0	1/5		

من الجدول أعلاه يتضح أن جميع قيم الحقل $(C_j - Z_j)$ هي موجبة وهنا يعني أنه تم التوصل إلى الحل الأمثل وبموجب هذا الحل ينبغي على منظمة الأعمال الإنتاجية أن تلتزم بخطة الإنتاج التالية :

$X1 = 6$ أي طرح المنتج No.1 بمقدار 6 وحدات.

$X2 = 8$ أي طرح المنتج No.2 بمقدار 8 وحدات.

وبذلك تكون التكاليف الكلية أو النفقات (قيمة Z) أقل ما يمكن وهي 20 وحدة نقدية $(Z = 20)$. وهذه نفس النتيجة التي تم التوصل إليها بموجب طريقة (Big - M) .

5.5 الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

في الحالات المختلفة للبرمجة الخطية، يتم التركيز على الحلول المختلفة للمشكلة التي يمكن الحصول عليها عند إتمام عملية الحل. وبالتحديد يتم التدقيق والتمييز بين الأنواع الثلاث من الحلول التي يمكن الحصول عليها وهي ما يلي :

1- الحل الممكن Feasible solution .

2- الحل الأفضل Best Solution .

3- الحل الأمثل Optimal solution .

أن هذه الحلول الثلاث لا يمكن متابعتها والتمييز بينها إلا من خلال ما يعرف بمنطقة الحلول الممكنة Feasible Region (R). أن هذه المنطقة تظهر من خلال تقاطع المستقيمات التي تعبر عن قيود المشكلة بعضها مع البعض الآخر والذي يعني أيضاً تقاطع المساحة الخاصة بكل مستقيم، بعبارة أخرى أن منطقة الحلول الممكنة (R) ظهرت من تداخل مساحة المستقيم الأول مع مساحة المستقيم الثاني وظهور منطقة

تداخل مشتركة تحقق كل من القيد الأول والقيد الثاني اللذان ساهما في ظهور وتبلور شكل المنطقية (R). وتأسيساً على ما تقدم ومن أجل ضمان تحقق هذا التداخل والتقاطع لابد لنا من ملاحظة القواعد الأساسية التالية :

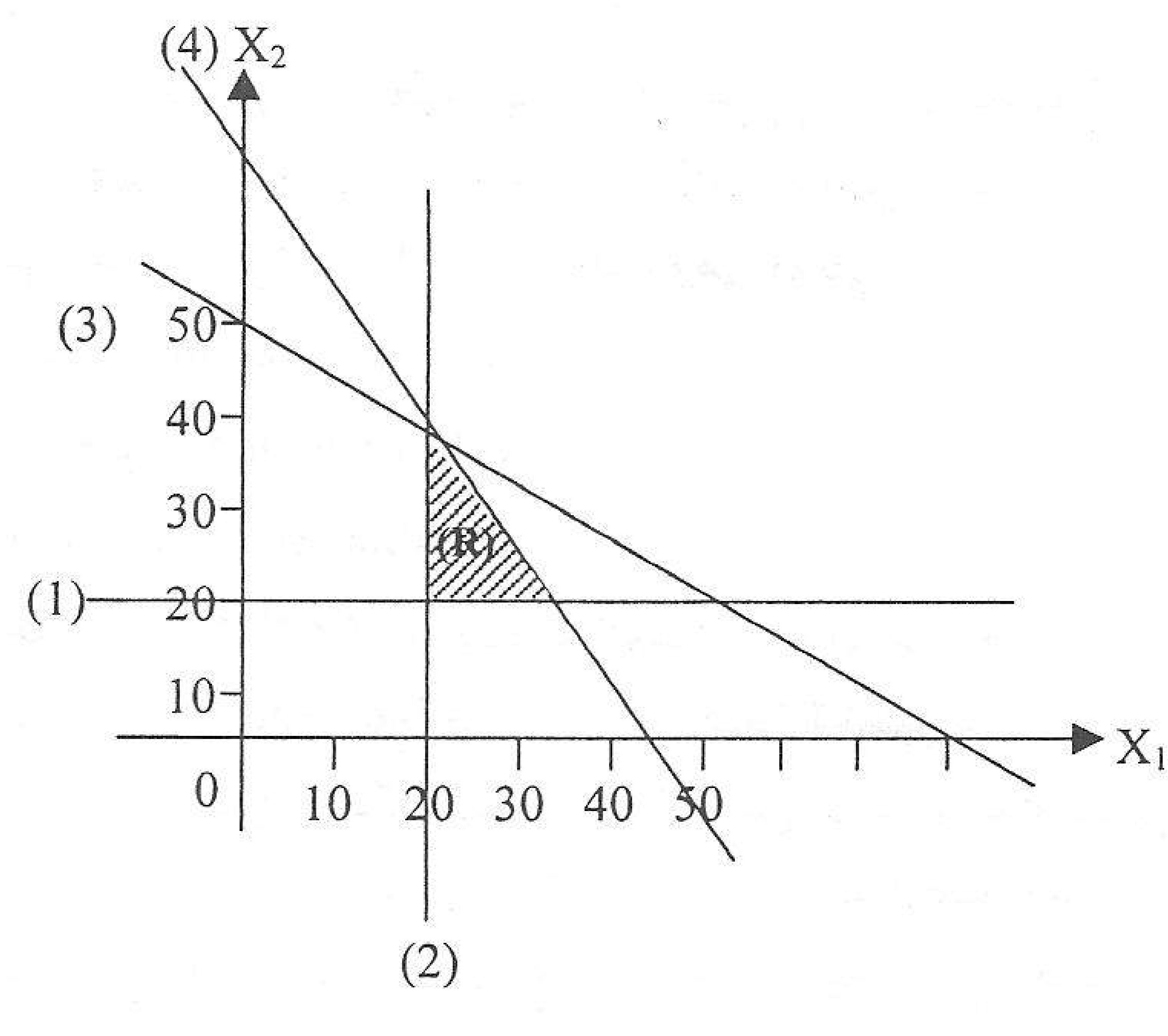
أولاً: إذا كانت علامة القيد أقل أو يساوي (≤) فإن المنطقة التي تحقق هذا المستقيم تكون متجهة إلى الداخل، وبذلك فإن كل النقاط الواقعة على المستقيم أو تحته يفترض أن تحقق القيد المذكور.

ثانياً: إذا كانت علاقة القيد ≥ أكبر أو يساوي فإن النقاط التي تحقق هذا القيد سوف تكون واقعة على أو خارج المستقيم الذي يعبر عن القيد المذكور.

ثالثاً: عند تحديد موقع منطقة الحلول الممكنة (R) يؤخذ بنظر الاعتبار ما يلي :

1- في حالة تعظيم دالة الهدف تكون منطقة الحلول محصورة بين المستقيمات المتقاطعة ونقطة الأصل. وقد يظهر استثناء لهذه الحالة بحيث ترتفع منطقة الحلول الممكنة عن نقطة الأصل من خلال مستقيمات تعبر عن شروط تتعلق بالكمية، حيث قد لا تبدأ الكمية من الصفر وإنما من مقدار أكبر من ذلك كما هو واضح في الشكل رقم (5-9).

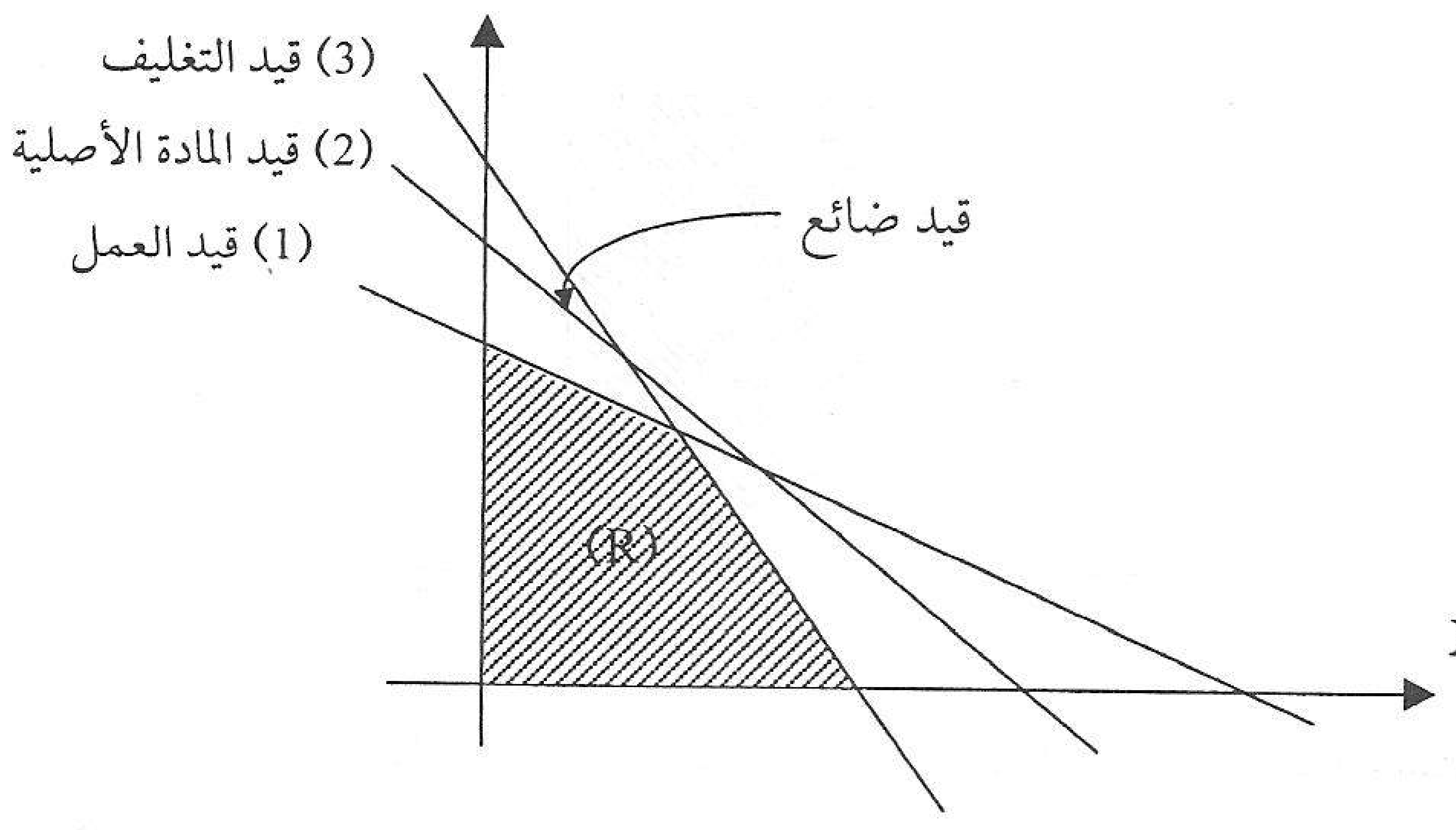
شكل (5-9) حالة خاصة لمنطقة الحلول الممكنة (R)



2- إذا كانت الحالة هي تصغير دالة الهدف ، فإن منطقة الحلول الممكنة سوف تكون محصورة بين نقطة تقاطع المستقيمات والزاوية المناظرة لنقطة الأصل في الربع الأول من المحاور الأفقية والعمودية (السينية والصادية) .

3- سواء كان الأمر يتعلق بتعظيم أو بتصغير دالة الهدف ، وكان هناك أكثر من اثنين من المستقيمات المتقاطعة بعضها مع البعض الآخر ، فإن في هذه الحالة يؤخذ بنظر الاعتبار (لأجل تحديد منطقة الحلول الممكنة) المستقيمات التي تعبر عن القيود الأساسية المشكلة (مثل قيود المواد الأولية ، قيود العمل ، ... الخ) كأساس لتحديد منطقة الحلول الممكنة ، في حين يعتبر القيد الآخر كقيد ضائع أو قيد محدد ثانوي ، كما هو واضح في الشكل رقم (5-10).

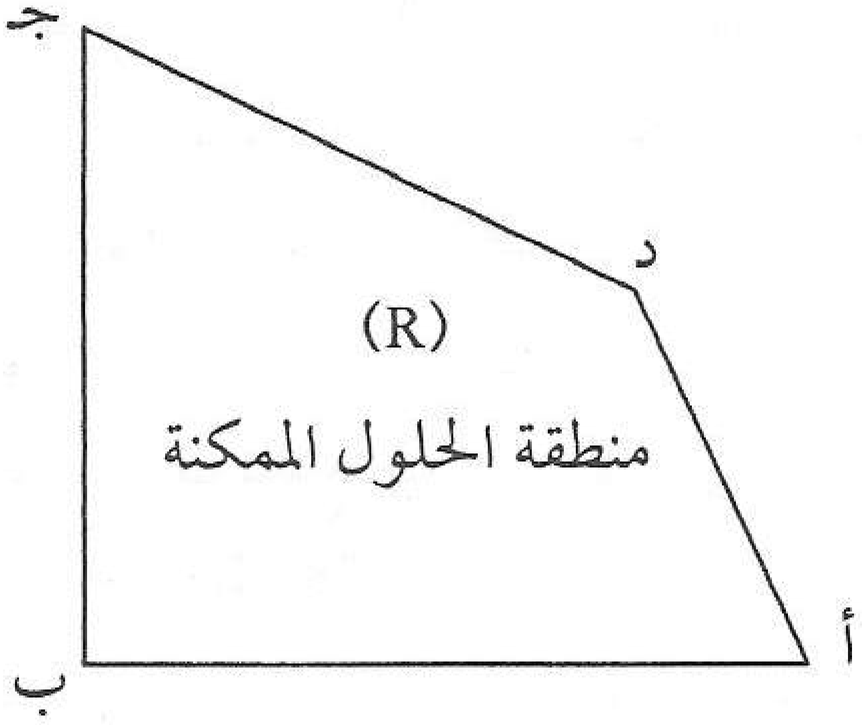
شكل رقم (5-10) تحديد منطقة الحلول من خلال القيود الأساسية



رابعاً : بعد أن تحدث عملية تقاطع المستقيمات والمساحات المعبرة عن قيود المشكلة ، يبرز إلى الواقع نوعين من الأشكال.

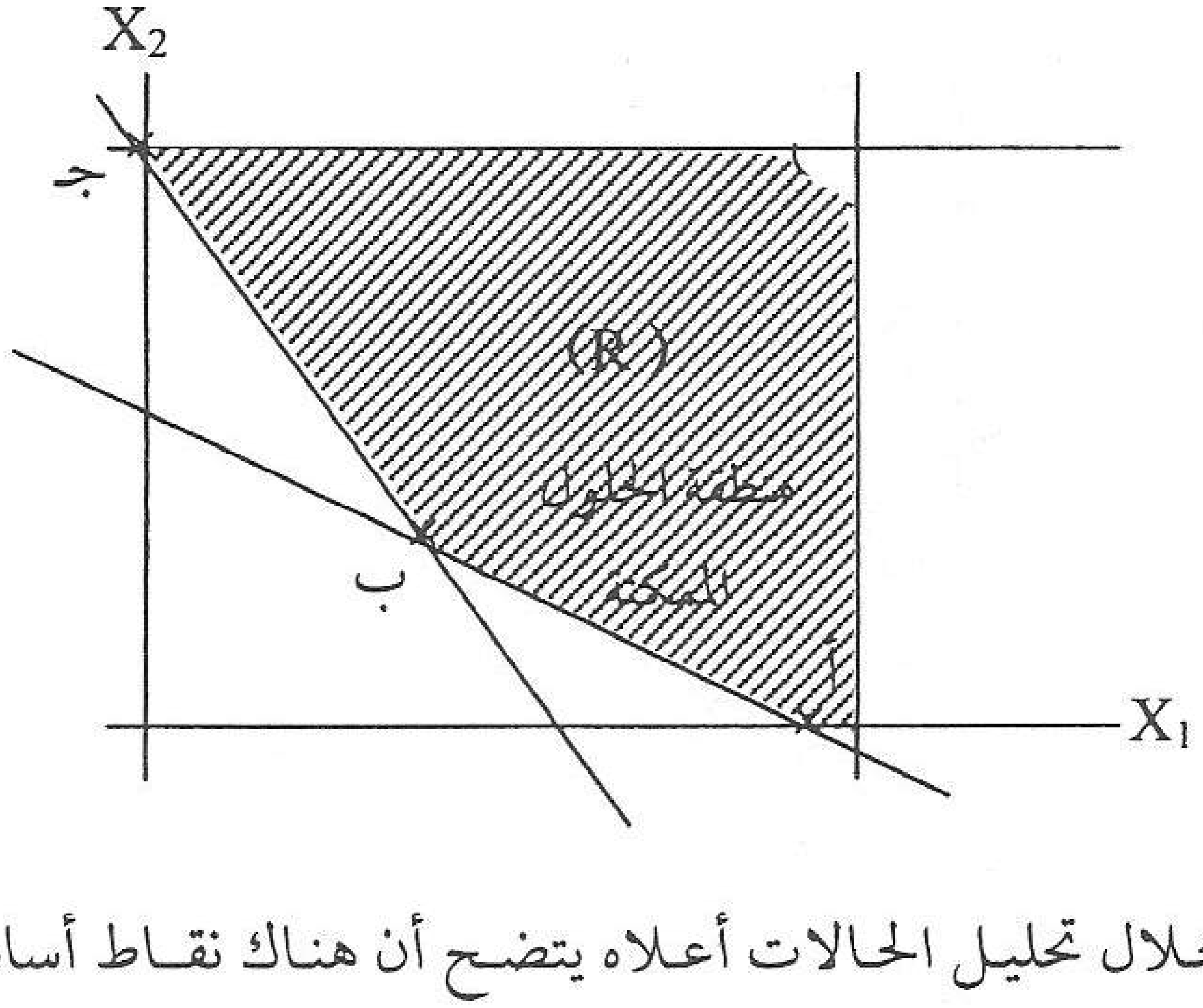
1. الشكل الذي يعبر عن حالة تعظيم دالة الهدف ، الذي يحقق القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل رقم (5-11).

شكل رقم (5-11) شكل افتراضي يعبر عن منطقة الحلول الممكنة (Max. Z)



2- الشكل الذي يعبر عن حالة تصغير دالة الهدف ، وفيها تتحقق كافة القيود التي ساهمت في إبراز الشكل المذكور كما هو واضح في الشكل الافتراضي رقم (12-5).

شكل رقم (12-5) شكل افتراضي لمنطقة الحلول الممكنة (Min. Z)



من خلال تحليل الحالات أعلاه يتضح أن هناك نقاط أساسية مشتركة بين الاثنين ، وهي :

أ . وجود نقاط كثيرة تعبر من الحل الممكن [1].

---

(1) في حالة البرمجة بإعداد صحيحة يكون عدد هذه الحلول قليل جداً بالقياس إلى البرمجة الخطية ، وذلك لكون هذه الحلول تتحدد من خلال تقاطع المستقيمات النازلة من تقسيمات المحاور الأفقية والعمودية.

ب. وجود نقاط تمثل زوايا الشكل (R) تعبر عن الحل الأفضل.

جـ- وجود نقطة واحدة تعبر عن الحل الأمثل، حيث تتصف هذه النقطة بما يلي:

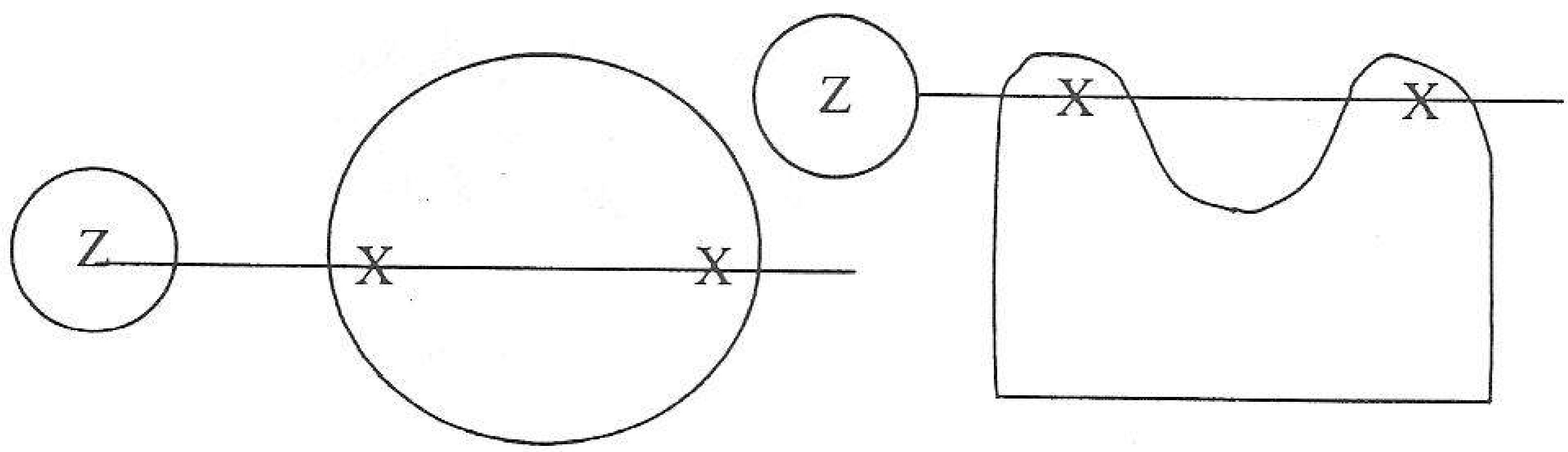
- تكون أبعد ما يكون عن نقطة الأصل في حالة Max.Z.

- تكون أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل في حالة Min.Z

د - أن نقطة الحل الأمثل تتكون من الإحداثيات (X_1 , X_2) والتي يجب أن تكون قيم موجبة أكبر من الصفر.

هـ-شكل منطقة الحلول (R) المشار إليه ضمن النقطة (1) والنقطة (2) أعلاه غالباً ما يكون شكلها الأقرب إلى متوازي الأضلاع أو الرباعي المنحرف وما شابه ذلك، ولا تعبر الأشكال التالية مقبولة في كونها منطقة حلول ممكنة.

شكل رقم (5-13) الأشكال غير المقبول كمناطق للحلول الممكنة



وفيما عدا الحالات المشار إليها أعلاه، فإن أي حالة تظهر تعتبر من الحالات الخاصة في البرمجة الخطية. وبشكل عام يمكن تبويب الحالات الخاصة للبرمجة الخطية في أربعة حالات أساسية وهي:

1- حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة . No Feasible solution

2- حالة منطقة الحلول غير المحدودة . Un bounded solution

3-حالة الانحلال (التفكك) Degeneracy . Melti Optimal solution

وفيما يلي توضيح لكل واحدة من الحالات الواردة ذكرها أعلاه، مع الإشارة إلى إننا سوف نعتمد طريقة الرسم coraphical method كأساس من عملية الحل بدلاً من الطريقة الجبرية أو طريقة السمبلكس من أجل تقريب الفكرة أكثر إلى ذهن القارئ.

أولا : حالة عدم وجود منطقة حلول ممكنة No - Feasible solution :

في هذا النوع من الحالات لا يمكن الحصول على شكل هندسي متكامل يعبر عن منطقة الحلول الممكنة بسبب وجود تضارب بين القيود وبالتحديد بين العلامات الرياضية التي تفصل بين الجانب الأيمن والأيسر للعلاقة الرياضية كما هو واضح من خلال النموذج الرياضية الذي يعبر عن أحد الأشكال الإنتاجية في الواقع العملي :

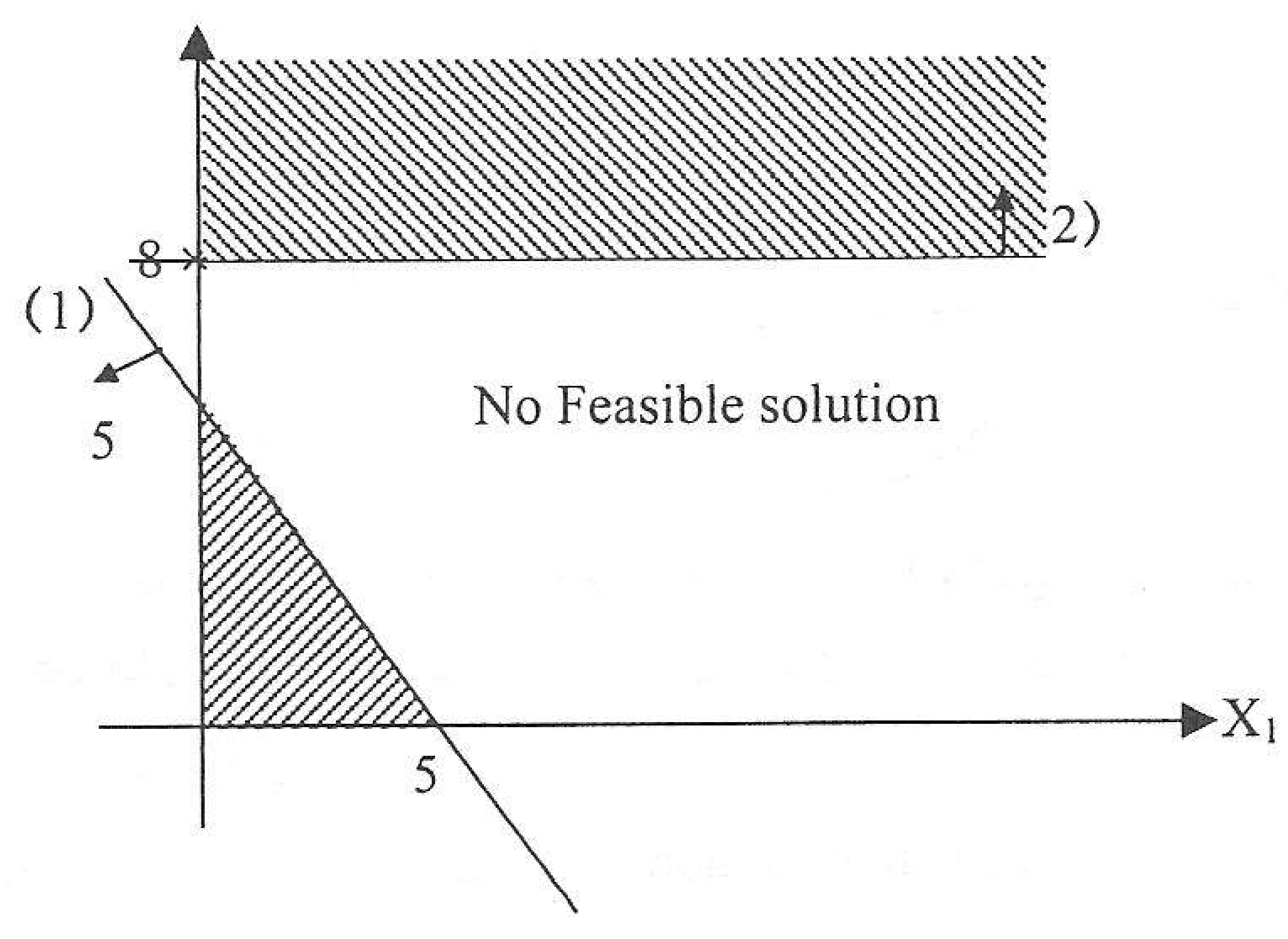
(1) .... $X_1 + X_2 \leq 5$

(2) ...... $X_2 \geq 8$

$$Z = 6X_1 = 4X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً يكون كما يلي :



يلاحظ من الشكل السابق أنه لم يتحقق فيه القواعد الشروط السابقة وأهمها التداخل أو التقاطع بن مساحة المستقيم الأول ومساحة المستقيم الثاني ، وتفسير ذلك في الواقع العملي هو أن حاصل جمع كل من المنتج رقم (X_1) والمنتج رقم 2 (X_2) ينبغي أن يساوي أو يقل عن (5) وحدات وبنفس الوقت وجود شرط آخر بأن يكون عدد الوحدات من المنتج رقم (2) هو أكثر أو يساوي 8 ، وهذا بحد ذاته تناقض يكون عائقاً أمام ظهور منطقة الحلول الممكنة (R).

ثانياً: حالة منطقة الحلول غير المحدودة Unbounded solution :

في هذا النوع من الحالات الخاصة يتم الحصول على منطقة حلول ممكنة (R) مفتوحة وغير مكتملة الجوانب كما هو واضح في المثال التالي:

النموذج الرياضي الثاني يعبر عن مشكلة إنتاجية تتعلق بطرح نوعين من المنتجات، وهو المنتج الأول (X_1) والمنتج الثاني (X_2):

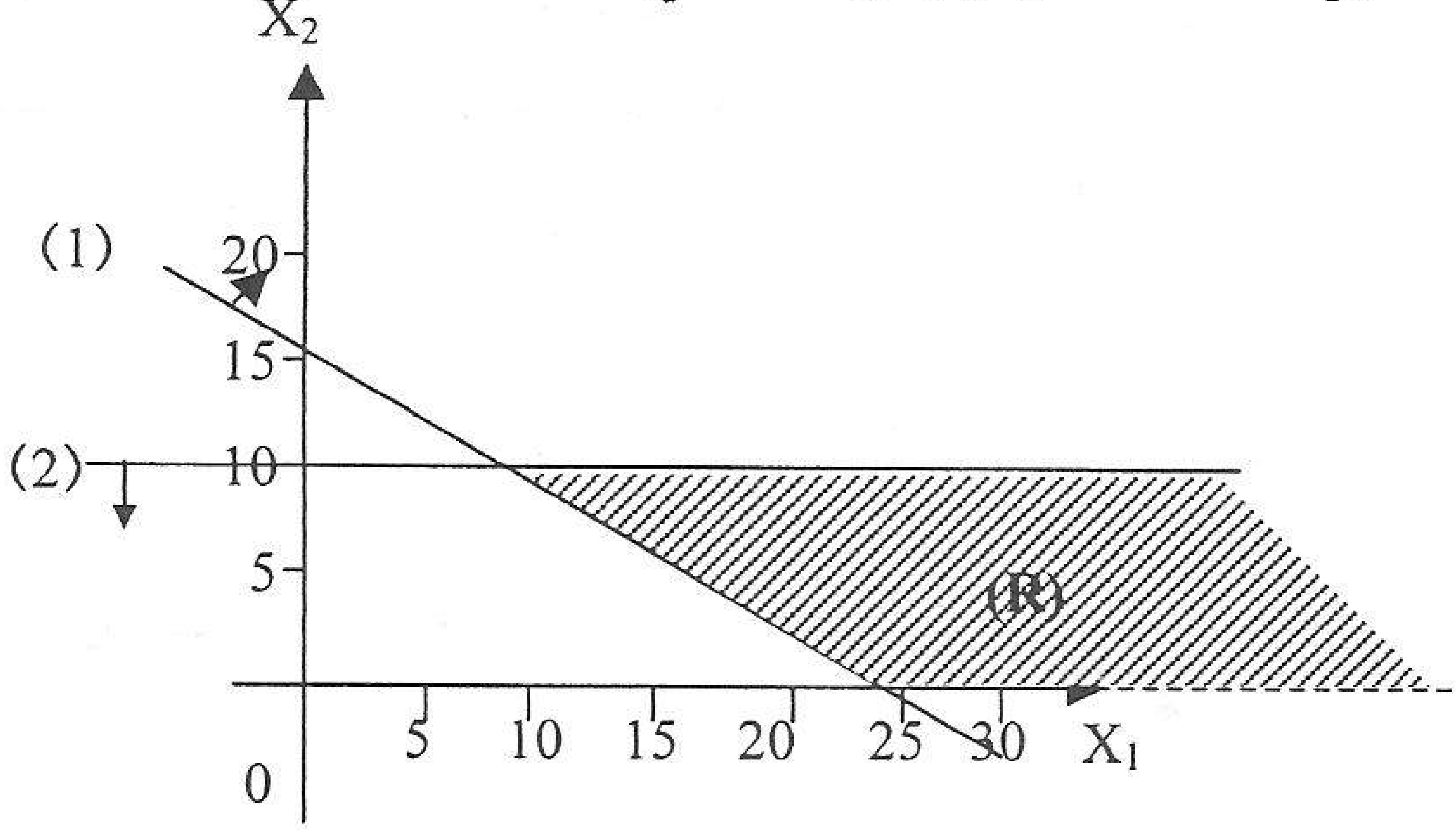
(1) .... $6X_1 + 10X_2 \geq 150$

(2) .... $X_2 \leq 10$

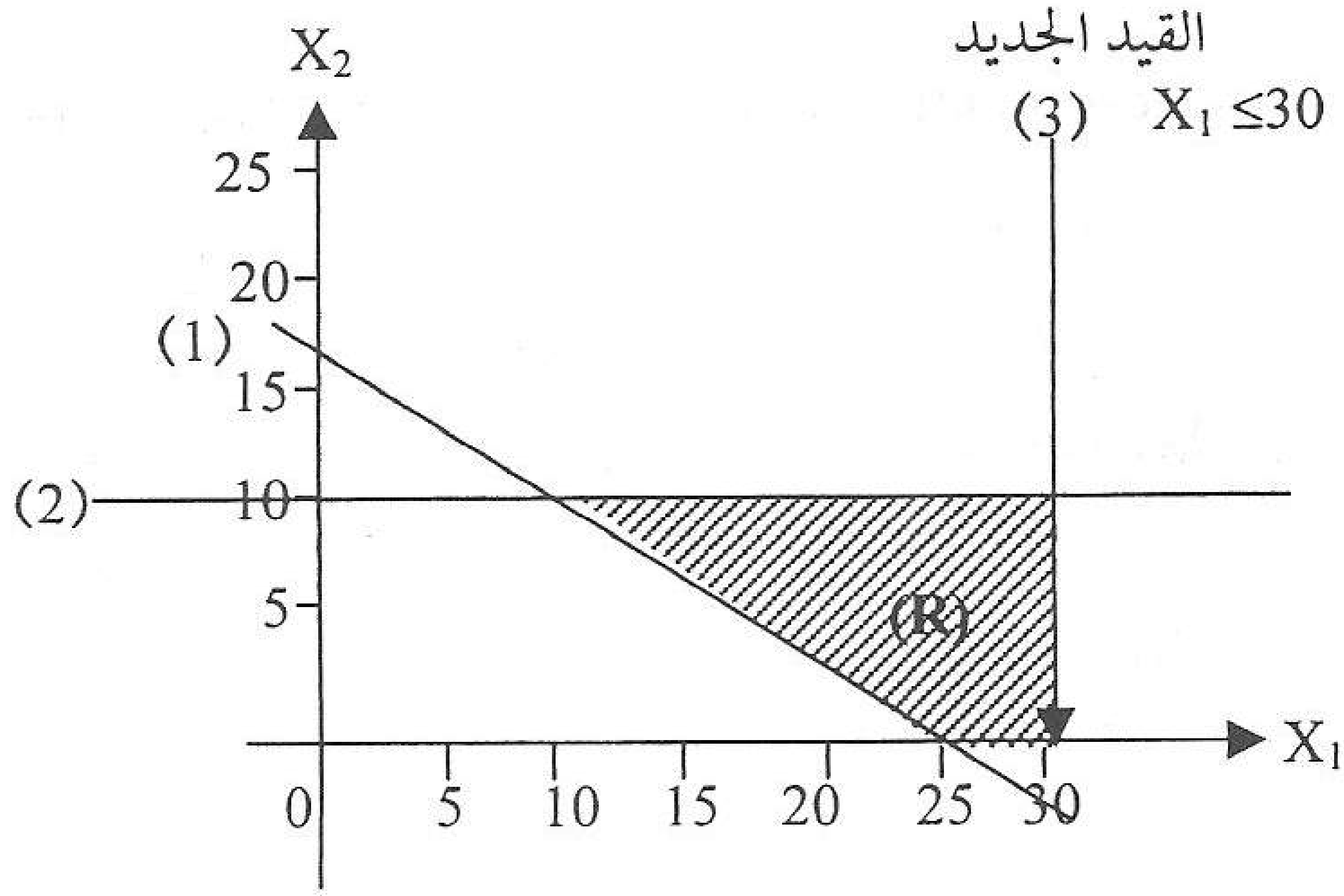
$Z = 5X_1 + 20X_2 \rightarrow Max$

$X_1 , X_2 \geq 0$

أن تمثيل هذه المشكلة بيانياً يكون كما يلي:



ومن الشكل أعلاه يتضح أنه كلما زادت الكمية X_1 من خلال المحور الأفقي X، كلما كان ذلك عاملاً مساعداً في بقاء منطقة الحلول (R) مفتوحة وغير محدودة. ويمكن معالجة هذه الحالة بأخذ قيد إضافي يقطع المحور X_1 ليحدد مقدار كمية الإنتاج المطلوبة، على سبيل المثال لو كان هناك قيد إضافي، هو ($X_1 \leq 30$) فإن شكل منطقة الحلول سوف يتحدد ولا تصبح هذه الحالة من الحالات الخاصة، ويمكن التعبير عن ذلك كما يلي:



ثالثاً: حالة تعدد الحلول المثلى Melti Optimal solution :

أن هذه الحالة تكتسب صفة الخصوصية بسبب أن الحل النهائي للمشكلة الذي يتم الحصول عليه على أكثر من حل أمثل واحد ومن أجل توضيح فكرة هذه الحالة نأخذ النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن أحد المشاكل الإنتاجية.

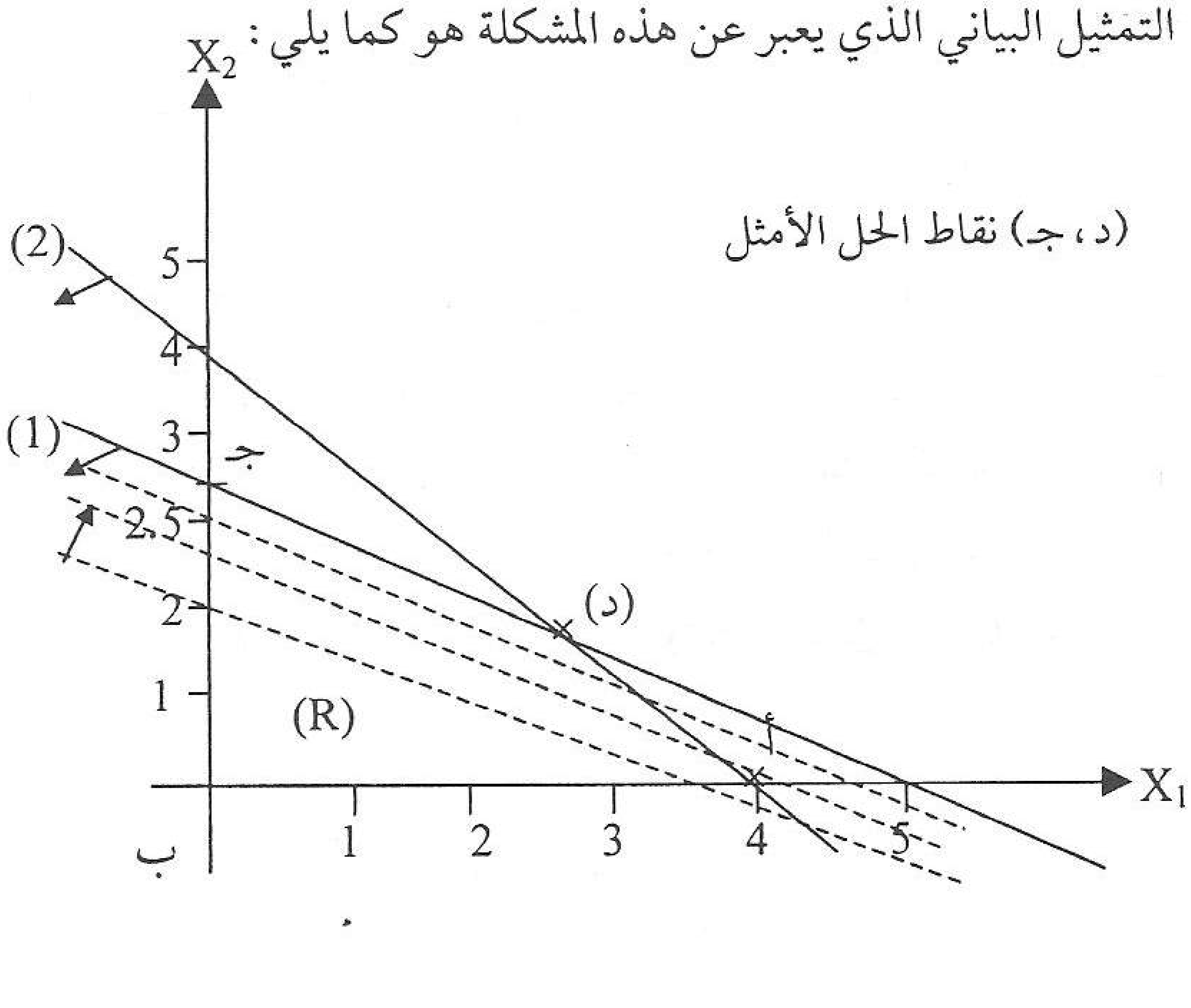
(1) .... $X_1 + 2X_2 \leq 5$

(2) .... $X_1 + X_2 \leq 4$

$Z = 2X_1 + 4X_2 \rightarrow Max$

$X_1, X_2 \geq 0$

التمثيل البياني الذي يعبر عن هذه المشكلة هو كما يلي :



من الشكل السابق يتضح أن مستقيم دالة الهدف يبتعد شيئاً فشيئاً من نقطة الأصل بالتدريج وبالتوازي مع المستقيمات المذكور بعضها مع البعض الآخر حتى نجد في النهاية أن أحد هذه المستقيمات التي تمثل دالة الهدف سوف تمس كل من النقطة د والنقطة جـ في وقت واحد. واستناداً إلى النظريات الهندسية التي تنص على أن (إذا اشترك مستقيم مع مستوي بأكثر من نقطة واحدة فإن ذلك المستقيم يعتبر منطبقاً على المستوي) [1] . وعليه وبناءاً على ما تقدم فإن كل نقاط المستقيم د جـ سوف تؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل نفسه.

رابعاً: حالة الانحلال (التفكك) Degeneracy :

أن هذه الحالة تختلف عن الحالات الاعتيادية لسببين أساسيين وهما :

1- أن شكل منطقة الحلول الممكنة ليس رباعياً أو متوازي أضلاع بل هو مثلث.

2- أن نقطة الحل الأمثل التي يتم تحديدها في منطقة الحلول الممكنة يكون أحد متغيراتها (X_2, X_1) يساوي صفراً.

ولتوضيح فكرة هذه الحالة، نأخذ أحد النماذج الرياضية الذي يعبر عن أحد المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، وذلك كما يلي :

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

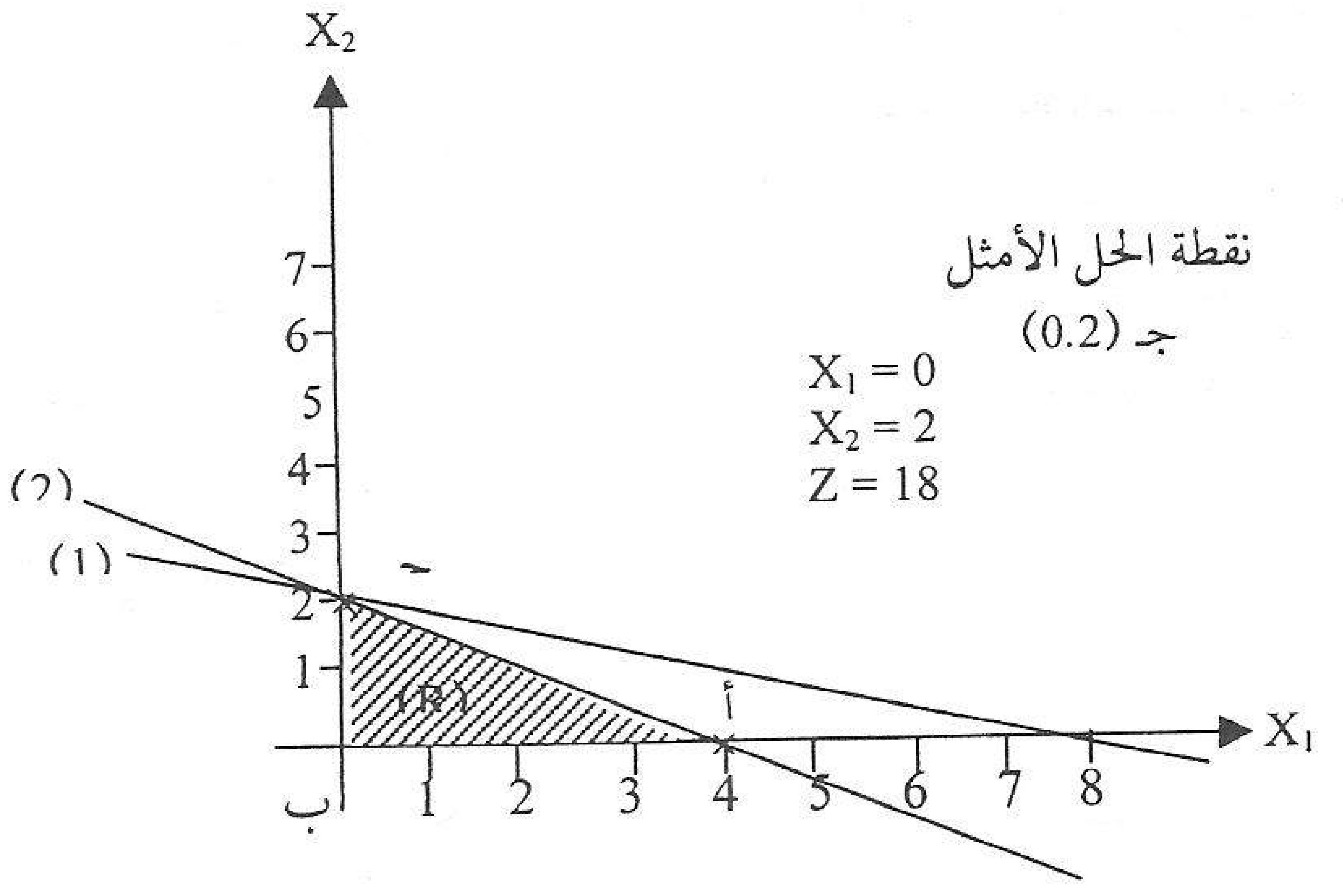
$$Z = 3X_1 + 9X_2 \rightarrow Max$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أن حل هذا النموذج الرياضي بيانياً، يؤدي إلى الحصول على الشكل التالي :

---

(1) منطقة الحلول الممكنة (R) تعد بمثابة مستوي.



من الشكل السابق يتضح أن على إدارة المنشأة مع المنتج رقم 2(2) وحدة وعـدم طرح المنتج رقم (1) وبذلك فإن قيمة دالة الهدف تصبح (18) وحدة وهو الحل الأمثل.

النموذج المقابل Dual في البرمجة الخطية

إن نموذج البرمجة الخطية الذي تم توضيحه في الفصول السابقة يعتبر هو الأساس لصياغة النموذج المقابل، Dual ويعرف النموذج الرياضي للبرمجة الخطية عادة باسم النموذج الأولي Primal ومن مستلزمات تطبيقه العادية هو تحقق الشروط التالية:

1. الأمثلية Optimality.
2. أن يكون الحل ممكنا Feasibility

الشرط الأول يتمثل في العلاقة الرياضية $0\leq$ (Cj - Zj) في حالة تعظيم دالة الهدف وبالعكس في حالة التصغير وذلك في المرحلة الأخيرة من الحل. أما الشرط الآخر فهو أن قيم $X_j \geq 0$ لا يجوز أن تكون سالبة، ولكن توفر الشرط الأول، وعدم تحقق الشرط الثاني، (أي كانت أحد قيم المتغيرات الأساسية في المرحلة الأخيرة في الحل سالبة) فإن هذا الحل غير ممن لذلك فإن أفضل أسلوب لمواجهة المشكلة هو اللجوء إلى النموذج المقابل Duality.

إن للنموذج المقابل استخدامات كثيرة في مختلف المجالات الإدارية والاقتصادية وذلك على مستوى المنشأة بشكل خاص والاقتصاد بشكل عام. ويهدف هذا النموذج إلى تقديم تحليلات ومؤشرات مختلفة لم يكن بالإمكان الحصول عليها باستخدام النموذج الأصلي. علماً بأن خطوات وإجراءات حل النموذج المقابل هي أقل بما هو عليه في النموذج الأصلي.

لتوضيح فكرة صياغة النموذج المقابل، نذكر أدناه صيغة معينة من النموذج العام للبرمجة الخطية:

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_n$

التي تحقق الشروط التالية:

$$a_{11} X_1 + a_{12}X_2 + \dots a_1n\, X_n \leq b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n \leq b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n \leq b_m$$

$X_j \geq 0$ (حيث أن : $j = 1, 2, \dots n$)

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقصى ما يمكن ، أي :

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \dots + C_n X_n$$

بعد إدخال المتغيرات الثابتة y_i (حيث أن $i = 1, 2, \dots m$) نحصل على ما يلي :

$$y_1 = b_1 - (a_{11}X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n)$$
$$y_2 = b_2 - (a_{21}X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n)$$
$$\vdots$$
$$y_m = b_m - (a_m X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n)$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي[1] :

(جدول 1.6)

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{22}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
:	:	:	:	:	:
$y_m =$	a_{m2}	a_{m2}	...	a_{Mn}	b_m
$Z_1 =$	$-C_2$		...	$-C_n$	0

أما بالنسبة للنموذج المقابل ، فإن الصيغة الرياضية له هي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية $u_1, u_2, \dots u_m$ التي تحقق الشروط التالية :

$$a_{11} u_1 + a_{21} u_2 + \dots + a_{m1} u_m \geq C_1$$

$$a_{12} u_1 + a_{22} u_2 + \dots + a_{m2} u_m \geq C_2$$

$$\vdots$$

$$a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \dots + a_{mn} u_m \geq C_n$$

$u_i \geq 0$ (حيث أن : $i = 1,2, \dots m$:)

(1) H-KRYNSKI. A.BADACH, pp. cit. pp. 101.

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن ، أي :

$$F = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_m u_m$$

وبعد إدخال المتغيرات الثابتة C_j (حيث أن : $j = 1,2,\ldots n$) نحصل على ما يلي :

$$g_1 = (a_{11} u_1 + a_{21} u_1 + \ldots + a_{m1} u_m) - C_1 \geq 0$$
$$g_2 = (a_{12} u_1 + a_{22} u_1 + \ldots + a_{m2} u_m) - C_2 \geq 0$$
$$\vdots$$
$$g_n = (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + \ldots + a_{mn} u_m) - C_n \geq 0$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي :

(جدول 2.6)

	u_1	u_2	…	u_m	1
$g_1 =$	a_{11}	a_{21}	…	a_{m1}	$-C_1$
$g_2 =$	a_{12}	a_{22}	…	a_{m2}	$-C_2$
:	:	:	:	:	:
$g_n =$	a_{1n}	a_{2n}	…	a_{mn}	$-C_m$
$F =$	b_1	b_n	…	b_m	0

ويمكن دمج الجدل (1.6) الذي عبر عن النموذج الأصلي مع الجدول (2.6) الذي يعبر عن النموذج الثنائي في جدول واحد وهو الآتي :

(جدول 3.6)

	u_1	u_2	…	u_m	1
	y_1	y_2	…	y_m	$Z=$
$-Xg_1 =$	a_{11}	a_{21}	…	a_{m1}	$-C_1$
$-Xg_2 =$	a_{12}	a_{22}	…	a_{m2}	$-C_2$
: :	:	:	:	:	:
$-X_{ngn} =$	a_{1n}	a_{2n}	…	a_{mn}	$-C_m$
$F =$	b_1	b_2	…	b_m	0

في ضوء ما تقدم يمكن أن نستنتج ما يلي :

1- إذا كانت المعاملات الداخلة في تركيب النموذج الأصلي تشكل المصفوفة A وذلك كما يلي :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن المعاملات الداخلة في تركيب النموذج المقابل سوف تأخذ الرمز A^t والذي يعبر عن المصفوفة التالية :

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2m} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2- إن القيم الداخلة في تركيب عمود القيم الحرة (الجهد اليمني من العلاقات الرياضية) تشكل بمثابة معاملات للمتغيرات الأساسية X_j (حيث أن : $j = 1, 2, \ldots, n$) في دالة الهدف للنموذج الأصلي.

3- العلاقة الرياضية التي تفصل طرفي العلاقة الرياضية إذا كانت ≤ أقل أو يساوي في النموذج الأصلي تصبح ≥ أكبر أو يساوي في النموذج المقابل وبالعكس.

4- دالة الهدف إذا كانت تصل إلى أكبر قيمة لها في النموذج الأصلي ، فإنها سوف تصل إلى أقل قيمة لها في حالة النموذج المقابل.

في سبيل الحصول على حل للنموذج الأولى الموضح من خلال الجدول (3.6) ، فإن المطلوب هنا هو أن تصبح القيم الموجودة في يسار الجدول مساوية إلى الصفر. أما المتغيرات الموجودة فوق الجدول فإنها تصبح مساوية إلى ما يعادلها من قيم في صف دالة الهدف F. وإن أكبر قيمة أو أقل قيمة لدالة الهدف تكون موجودة في حقل دالة الهدف F وعمود القيم الحرة.

ولتقديم صورة أوضح عن طبيعة النموذج المقابل وعلاقته بالنموذج الأصلي نذكر أدناه النظريات التالية[1]:

النظرية رقم (1) إذا كان للنموذج المقابل حل أمثل معين، فإن لهذا الحل الأمثل صيغة حل آخر، أي بشكل عام لأي حل أمثل يكون ما يلي:

$Z_m, X = F_{min}$

النظرية رقم (2): إن القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية المتمثلة بالمرمز X^*_i الداخلة في صيغة النموذج المقابل تحدد مدى الزيادة القصوى لقيمة دالة الهدف في ظل النموذج الأصلي Z_{max} عندما يزداد المقدار b_i (الذي يمثل المحددات) بمقدار وحدة واحدة، أي أن:

$$u_i^* = \frac{\Delta Z_{max}}{\Delta b_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة أخرى كما يلي:

$$\Delta Z_{max} = u^*_i \, \Delta \, b_i$$

النظرية رقم (3): إذا كانت أحد قيود الحل الأمثل للنموذج الأصلي له علامة رياضية محددة بدون اختيار أي: أما < أكبر > أصغر، فإن المتغير الأساسي الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون مساوياً للصفر. أما إذا كان أحد المتغيرات في الحل الأمثل له قيمة موجبة أكبر من الصفر، فإن القيد المقابل له يكون له قيمة مساوية للصفر.

على سبيل المثال (وبالاعتماد على الجدول (3.6) إذا كان لدينا حل أمثل لنموذج بصيغته الأصلية، زمنية كان القيد التالي:

$$y_k^* = b_k - \left(a_{k1} X_1^* + a_{k2} X_2^* + \ldots + a_{kn} X_n^*\right) > 0$$

فإن قيمة المتغير الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون:

---

(1)D. Rogalskieg. Programowonic Liniowe-ALgorytmy izadania. UN, TODZ 1983 p. 64.

$$X_k^* = 0$$

أما إذا كان لدينا : $U^*_k\ 0$ فإن القيد المقابل له هو :

$$y_2^* = b_2 - \left(a_{11} X_1^* + a_{12} X_2^* + \ldots + a_{2n} X_n^*\right) = 0$$

إذا ظهر لدينا في نموذج معين بصيغته الأصلية اثنين من القيود علامة أحدهم أما ≤ أو ≥ وكانت علامة القيد الآخر هي التساوي (أي =) كما هو واضح في النموذج التالي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية التي $X_1, X_2, \ldots X_n$ تحقق الشروط التالية :

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{in} X_n \leq b_i \ (i = 1, 2, \ldots, k)$$

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + \ldots + a_{in} X_n = b_i \ (i = k+1, k+2, \ldots m)$$

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1,2, \ldots, n)$$

وتجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن ، أي :

$$Z = C_1 X_1 + C_2 + \ldots C_n X_n \rightarrow \text{Max}$$

فإن صيغة النموذج المقابل هي كما يلي :

المطلوب إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية $u_1, u_2, \ldots, u_m$ التي تحقق الشروط التالية :

$$a_{1j} u_1 + a_{2j} u_2 + \ldots + a_{mj} u_m \geq C_j \ (j = 1,2, \ldots, m)$$

$$u_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots k)$$

وينبغي الإشارة هنا ، إنه إذا كانت علامة القيود في النموذج الأصلي متنوعة ، فيها علاقة التساوي (=) وعلامة عدم التساوي (≤) أو (≥) فإن المتغيرات الأساسية في النموذج المقابل يمكن أن تكون قيمها مساوية إلى الصفر.

في الواقع العملي عندما يكون لدينا نموذج رياضي فيه قيود لها علاقة عدم المساواة (أي ≥) فإن حل هذا النموذج من خلال تحويله إلى النموذج المقابل يكون أكثر بساطة كما هو واضح في المثال أدناه.

مثال رقم (1):

في إحدى المنشآت الصناعية تتطلب العملية الإنتاجية فيها تشغيل العمال ثلاث وجبات عمل (أي 24 ساعة). إن الحاجة إلى عدد العمال خلال ساعات العمل اليومي تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول (4.6) بيانات المشكلة

عدد العمال المطلوب تشغيلهم	حدود ساعات العمل
15	1-5
30	5-9
26	9-13
32	13-17
30	17-21
19	21-1

إن عدد الساعات لوجبة العمل الواحدة تبلغ 8 ساعات. علماً بأن تبديل العمال يتم في الساعات: 21، 17، 13، 9، 5، 1

المطلوب هو:

أ- ما هو أقل عدد ممكن من العمال ينبغي تشغيلهم بما يضمن استمرارية العملية الإنتاجية.

ب- ما هي الخطة بموجبها تستطيع إدارة الأفراد تشغيل أقل عدد ممكن من العمال.

الحل:

نفرض أن X هو عدد العمال الذين يبدأون العمل في الخطوط الإنتاجية في كل ساعة تبديل كما يلي:

في ساعة التبديل 1 ← X_1

في ساعة التبديل 5 ← X_2

في ساعة التبديل 9 ← X_3

في ساعة التبديل 13 ← X_4

في ساعة التبديل 17 ← X_5

في ساعة التبديل 21 ← X_6

والمطلوب إن يتم ذلك باستخدام أقل عدد من العمال أي :

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \rightarrow \text{Min}$$

في ظل تحقق الشروط المستمدة من الجدول 2.28 هي :

$$\begin{aligned}
X_1 + X_2 &\geq 30 \\
X_2 + X_3 &\geq 26 \\
X_3 + X_4 &\geq 32 \\
X_4 + X_5 &\geq 30 \\
X_5 + X_6 &\geq 19 \\
X_1 + X_6 &\geq 15
\end{aligned}$$

وكذلك الشروط التالية :

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0, X_5 \geq 0, X_6 \geq 0$$

يتم إدخال المتغيرات y_i حيث أن :

$$\begin{bmatrix} y_i \geq 0 \\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{bmatrix}$$

إلى القيود السابقة كما يلي :

$$\begin{aligned}
y_1 &= X_1 + X_2 - 30 \geq 0 \\
y_2 &= X_2 + X_3 - 26 \geq 0 \\
y_3 &= X_3 + X_4 - 32 \geq 0 \\
y_4 &= X_4 + X_5 - 30 \geq 0 \\
y_5 &= X_5 + X_6 - 19 \geq 0 \\
y_5 &= X1 + -15 \geq 0 \\
X_6 &
\end{aligned}$$

إن خطوات حل هذه المشكلة تكون أسهل فيما لو تم تحويـل النمـوذج أعلاه إلى

الصيغة المقابلة وذلك كما يلي :

أوجد أعلى قيمة لدالة الهدف.

$$F = 30U_1 + 26U_2 + 32U_3 + 30U_4 + 19U_5 + 15U_6$$

مع تحقق الشروط التالية :

$$\begin{aligned}
&U_1 &&+U_6 \geq 1\\
&U_1 + U_2 &&\geq 1\\
&U_2 + U_3 &&\geq 1\\
&U_3 + U_4 &&\geq 1\\
&U_4 + U_5 &&\geq 1\\
&U_5 + U_6 &&\geq 1
\end{aligned}$$

وكذلك الشروط التالية :

يتم إدخال متغيرات جديدة هي g_i حيث أن : $\begin{bmatrix} g_i \geq 0 \\ i=1,2,3,4,5,6 \end{bmatrix}$ وذلك كالأتي :

$$\begin{aligned}
g_1 &= (-u_1) &&+1(-u_6) + 1 \geq 0\\
g_2 &= 1(-u_1) + 1(-u_2) &&+1 \geq 0\\
g_3 &= 1(-u_2) + 1(-u_3) &&+1 \geq 0\\
g_4 &= 1(-u_3) + 1(-u_4) &&+1 \geq 0\\
g_5 &= 1(-u_4) + 1(-u_5) &&+1 \geq 0\\
g_6 &= 1(-u_5) + 1(-u_6) &&+1 \geq 0
\end{aligned}$$

إن النموذج الرياضي بصيغته الأصلية والمقابلة يمهد لعملية الحل باستخدام الطريقة البسيطة Simplex method ، حيث أن حل أحد هذين النموذجين سوف يؤدي إلى الحصول على النتائج المطلوبة. ولو ثم حل فإن النتائج التي سوف يتم الحصول عليها هي كالآتي :

$$X_1 = 0, y_1 = 0, X_3 = 0, y_3 = 0, X_5 = 0, y_6 = 0$$

$$X_2 = 30, y_2 = 4, X_4 = 32, y_4 = 2, X_6 = 19, y_6 = 4$$

إن أقل قيمة لدالة الهدف Z تبلغ 81 استناداً إلى النظرية رقم (1):

$$Z_{max} = F_{min}$$

و

$$Z_{min} = F_{max}$$

فهو يعني أن أقل عدد ممكن في العمال ينبغي تشغيلهم هو 81 عامل. أما بالنسبة لخطة تشغيل العمال فإنها تكون كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال X_1 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال X_2 المطلوب تبديلهم = 30 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال X_3 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال X_4 المطلوب تبديلهم = 32 عامل.

5- في الساعة 17 يكون عدد العمال X_5 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال X_6 المطلوب تبديلهم = 19 عامل.

ويكون لدى إدارة الأفراد عدد من العمال كاحتياط وذلك كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال y_1 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال y_2 الاحتياط تبديلهم = 4 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال y_3 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال y_4 الاحتياط تبديلهم = 2 عامل.

5- 1- في الساعة 17 يكون عدد العمال y_5 الاحتياط تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال y_6 الاحتياط تبديلهم = 4 عامل.

مثال رقم (2):

منشأة صناعية تملك ثلاثة خطوط إنتاجية، على أساسها يتم إنتاج أربعة أنوا من المنتجات، هي: A, B, C, D ساعات التشغيل القصوى المتاحة لكل خط من الخطوط الإنتاجية، مقدار ساعات العمل المطلوبة بكل 1000 وحدة من كل نوع من المنتجات

على أي خط من الخطوط الإنتاجية وربح الوحدة الواحدة المتوقع موضح في الجدول التالي :

جدول (5.6) بيانات المشكلة

الخطوط الإنتاجية	ساعات العمل المطلوب لكل 1000 وحدة من المنتجات ساعة/ماكنة				ساعات التشغيل القصوى المتاحة ساعة / ماكنة
	A	B	C	D	
الخط الإنتاجي الأول	2	3	4	1	87000
الخط الإنتاجي الثاني	1	1	5	2	55000
الخط الإنتاجي الثالث	3	1	2	1	61000
	17	9	20	8	الربح المتوقع

المطلوب:

أ- وضع خطة الإنتاج التي تؤدي إلى تحقيق أقصى عائد ربح ممكن.

ب- صياغة النموذج المقابل للنموذج الأصلي للمشكلة وحله.

الحل:

نفرض أن X هو رمز لكمية الإنتاج ، لذلك يكون لدينا :

$X_1 \leftarrow$ كمية الإنتاج من A

$X_2 \leftarrow$ كمية الإنتاج من B

$X_3 \leftarrow$ كمية الإنتاج من C

$X_4 \leftarrow$ كمية الإنتاج من D

إن المطلوب هو تحديد قيمة المتغيرات الأساسية X1, X2, X3, X4 التي تجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن أي :

$$Z = 17X_1 + 8X_2 + 20X_3 + 8X_4 \rightarrow Max$$

وذلك في ظل الشروط التالية :

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 1X_4 \leq 87000$$

$$1X_1 + 1X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 55000$$

$$3X_1 + 1X_2 + 2X_3 + 1X_4 \leq 61000$$

وكذلك الشروط المنطقية :

$$X1 \geq 0, X2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$$

إن حل هذا النموذج باستخدام الطريقة البسيطة (Simplex) للإنتاج والتي هي :

- كمية الإنتاج من A : $X_1 \rightarrow 12000$ وحدة
- كمية الإنتاج من B : $X_2 \rightarrow 13000$ وحدة
- كمية الإنتاج من C : $X_3 \rightarrow 6000$ وحدة
- كمية الإنتاج من D : $X_4 \rightarrow 0$

إذا تم اتخاذ القرار باعتماد هذه الخطة ، فإن في ظل الخطة سوف تكون الأرباح القصوى 441000 دينار.

إن النموذج المقابل يمكن صياغته كما يلي :

المطلوب تحديد رقم للمؤشرات u3, u2, u1 التي تمثل كفاءة الخطوط الإنتاجية في تحقيق الإيرادات للمنشآت وذلك في ظل تحقق الشروط التالية :

$$2u_1 + u_2 + 3u_3 \geq 17$$

$$3u_1 + u_2 + u_3 \geq 19$$

$$4u_1 + 5u_2 + 2u_3 \geq 20$$

$$u_1 + 2u_2 + u_3 \geq 8$$

وكذلك الشروط المنطقية

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن ، أي :

$$F = 87u_1 + 55u_2 + 61u_3 \rightarrow Min$$

إن حل هذه المشكلة باستخدام الطريقة المبسطة (Simplex) يؤدي إلى الحصول على النتائج التالية :

$$u_1 = \frac{26}{25}\ ,\ u_2 = \frac{34}{25}\ ,\ u_3 = \frac{113}{25}$$

بموجب هذه النتائج يعني، أن إدارة الإنتاج في المنشآت المذكورة، إذا قررت اعتماد خطة الإنتاج الواردة، فإن مقابل كل 1000 ساعة عمل تشتغل فيها الخطوط الإنتاجية الثلاث يتم بلوغ مستويات كفاءة في تحقيق الإيرادات كما يلي:

- بالنسبة للخط الإنتاجي الأول $\frac{26}{25}$ دينار
- بالنسبة للخط الإنتاجي الثاني $\frac{34}{25}$ دينار
- بالنسبة للخط الإنتاج الثالث $\frac{113}{25}$ دينار

من مصلحة متخذ القرار في المنشآت زيادة وقت تشغيل الخط الإنتاجي الثالث لكونه يحقق أكبر نسبة من الإيرادات، وفي ظل هذه المؤشرات تكون تكاليف تشغيل الخطوط الإنتاجية الثلاث كما يلي:

$$F_{min} = 87000.\ \frac{26}{25} + 55000.\ \frac{34}{25} + 61000.\ \frac{113}{25}$$

$F_{min} = 44100$ دينار

2.6 النموذج الرياضي الذي تكون فيه دالة الهدف (Z) هي دالة المتغير آخر في النموذج:

في الواقع العملي يمكن أن يواجه متخذ القرار في المنشآة (وبالذات الإنتاجية) مشاكل تتسم بطابع التغير في وحدة الزمن - حيث قد تظهر هذه المشاكل على مستوى المنشآة بشكل عام، أو في كل وظيفة من وظائفها الخمس المعروفة (الإنتاج، التسويق، المالية، الأفراد، المخازن). وعلى أساس ذلك فإن اتخاذ القرار الأمثل يتطلب صياغة النموذج الرياضي بما يتلائم وصفة التغير المذكورة. وبعبارة أخرى يجري تحوير أحد مكونات النموذج الرياضي للبرمجة الخطية (دالة الهدف، القيود الأساسية، قيود اللاسلبية، المتغيرات والعوامل) بالشكل الذي يستوعب صفة التغيير المشار إليها.

لتوضيح هذه الفكرة نذكر أدناه الصيغة العامة لمعادلة دالة الهدف، التي هي:

نموذج النقل

٥-١ مقدمة

تُعَدُّ مسألة النقل من المسائل الهامة في بحوث العمليات، ويمكن عَدُّها نوعاً من أنواع البرمجة الخطية. يتضح من التسمية أن الهدف هو إيجاد أدنى كلفة لنقل منتج أو مادة ما من عدد من المنابع إلى عدد من المصارف. مثلاً، يمكن نقل منتج ما من عدة مصانع (منابع) إلى عدة ورش رئيسية (مصارف)، أو توزيع أعمال معينة على آلات محددة، أو توزيع موظفين فازوا بمسابقة للتعيين في وظائف مختلفة. جميع هذه المسائل وسواها يمكن أن تصاغ بالاعتماد على تعريف مسألة النقل. وهذا ما ينطبق على مسائل أخرى عديدة، مثل شبكات توزيع المياه من عدد من المستودعات الرئيسية، وكذلك الأمر بالنسبة لتخديم مناطق مختلفة بأجهزة الهاتف من قبل عدة مقاسم رئيسية، وتوزيع العمال أو الأعمال على آلات ضمن ورشة ما لتنفيذ عدد محدد من الأعمال، وكذلك مسألة الدفاع الجوي وغيرها. يمكن استخدام طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لهذه المسألة. ولكن مميزاتها الخاصة تمكن من حلها بطرق أكثر سهولة.

٥-٢ نموذج مسألة النقل

لو فرضنا أنه لدينا m منبع و n مصرف وأن:

ai هي عدد الوحدات المتوافرة في المنبع i، حيث أن $i=1,2,\ldots,m$.

bj هي عدد الوحدات المطلوبة في المصرف j، حيث أن $j=1,2,\ldots,n$.

cij هي كلفة نقل الوحدة من المنتج على الطريق (i,j) الذي يصل بين المنبع i والمصرف j.

الجدول ٥-٢

المصارف j

المنابع i	1	2	3	المتوافر
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	a_2
المطلوب	b_1	b_2	b_3	

يُعَدُّ الاتزان أحد أهم خواص نموذج مسألة النقل، لأنه يوضح أنه من الممكن تلبية متطلبات السوق إذا وفقط إذا كانت الكمية الموردة من المخازن مساوية على الأقل الطلبات الكلية في الأسواق. حيث يجب أن يتساوى مجموع المتوافر في كل المنابع مع مجموع المطلوب في كل المصارف، أي أن العلاقة التالية يجب أن تكون محققة، لأن جميع تقنيات الحل تعتمد على اتزان النموذج:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

إذا لم يكن النموذج متزناً، وهذا هو الحال في المسائل الواقعية، يمكن فرض وجود منابع أو مصارف وهمية إضافية بطلب أو متوافر وهمي يساوي الفرق بين المتوافر والمطلوب، بحيث يصبح النموذج متزناً. سوف توضح هذه النقطة في فقرة تالية.

٥-٣ تقنية مسألة النقل

يمكن إيجاز الخطوات الأساسية لتقنية مسألة النقل مقارنة مع حل أي برنامج خطي كما يلي:

١- إيجاد حل أساسي أولي ملائم.

٢- إذا كانت جميع المتغيرات غير الأساسية تحقق شروط المثالية (كما هي الحال في طريقة السمبلكس) ينتهي الحل، وإلا يجب إيجاد المتغير الداخل من بين المتغيرات غير الأساسية، والذي دخوله للحل كمتغير أساسي يؤمن أفضل تحسين لقيمة معادلة الهدف. تابع للخطوة رقم ٣.

٣- باستخدام شروط الملاءمة، يجب إيجاد المتغير الراحل من بين المتغيرات الأساسية الحالية. ثم يتم إيجاد الحل الأساسي الجديد. يعاد تنفيذ الخطوة رقم ٢.

ستناقش هذه الخطوات بالتفصيل وذلك باستخدام المثال التالي:

ثلاثة مصانع رئيسية في مواقع جغرافية مختلفة. تنتج نوعاً معيناً من قطع الغيار، بطاقة إنتاجية بآلاف القطع 15 ,25 ,5. تغذي هذه المصانع الرئيسية أربعة مصانع فرعية بهذا المنتج، وحاجاتها له بآلاف القطع كما يلي 5 ,15 ,15 ,10، بمعرفة كلفة نقل المنتج الواحد من أي مصنع رئيسي لأي مصنع فرعي، المطلوب إيجاد الحل المثالي (الأقل كلفة) لمسألة توزيع هذا المنتج.

يمكن التعبير عن مسألة التوزيع هذه في شكل الجدول ٥-٣.

الجدول ٥-٣

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15
2	12 x_{21}	7 x_{23}	9 x_{33}	20 x_{24}	25
3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	5
المطلوب	5	15	15	10	

٥-٤ إيجاد الحل الأساسي الأولي

رأينا أن نموذج مسألة النقل يحتوي على معادلة قيد واحدة لكل منبع أو مصرف، أي يحتوي النموذج على m+n معادلة قيد، معادلة واحدة منها غير مستقلة، وذلك بسبب شرط التوازن (المتوافر = المطلوب). وبالتالي يكون لدينا m+n-1 معادلة مستقلة، وهذا يعني أن أي حل أساسي يجب أن يحتوي على m+n-1 متغير أساسي.

ثمة طرق عديدة يمكن استخدامها للحصول على الحل الأساسي الأولي الملائم، سوف يتم تقديم ومناقشة أربعة طرق منها في الفقرات التالية.

٥-٤-١ طريقة الزاوية الغربية الشمالية Northwest-Corner Method

تبدأ هذه الطريقة بتوزيع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب إلى المتغير x_{11} (المتغير الموجود في الزاوية الغربية الشمالية من الجدول). يشطب العمود أو الصف المحقق، وهذا يدل على أن بقية المتغيرات في العمود أو الصف تكون قيمها أصفاراً. في حال وجود عمود وصف محققين يشطب أي واحد منهما (وذلك من أجل توليد متغيرات أساسية تساوي أصفاراً بشكل أوتوماتيكي فيما لو وجدت). بعد تعديل قيم المتوافر والمطلوب، لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، توزع الكمية العظمى المسموح بها من المتوافر والمطلوب، إلى المتغير الموجود في الخلية الأولى من الصف أو العمود غير المشطوب. وهكذا حتى نصل إلى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب.

يمكن تلخيص تطبيق هذه الخطوات على المثال المعطى بالجدول ٥-٣ كما يلي:

١- $x_{11}=5$، وبالتالي يشطب العمود الأول، لا يحصل أي توزيع آخر إلى هذا العمود. الكمية المتبقية في الصف ١ تكون 10 وحدات.

٢- $x_{12}=10$، يشطب الصف ١، يتبقى 5 وحدات في العمود٢.

٣- $x_{22}=5$، يشطب العمود ٢، يتبقى 20 وحدة في الصف ٢.

٤- $x_{23}=15$، يشطب العمود ٣، يتبقى 5 وحدات في الصف ٢.

٥- $x_{24}=5$، يشطب الصف ٢، يتبقى 5 وحدات في العمود ٤.

٦- $x_{34}=5$، يشطب الصف ٣ أو العمود ٤، وبما أنه تبقى صف واحد أو عمود واحد غير مشطوب، تنتهي الخطوات.

يبين الجدول ٥-٤ حل البدء الأساسي الذي استنتج بهذه الطريقة هو:

$x_{11}=5$ ، $x_{12}=10$، $x_{22}=5$ ، $x_{23}=15$ ، $x_{24}=5$، $x_{34}=5$.

أما قيم المتغيرات المتبقية فهي أصفار، كما تحسب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$x_0=5*10 + 10*0 + 5*7 + 15*9 + 5*20 + 5*18 = 410$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ فإن كلف النقل من المنابع إلى المصارف لم تؤخذ ضمن اعتبارات الحل.

الجدول ٥-٤

المنابع \ المصارف	1	2	3	4	المتوافر
1	[10] 5	[0] 10	[20]	[11]	15
2	[12]	[7] 5	[9] 15	[20] 5	25
3	[0]	[14]	[16]	[18] 5	5
المطلوب	5	15	15	10	

في بعض المسائل، عندما يتحقق عمود وصف في نفس الوقت، فإن المتغير الأساسي الذي يجب إضافته إلى الحل، يجب أن تكون قيمته صفراً. يبين الجدول ٥-٥ هذه النقطة من خلال مثال. العمود الثاني والصف الثاني تحققا معاً. إذا شطب العمود

الثاني، فإن x_{23} يصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية، لأن المتوافر المتبقي للصف الثاني يكون الآن صفراً. عوضاً عن ذلك، إذا شطب الصف الثاني، x_{32} سيصبح أساسياً وقيمته صفر في الخطوة التالية.

الجدول ٥-٥

	1	2	3	4		
1	5	5			~~10~~	5
2		5	0		~~5~~	0
3			8	7	15	
	5	~~10~~	8	7		
		5				

إن الحلين الأساسين اللذين تم الحصول عليهما باستخدام هذه الطريقة للمسألتين المذكورتين في الجدول ٥-٤ والجدول ٥-٥ ، يحتويان العدد الصحيح والمناسب من المتغيرات الأساسية، أي $m+n-1 = 6$. إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية تقود دائماً إلى العدد المناسب من المتغيرات الأساسية.

٥-٤-٢ طريقة أدنى كلفة The Least-Cost Method

إن طريقة الزاوية الغربية الشمالية، التي قدمت في الفقرة السابقة، ليس من الضروري أن تعطي حلاً أساسياً أولياً جيداً لمسائل النقل. لأنها لم تأخذ في الحسبان كلف النقل، بينما الطرق التالية تعتمد على هذه الكلف في عملية استنتاج الحل كما سنرى. يمكن تلخيص خطوات طريقة أدنى كلفة كما يلي:

١- يخصص أكثر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب للمتغير الذي له أقل كلفة واحدية في كل الجدول، (في حال التساوي يتم الاختيار بشكل عشوائي).

٢- يشطب العمود أو الصف المحقق. كما هو الحال في طريقة الزاوية الغربية الشمالية، لدى وجود عمود وصف محققين في آن واحد، يشطب أي

واحد منهما.

٣- يعاد ترتيب المتوافر والمطلوب لجميع الصفوف والأعمدة غير المشطوبة، تعاد الخطوات من البداية، تنتهي خطوات الحل عند بقاء صف أو عمود واحد غير مشطوب.

استخدمت المسألة المقدمة في الجدول ٥-٣ لتوضيح استخدام طريقة أدنى كلفة. يبين الجدول ٥-٦ الحل الأساسي الأولي الذي استنتج بهذه الطريقة.

الجدول ٥-٦

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	(10) 0	(0) 15	(20)	(11) 0	15
2	(12)	(7)	(9) 15	(20) 10	25
3	(0) 5	(14)	(16)	(18)	5
المطلوب	5	15	15	10	

يمكن تلخيص خطوات الحل على النحو التالي: x_{12} و x_{31} هما المتغيران المصاحبان لأدنى كلفة واحدية ($c_{12}=c_{31}=0$). في حال التساوي، كما هو الحال في هذا المثال، يتم الاختيار بشكل عشوائي، باختيار x_{12}. وحسب المتوافر في الصف الأول، والمطلوب في العمود الثاني، نرى أن $x_{12}=15$، وهذا يحقق الصف الأول والعمود الثاني. بشطب العمود الثاني، يكون المتوافر المتبقي في الصف الأول يساوي الصفر.

بعد ذلك، المتغير x_{31} له أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة. وبالتالي $x_{31}=5$ يحقق الصف الثالث والعمود الأول. بشطب الصف الثالث، يكون المطلوب المتبقي في العمود الأول يساوي الصفر.

إن المتغير x_{23} يناظر أدنى كلفة واحدية غير مشطوبة ($c_{23}=9$). وحسب المتوافر

والمطلوب يمكن إعطاء $x_{23}=15$، وهذا بدوره يشطب العمود الثالث، لأن المطلوب المتبقي فيه هو صفر وحدة، بينما المتبقي من المتوافر في الصف الثاني هو 10 وحدات.

أدنى كلفة عنصر غير مشطوب تناظر $c_{11}=10$. وبما أن المتوافر المتبقي في الصف الأول والمطلوب المتبقي في العمود الأول كلاهما صفر، $x_{11}=0$. يشطب العمود الأول، والمتوافر المتبقي في الصف الأول هو صفر.

يتم التعرف على بقية المتغيرات الأساسية، وهي $x_{14}=0$ و $x_{24}=10$.

إن الكلفة المصاحبة لهذا الحل تكون كما يلي:

$$x_0 = 0*10 + 15*0 + 0*11 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$$ وحدة كلفة

كما هو ملاحظ، إن الحل الأساسي الأولي المشتق بوساطة طريقة أدنى كلفة، أفضل من الحل المشتق بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية، وهذا بديهي لأنه تم اعتبار الكلف في التوزيع. أيضاً يجب ملاحظة المتغيرات الأساسية التي تساوي قيمها الصفر، وهي ضمن الحل، حيث يجب أن تكون عدد المتغيرات الأساسية في أي حل مساوية: $m + n - 1$.

هذا وتجدر الإشارة إلى أنه يمكن تطبيق **طريقة أدنى كلفة في الصف**، أو **طريقة أدنى كلفة في العمود**، ويستنبط في كل من هاتين الطريقتين أيضاً حلاً أساسياً أولياً ملائماً بكلف مناسبة.

٥-٤-٣ طريقة فوجيل التقريبية Vogel's Approximation Method

بالرغم من أن هذه الطريقة (طورت عام ١٩٥٨) تعتبر من الطرق التقريبية إلا أنها تؤمن حلاً أولياً ملائماً أفضل من الطريقتين السابقتين. ومع أنها طريقة تقريبية، إلا أنها غالباً تؤمن حلاً أولياً مثالياً، أو قريباً جداً من الحل المثالي.

يمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة كما يلي:

١- تحسب غرامة لكل صف (عمود)، وذلك بطرح أصغر عنصر كلفة في

الصف (العمود) من عنصر الكلفة الأصغر التالي في نفس الصف (العمود).

٢- يحدد الصف أو العمود ذو الغرامة الأكبر، في حال تساوي غـرامتين يـتم الاختيار بشكل عشوائي، يوزع أكبر ما يمكن من المتوافر أو المطلوب إلى المتغير ذي أدنى كلفة في الصف أو العمود المحدد. يعاد ترتيـب المتـوافر والمطلوب، ومن ثم يشطب الصف أو العمود المحقـق، إذا تحقـق صـف وعمود في نفس الوقت، يشطب واحد منهما فقط، والثاني يعين له متوافر أو مطلوب صفر. لا يستخدم في حساب الغرامات القادمة أي صـف أو عمود له صفر متوافر أو مطلوب.

٣- (آ) في حال بقاء صف أو عمود واحد فقط غير مشطوب تنتهي الطريقة

(ب) في حال بقاء صف (عمود) بمتوافر (بمطلوب) موجب غير مشـطوب، يحدد المتغير الأساسي في الصف (العمود) حسب طريقة أدنى كلفة.

(ت) في حال كون جميع الصفوف والأعمدة الباقيـة لهـا صـفر متـوافر ومطلوب، تحدد المتغيرات الأساسية الأصفار حسب طريقة أدنى كلفة.

(ث) فيما عدا ذلك، تعاد حسابات الغرامات للصـفوف والأعمـدة غـير المشطوبة، وتعاد الخطوات اعتباراً من الخطوة الثانية، يجب ملاحظـة أن الصفوف والأعمدة التي لها متوافر ومطلوب أصـفار لا تسـتخدم في حساب الغرامات.

بتطبيق هذه الطريقة على المثال المعطى في الجدول ٥-٣، يبين الجدول ٥-٧ أول مجموعة من غرامات الصفوف والأعمدة.

بما أن غرامة الصف ٣ هي العظمى (14)، وبما أن $c_{31}=0$ هي أدنى كلفة واحدية في نفس الصف، لذلك يجب تحقيقه أولا لتجنب غرامة الصـف العظمـى، وبالتـالي تخصص كمية 5 وحدات للمتغير x_{31}. تحقق الصف ٣ والعمود ١ في نفـس الوقـت.

بفرض أننا شطبنا العمود ١. المتوافر المتبقي للصف ٣ يكون صفراً.

الجدول ٥-٧

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	~~5~~	14
المطلوب	~~5~~	15	15	10		
غرامة العمود	10	7	7	7		

يوضح الجدول ٥-٨ المجموعة الجديدة من الغرامات بعد شـــطب العمـــود ١.

(لاحظ أن الصف ٣ بمتوافر صفر لم يستخدم في حساب الغرامات).

الجدول ٥-٨

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0	20	11	15	11
2	12	7	9 15	20	~~25~~,10	2
3	5				0	-
المطلوب	~~5~~	15	~~15~~	10		
غرامة العمود	-	7	11	9		

كما هو ملاحظ في الجدول ٥-٨ أن غرامتي الصف ١ والعمود ٣ متســـاويتان.

بفرض أنه تم اختيارعشوائي للعمود الثالث، لذلك يجب أن يخصص أكبر ما يمكـــن 15

وحدة إلى المتغير ذي أدنى كلفة في العمود ٣ وهو x_{23}. يشطب العمود ٣ ، ويعدل المتوافر في الصف 2 إلى 10 واحدات.

تعاد أيضاً عملية حساب الغرامات للصفوف والأعمدة غير المشطوبة كما هو موضح في الجدول ٥-٩ وهو يبين أن غرامة الصف ٢ هي العظمى، لذلك

الجدول ٥-٩

المنابع \ المصارف	1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
1	10	0	20	11	15	1
2	12	7 / 10	9 / 5	20	~~25~~,~~10~~	13
3	5				0	-
المطلوب	~~5~~	~~15~~,5	~~15~~	10		
غرامة العمود	-	7	-	9		

يخصص 10 وحدات إلى المتغير x_{22} ذي أدنى كلفة واحدية. يشطب الصف ٢، ويعدل المطلوب في العمود ٢ إلى 5 وحدات. تعاد عملية حساب الغرامات كما هو موضح في الجدول ٥-١٠ وهو يبين أن غرامة الصف ١ هي العظمى، لذلك يخصص 5 وحدات إلى المتغير x_{12} ذي أدنى كلفة واحدية. يشطب العمود ٢ نظراً لتحققه، ويعدل المطلوب في الصف ١ إلى 10 واحدات.

بقي لدينا الصف ١ غير مشطوب بمتوافر 10 والصف ٣ غير مشطوب بمتوافر صفر وكذلك العمود ٤ بمطلوب 10. وبالتالي يجب توزيع 10 وحدات للمتغير x_{14}، ويشطب الصف ١ كونه محققاً، ومن ثم اختيار المتغير $x_{34}=0$ كمتغير أساسي صفري من أجل توليد متغيرات أساسية بعدد m+n-1.

الجدول ٥-١٠

	المصارف 1	2	3	4	المتوافر	غرامة الصف
المنابع 1	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 10	~~15,10~~	11
2	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{9}$ 5	$\boxed{20}$	~~25,10~~	
3	$\boxed{0}$ 5			0		
المطلوب	~~5~~	~~15,5~~	~~15~~	~~10~~		
غرامة العمود	-	0	-	0		

وبالتالي يكون الحل الناتج وفق هذه الطريقة كما يلي:

$$x_{12}=5,\ x_{14}=10,\ x_{22}=10,\ x_{23}=15,\ x_{31}=5,\ x_{34}=0$$

وكلفة هذا التوزيع هي (وحدة كلفة $315 = x_0$). (وهو الحل المثالي كما سنرى لاحقاً).

ملاحظة: في حال تساوي غرامتين يتم الاختيار بشكل عشوائي، وهذا الاختيار حساس، في هذا المثال لو تم الاختيار في العملية الثانية الصف 1 بدلاً من العمود ٣، لنتج حلٌ أسوأ، على أي حال هناك طريقة للاختيار المميز والسليم مبينة في النسخة الكاملة لهذه الطريقة. (N.Reinfeld and W. Vogel, Mathematical Programming, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.,1958)

٥-٤-٤ طريقة رسل التقريبية Russell's Approximation Method

تُعَدُّ هذه الطريقة (طورت عام ١٩٦٩) أيضاً كلف النقل من المنابع إلى المصارف عند إيجاد الحل الأولي، لذلك فإن الحل الأولي المستنتج باستخدامها يمكن أن يكون مثالياً أو قريباً جداً من الحل المثالي. تتلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

١- حساب الفروق المطلقة لكل خلية من خلايا المصفوفة وفق العلاقة التالية:

الفروق المطلقة للخلية=كلفة الخلية-أعلى كلفة في الصف-أعلى كلفة في العمود.

٢- يتم اختيار الخلية ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (في حالة التساوي يتم الاختيار عشوائياً، أو الخلية ذات أدنى كلفة).

٣- تعين كمية الصف أو العمود لتلك الخلية أيهما أقل.

٤- يستبعد من حساب الفروق الصف أو العمود المحقق بالكامل.

٥- تكرر العمليات السابقة حتى يتم تحقيق جميع الأعمدة والصفوف.

سوف يستخدم المثال قيد الدراسة المعطى في الجدول ٥-٣ لتوضيح هذه الطريقة، على النحو التالي:

الجدول ٥-١١

المصارف

[illegible]	1	2	3	4	المتوافر
1	10 -22	0 -34	20 -16	11 -29	15
2	12 -20	7 -27	9 -31	20 -20	25
3	0 -30	14 -18	16 -22	18 -20	5
المطلوب	5	15	15	10	

يمكن حساب فروق الخلايا كما يلي:

فروق الخلية (1,1)=10-20-12=-22

فروق الخلية (1,2)=0-20-14=-34

فروق الخلية (1,3)=20-20-16=-16

فروق الخلية (1,4)=11-20-20=-29

وهكذا كما هو موضح في الجدول ٥-١١ وفي الزاوية اليمنى السفلية. ومنه نجد

أن الخلية (1,2) هي ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (34-) يوزع لها حسب المتوافر في الصف 1 والمطلوب في العمود 2 أيهما أقل، بناءً على ذلك يعطى لها 15 وحدة. بهذا التوزيع تم استيفاء العمود 2، والصف 1. إذاً يستبعدان من حسابات الفروق التالية. يعدل الجدول ٥-١١ كما هو موضح في الجدول ٥-١٢ وتكرر العمليات على النحو التالي:

الجدول ٥-١٢

المنابع \ المصارف	1	2	3	4	المتوافر
1		15			~~15~~
2	12 / -20		9 / -27	20 / -20	25
3	0 / -30		16 / -18	18 / -20	5
المطلوب	5	~~15~~	15	10	

نجد أن الخلية (3,1) هي ذات أكبر فروق بإشارة سالبة (30-) يوزع لها حسب المتوافر في الصف 3 والمطلوب في العمود 1 أيهما أقل، بناءً على ذلك يعطى لها 5 وحدات. بهذا التوزيع تم استيفاء العمود 1، والصف 1. إذاً يستبعدان من حسابات الفروق التالية. يعدل الجدول ٥-١٢ كما هو موضح في الجدول ٥-١٣ وتكرر العمليات على النحو التالي:

الجدول ٥-١٣

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1		15			~~15~~
2			[9] 15	[20] 10	25
3	5				~~5~~
المطلوب	~~5~~	~~15~~	15	10	

بعد ذلك، نجد أنه تبقى الصف 2، يوزع على خلاياه وفق طريقة أدنى كلفة، أي يوزع على الخلية (2,3) 15 وحدة ، ويوزع على الخلية (2,4) 10 وحدات، وبالتـــالي يصبح الحل الأساسي الأولي المستنتج بهذه الطريقة كما هو موضح في الجدول ٥-١٤.

الجدول ٥-١٤

المصارف

المنابع	1	2	3	4	المتوافر
1	[10] 0	[0] 15	[20]	[11]	15
2	[12]	[7] 0	[9] 15	[20] 10	25
3	[0] 5	[14]	[16]	[18]	5
المطلوب	5	15	15	10	

من أجل توليد متغيرات أساسية بعدد m+n-1، يمكن استخدام طريقة أدنى كلفة لاختيار المتغيرات الأساسية الصفرية، ولكن يجب الانتباه لعدم عزل متغير أساسي ضمن صفه وعموده، لأن ذلك يعيق اختبارات المثالية كما سنرى لاحقاً. وبالتالي يكون الحل الناتج وفق هذه الطريقة كما يلي:

$$x_{12}=15, x_{23}=15, x_{34}=10, x_{31}=5, x_{11}=x_{22}=0$$

وكلفة هذا التوزيع هي: وحدة كلفة $335 = x_0$.

كمقارنة بين الطرق المستخدمة لتوليد حل أساسي أولي ملائم، نبين فيما يلي الكلف الناتجة عن كل منها:

طريقة الزاوية الغربية الشمالية	410 وحدة كلفة
طريقة أدنى كلفة	335 وحدة كلفة
طريقة فوجيل التقريبية	315 وحدة كلفة
طريقة رسل التقريبية	335 وحدة كلفة

بشكل عام يمكن القول أن الحلول الأساسية الأولية الناتجة عن الطرق التي تراعي كلف النقل عند إيجادها تكون أفضل من طريقة الزاوية الغربية الشمالية بالرغم من سهولتها وسرعتها، إلا أن العبرة ليست بالسرعة إنما بأن يكون الحل الأولي الناتج أقرب ما يمكن من الحل المثالي، وذلك بغية تقليل عدد الخطوات لدى اختبارات المثالية كما سنرى لاحقاً.

لا يوجد حتى الآن معيار للمفاضلة بين هذه الطرق لدى حل مسألة ما، إلا أنه يفضل استخدام إحدى الطريقتين الأخيرتين، لأن الحلول الناتجة عن استخدامهما تكون قريبة من المثالية إن لم تكن كذلك.

٥-٥ اختبارات المثالية

وفق خطوات تقنية مسألة النقل التي قدمت في الفقرة ٥-٣، فإن عملية إيجاد حل أساسي أولي ملائم، يعد بمثابة الخطوة الأولى من خطوات حل هذه المسألة. أما الخطوة الثانية فهي اختبار ما إذا كان هذا الحل هو الحل المثالي أم لا؟ أي اختبار مثالية الحل. إذا اتضح أن الحل مثالياً، تكون المسألة قد حلت، أما إذا تبين أن الحل غير مثالي فإن تقنية مسألة النقل تتطلب العمل على تحسينه بغية الوصول إلى الحل المثالي.

يجب التوضيح منذ البداية على أن اختبارات المثالية في مسألة النقل، هي في

مفهومها وأساسها، تتشابه إلى حد كبير مع اختبارات المثالية التي سبق اتباعها في خوارزمية السمبلكس، وهي منهجياً تتبع نفس خطوات تحسين الحل الأساسي الأولي لطريقة السمبلكس. أي يتم تقويم كل متغير غير أساسي في الجدول من حيث مقارنة الربح الذي يمكن أن يحققه فيما لو دخل الحل وأصبح أساسياً. لدى الوصول إلى النقطة التي لايُقدِّم فيها أيٌ من المتغيرات غير الأساسية، أيَّ تحسين إضافي على الحل، فيما لو دخله، يكون بذلك قد تم التوصل إلى الحل المثالي.

أسوة بطريقة السمبلكس، فإن المتغيرات الأساسية في كل عملية، هي تلك التي لها قيمٌ موجبة، أو تلك التي أعطيت قيماً صفرية، وذلك من أجل أن يكون عدد المتغيرات الأساسية يساوي m+n-1 ، أو تلك التي تناظر الخلايا المشغولة في جدول مسألة النقل. أما المتغيرات غير الأساسية فهي تلك التي تناظر الخلايا غير المشغولة أو الفارغة في الجدول. ولذلك يتم حساب ومقارنة كلف النقل لكل خلية فارغة.

قبل الدخول في تفاصيل وخطوات الطرق التي يمكن أن تتبع في اختبار المثالية، يجب توضيح شرط المثالية في مسائل النقل بشكل أفضل، من خلال مثال بسيط، وذلك عوضاً عن تطبيقه على المصفوفة الأصلية الكبيرة نسبياً اختصاراً للعمليات الحسابيةالمطلوبة، ثم ينقل هذا المفهوم للتطبيق على المسألة قيد الدراسة.

مثال: بفرض أن الجدول ٥-١٥ يمثل الحل الأساسي الأولي لمسألة نقل ما، والمطلوب إجراء اختبارات المثالية عليها، وذلك وفقاً للقاعدة التي طرحت أعلاه.

الجدول ٥-١٥

المنتج	1	2	المتوافر
1	50 (3)	10 (6)	60
2	(4)	60 (10)	60
المطلوب	50	70	

يتضح من الجدول ٥-١٥ الذي يقدم حلا أساسياً اولياً ملائماً، بأن المستغيرات الأساسية (الخلايا المشغولة) هي x_{11},x_{12},x_{22} ، والمتغير غير الأساسي الوحيد (الخليـة غير المشغولة) هو x_{21}، لاحظ أن عدد المتغيرات الأساسية يساوي $m+n-1=3$ ، وهـو المطلوب من أجل إمكانية الاستمرار في الحل. والكلفة الكلية لهـذا التوزيـع هـي: $x_0=810$. يجب اختبار المتغير غير الأساسي x_{21}، فيما إذا كان يحقق شرط المثالية أم لا، (كما هي الحال في طريقة السمبلكس). أي إذا كانت كلفة دخوله كمتغير أساسـي تحسن من قيمة الحل الحالي (يجب إدخاله للحل بأكبر قيمة ممكنة ويتـابع الحـل)، أم تسيء إليه (يكون الحل الحالي هو الحل المثالي).

لنتخيل أننا رفعنا قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد، وهذا يقود إلى انتـهاك لقيود المنابع والمصارف، وحتى يتم المحافظة عليها محققة علينا تعـديل قـيم المـستغيرات الأساسية كما هو موضح في الجدول ٥-١٦.

الجدول ٥-١٦

المنابع		1	2	المتوافر
	1	50 (3) -	10 (6) +	60
	2	x_{21} (4) +	60 (10) -	60
المطلوب		50	70	

إن رفع قيمة المتغير x_{21} من الصفر إلى الواحد يترتب عليه التغيرات التالية مجتمعة كما هو موضح في الجدول ٥-١٦

أ- تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة.

ب- زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة.

ت- تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة.

وهذا التخفيض والزيادة سينعكس حتماً على كلفة التوزيع، ويجب معرفة فيمـا

إذا كانت محصلة التكاليف في صالح هذا التغيير أم لا؟ إن الترجمة الفعلية لهذه الـــتغيرات يمكن حسابها كما يلي:

زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +4

تخفيض قيمة المتغير x_{11} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -3

زيادة قيمة المتغير x_{12} بوحدة واحدة سؤدي إلى زيادة قيمة x_0 بـــ: +6

تخفيض قيمة المتغير x_{22} بوحدة واحدة سؤدي إلى تخفيض قيمة x_0 بـــ: -10

وبالتالي تكون المحصلة النهائية للتغيير +4−3+6−10= −3

وهذا يعني أنه لو فكرنا في زيادة قيمة المتغير x_{21} بوحدة واحـــدة، فـــإن هـــذا سيترتب عليه انخفاض كلفة النقل الكلية لذلك الحل الأولي بمقدار 3 واحدات كلفـــة، وهذا يعني أن الحل الأولي غير مثالي، حيث يمكن تخفيض كلفته كما رأينا، ويكون هذا المتغير هو المتغير الداخل. من ناحية أخرى، يجب زيادة قيمة هذا المتغير بأقصى كميـــة ممكنة حتى يكون التوفير في كلفة النقل الكلية أفضل مايمكن، أي ماهي القيمة القصوى للمتغير x_{21} الذي يمكن أن يأخذها؟ إن تحديد الكمية (الحد الأقصى) الـــتي يمكـــن أن تعطى إلى المتغير x_{21} تتحدد أيضاً من خلال حركة التغيرات التي استخدمت في حساب المحصلة النهائية لكلفة التغيير. وكما ذكرنا إن دخول المـــتغير x_{21} كمـــتغير أساســـي سيترتب عليه تغييرات في المتغيرات الأساسية من تخفيض وزيادة، يمكن أن يعـــبر عـــن ذلك بإشارة (-) وإشارة (+) كما هو موضح في الجدول ٥-١٦ وفي الزاوية الـــيمنى السفلية من كل خلية تتأثر بهذا التغيير. طالما أن هناك قيداً بعدم السلبية في قيم جميـــع المتغيرات، إذاً يتعين أن يدخل المتغير الداخل بأقصى قيمة له، شريطة ألا يترتب علـــى ذلك أن تصبح قيمة أي متغير سالبة، أي تكون قيمته هي أقل قيمة لمتغير ذي إشـــارة سالبة في الدارة المرسومة. تطبيقاً لهذه القاعدة في هذا المثال البسيط، سنجد أن هنـــاك خليتين إشاراتهما سالبة وهما x_{11} و x_{22} ، قيمة المتغير الأول هي 50 وحدة، وقيمة الثاني

هي 60 وحدة. إذاً الحد الأقصى الذي يمكن تعيينه للمتغير الداخل x_{21} هو 50 وحدة، كما هو موضح في الجدول ٥-١٧

الجدول ٥-١٧

المنتج	1	2	المتوافر
1	(3)	(6) 60	60
2	(4) 50	(10) 10	60
المطلوب	50	70	

وكذلك الأمر فإن المتغير الذي ستؤول قيمته إلى الصفر في الـدارة المرسـومة سيكون هو المتغير الراحل، وهو في هذه الحالة المتغير x_{11} ، وأما كلفـة النقـل بعـد التحسين فهي $x_0=660$ ، أي هناك تحسين مقداره 150 وحدة كلفة كما هو متوقع.

يوضح هذا المثال البسيط الخطوات الأساسية في اختبارات المثالية لمسألة النقـل، وكذلك خطوات تحسين الحل الجاري، ولكن يتعين علينا أن نستعرض ونتعرف علـى خطوات ومنهاج الطرق التي يمكن استخدامها لاختبارات المثالية في هذا النـوع مـن المسائل، حيث يمكن القيام باختبارات المثالية لمسائل النقل باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين:

١- طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

٢- طريقة المضاريب Multipliers Method

وفيما يلي المنهاج الذي تبنته كل منهما في اختبار المثالية.

٥-٥-١ طريقة حجر المسافات (التدرج) The Stepping-Stone Method

عندما تكون مسألة النقل المطلوب حلها كبيرة مقارنة مع المثال السابق والمكون من أربع خلايا فقط، يمكن التصور أن نمط التغيير المطلوب إحداثه لإعادة التخصـيص يكون صعباً بعض الشئ، ولهذا توجد بعض الطرق التي تعالج هذا التصـور بمنهجيـة

أسهل. وإحدى هذه الطرق يطلق عليها طريقة حجر المسافات أو التدرج، كما ترجمت في بعض المراجع العربية باسم نقطة الارتكاز أو حجر الوطء.

يمكن أن يُعَدُّ الحل الأساسي الأولي الذي تم استنتاجه من استخدام إحدى الطرق السابقة هو الحل الجاري، والطريقة التي تمكننا من اختبار هذا الحل الجاري هل هو مثاليٌّ أم لا؟ تكمن في اختبار جميع المتغيرات غير الأساسية، وهل إدخالها للحل كمتغيرات أساسية يحسن من قيمة معادلة الهدف أم لا؟ في حال وجود متغير كهذا سوف يتم اختياره على أنه المتغير الداخل، وفي هذه الحالة، أحد المتغيرات الأساسية يجب أن يترك الحل ويصبح المتغير الراحل (كطريقة السمبلكس).

لنتمكن من إيجاد المتغير الداخل والمتغير الراحل، يجب تعريف دارة مغلقة لكل متغير غير أساسي. تتألف هذه الدارة من عدد من القطع المستقيمة المتتالية الأفقية والرأسية وليست القطرية أو المتقاطعة. نهايات هذه القطع المستقيمة يجب أن تكون متغيرات أساسية، فيما عدا بداية ونهاية هذه الدارة يجب أن تبدأ وتنتهي في المتغير غير الأساسي قيد الاختبار. ولكن هذا لا يمنع مرور المسار على خلايا متغيرات أساسية دون المساس بها أو المرور بخلايا متغيرات غير أساسية دون الإضافة إليها، أي لا تكون ضمن دارة المتغير قيد الاختبار، وذلك حفاظاً على الكميات المتوافرة في الصفوف والكميات المطلوبة في الأعمدة. ينبغي ملاحظة أن المسار لكل متغير غير أساسي هو عبارة عن دارة مغلقة أو مضلع مغلق جميع رؤوسه هي متغيرات أساسية، عدا رأس واحد وهو المتغير غير الأساسي المطلوب تقويمه. كما يمكن الإثبات والبرهنة على أنه يوجد مضلع مغلق واحد لكل متغير غير أساسي، أي لا يكون هناك سوى مسار دارة مغلقة واحدة لكل متغير غير أساسي في الحل.

يبين الجدول ٥-١٨ الحل الأساسي الأولي الملائم، الذي تم الحصول عليه بوساطة طريقة الزاوية الغربية الشمالية.

x_{21}	$x_{21} - x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{21}$	-5
x_{31}	$x_{31} - x_{11} - x_{12} - x_{22} - x_{24} - x_{34} - x_{31}$	-15
x_{32}	$x_{32} - x_{22} - x_{24} - x_{34} - x_{32}$	+9
x_{33}	$x_{33} - x_{23} - x_{24} - x_{34} - x_{33}$	+9

باستعراض قيم صافي التغيير في الكلفة للمتغيرات الستة التي تم تقويمها، يتضح أن هناك قيماً موجبة وقيماً سالبة (ويمكن أن تكون هناك قيمٌ صفرية أيضاً)، وهذا يعني مايلي:

أ- إذا كانت قيمة صافي التغيير موجبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً سوف يسيء الى الكلفة، ويبعد الحل عن المثالي.

ب- إذا كانت قيمة صافي التغيير صفرية، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً لن يسيء ولن يحسن الكلفة، وتبقى كلفة الحل كما هي (حل منحل سيشرح مضمونه لاحقاً).

ت- إذا كانت قيمة صافي التغيير سالبة، فإن دخول هذا المتغير إلى الحل وجعله متغيراً أساسياً، سوف يترتب عليه تخفيض الكلفة بمقدار صافي التغيير لكل وحدة يتم تخصيصها لهذا المتغير، ويقرب الحل من المثالي. ومعنى ذلك أنه إذا ظهرت قيمٌ سالبة لصافي التغيير لأي متغير غير أساسي، فإن هذا يعني أن الحل الحالي غير مثالي.

وبالعودة إلى الجدول ٥-١٩ يمكن القول بأن الحل الأساسي الأولي المبين بالجدول ٥-١٨ هو حل غير مثالي ويجب تحسين الحل.

يمكن اتباع الخطوات التالية لتحسين الحل الجاري عندما يكون غير مثالي:

١- تحديد المتغير الداخل.

٢- تحديد المتغير الراحل، وقيمته تكون هي قيمة المتغير الداخل.

٣- تعديل جدول مسألة النقل، والبدء بعملية جديدة.

١- تحديد المتغير الداخل:

المتغير الداخل هو المتغير غير الأساسي ذو أكبر قيمة صافي تغيير أو كلفة دخول بإشارة سالبة، لأنه يقدم أقصى توفير ممكن في معادلة الهدف مقارنةً مع بقية المتغيرات غير الأساسية والتي لها قيمة صافي تغيير سالبة.

بتطبيق هذا المعيار على المثال قيد الحل، يكون المتغير x_{31} هو المتغير الداخل حيث كلفة دخوله للحل هي 15- وهي أكبر قيمة بإشارة سالبة.

٢- تحديد المتغير الراحل:

المتغير الراحل هو أحد المتغيرات الأساسية وضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، وهو المتغير الذي له أصغر قيمة وإشارته سالبة (-)، أي هو المتغير الذي ستقل قيمته للصفر في حال إجراء عملية التعديل لقيم المتغيرات لتتلاءم مع الحل الجديد، يمكن أن يكون أي من المتغيرات x_{11} و x_{22} و x_{34} المتغير الراحل، لأنها جميعاً قيمها 5 وحدات، وذات إشارة سالبة، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{34} ليكون المتغير الراحل. لاحظ أن قيمة المتغير الداخل في الجدول الجديد تكون 5 وحدات وهي قيمة المتغير الراحل حالياً.

٣- تعديل جدول مسألة النقل:

بعد اختيار المتغير الداخل وهو x_{31}، وتحديد أقصى قيمة له وهي 5 وحدات، يجب تعديل جدول النقل بحيث يكون الجدول الجديد محققاً لقيود المنابع وقيود المصارف. أي إعطاء قيمة $x_{31}=5$ ، وإنقاص قيمة المتغير x_{11}، وزيادة قيمة المتغير x_{12}، وإنقاص قيمة المتغير x_{22}، وزيادة قيمة المتغير x_{23}، وإنقاص قيمة المتغير x_{34} كله بمقدار 5 وحدات. لاحظ أن المتغير x_{34} هو المتغير الراحل. يبين الجدول ٥-٢٠ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢٠

المصارف

المنبع	1	2	3	4	المتوافر
1	(10) 0 -	(0) 15 +	(20) +18	(11) -2	15
2	(12) -5 +	(7) 0 -	(9) 15	(20) 10	25
3	(0) 5	(14) +24	(16) +24	(18) +15	5
المطلوب	5	15	15	10	

وبناءً على هذا التعديل، فإن تكاليف النقل الكلية تكون:

$x_0 = 0*10 + 15*0 + 0*7 + 15*9 + 10*20 + 5*0 = 335$ وحدة كلفة

بمقارنة هذه الكلفة مع كلفة الحل الأولي الذي تم إعداده باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية، نجد أن الكلفة الكلية قد قلت بمقدار $15*5 = 75$ وحدة كلفة.

يمكن اختصار هذه الحسابات على الجدول، وذلك بحساب كلفة دخول كل متغير غير أساسي من دارته المرافقة له، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٠. بالتالي يمكن إيقاف العمليات إذا كانت جميع الكلف موجبة أو أصفار، ويكون الحل الجاري هو الحل المثالي، وإلا يجب اختيار المتغير غير الأساسي ذو الكلفة الأكبر بالسالب على أنه المتغير الداخل.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الداخل يجب أن يكون x_{21} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (5-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية. ومن دارته المرافقة: $(x_{21} \to x_{11} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{21})$، نجد أن كلا المتغيرين x_{11} و x_{22} مرشحان لأن يكونا المتغير الراحل، بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{11} بشكل عشوائي ليرحل عن الحل، بما أن قيمته تساوي الصفر، فلن يكون هناك أي تعديل على قيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة، ولكن سيرحل المتغير x_{11} عن

الحل ويدخل المتغير x_{21} للحل ولكن بقيم صفرية (لاحظ انحلال الحل). يبين الجــــدول ٥-٢١ هذه التعديلات.

الجدول ٥-٢١

المنبع \ المصارف	1	2	3	4	المتوافر
1	[10] +5	[0] 15 -	[20] +18	[11] -2 +	15
2	[12] 0	[7] 0 +	[9] 15	[20] 10 -	25
3	[0] 5	[14] +19	[16] +19	[18] +10	5
المطلوب	5	15	15	10	

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من داراتها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢١.

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن المتغير الـــداخل يجب أن يكون x_{14} نظراً لأن كلفة دخوله للحل (2-) هي الأكثر سلبية من جميع كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، ومن دارته المرافقـــة: $(x_{14} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{14})$، نجد أن المتغير x_{24} هو المتغير الراحل، وبما أن قيمته تساوي 10، إذاً يجب تعديل قـــيم المتغيرات ضمن الدارة المرافقة للمتغير الداخل، أي إضافة 10 لقيم المتغيرات ذات إشارة (+)، وطرح 10 من قيم المتغيرات ذات إشـــارة (-) . يـــبين الجـــدول ٥-٢٢ هـــذه التعديلات.

يعاد حساب كلفة دخول المتغيرات غير الأساسية من داراتها المرافقة لها، وكتابة هذه الكلفة في الزاوية اليسرى السفلية من كل خلية، كما هو مبين في الجدول ٥-٢٢.

الجدول ٥-٢٢

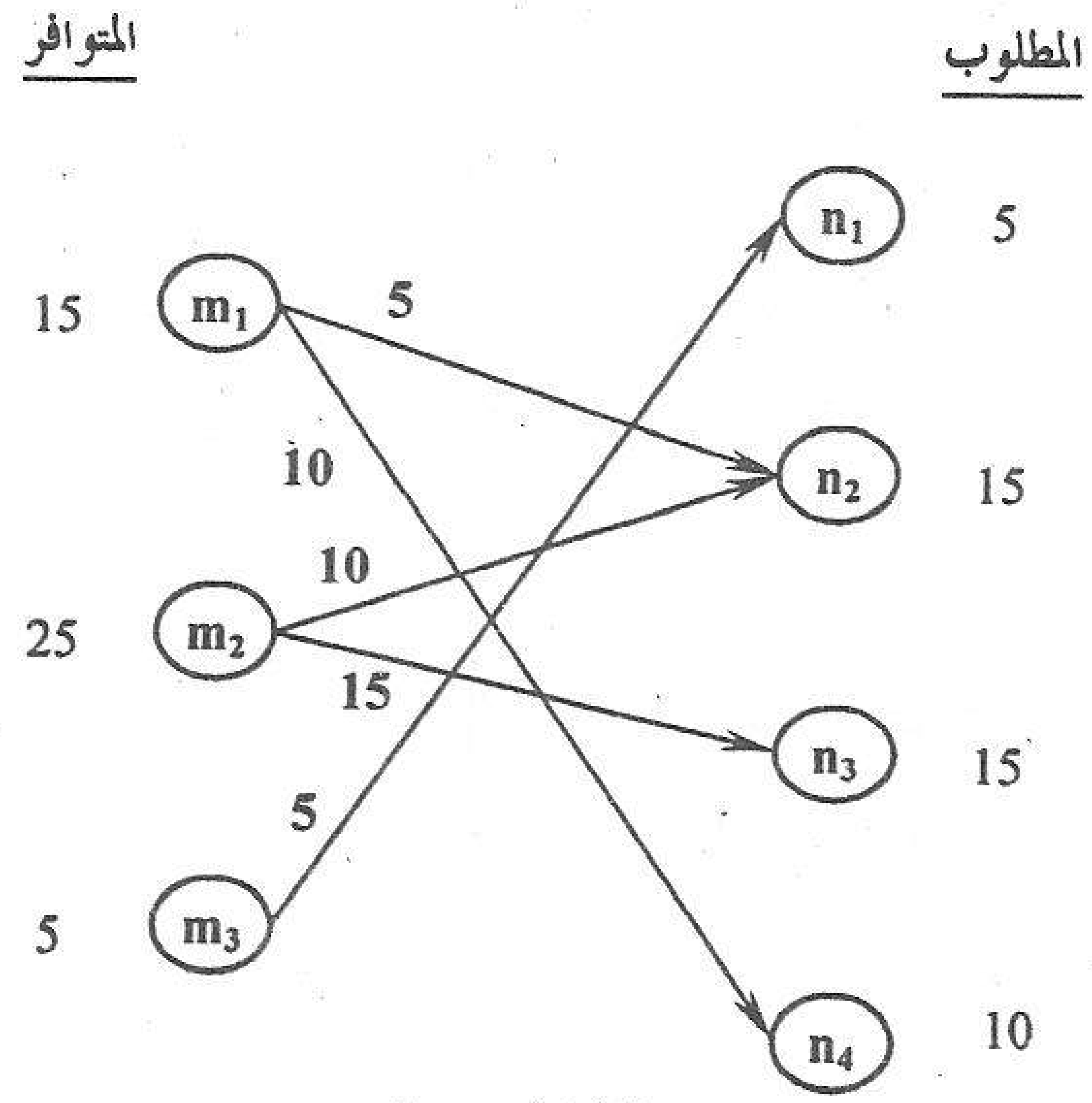
المصارف

المصادر	1	2	3	4	المتوافر
1	(10) +5	(0) **5**	(20) +18	(11) **10**	15
2	(12) **0**	(7) **10**	(9) **15**	(20) +2	25
3	(0) **5**	(14) +19	(16) +19	(18) +12	5
المطلوب	5	15	15	10	

بتفحص كلف دخول المتغيرات غير الأساسية، يمكن ملاحظة أن جميع هـــذه الكلف $\bar{c}$ موجبة وهذا يعني تحقق شـــرط المثاليـــة، والحـــل المثـــالي هـــو: $x_{12}=5$, $x_{14}=10, x_{21}=0, x_{22}=10, x_{23}=15, x_{31}=5$ ، كما هو موضح بالشكل ٥-٢.

يمكن حساب كلفة هذا التوزيع على النحو التالي:

$$x_0 = 5*0 +10*11 + 0*12 + 10*7 + 15*9 + 5*0 = 315$$ وحدة كلفة



الشكل ٥-٢

٥-٥-٢ طريقة المضاريب (أو طريقة التوزيع المعدل)

Multipliers Method (or Modified Distribution Method)

إن خطوات الحل المتبعة في هذه الطريقة مشابهة تماماً للخطوات المتبعة في طريقة حجر المسافات، كما ينحصر الاختلاف الوحيد في كيفية حساب كلف دخول المتغيرات غير الأساسية للحل في كل عملية، أما عملية تحديد المتغير الراحل وتعديل الجدول فهي تتم بنفس الطريقة تماماً دون أي اختلاف.

تحديد المتغيرّ الداخل: يحدد المتغير الداخل باستخدام شرط المثالية، كما هو الحال في طريقة السمبلكس. بينما يعتمد حساب معاملات معادلة الهدف أساساً على علاقات الأولي – المرافق التي طرحت في الفصل الثالث. سوف تقدم آلية طريقة المضاريب أولاً، ثم تشرح الخطوات بدقة وذلك بالاعتماد على نظرية الترافق. كما هو الحال في طريقة حجر المسافات التي قدمت في الفقرة السابقة، فإن الحسابات في الطريقتين متماثلة إلا أن طريقة حجر المسافات تعطي الانطباع بأنها ليس لها علاقة البتة مع طريقة السمبلكس. تعاد في طريقة المضاريب نفس العمليات ولكن ينحصر الاختلاف فقط في كيفية حساب المتغيرات غير الأساسية في كل عملية.

يمكن توضيح خطوات هذه الطريقة كما يلي:

يرافق كل صف i في جدول مسألة النقل مضروب u_i ، وبالمثل يرافق كل عمود j مضروب v_j. بعد ذلك، لكل متغير أساسي في الحل الجاري، على المضاريب u_i و v_j تحقيق المعادلة التالية:

$$u_i+v_j=c_{ij} \; ; \qquad \text{لكل متغير أساسي } x_{ij}$$

وبالتالي يكون عدد المعادلات m+n-1 (لأنه لدينا m+n-1 متغير أساسي) في m+n مجهول. يمكن إيجاد قيم المضاريب من هذه المعادلات، وذلك بفرض قيمة عشوائية لأي من المضاريب (عادة توضع $u_1=0$)، وبالتالي حل m+n-1 معادلة في

$m+n-1$ مجهول (المضاريب المتبقية).

بتطبيق هذه الخطوات على المتغيرات الأساسية في الجدول ٥-٢٣ (الحل الجاري الذي استنتج باستخدام طريقة الزاوية الغربية الشمالية)، نحصل على جملة المعادلات التالية:

$$x_{11} : u_1 + v_1 = c_{11} = 10$$
$$x_{12} : u_1 + v_2 = c_{12} = 0$$
$$x_{22} : u_2 + v_2 = c_{22} = 7$$
$$x_{23} : u_2 + v_3 = c_{23} = 9$$
$$x_{24} : u_2 + v_4 = c_{24} = 20$$
$$x_{34} : u_3 + v_4 = c_{34} = 18$$

باختيار $u_1=0$ كما ذكرنا سابقاً، يمكن حساب قيم بقية المضاريب بشكل متسلسل من المعادلات:

$$u_1 = 0 \ , u_2 = 7 \ , u_3 = 5 \quad \text{و} \quad v_1 = 10, v_2 = 0, v_3 = 2, v_4 = 13$$

يمكن إظهار قيم هذه المضاريب على جدول المسألة من أجل تسهيل عملية الحسابات اللاحقة، كما هو موضح في الجدول ٥-٢٣ .

بعد حساب قيم المضاريب، تحسب كلفة دخول كل متغير غير أساسي x_{pq} للحل كما يلي:

لكل متغير غير أساسي x_{pq} ; $\overline{c_{pq}} = c_{pq} - u_p - v_q$

هذه القيم $\overline{c_{pq}}$ ستكون تماماً مثل القيم التي تم حسابها وفق طريقة حجر المسافات السابقة، بغض النظر عن الاختيار العشوائي لقيمة أحد المضاريب الصفرية. وبالتالي حساب المتغيرات غير الأساسية يتم على النحو التالي:

$$x_{13}: \quad \overline{c_{13}} = c_{13} - u_1 - v_3 = 20 - 0 - 2 = +18$$
$$x_{14}: \quad \overline{c_{14}} = c_{14} - u_1 - v_4 = 11 - 0 - 13 = -2$$
$$x_{21}: \quad \overline{c_{21}} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 7 - 10 = -5$$
$$x_{31}: \quad \overline{c_{31}} = c_{31} - u_3 - v_1 = 0 - 5 - 10 = -15 \quad \longleftarrow$$
$$x_{32}: \quad \overline{c_{32}} = c_{32} - u_3 - v_2 = 14 - 5 - 0 = +9$$
$$x_{33}: \quad \overline{c_{33}} = c_{33} - u_3 - v_3 = 16 - 5 - 2 = +9$$

وهي نفس القيم التي حسبت في طريقة حجر المسافات، وهي تظهر أيضاً أن x_{13} هو المتغير الداخل، لأن كلفة دخوله للحل $\overline{c_{pq}}$ هي الأكثر سلبية من كلف جميع المتغيرات غير الأساسية، أي يحسن من قيمة معادلة الهدف أفضل من بقية المتغيرات غير الأساسية. أما المتغير الراحل فيتم اختياره حسب طريقة الدارة المرتبطة بالمتغير x_{31} الموضحة في طريقة حجر المسافات أيضاً.

إن المعادلات $u_i+v_j=c_{ij}$، التي استخدمت لحساب قيم المضاريب، ذات بنية بسيطة وسهلة ولاداعي لكتابتها صراحةً. يمكن حساب قيم المضاريب من جدول مسألة النقل مباشرةً بملاحظة أن u_i للصف i و v_j للعمود j يكون مجموعها مساوياً c_{ij} عندما تكون الخلية لدى تقاطع الصف i والعمود j تحوي متغيراً أساسياً x_{ij}. بعد حساب قيم هذه المضاريب على الجدول، يمكن حساب الكلف $\overline{c_{pq}}$ لدخول المتغيرات غير الأساسية x_{pq} للحل بطرح كل من قيمة مضروب الصف u_i وقيمة مضروب العمود v_j من كلفة النقل c_{ij}، كما يمكن كتابة هذه الكلف في خلايا المتغيرات غير الأساسية، وفي الركن السفلي اليساري في كل منها، كما هو موضح في الجدول ٥-٢٣ ، والذي يبين أيضاً أن المتغير الداخل يجب أن يكون المتغير x_{31}.

أما عملية تحديد المتغير الراحل وتعديل الجدول فهي تماماً مثل تلك التي نوقشت في طريقة حجر المسافات.

الجدول ٥-٢٣

المصارف

المنابع	$v_1=10$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	المتوافر
$u_1=0$	[10] **5** -	[0] **10** +	[20] *+18*	[11] *-2*	15
$u_2=7$	[12] -5	[7] **5** -	[9] **15**	[20] **5** +	25
$u_3=5$	[0] *-15* +	[14] +9	[16] +9	[18] **5** -	5
المطلوب	5	15	15	10	

بعد رسم دارة المتغير الداخل x_{31} ، وتحديد الزوائد(+) والنواقص (-) على رؤوس الدارة نرى أن المتغير x_{34} هو المتغير الراحل وقيمة المتغير الداخل تساوي ٥ وحدات، يمكن بعد ذلك رسم جدول جديد وتعدل قيم المتغيرات ضمن دارة المتغير الداخل. يبين الجدول ٥-٢٤ ذلك.

الجدول ٥-٢٤

المصارف

المنابع	$v_1=10$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	المتوافر
$u_1=0$	[10] **0** -	[0] **15** +	[20] *+1*	[11] -2	15
$u_2=7$	[12] -5 +	[7] **0** -	[9] **15**	[20] **10**	25
$u_3=-10$	[0] **5**	[14] *+24*	[16] *+24*	[18] *+15*	5
المطلوب	5	15	15	10	

يبين الجدول ٥-٢٤ أن المتغير الداخل هو x_{21}، ومن الدارة المرتبطة به يكون المتغير الراحل هو x_{11} أو x_{22} بفرض أنه تم اختيار المتغير x_{11} على أنه المتغير الراحل، نحصل على الجدول ٥-٢٥.

الجدول ٥-٢٥

المصارف

المنابع		$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=13$	المتوافر
	$u_1=0$	10 / +5	0 / **15** -	20 / +18	11 / **-2** +	15
	$u_2=7$	12 / **0**	7 / **0** +	9 / **15**	20 / **10** -	25
	$u_3=-5$	0 / **5**	14 / +19	16 / +19	18 / +10	5
المطلوب		5	15	15	10	

يبين الجدول ٥-٢٥ أن المتغير الداخل هو x_{14} لأن كلفة دخوله للحــل (2-)، ومن الدارة المرتبطة به يكون المتغير الراحل هو x_{24}، نحصل على الجدول ٥-٢٦، الذي يبين حساب كلف دخول جميع المتغيرات غير الأساسية، وهي جميعاً ذات قيم موجبة. وهذا يدل، كما نعلم، أن الحل الجاري هو الحل المثالي، وهو نفس الحل المثالي الذي تم الحصول عليه في طريقة حجر المسافات، وطبعاً بنفس الكلفة.

الجدول ٥-٢٦

المصارف

المنابع		$v_1=5$	$v_2=0$	$v_3=2$	$v_4=11$	المتوافر
	$u_1=0$	10 / +5	0 / **5**	20 / +18	11 / **10**	15
	$u_2=7$	12 / **0**	7 / **10**	9 / **15**	20 / +2	25
	$u_3=-5$	0 / **0**	14 / +19	16 / +19	18 / +12	5
المطلوب		5	15	15	10	

مقارنة طريقة المضاريب مع طريقة السمبلكس: يمكن التعرف على العلاقة بين طريقة المضاريب وطريقة السمبلكس، بعد تبيان أن كلف دخـــول المـــتغيرات غـــير

وهذا يعطي m+n-1 معادلة. وبالتالي، بفرض قيمة عشوائية لـ u_1 (=0)، يمكن حساب قيم باقي المضاريب.

بعد ذلك تحسب معاملات المتغيرات غير الأساسية x_{pq} في معادلة الهدف من الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن للقيد المرافق، أي: $u_p+v_q-c_{pq}$. وبما أن مسألة النقل هي لإيجاد القيمة الصغرى، يكون المتغير الداخل هو ذو أكبر $u_p+v_q-c_{pq}$ بالموجب.

وهذا يجعل العلاقة بين طريقة المضاريب وطريقة السمبلكس واضحة. في الواقع، إن قيم المضاريب في الجدول المثالي هي قيم المتغيرات المرافقة مباشرة. وهذه القيم يجب أن تحقق نفس قيم معادلة الهدف في الأولي والمرافق. إن مضاريب السمبلكس المناظرة في الجدول ٥-٢٦ المثالي هي: $u_1=0$، $u_2=7$، $u_3=-5$، $v_1=5$، $v_2=0$، $v_3=2$، $v_4=11$.

وقيمة معادلة الهدف في المرافق هي:

$$w=\sum_{i=1}^{3}a_iu_i+\sum_{j=1}^{4}b_jv_j=(15*0+25*7+5*-5)$$

$$+(5*5+15*0+15*2+10*11)=315$$

وهي نفس القيمة في الأولي.

٥-٦ مسألة النقل العابر The Transshipment Model

تفترض مسألة النقل القياسية، التي نوقشت حتى الآن، أن المسار المباشر بين المنبع والمصرف هو الأقل كلفة. أحياناً، في بعض المسائل، يمكن أن يعطى جدول بالمسافات بين المنابع والمصارف، وهذا يعني أن هناك حاجة إلى بعض الحسابات التحضيرية لإيجاد أقصر المسارات بين المنابع والمصارف قبل إيجاد كلفة نقل الوحدة المطلوبة لنموذج مسألة النقل القياسية.

إن عملية حسابات أقصر مسار في المسائل الصغيرة تكون عادة قضية سهلة. ولكن مع زيادة عدد المنابع والمصارف، يجب استخدام طرق نظامية خاصة، تدعى

مسائل التعيين او التخصيص Assignment Problems

٦-١ مفهوم مسائل التعيين

تظهر مشكلات التخصيص في الحياة العملية بصورة متكررة سواء في المجالات المدنية ام المجالات العسكرية فقد يتطلب الأمر تعيين مجموعة من الأفراد للقيام بمجموعة من المهمات وكل فرد يعيين للقيام بمهمه واحدة فقط ففي هذه الحالة يتطلب الأمر وضع الشخص المناسب في المكان المناسب له وبعبارة أخرى يتم التعيين وفقاً لقواعد تخفيض التكاليف وتعظيم المردود (الأرباح). كذلك تظهر مسائل التخصيص حينما يتطلب الأمر تكليف مجموعة من الوحدات أو المجموعات للقيام بتنفيذ مجموعة من الأنشطة مثلاً قد يكلف مجموعة من الأفراد الاشراف على مجموعة من المكائن. ولنفرض وجود ثلاثة أشخاص للتعيين وللاشراف على ثلاثة مكائن حيث تكاليف تعيين كل شخص الى أية ماكنة مبين في الجدول أدناه.

		المكائن		
		A	B	C
الافراد	1	24	20	28
	2	26	30	18
	3	32	25	20

يتكون الجدول اعلاه من ثلاث صفوف وثلاثة اعمدة فاذا تم تعيين الفرد الأول للماكنة A فان الاجرة الاسبوعية ستكون 24 دينار بينما اذا تم تعينه للماكنة B فان الاجرة الاسبوعية ستكون 20 دينار واذا تم تعيينه للماكنة الثالثة فان الاجرة الاسبوعية ستكون 28 دينار حيث لا يمكن تعيين أي فرد لأكثر من ماكنة وعليه فيجب أن يتساوى عدد المكائن بعدد الأفراد. والمسألة أعلاه هي نموذج من نماذج البرمجة الخطية حيث يمكن صياغته كما يلي:

$$\text{Minimize } (Z) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} C_{ij} \,.\, X_{ij}$$

Subjet to

وفقاً للقيود التالية

$$\sum_{i=1} \sum_{j=1} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j,i} X_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

j , i لجميع $X_{ai} = 0 \text{ or } 1$

$j , 1$ لجميع $X_{ij} = 0 \text{ or } 1$

ويمكن تطبيق هذه الصياغة على مثالنا اعلاه كما يلي:

$X_{ij} \begin{cases} 1 & \text{i للفرد j في حالة تخصيص الماكنة} \\ 0 & \text{i للفرد j في حالة عدم تخصيص لماكنة} \end{cases}$

ويكون مجموع التكاليف الكلية لتعيين الافراد الى المكائن سيكون Z حيث Z يمكن التعبير عنها .

$$
\begin{aligned}
Z = & \ 24X_{11} + 20X_{12} + 28X_{13} + \\
& \ 36X_{21} + 30X_{22} + 18X_{23} + \\
& \ 32X_{21} + 25X_{32} + 20X_{33}.
\end{aligned}
$$

هذ المسألة تحتاج الى نوعين من القيود:

- المجموعة الأولى انه لا يمكن تكليف فرد واحد للإشراف على أكثر من ماكنة واحدة فقط بعبارة أخرى

الصف الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

الصف الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

الصف الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

- اما المجموعة الثانية من القيود فتقضي عدم تعيين اكثر من فرد للاشراف على ماكنة واحدة فقط وبعبارة اخرى:

العمود الاول : $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 1$

العمود الثاني : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1$

العمود الثالث : $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 1$

حيث Xij تساوي 0 او 1.

٦-٢ طرق حل مسائل التخصيص

هناك عدة طرق لايجاد الحل الامثل لمسائل التخصيص حيث تتفاوت كل طريقة عن الأخرى بعدد الخطوات المطلوبة للوصول للحل الأمثل ومن هذه الطرق.

١- طريقة العد الكامل.

٢- طريقة السمبلكس Simplex method أو الحل باستخدام النموذج الرياضي.

٣- طريقة النقل.

٤- الطريقة الهنغارية (الطريقة المجرية).

وسيقتصر تركيزنا على الطريقة الهنغارية لأنها من أفضل الطرق على الاطلاق لاستخراج الحل الأمثل لمسائل التعيين الا أنه من المفيد أن نستعرض الطرق الأخرى باعطاء فكرة أو مثال بسيط لكل طريقة قبل الخوض بالطريقة الهنغارية.

1- طريقة العد الكامل أو طريقة الحصر Solution by Enumeration Method

في هذه الطريقة نبحث عن جميع البدائل لتوزيع m وظيفة على m من المكائن مثلاً ثم نختار التخصيص المناسب عند احتساب التكلفة أو الربح الأعظم في مسائل أخرى ويمكن ايجاد البدائل باستخدام مبدأ طرق العد فاذا كان لدينا m وظيفة فان عدد البدائل يساوي m! الا أن عيب هذه الطريقة سيكون شاقاً اذا كان عدد الوظائف m كبيراً وفي بعض الأحيان يصعب حلها.

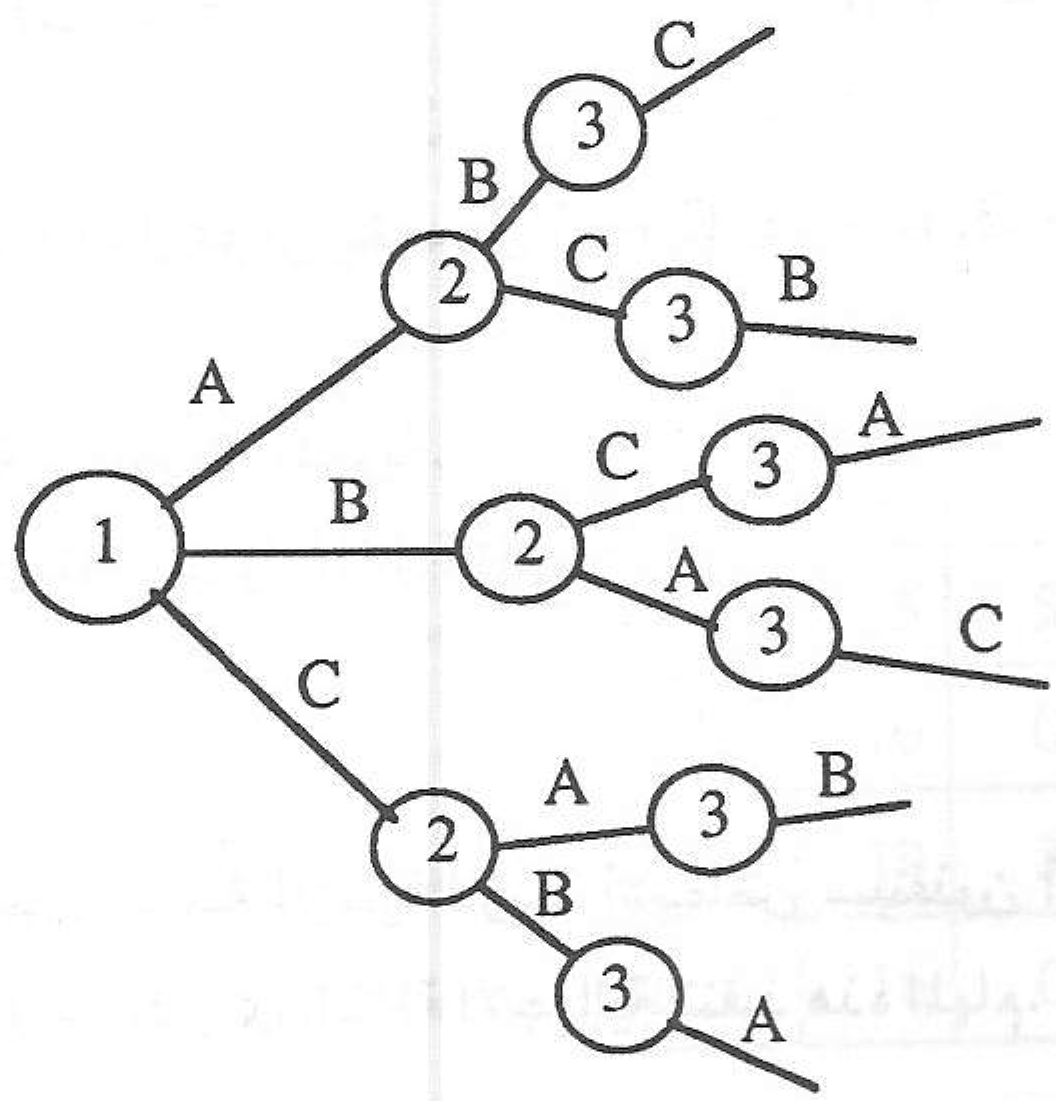
مثال:

لدينا ثلاث مكائن C , B, A وثلاثة أوامر 3, 2, 1 والجدول التالي يبين الوقت الزمني لتنفيذ المكائن للأمر المعين. والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل الذي يحقق تنفيذ الأوامر الثلاث من قبل المكائن الثلاث بأقل وقت ممكن.

المكائن \ الاوامر	1	2	3
A	10	22	9
B	10	4	13
C	6	9	21

الحل:

نكون شجرة العد. **عدد الطرق الممكنة للتخصيص**



التخصيص الاول	$A \to 1,\ B \to 2,\ C \to 3$
تكلفة التخصيص الاول =	$35 = 21 + 4 + 10$
التخصيص الثاني	$A \to 1, 2 \to C, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الثاني =	$32 = 13 + 9 + 10$
التخصيص الثالث	$1 \to B, 2 \to A, 3 \to C$
تكلفة التخصيص الثالث =	$55 = 21 + 22 + 15$
التخصيص الرابع	$1 \to B, 2 \to C, 3 \to A$
تكلفة التخصيص الرابع =	$33 = 9 + 9 + 15$
التخصيص الخامس	$1 \to C, 2 \to A, 3 \to B$
تكلفة التخصيص الخامس =	$41 = 41 + 22 + 6$
التخصيص السادس	$1 \to C, 2 \to B, 3 \to C$
تكلفة التخصيص السادس =	$31 = 21 + 4 + 6$

فيكون الحل الامثل لهذه البدائل هو أن يخصص $1 \to C, 2 \to B, 3 \to C$

2- الطريقة الهنغارية أو الطريقة المجرية.

لتوضيح هذه الطريقة سنتناول المثال التالي.

مثال:

الجدول التالي يمثل التكلفة الزمنية لأربعة أشخاص سينفذون أربعة مهام والمطلوب ايجاد التخصيص الأمثل بحيث يقلل التكلفة الاجمالية لتنفيذ هذه المهام.

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	15	25	10	35
2	17	27	40	21
3	12	28	9	19
4	10	26	17	23

جدول رقم (1)

الحل:

سنذكر الخطوات المتبعة لحل مثل هذه المسائل أثناء عملية الحل.

1- نختار أصغر عنصر في كل صف وطرحه من باقي عناصر نفس الصف. لينتج جدول التكاليف غير المباشرة جدول (2).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D	
1	5	15	0	25	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف1
2	0	10	23	4	اصغر عنصر هو (17) طرح من عناصر الصف 2
3	3	19	0	10	اصغر عنصر هو (9) طرح من عناصر الصف 3
4	0	16	7	13	اصغر عنصر هو (10) طرح من عناصر الصف 4

جدول رقم (2)

2- نختار اصغر عنصر في كل عمود من اعمدة جدول (2) لينتج جدول رقم (3) ادناه.

* اصغر عنصر في العمود الاول في جدول (2) هو 0.

** اصغر عنصر في العمود الثاني في جدول (2) هو 10.

*** اصغر عنصر في العمود الثالث في جدول (2) هو 0.

**** اصغر عنصر في العمود الرابع في جدول (2) هو 4.

3- نغطي الصفوف أو الأعمدة التي تحتوي على صفرين فأكثر بخطوط أفقية أو رأسية كما هو الحال في جدول (3).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	5	5	0	21
2	0	0	23	0
3	3	9	0	6
4	0	6	7	9

جدول رقم (3)

4- اذا كان عدد الخطوط الأفقية والرأسية أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة فاننا نكون لم نصل للحل الأمثل بعد وعليه فاننا نختار أصغر رقم من الأرقام التي لم تغطي بخطوط ونطرح هذا الرقم من باقي العناصر غير المغطاة ونضيف هذا الرقم الى كل رقم عند تقاطع خط أفقي مع خط رأسي وفي مثالنا فان الرقم هو 0. ونحصل على الجدول (4).

الأشخاص \ المهام	A	B	C	D
1	5	0	0	26
2	5	0	28	0
3	3	4	0	1
4	0	1	7	4

جدول رقم (4)

5- نكرر ما ورد في الخطوة رقم (3) لنحصل على الجدول أعلاه وبما أن عدد الخطوط الأفقية والرأسية يساوي 4 = عدد الصفوف أو الأعمدة لمسألة التعيين أو التخصيص فعليه فاننا نكون وصلنا للحل الأمثل ونكون جدول التخصص جدول رقم (5) ونحصل عليه كما يلي:

- نبدأ بتخصيص الصفر الذي يقع في كل صف. وشطب الأصفار التي تقع في العمود الذي يقع فيه هذا الصفر المخصص.
- نبدأ بتخصيص الصفر في كل عمود ونشطب باقي الاصفار التي تقع في الصف الذي يقع منه الصفر. وهكذا نحصل على جدول التخصص الامثل رقم (5).

المهام / الاشخاص	A	B	C	D
1	5	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	26
2	5	$\cancel{0}$	28	$\boxed{0}$
3	3	4	$\boxed{0}$	1
4	$\boxed{0}$	1	7	4

جدول رقم (5)

ويكون التخصص الامثل كما يلي:

الشخص 1 نخصص له المهمة B بتكلفة 25 دقيقة

الشخص 2 نخصص له المهمة D بتكلفة 21 دقيقة

الشخص 3 نخصص له المهمة C بتكلفة 9 دقيقة

الشخص 4 نخصص له المهمة A بتكلفة 10 دقيقة

ويكون أجمالي التكلفة = 65 دقيقة

إدارة المشاريع
Project Managements

٦-١ مقدمة

يعرف المشروع على أنه المهمة التي تتألف من مجموعة من الفعاليات المتداخلة والمرتبطة مع بعضها بعضاً، والتي يجب تنفيذها جميعاً في تسلسل محدد قبل نهاية المهمة أو المشروع. ترتبط الفعاليات مع بعضها بعضاً في تسلسل منطقي، حيث لايمكن البدء في تنفيذ بعضها قبل الانتهاء من تنفيذ بعضها الآخر. بشكل عام، يمكن النظر إلى المشروع على أنه مجموعة من الأعمال أو الفعاليات التي تنفذ مرة واحدة، ويمكن أن لايتكرر تنفيذها بالتسلسل نفسه في المستقبل، كما يمكن النظر إلى فعالية ما في مشروع معين كعمل يتطلب إنجازه زمناً وموارد محددين.

في الماضي، كانت جدولة المشاريع (زمنياً) تنفذ بتخطيط بسيط، إذ لم يكن متوافراً حينها سوى مخططات كانت (Gantt bar chart)، وهي تعد وقتها أفضل أداة معروفة، يمكن بوساطتها تحديد أزمنة البدء والنهاية لكل فعالية على محور أفقي للزمن. عيب ذلك هو عدم إمكانية التعرف على علاقات الربط والتداخل (وهي التي تتحكم بشكل رئيسي في تقدم تنفيذ المشروع) بين مختلف الفعاليات من المخطط المذكور. إن ازدياد التعقيد في المشاريع الحالية، يتطلب وجود تقنيات للتخطيط تكون ذات منهجية ومردود أفضل، بحيث يكون هدفها هو الإدارة المثالية لتنفيذ المشروع. يتضمن المردود هنا التخفيض قدر الإمكان في زمن إنجاز المشروع مع الأخذ في الحسبان، الاستثمار الاقتصادي المناسب والملائم للموارد المتوافرة.

برزت إدارة المشاريع كمجال علمي جديد بتطوير تقانتين تحليليتين للتخطيط، والجدولة، والتحكم بالمشاريع، وهما طريقة المسار الحرج Critical Path Method

١- ما هي الفعاليات التي تنفذ في لحظة زمنية معينة؟

٢- ماهي المدة الزمنية التي يمكن خلالها تأخير تنفيذ فعالية ما، دون تأخير تنفيذ المشروع؟

٣- ما هو التأثير الذي سيحصل على المشروع إذا نفذت فعالية ما، في نصف المدة؟

إن فوائد هذه التقنية ليست بإعطاء معلومات عددية فقط، بل بتحديد مجموعة الفعاليات الحرجة، التي يكون تنفيذها مهماً لتنفيذ كامل المشروع في أقل مدة زمنية. وبالتالي يجب تركيز الجهود والمهارات على هذه الفعاليات من المشروع. تشير الدراسات لمؤسسات صناعية وتجارية، بأن عدداً صغيراً من الفعاليات ضمن مشروع معين يتطلب تدخل الإدارة، أما باقي الفعاليات فهي تنفذ دون مشاكل جدية. إن هذه التقنية تسمح بالتعرف على الفعاليات الهامة، وتوجه نظر الإدارة من أجل التحكم فيها.

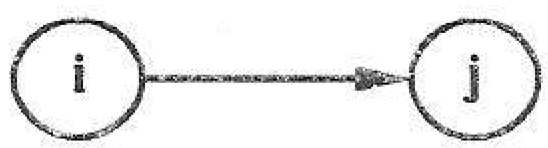
للتمكن من تمثيل المشروع كمخطط شبكي، يجب أولاً، كما ذكرنا، تقسيم المشروع إلى فعاليات، إضافة إلى ذلك، ينبغي التعرف على الفعاليات التي يجب أن ينتهي تنفيذها قبل البدء في تنفيذ كل فعالية، أي الفعاليات السابقة.

٦-٤ تمثيل المخطط الشبكي

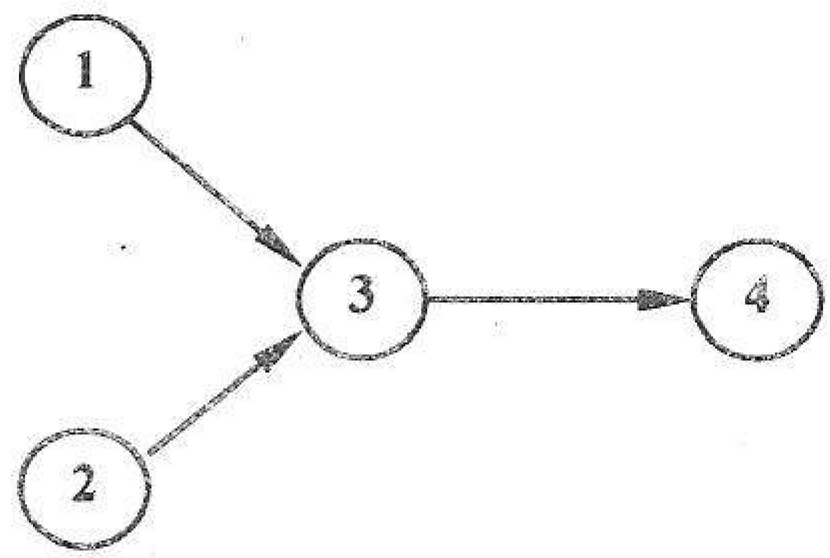
يمثل المخطط الشبكي علاقات التداخل والأسبقية بين فعاليات المشروع المختلفة. يستخدم عادة سهم لتمثيل كل فعالية، ويدل رأس السهم على اتجاه نمو المشروع. تحدد علاقات الأسبقية بين الفعاليات بوساطة أحداث (events). يمثل الحدث نقطة في الزمن، ويدل على انتهاء بعض الفعاليات، وبدء أخرى جديدة. بالتالي بدء وانتهاء فعالية ما يعرف بوساطة حادثين، يطلق عليهما حادثي الذنب والرأس. مع التنويه بأن الفعاليات المنبثقة من حدث معين لا يمكن البدء بتنفيذها حتى ينتهي تنفيذ الفعاليات المنتهية في الحدث نفسه. حسب مصطلحات نظرية الشبكات، تمثل كل فعالية بسهم

موجه، وكل حدث يمثل بعقدة. ليس من الضروري أن يتناسب طول السهم مع زمن تنفيذ الفعالية، أو أن يرسم كخط مستقيم.

يبين الشكل ٦-١(آ) التمثيل التقليدي لفعالية ما (i,j)، حيث i هو حدث الذنب، و j هو حدث الرأس. بينما يوضح الشكل ٦-١(ب) مثالاً آخر، حيث يجب تنفيذ الفعاليتين (١،٣) و (٢،٣) قبل البدء بتنفيذ الفعالية (٣،٤). يحدد اتجاه النمو في الفعالية بترقيم حدث الذنب بعدد يكون أصغر من عدد حدث الرأس، وهذا الإجراء يكون مناسباً للحسابات الآلية، وسوف يتبع في هذا الفصل.



(آ)



(ب)

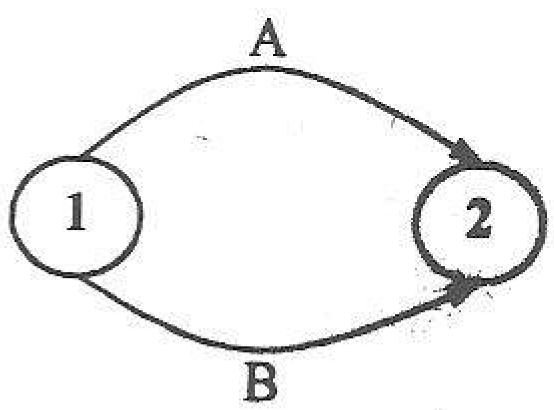
الشكل ٦-١

يجب التقيد بالقواعد التالية خلال إنشاء المخطط الشبكي لمشروع ما:

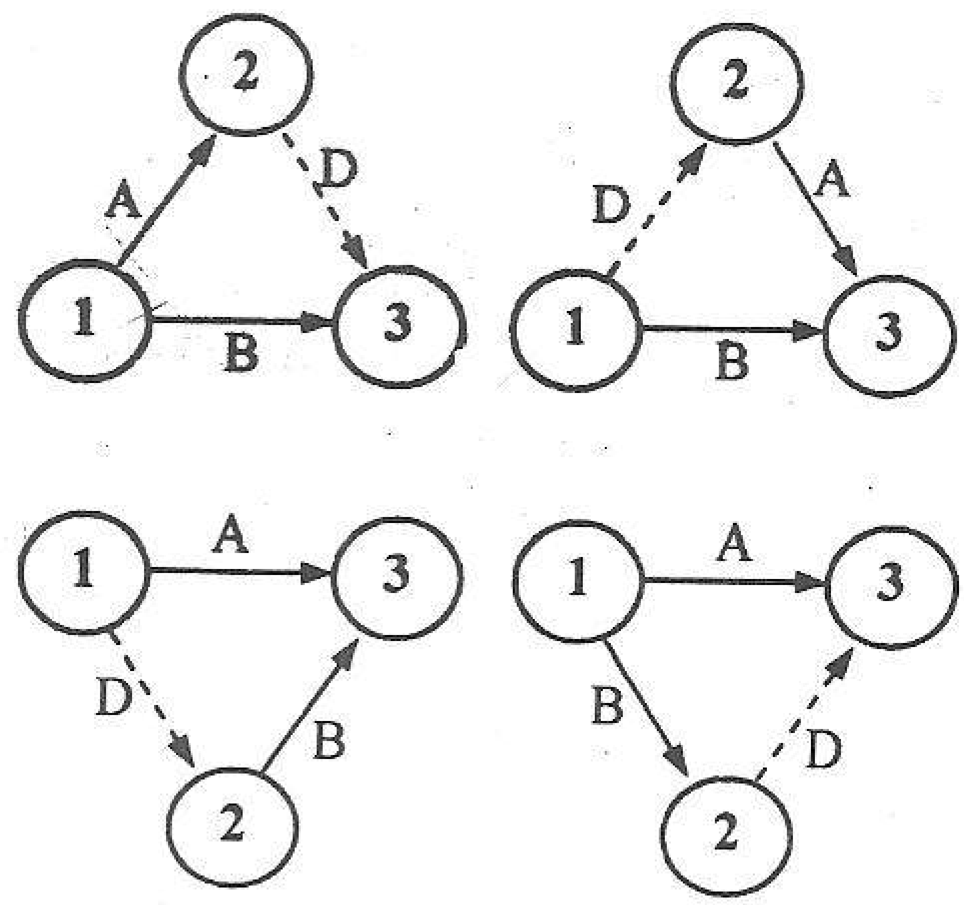
١- تمثل كل فعالية بسهم واحد فقط في المخطط الشبكي. لايمكن تمثيل فعالية ما مرتين في المخطط الشبكي، وذلك كي نتمكن من التعرف على حالة تقسيم فعالية ما إلى أجزاء، في مثل هذه الحالة، يمثل كل جزء بسهم منفصل.

٢- لا يجوز تمثيل فعاليتين يكون لهما نفس حادثي الذنب وحادثي الرأس، أي مبتدئتين في عقدة ومنتهيتين في عقدة أخرى. يمكن أن تبرز حالة كهذه عندما يكون تنفيذ فعاليتين أو أكثر على التوازي ممكناً. يبين الشكل ٦-٢(آ) مثالاً على ذلك، حيث الفعاليتان A و B لهما نفس حدث الرأس

ونفس حدث الذنب، **أي تمثيل خاطئ.** لذلك يجب استخدام فعالية وهمية (dummy)، زمن تنفيذها صفر، إما بين A وإحدى حدثي النهاية، أو بين B وإحدى حدثي النهاية. يبين الشكل ٦-٢(ب) إضافة الفعالية الوهمية D، **أي تمثيل صحيح.** كنتيجة لإضافة D، تمثل الفعاليتين A و B بحادثي نهاية مختلفين. يجب ملاحظة أن أزمنة تنفيذ الفعاليات الوهمية تكون أصفار، أي لاتستخدم أي موارد.



(آ)

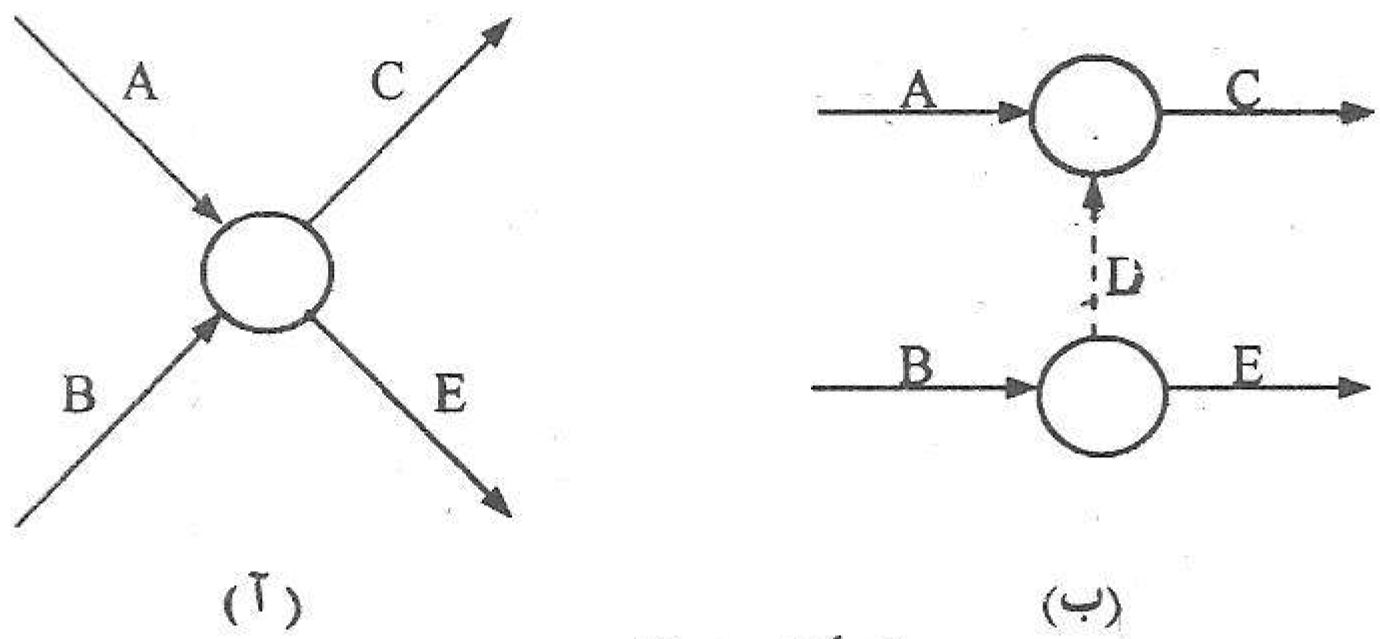


(ب)

الشكل ٦-٢

تفيد الفعاليات الوهمية أيضاً، في إرساء العلاقات المنطقية في المخطط الشبكي، حيث لايمكن تمثيل هذه العلاقات بشكل صحيح دون استخدام الفعاليات الوهمية. مثلاً، في مشروع ما، الفعاليتان A و B تسبقان الفعالية C، بينما الفعالية B فقط تسبق الفعالية E. يبين الشكل ٦-٣ (آ) **التمثيل الخاطئ** لهذه الحالة، لأنه على الرغم من كون العلاقات المنطقية بين الفعاليتين A,B و C محققة، إلا أن التمثيل في المخطط يتضمن أن الفعالية E مسبوقة بالفعاليتين A و B. يبين الشكل ٦-٣ (ب) **التمثيل الصحيح** لهذه العلاقات، باستخدام الفعالية الوهمية D، وبما أن الفعالية D يكون زمن

تنفيذها صفراً، تكون علاقات الأسبقية المفروضة على المشروع محققة.



الشكل ٦-٣

٣- يجب اختبار علاقات الأسبقية بشكل مستمر خلال إنشاء المخطط الشبكي، وذلك بالإجابة على الأسئلة التالية لدى إضافة أية فعالية إلى المخطط.

(آ)- ماهي الفعاليات التي يجب إنهاؤها قبل البدء بهذه الفعالية مباشرةً؟

(ب)- ماهي الفعاليات التي يجب أن تلي هذه الفعالية؟

(ت)- ماهي الفعاليات التي يجب تنفيذها على التوازي مع هذه الفعالية؟

إن هذه القواعد تشرح نفسها بنفسها، وهي فعلياً تسمح باختبار وإعادة اختبار علاقات الأسبقية، خلال متابعة إنشاء المخطط الشبكي.

٦-٥ إنشاء المخطط الشبكي

إن عملية إنشاء المخطط الشبكي يمكن أن تتم باستخدام عدة طرق، يمكن تلخيص إحداها على النحو التالي: يجب البدء برسم عقدة البداية، ثم تضاف الفعاليات بشكل تدريجي للعقدة الأولى، وعندما يكون هذا صعباً تتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: ترسم عقدة بداية المشروع التي تكون هي عقدة البداية لجميع الفعاليات التي لا تسبقها أية فعالية. ثم ترسم هذه الفعاليات، كأسهم منبثقة من هذه العقدة.

الخطوة الثانية: إذا كانت جميع فعاليات المشروع مرسومة، تنفذ الخطوة الرابعة،

وإلا يتم البحث عن فعالية ما غير مرسومة بعد، بشرط أن تسبقها فقط فعالية واحدة مرسومة، ترسم هذه الفعالية، بحيث تكون عقدة بدايتها هي عقدة نهاية سابقتها. تعاد هذه الخطوة، وإذا لم يتبق فعالية تحقق ذلك تنفذ الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة: يتم البحث عن فعالية لم ترسم بعد، والتي تسبقها فعاليتان أو أكثر رسمت. ترسم عقدة النهاية لإحدى الفعاليات السابقة لها، وإذا كان ضرورياً لجميع هذه الفعاليات، وتولد فعاليات وهمية مناسبة تنتهي في عقدة بداية هذه الفعالية والتي من الممكن رسمها الآن. يعاد تنفيذ الخطوة الثانية.

الخطوة الرابعة: ترسم عقدة نهاية المشروع. تكون هذه العقدة نهاية جميع الفعاليات التي لم ترسم عقد نهايتها.

بعد إنشاء المخطط الشبكي، يجب ملاحظة القواعد التالية في ترقيم العقد، إذا كانت هنالك رغبة لاستخدام الحاسوب لحل المسألة:

١- ترقم عقدة بداية المشروع بالرقم 1.

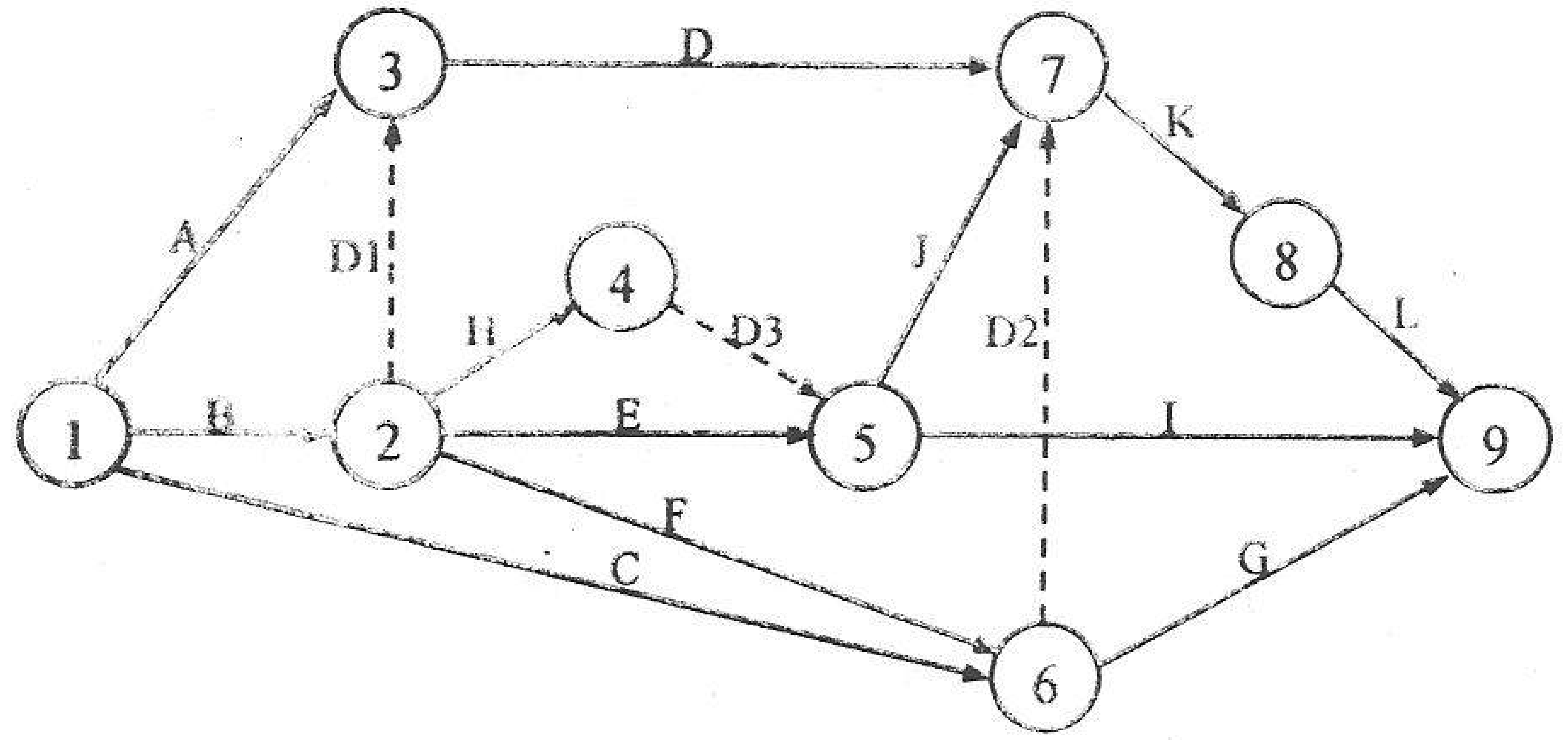
٢- ترقم بقية العقد بحيث إذا بدأت الفعالية في العقدة i وانتهت في العقدة j يجب أن تكون i أصغر من j.

٣- يدل الرقم k على عقدة وحيدة.

يوضح المثال التالي عملية استخدام الخطوات السابقة.

مثال: المطلوب إنشاء المخطط الشبكي لفعاليات المشروع المكون من الفعاليات A، B، C، ...، L، بحيث تكون علاقات الأسبقية التالية محققة:

اسم الفعالية	الفعاليات السابقة
A	-
B	-
C	-
D	A , B
E	B
F	B
G	F , C
H	B
I	E , H
J	E , H
K	C , D , F , J
L	K



الشكل ٦-٤

يبين الشكل ٦-٤ المخطط الشبكي الناتج. حيث استخدمت الفعاليات الوهمية D1، D2 لتحقيق علاقات الأسبقية المفروضة من قبل فعاليات المشروع. أما الفعالية الوهمية D3 فقد استخدمت لتحديد نهاية الفعاليتين E و H في حدث واحد هو العقدة

رقم 5.

٦-٦ حسابات المسار الحرج

يقود تطبيق تقنية PERT-CPM إلى جدول يعطي زمني البدء والنهاية لكل فعالية من فعاليات المشروع. يمثل إنشاء المخطط الشبكي الخطوة الأولى في عملية تحقيق هذا الهدف. بسبب التداخلات بين الفعاليات المختلفة، فإن إيجاد هذين الزمنين يتطلب إجراء حسابات خاصة. تنفذ هذه الحسابات مباشرة على المخطط الشبكي، وباستخدام عمليات رياضية بسيطة. تنتهي هذه الحسابات في تصنيف فعاليات المشروع كفعاليات حرجة أو غير حرجة. تصنف فعالية ما على أنها حرجة، إذا كان أي تأخير في بدء تنفيذها سوف يسبب تأخيراً في زمن إنجاز كامل المشروع. أما الفعاليات غير الحرجة، فهي تلك التي يكون الفرق بين أبكر زمن يمكن أن تبدأ فيه، وآخر زمن يمكن أن تنتهي فيه (كما هو مسموح من قبل المشروع)، أطول من زمن تنفيذها الفعلي. في مثل هذه الحالة، تملك الفعاليات غير الحرجة أزمنة فائضة (slack) أو (float).

سوف تناقش فوائد التعرف على الفعاليات الحرجة وغير الحرجة، ومعرفة الأزمنة الفائضة في فقرة لاحقة. بينما تخصص هذه الفقرة لكيفية الحصول على هذه المعلومات فقط.

٦-٦-١ إيجاد المسار الحرج

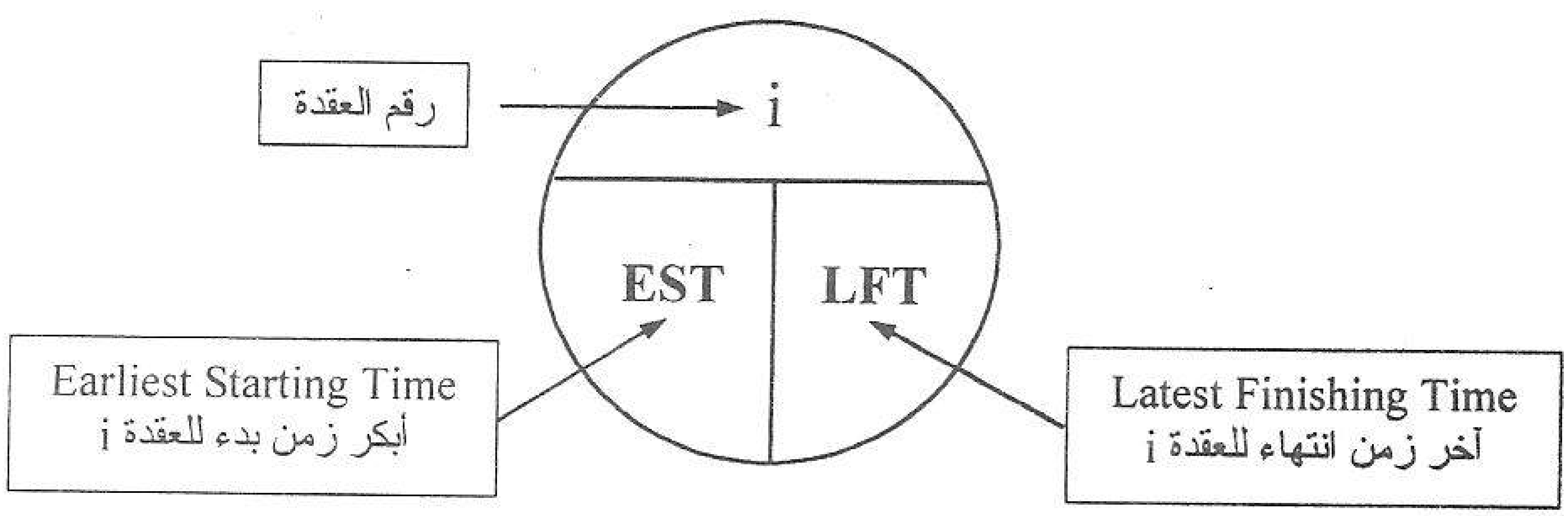
يعرف المسار الحرج جميع الفعاليات الحرجة ضمن المشروع، والفعاليات الحرجة عبارة عن سلسلة من الفعاليات تربط العقدة الأولى مع العقدة الأخيرة في المخطط الشبكي للمشروع. ستوضح طريقة إيجاد المسار الحرج بمثال عددي:

بفرض أن الفعاليات المبينة في المثال السابق مع أزمنة (وحدة زمنية[يوم]) تنفيذ كل منها معطاة كما يلي:

الفعالية	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
مدة التنفيذ	3	12	4	10	2	3	2	4	3	16	2	2

لو تمت معرفة أن أبكر زمن انتهاء للفعالية C هو نهاية اليوم الرابع، وأن أبكر زمن انتهاء للفعالية F هو نهاية اليوم الخامس عشر، أي أن أبكر زمن لانتهاء جميع الفعاليات التي تنتهي في العقدة 6 هو نهاية اليوم الخامس عشر (أطول زمن من زمني الانتهاء المبكر). فقط في هذا الوقت يمكن للفعاليات المنبثقة من العقدة ٦ أن تبدأ. أي إن الفعاليتين G و K لايمكن أن يبدأ تنفيذهما إلا في اليوم الخامس عشر لبدء تنفيذ المشروع. يعرف أبكر زمن بدء لفعالية ما، بأنه يساوي أبكر زمن للعقدة التي تبدأ منها الفعالية، أي آخر أزمان الانتهاء المبكرة لجميع الفعاليات السابقة، وفي هذه الحالة يكون هذا الزمن هو اليوم الخامس عشر. وهكذا تتم الحسابات إلى أن نوجد أبكر زمن لانتهاء تنفيذ كامل المشروع.

بغية إجراء الحسابات على المخطط الشبكي، من المناسب تقسيم دائرة كل عقدة إلى ثلاثة أجزاء، كما هو موضح في الشكل ٦–٥ التالي:



الشكل ٦–٥

حيث: EST(i) هو أبكر زمن يمكن أن تبدأ فيه الفعاليات المنبثقة من العقدة i.

و LFT(i) هو آخر زمن يمكن أن تنتهي فيه الفعاليات المنتهية في العقدة i.

. يتم حساب المسار الحرج على مرحلتين كما يلي:

المرحلة الأولى: تدعى مرحلة المرور الأمامي. حيث تبدأ الحسابات من العقدة الأولى وتتقدم حتى العقدة الأخيرة. يحسب لكل عقدة أبكر زمن يمكن البدء فيه بتنفيذ الفعاليات المنبثقة من هذه العقدة، ويسمى زمن البدء المبكر EST(i) للعقدة i، مع ملاحظة أن: EST(1) = 0.

بفرض أن D_{ij} تمثل زمن تنفيذ الفعالية (i,j)، يمكن إيجاد زمن البدء الباكر لجميع العقد، أي EST(j)، من j = 2 وحتى j = n باستخدام العلاقة التالية:

$$EST(j) = \max_{i} \{EST(i) + D_{ij}\}$$

وذلك لجميع الفعاليات(i,j) المعرفة.

$$EST(1) = 0$$
$$EST(2) = 0 + 12 = 12$$
$$EST(3) = \max_{i=1,2} \{0 + 3 , 12 + 0\} = 12$$
$$EST(4) = 12 + 4 = 16$$
$$EST(5) = \max_{i=2,4} \{12 + 2 , 16 + 0\} = 16$$
$$EST(6) = \max_{i=1,2} \{0 + 4 , 12 + 3\} = 15$$
$$EST(7) = \max_{i=3,5,6} \{12 + 10 , 16 + 16 , 15 + 0\} = 32$$
$$EST(8) = 32 + 2 = 34$$
$$EST(9) = \max_{i=5,6,8} \{16 + 3 , 15 + 2 , 34 + 2\} = 36$$

بعد الانتهاء من حسابات المرحلة الأولى، يمكن الاستنتاج أن زمن تنفيذ المشروع الأصغري هو 36 يوماً.

المرحلة الثانـــية: تدعى مرحلة المرور العكسي. حيث تبدأ الحسابات من العقدة الأخيرة وتتحرك بشكل عكسي حتى العقدة الأولى. يحسب لكل عقدة آخر زمن للانتهاء فيه من تنفيذ الفعاليات المنتهية في هذه العقدة، ويسمى زمن الإنجاز المتأخر

LFT(i) للعقدة i. بفرض أن n هي آخر عقدة في المشروع يكون: = LFT(n)

.EST(n)

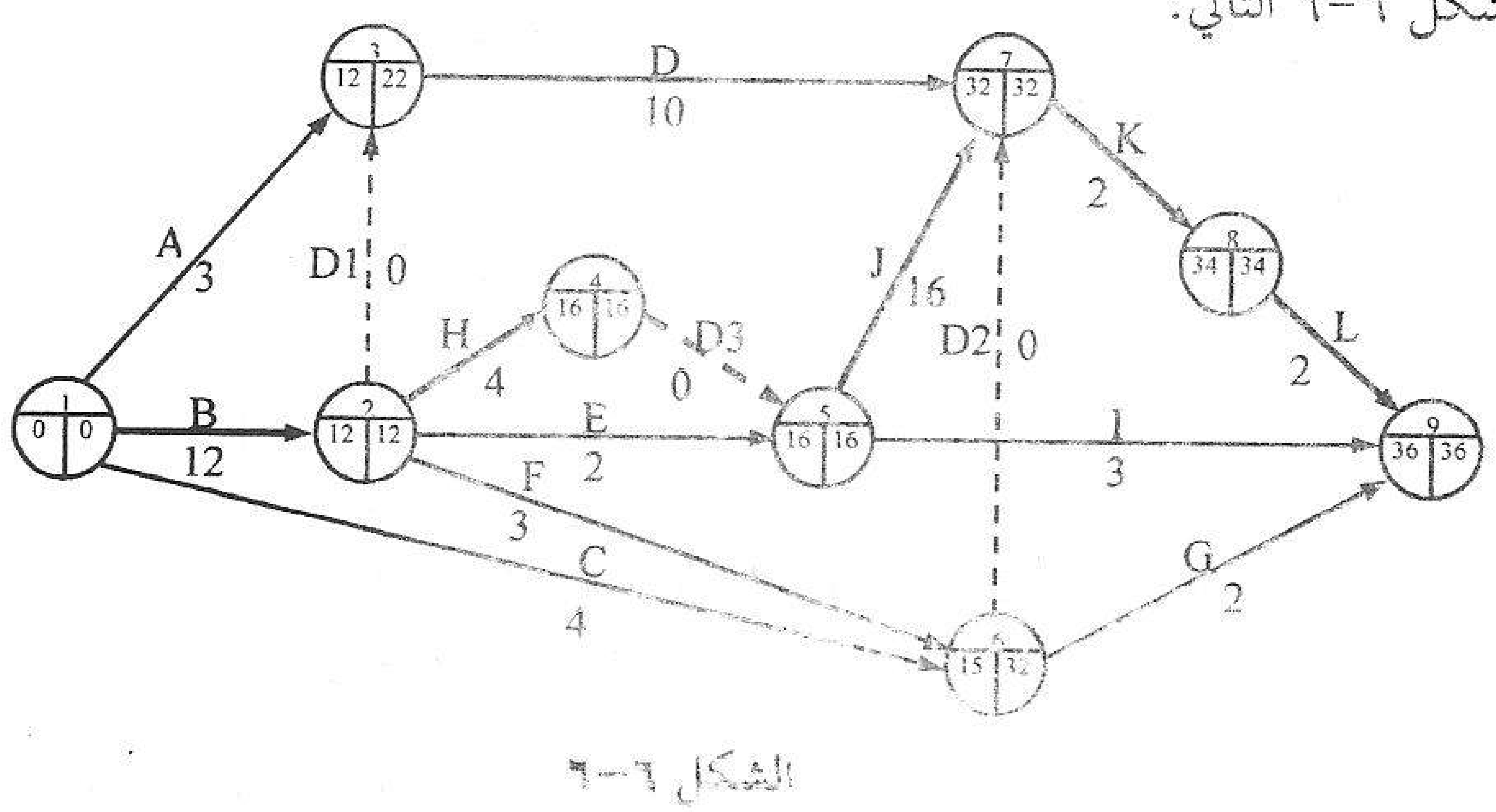
بعد ذلك، يمكن إيجاد زمن الإنجاز المتأخر لجميع العقد، أي LFT(i)، من i = n-1 وحتى i = 1 ، أي مرحلة المرور العكسي، باستخدام العلاقة التالية:

$$LFT(i) = \min_{j} \{ LFT(j) - D_{ij} \}$$

وذلك لجميع الفعاليات(i,j) المعرفة.

$$LFT(9) = EST(9) = 36$$
$$LFT(8) = 36 - 2 = 34$$
$$LFT(7) = 34 - 2 = 32$$
$$LFT(6) = \min_{j=7,9} \{32 - 0 , 36 - 2\} = 32$$
$$LFT(5) = \min_{j=7,9} \{32 - 16 , 36 - 3\} = 16$$
$$LFT(4) = 16 + 0 = 16$$
$$LFT(3) = 32 - 10 = 22$$
$$LFT(2) = \min_{j=3,4,5,6} \{22 - 0 , 16 - 4 , 16 - 2 , 32 - 3\} = 12$$
$$LFT(1) = \min_{j=2,3,6} \{12 - 12 , 22 - 3 , 32 - 4\} = 0$$

يمكن القيام بهذه الحسابات على المخطط الشبكي مباشرة، كما هو موضح في الشكل ٦-٦ التالي:



الشكل ٦-٦

بالانتهاء من حسابات مرحلتي المرور الأمامي والعكسي، يمكن استخدام نتائج هذه الحسابات في تحديد الفعاليات الحرجة كما يلي:

اعتبر العقدة رقم 3 في الشكل ٦-٦ حيث: $EST(3) = 12$, $LFT(3) = 22$

وكذلك العقدة رقم 7 حيث: $EST(7) = 32$

بملاحظة أن الفعالية D يستغرق تنفيذها 10 أيام فقط، نرى بوضوح أن هذه الفعالية يمكن تأخيرها 10 أيام دون أن يؤثر هذا التأخيرعلى زمن البدء الباكر للفعاليات التي تليها. وبالتالي لا تؤثر على زمن إنجاز المشروع المبكر. الفعالية D ليست حرجة.

بالمقارنة نفسها، نرى أن الفعالية H لا يمكن تأخيرها أية مدة زمنية دون أن يتأثر زمن البدء الباكر للفعاليات التي تليها، وبالتالي فإن تأخيرها سوف يؤخر زمن إنجاز المشروع المبكر. الفعالية H حرجة.

أية فعالية (i , j) تكون حرجة إذا حققت الشروط الثلاثة التالية:

1- $EST(i) = LFT(i)$

2- $EST(j) = LFT(j)$

3- $EST(j) - EST(i) = LFT(j) - LFT(i) = D_{ij}$

تدل هذه الشروط، في حال تحققها لأية فعالية، على أنه لايوجد أي زمن فائض بين زمن البدء المبكر وزمن البدء المتأخر لهذه الفعالية. كما يمكن التعرف على هذه الفعاليات الحرجة من المخطط الشبكي مباشرة، وهي تلك الفعاليات التي تكون قيم EST و LFT متساويتين لكل من عقدتي الرأس والذنب، والفرق بين قيمتي EST لعقدتي الرأس والذنب يساوي الفرق بين قيمتي LFT لعقدتي الرأس والذنب يساوي زمن تنفيذ الفعالية.

في مثالنا هذا تكون الفعاليات الحرجة (الأسهم الغامقة) هي:

$(1,2)$, $(2,4)$, $(4,5)$, $(5,7)$, $(7,8)$, $(8,9)$

B , H , D3 , J , K , L

وهي التي تعرف المسار الحرج. ويكون الزمن 36 يوماً هو فعلاً أقل زمن ممكن لإنجاز المشروع. لاحظ أن الفعاليات (5,9),(2,5) تحقق الشرطين الأول والثاني، ولكنها لا تحقق الشرط الثالث، وبالتالي فهي ليست حرجة. لاحظ أيضاً بأن المسار الحرج يشكل سلسلة من الفعاليات المتصلة بين العقدة الأولى والعقدة الأخيرة للمشروع.

٦-٦-٢ حساب الزمن الفائض

بعد الانتهاء من إجراء حسابات المسار الحرج، يجب حساب الزمن الفائض للفعاليات غير الحرجة. طبعاً، أية فعالية حرجة يكون لها صفر زمن فائض. ولهذا السبب نفسه تكون حرجة. أي فعالية ليست على المسار الحرج يمكن تأخير البدء في تنفيذها ضمن حدود، وهذا يعني أنه لكل فعالية غير حرجة زمناً فائضاً. قبل بيان كيفية حساب الزمن الفائض للفعاليات غير الحرجة، يجب تعريف المتغيرين التاليين:

LST(i,j) هو آخر زمن يمكن أن تبدأ به الفعالية (i,j).

EFT(i,j) هو أبكر زمن يمكن أن تنفذ به الفعالية (i,j).

اللذين يمكن حسابهما من تعريفهما وفق العلاقتين التاليتين:

$$LST(i,j) = LFT(j) - D_{ij}$$

$$EFT(i,j) = EST(i) + D_{ij}$$

يوجد نوعان هامان من الأزمنة الفائضة:

آ- الزمن الفائض الكلي Total Float(TF):

يعرف الزمن الفائض الكلي على أنه أطول مدة زمنية يمكن تأخير البدء بتنفيذ فعالية ما (i,j)، دون أن يؤدي هذا التأخير إلى تأخير إنجاز المشروع، ويساوي الفرق بين زمن البدء المبكر EST(i) وزمن البدء المتأخر LST(i,j) للفعالية (i,j). كما يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$TF(i,j) = LST(i,j) - EST(i) = LFT(j) - EST(i) - D_{ij}$$

في المثال السابق يحسب الزمن الفائض الكلي للفعالية غير الحرجة C أو الفعالية (١،٦) كما يلي:

$$LST(1,6) = LFT(6) - D_{16} = 32 - 4 = 28$$
$$TF(1,6) = LST(1,6) - EST(1) = LFT(6) - EST(1) - D_{16}$$
$$= 28 - 0 = 32 - 0 - 4 = 28 \quad \text{days}$$

هذا يعني أنه بالإمكان تأخير تنفيذ الفعالية C لمدة 28 يوماً دون أن يؤثر ذلك على إنجاز المشروع المبكر.

ب- الزمن الفائض الحر Free Float (FF):

يعرف الزمن الفائض الحر على أنه أطول مدة زمنية يمكن تأخير البدء بتنفيذ فعالية ما (i,j)، دون أن يؤدي هذا التأخير إلى تأخير البدء المبكر للفعاليات التي تليها، ويساوي الفرق بين زمن البدء المبكر EST(j) وزمن البدء المتأخر EFT(i,j) للفعالية (i,j). كما يمكن حسابه وفق العلاقة التالية:

$$FF(i,j) = EST(j) - EFT(i,j) = EST(j) - EST(i) - D_{ij}$$

في المثال السابق يحسب الزمن الفائض الحر للفعالية غير الحرجة C أو الفعالية (6,1) كما يلي:

$$EFT(1,6) = EST(1) + D_{16} = 0 + 4 = 4$$
$$FF(1,6) = EST(6) - EFT(1,6) = EST(6) - EST(1) - D_{16}$$
$$= 15 - 4 = 15 - 0 - 4 = 11 \quad \text{days}$$

هذا يعني أنه بالإمكان تأخير تنفيذ الفعالية C لمدة 11 يوماً دون أن يؤثر ذلك على زمن البدء المبكر للفعالية G.

إضافة إلى هذين الزمنين الفائضين الهامين (نظراً لاستخدامهما الواسع)، هنالك الزمن الفائض المستقل، والزمن الفائض للأمان، وهما يستخدمان في بعض المسائل.

وكلاهما يشتق من فرضيات قاسية أو متشائمة على جدول المشروع. الزمن الفائض الحر يكون دائماً أصغر من أو يساوي الزمن الفائض الكلي. **يساعد الزمن الفائض** الكلي والزمن الفائض الحر في التخطيط للمشروع ، **حيث يكون لدى المخطط الخيار** لزمن البدء بتنفيذ الفعاليات التي لها زمن فائض **بحيث يحقق هدفاً معيناً مفروضاً عليه (مثلاً أقل عدد من العاملين، أو مايسمى اتزان الموارد الذي سيناقش في فقرة تالية).**

يلخص الجدول ٦-١ حسابات المسار الحرج،التي يمكن الحصول عليها من حسابات المخطط إلشبكي، مع الأزمنة الفائضة للفعاليات غير الحرجة، والتي يجب أن تحسب وفق العلاقات السابقة، وهو يحتوي على جميع المعلومات الضرورية لإنشاء المخطط الزمني.

لاحظ أيضاً أن الزمن الفائض الكلي للفعاليات الحرجة دائماً يساوي الصفر، وكذلك الأمر فإن الزمن الفائض الحر يجب أن يساوي الصفر طالما أن الزمن الفائض الكلي هو صفر. كما أنه يمكن لفعالية غير حرجة أن تملك زمناً فائضاً حراً يساوي الصفر.

الجدول ٦-١

الفعالية	مدة التنفيذ	أبكر		آخر		الزمن الفائض الكلي	الزمن الفائض الحر
		بدء	انتهاء	بدء	انتهاء		
		EST	EFT	LST	LFT	TF	FF
A	3	0	3	19	22	19	9
B	12	0	12	0	12	0	0
C	4	0	4	28	32	28	11
D	10	12	22	22	32	10	10
E	2	12	14	14	16	2	2

F	3	12	15	29	32	17	0
G	2	15	17	34	36	19	19
H	4	12	16	12	16	0	0
I	3	16	19	33	36	17	17
J	16	16	32	16	32	0	0
K	2	32	34	32	34	0	0
L	2	34	36	34	36	0	0