الرياضيات الاقتصادية والمالية

السنة الثانية

القسم العملي

المحاضرة السادسة

مراجعة عن المصفوفات

2020/4/21

علا البغدادي

تمهيد:

في البحث القادم سيتم التعرف على نموذج ليونتيف (النموذج السكوني للمدخلات والمخرجات) وهو نموذج يستلزم حساب مقلوب (معكوس) المصفوفة، تمهيدا لذلك سنورد مراجعة عن المصفوفات والعمليات عليها، يرجى الاطلاع عليها واستذكارها لتسهيل دراسة المحاضرة القادمة.

أولا –مقلوب المصفوفة أو يقال له معكوس المصفوفة

لكل مصفوفة نظامية مقلوب وحيد يرمز له A^{-1}

ولكن ما معنى مصفوفة نظامية؟

المصفوفة النظامية هي كل مصفوفة قيمة معينها لا تساوي الصفر

ومعين المصفوفة يعني حساب قيمة المصفوفة ويرمز له|A|

فإذا كان المصفوفة من المرتبة الثانية $\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ تحسب قيمة معينها ad-cb.

أما إذا كانت المصفوفة من المرتبة الثالثة فما فوق فتحسب قيمة معينها من خلال نشر عناصر أحد الأسطر أو أحد الاعمدة حيث نأخذ قيمة كل نصر في السطر أو العمود ونضربها ب (-1^{i+j}) ونضربها بالمعين الصغير المتبقي في المصفوفة بعد حذف سطر وعمود العنصر وبعدها نجمع الحدود الناتجة.

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}$$

فمثلاً هذه المصفوفة لحساب قيمة معينها ننشرها بالنسبة لعناصر أحد الاسطر او الاعمدة مثلا السطر الأول:

فتكون $|A| = a*(-1)^2 \begin{matrix} e & f \\ h & i \end{matrix} + b * (-1)^3 \begin{matrix} d & f \\ g & i \end{matrix} + c * (-1)^4 \begin{matrix} d & e \\ g & h \end{matrix}$

هذه طريقة حساب معين المصفوفة وذلك للتأكد من أنها مصفوفة نظامية قبل البدء بالبحث عن معكوس لأنه إذا كانت قيمة المعين صفر فهي مصفوفة شاذة وبالتالي لا يوجد معكوس (مقلوب).

طريقة إيجاد مقلوب مصفوفة نظامية:

1-عن طريق المرافقة:

$$A^{-1} = \neg(A) * \frac{1}{|A|}$$

$\neg(A)$ مرافقة المصفوفة ماهي وكيف تحسب؟

1- نقوم بإحلال المتمم الجبري للعنصر a_{IJ} محل العنصر a_{IJ} نفسه والمتمم الجبري يحسب بالعلاقة التالية

$$a_{IJ} = (-1)^{i+j} * \Delta_{IJ}$$

Δ_{IJ} وهو صغير العنصر بعد حذف سطر وعمود ذلك العنصر.

2-اخذ منقول المصفوفة مع المتممات الجبرية وما هو منقول المصفوفة؟

منقول المصفوفة هو مصفوفة ناتجة عن تبديل أسطر المصفوفة إلى أعمدة.

أي أننا إما أن نستخرج المتتمات الجبرية للمصفوفة ونحلها مح عناصر المصفوفة ومن ثم نقلب السطور إلى أعمدة أو نقوم أولا بتحويل السطور إلى أعمدة ومن ثم نأخذ المتتمات الجبرية للمنقول ونحلها محلها فتكون حصلنا على المصفوفة المرافقة (المساعدة للمصفوفة الأساسية).

وبذلك بتطبيق قانون مقلوب المصفوفة من خلال حساب المصفوفة المرافقة وحساب معين المصفوفة ثم اخذ مقلوبه نكون قد حصلنا على مقلوب المصفوفة.

مثال: على حساب مقلوب مصفوفة عن طريق المرافقة

أوجد معكوس المصفوفة التالية بطريقة المرافقة:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{matrix}$$

الحل:

قانون حساب المعكوس لدينا

$$A^{-1}=\neg(A) * \frac{1}{|A|}$$

أولا نحسب قيمة معين المصفوفة وذلك بنشر عناصر السطر الأول

$$|A| = -1^{2*}\,2^{*}\begin{matrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix} + -1^{3}*3^{*}\begin{matrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{matrix} + -1^{4*}\,3^{*}\begin{matrix} -1 & 6 \\ -2 & -1 \end{matrix}$$

$$|A|=65=39+0+26$$

أي ان المصفوفة نظامية ولها مقلوب (معكوس) وحيد

نوجد منقول المصفوفة A^{-t}

$$\begin{matrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$$

ومن ثم نحل المتممات الجبرية

$$-1^{2*}\,2^{*}\begin{matrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix} =26$$

$$9= -1^{3} * -1^{*}\begin{matrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{matrix}$$

$$30= -1^{4*} -2^{*}\begin{matrix}3 & 6\\ 3 & 1\end{matrix}$$

$$39-= -1^{3*}\, 3^{*}\begin{matrix}6 & -1\\ 1 & 2\end{matrix}$$

$$54= -1^{4*}\, 6^{*}\begin{matrix}3 & -1\\ 3 & 2\end{matrix}$$

$$18-= -1^{5*} -1^{*}\begin{matrix}3 & 6\\ 3 & 1\end{matrix}$$

$$39=-1^{4*}\, 3^{*}\begin{matrix}6 & -1\\ 1 & 2\end{matrix}$$

$$8-=-1^{5*}\, 1^{*}\begin{matrix}2 & -2\\ 3 & 1\end{matrix}$$

$$30=-1^{6*}\, 2^{*}\begin{matrix}2 & -1\\ 3 & 6\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}26 & 9 & 30\\ -39 & 54 & -18\\ 39 & -8 & 30\end{matrix}$$

وهذه المصفوفة المرافقة، بتطبيق القانون: $A^{-1}= \neg(A) * \frac{1}{|A|}$

$$\frac{1}{65} * \begin{matrix}26 & 9 & 30\\ -39 & 54 & -18\\ 39 & -8 & 30\end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0.4 & 0.14 & 0.46 \\ -0.6 & 0.83 & -0.28 \\ 0.6 & -0.12 & 0.46 \end{matrix}$$

وهو مقلوب المصفوفة.

الطريقة الثانية لإيجاد مقلوب مصفوفة هي المقلوب بطريقة جوردان:

نبحث عن A^{-1} بتحويل [A|I] إلى [$I|A^{-1}$] باستخدام عمليات التحويل البسيطة على الأسطر.

I هي المصفوفة الواحدية وهي مصفوفة قطرية قطرها الرئيسي عناصره تساوي 1 وباقي العناصر اصفار.

مثال: لتكن لدينا المصفوفة

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

اوجد مقلوب المصفوفة بطريقة جوردان.

الحل :

$$[\,A|I] = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

للوصول للنتيجة بأبسط وأسرع أسلوب يفضل التفكير بتحويل أعمدة A عمودا عمودا وعلى الترتيب بحيث تصبح بالشكل المطلوب أي شكل المصفوفة I.

فنبدأ بالعمود الأول الذي يتطلب لوضعه بالشكل المطلوب أي شكل المصفوفة I.

فنبدأ بالعمود الأول الذي يتطلب لوضعه بالشكل المطلوب تطبيق عمليتي التحويل(1) C_{21} و C_{31} $(1-)$

تذكير ببعض العمليات على المصفوفات:

- ضرب كل عنصر من عناصر سطر ما بعدد ثابت (K) C_I.
- التبديل بين موضعي السطرين Iو J ونرمز لهذه العملية بالرمز C_{IJ}.
- ضرب عناصر السطر J ب k مرة وإضافة العناصر الناتجة إلى عناصر السطر i وإحلال الناتج محل عناصر السطر i وإحلال الناتج محل عناصر السطر i.نرمز لهذه العملية بالرمز C_{Ij} (K).

نتابع الحل ثم ننطلق لوضع العمود الثاني بشكله المطلوب وهكذا.

$$[A|I]=\begin{matrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

بتطبيق عمليتي التحويل المذكورتين سابقاً تصبح المصفوفة كما يلي

$$\begin{matrix}1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1\end{matrix}$$

ومن ثم نطبق عمليتي التحويل التاليات (-1) C_{21}، (0.5) C_2

$$\begin{matrix}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1\end{matrix}$$

ومن ثم نطبق العمليات التالية (0.5) C_{13}، (0.5) C_3،(-0.5) C_{23}

$$[\,I|A^{-1}] = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

وبالتالي تكون مقلوب المصفوفة هي $\begin{matrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{matrix}$

مع التمنيات بالتوفيق الدائم