الفصل السابع

استخدامات الاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية

تعد الاحتمالات من الأدوات الأساسية في الإحصاء والرياضيات الإدارية، بل أن علمي الإحصاء والرياضيات الإدارية وتطبيقاتهما المختلفة تعتمد على نتائج نظرية الاحتمالات.

في هذا الفصل سنبدأ بتذكير الطالب بالاحتمالات وبقوانين الاحتمالات مفترضين أن الطالب قد درس وبشكل كبير مبادئ الاحتمالات في مقرر مبادئ الإحصاء ومن ثم سنبحث في التطبيقات العملية للاحتمالات في المشروعات التجارية والصناعية.

المبحث الأول

مقدمة في الاحتمالات

§-1 – تعريف الاحتمال:

1-1 التعريف الكلاسيكي للاحتمال:

احتمال تحقق الحدث A يساوي ناتج قسمة عدد الحالات الملائمة لتحقق هذا الحدث وليكن m على عدد الحالات الكلية N وذلك بشرط تماثل جميع الحالات الكلية. أي أن:

$$P(A)=\frac{m}{N}$$

والمقصود بشرط التماثل هو أن يكون لكل عنصر من عناصر المجموعة الكلية الفرصة المتساوية نفسها. لذلك يقال أن قطعة النقود سليمة ومتوازنة بمعنى أن فرصة ظهور الصورة تساوي فرصة ظهور الكتابة، ويقال أن حجر النرد سليم ومتوازن بمعنى أن فرصة ظهور كل وجه من الأوجه الستة متساوية. وهكذا لدينا:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

أي أن قيمة الاحتمال دوماً تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح. تساوي الصفر إذا كان الحدث مستحيلاً، بينما تساوي الواحد إذا كان الحدث مؤكداً.

مثـــال:

إذا رمينا حجر نرد سليماً ومتوازناً احسب الاحتمالات التالية:

1-الحصول على الرقم 5 .

2-الحصول على رقم زوجي.

3- الحصول على رقم أكبر من 2 .

4- الحصول على رقم أقل من 7 .

الحـــل:

نفرض أن:

A حدث الحصول على الرقم 5 فيكون: $P(A)=\frac{m}{N}=\frac{1}{6}$

B حدث الحصول على رقم زوجي فيكون: $P(B)=\frac{m}{N}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

C حدث الحصول على رقم أكبر من 2 فيكون: $P(C)=\frac{m}{N}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

D حدث الحصول على رقم أقل من 7 فيكون: $P(D)=\frac{m}{N}=\frac{6}{6}=1$

2-1 تعريف الاحتمال كتكرار نسبي:

لاحظنا أن التعريف السابق للاحتمال يشترط أن تكون الحالات الممكنة متماثلة الأمر الذي قد لا يتحقق دائماً، فقد تكون قطعة النقود متآكلة (أي غير متوازنة) بمعنى أن فرصة الصورة لا تساوي فرصة الكتابة. في هذه الحالة لا يمكن القول أن احتمال الصورة يساوي احتمال الكتابة يساوي $\frac{1}{2}$.

وكمثال آخر عند تقسيم المجتمع إلى مدخنين وغير مدخنين فالحالات الممكنة هنا حالتان فقط هما " مدخن " أو " غير مدخن "، ولكن لا يمكن القول أن احتمال " التدخين " يساوي احتمال عدم التدخين يساوي $\frac{1}{2}$، وذلك لأن الحوادث الكلية لكل حالة غير متماثلة حيث أنه في الغالب لا تتساوى أعداد المدخنين مع أعداد غير المدخنين، أي أن فرصة التدخين لا تساوي فرصة عدم التدخين وبالتالي فإن احتمال إحداهما لا يساوي $\frac{1}{2}$.

في مثل هذه الحالات لا يمكن تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال ونطبق تعريف التكرار النسبي أو التعريف الإحصائي للاحتمال.

فإذا رمينا قطعة نقود n مرة وكانت m_n هي عدد المرات التي تظهر فيها الصورة فإن نسبة عدد الصور إلى عدد الرميات الكلي $= \frac{m_n}{n}$ وهذه النسبة قد لا تساوي $\frac{1}{2}$ ولكن مؤكد أنه كلما زاد عدد الرميات (أي كلما كبرت n) فإن هذه النسبة سوف تقترب من $\frac{1}{2}$. فإذا كانت n كبيرة جداً وتؤول إلى ما لانهاية فإن هذه النسبة تؤول إلى $\frac{1}{2}$. أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو نهاية التكرار النسبي، أي:

$$p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n}{n}$$

وحسب هذا التعريف: إن الاحتمال هو القيمة التي يستقر عندها التكرار النسبي لوقوع الحدث عندما تزيد n بدرجة كافية لتحقق ذلك الاستقرار للتكرار النسبي، حيث n هو عدد مرات إجراء التجربة، m_n هو عدد المرات التي يتحقق فيها الحدث في عدد n من المرات التي أجريت فيها التجربة.

وبذلك فإن التعريف الثاني للاحتمال يعالج عدم تحقق شرط التماثل. مع ملاحظة أننا نفترض أن لدينا مجتمعاً وهمياً يتكون من عدد لا نهائي من مرات إجراء التجربة. أما إذا كان المجتمع حقيقياً كمثال التدخين فإن الاحتمال لأي حدث يساوي نسبة وجود أو تحقق الحدث في المجتمع.

فمثلاً: إذا كانت نسبة العمال المدخنين في مصنع تساوي 30% فإن احتمال أن يكون العامل مدخناً في هذا المصنع يساوي 30%، وهكذا... أي أن الاحتمال في هذه الحالة هو النسبة السائدة للصفة المدروسة في المجتمع.

مثـــال:

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

القسم \ الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
الأول	5	7	12
الثاني	8	14	22
الثالث	10	6	16
المجموع	23	27	50

اختير أحد العمال بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون أعزباً.

2 – أن يكون متزوجاً.

3 – أن يكون من القسم الأول.

4 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

5 – أن يكون من القسم الأول وأعزباً.

الحل: نفرض أن:

A حدث كون العامل المختار أعزباً فيكون: $P(A)=\frac{23}{50}=0.46$

B حدث كون العامل المختار متزوجاً فيكون: $P(B)=\frac{27}{50}=0.54$

C حدث كون العامل المختار من القسم الأول فيكون: $P(C)=\frac{12}{50}=0.24$

D حدث كون العامل المختار من القسم الأول أو الثاني فيكون:

$$P(D)=\frac{12+22}{50}=\frac{34}{50}=0.68$$

E حدث كون العامل المختار من القسم الأول وأعزباً فيكون : $P(E)=\frac{5}{50}=0.10$

§-2 – قوانين الاحتمالات:

1-2 قوانين الجمع:

- إذا كان A و B حدثين متنافيين (أي حدوث أحدهما ينفي أو يمنع حدوث الحادث الآخر)، فإن احتمال حدوث إحداهما هو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- إذا كان A و B حدثين غير متنافيين (أي يمكن أن يحدثا معاً) ، فإن احتمال حدوث A أو B (أي احتمال حدوث إحداهما على الأقل) هو :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثـــال :

بالعودة إلى المثال السابق الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. اختير أحد العمال بطريقة عشوائية . احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون من القسم الأول أو الثاني.

2 – أن يكون متزوجاً أو من القسم الأول.

3 – أن يكون من القسم الثالث أو أعزب.

الحــل:

1 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الأول.

B حدث كون العامل من القسم الثاني.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{12}{50} + \frac{22}{50} = \frac{34}{50}$$

2 – لنفرض A حدث كون العامل متزوجاً.

B حدث كون العامل من القسم الأول.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{27}{50} + \frac{12}{50} - \frac{7}{50} = \frac{32}{50}$$

3 – لنفرض A حدث كون العامل من القسم الثالث.

B حدث كون العامل أعزباً.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{16}{50} + \frac{23}{50} - \frac{10}{50} = \frac{29}{50}$$

2-2 قوانين الضرب :

إذا كان A و B حدثين مستقلين فإن احتمال حدوث A و B (أي حدوثهما معاً) هو:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على عدد من الحوادث المستقلة أي أن :

$$P(A \cap B \cap ... \cap Z) = P(A).P(B).....P(Z)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال الخاص بتوزيع خمسين عاملاً حسب الحالة الاجتماعية والقسم الذي يعمل به. سحب عاملان مع الإرجاع ،احسب الاحتمالات التالية:

1 – أن يكون كلاهما من القسم الأول.

2 – أن يكون كلاهما متزوجاً.

3 – أن يكون كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها.

4 – أن يكون كلاهما من القسم نفسه.

الحـــل:

1 – لنفرض: A حدث كون العامل الأول من القسم الأول.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً من القسم الأول.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{12}{50} \cdot \frac{12}{50} = \frac{144}{2500}$$

2 – لنفرض : A حدث كون العامل الأول متزوج.

B حدث كون العامل الثاني أيضاً متزوج.

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

$$= \frac{27}{50} \cdot \frac{27}{50} = \frac{729}{2500}$$

3 – لنفرض: A حدث كون كلا العاملين متزوجين فإن: $P(A) = \frac{27}{50} \cdot \frac{27}{50} = \frac{729}{2500}$

B حدث كون كلا العاملين عازبين فإن: $P(B) = \frac{23}{50} \cdot \frac{23}{50} = \frac{529}{2500}$

الاحتمال المطلوب هو: $P(A \cap B) = \frac{729}{2500} + \frac{529}{2500} = \frac{1258}{2500}$

4 – إما كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله:

$$P(A)=\frac{12}{50}.\frac{12}{50}=\frac{144}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثاني فهو الحدث B واحتماله:

$$P(B)=\frac{22}{50}.\frac{22}{50}=\frac{484}{2500}$$

أو كلاهما من القسم الثالث فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{16}{50}.\frac{16}{50}=\frac{256}{2500}$$

الاحتمال المطلوب:

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{144}{2500}+\frac{484}{2500}+\frac{256}{2500}=\frac{884}{2500}$$

3-2 قانون الضرب في الحالة العامة:

إذا كان A ، B حدثين غير مستقلين فإن احتمال حدوث $A.B$ (أي حدوثهما معاً) هو:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B/A)$$

مثـــال:

بالعودة إلى المثال السابق بافتراض أن السحب بدون إرجاع (أي بدون إرجاع العامل الأول إلى المجموعة قبل سحب العامل الثاني).

الحـــل :

1 – كلاهما من القسم الأول فهو الحدث A واحتماله: $P(A)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}=\frac{132}{2450}$

2 – كلاهما متزوج فهو الحدث B واحتماله: $P(B)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}=\frac{702}{2450}$

3 – كلاهما له الحالة الاجتماعية نفسها فهو الحدث C واحتماله:

$$P(C)=\frac{27}{50}.\frac{26}{49}+\frac{23}{50}.\frac{22}{49}=\frac{702}{2450}+\frac{506}{2450}=\frac{1208}{2450}$$

4 – كلاهما من القسم نفسه فهو الحدث D واحتماله:

$$P(D)=\frac{12}{50}.\frac{11}{49}+\frac{22}{50}.\frac{21}{49}+\frac{16}{50}.\frac{15}{49}=\frac{132}{2450}+\frac{462}{2450}+\frac{240}{2450}=\frac{834}{2450}$$

المبحث الثاني

المتغير العشوائي والتوقع الرياضي للمتغير العشوائي

سنتناول في هذا المبحث تعريف المتغير العشوائي وتوزيعاته الاحتمالية بإيجاز باعتبار قد تمّ دراسته في مقرر مبادئ الإحصاء في السنة الأولى.

§1 – تعريف المتغير العشوائي:

يعرف المتغير العشوائي بالوسيلة التي يتم بواسطتها التعبير عن نواتج التجربة العشوائية باستخدام الأعداد الحقيقية ليسهل دراسة الظواهر الاحتمالية المختلفة. ويكون المتغير العشوائي منقطعاً إذا أخذ قيماً منفصلة بعضها عن بعض، مثلاً عدد أفراد الأسرة. ويكون المتغير العشوائي مستمر إذا أمكن أن يأخذ جميع القيم التي تقع في مجال تغيره، مثلاً أطوال أو أوزان الطلاب.

§2 – التوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة:

يرتبط بأي متغير عشوائي X تابع موجب يسمى تابع الاحتمال للمتغير X ويرمز له بالرمز $p(X)$ يحدد مدى X ويعطي احتمال أخذه للقيم في هذا المدى.

ويحدد هذا التابع شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير لأنه يبين كيف يتوزع الاحتمال الكلي (ومقداره واحد) على قيم المتغير.

فالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي منقطع X يمثل بتابع $p(X)$ يسمى التابع الاحتمالي، ويعطي احتمالات قيم X المختلفة في صورة جدول أو صيغة رياضية تبين القيم المختلفة التي يأخذها المتغير العشوائي X واحتمالات هذه القيم.

بشكل عام إذا كان X متغيراً عشوائياً يأخذ القيم $x_1, x_2, \dots, x_n$ باحتمالات مقابلة: $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$ وإذا تحقق:

$$p(x_i) \geq 0 \quad ; \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

عندئذ يقال أن X يتبع توزيعاً احتمالياً منقطعاً تابعه الاحتمالي $p(X)$.

§-3 – توزيع ثنائي الحدين :

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما وقوع حدث معين أو عدم وقوعه ، وكان احتمال ظهور هذا الحدث في أي محاولة هو p وعلى ذلك فإن احتمال عدم ظهوره هو $q=1-p$ ، فإذا تكررت هذه التجربة أو المحاولة n مرة ، فإن احتمال وقوع هذا الحدث x مرة من بين الـ n من هذه المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$p(x)=C_n^x.p^x.q^{n-x} \qquad ;x=0,1,2,...,n$$

وأن مجموع الاحتمالات المرتبطة بأي تجربة عشوائية تخضع لهذا التوزيع تساوي الواحد

$$p(0)+p(1)+p(2)+...+p(n)=1$$

يسمى توزيع الاحتمالات هذا على قيم المتغير x المختلفة بتوزيع ثنائي الحدين أو بشكل مختصر بالتوزيع الثنائي برنولي.

§-4 – التوزيع الاحتمالي المستمر:

إذا كان X متغيراً عشوائيا مستمراً وكان $f(X)$ تابعاً يحقق الشرطين الآتيين:

$$f(X)\geq 0 \;\; ; \forall X$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)\,dX=1$$

فعندها يتبع المتغير العشوائي X توزيعاً احتمالياً مستمراً تابع كثافته هو $f(X)$ وفي هذه الحالة يكون احتمال وقوع X في مدى معين يساوي المساحة الواقعة فوق هذا المدى وتحت منحنى التابع $f(X)$.

ومن أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري.

في هذا الفصل سنهتم بالتوزيع الاحتمالي للمتغيرات المنقطعة لاستخدامها في تقييم المشروعات التجارية والصناعية.

§5 – التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً فإن التوقع الرياضي له (أو القيمة المتوقعة أو المتوسطة للمتغير العشوائي) ونرمز له بالرمز $E(X)$ يعرف كما يلي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

مثـــال :

إذا كان X متغيراً عشوائياً منقطعاً بتابع احتمال $P(X)$ كما يظهر في الجدول التالي:

X	$P(X)$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{4}$

فأوجد $E(X)$.

الحـــل:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i . P(x_i)$$

$$=(2\times\frac{1}{4})+(3\times\frac{1}{2})+(4\times\frac{1}{4})=3$$

مثـــال : أوجد $E(X)$ إذا كان:

X	$P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{5}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i.P(x_i)$$

$$=(-2\times\frac{1}{5})+(-1\times\frac{2}{5})+(0\times\frac{1}{5})+(1\times\frac{1}{5})=-\frac{3}{5}$$

نلاحظ من المثالين السابقين ما يلي :

1 - ليس بالضرورة أن تكون $E(X)$ قيمة من قيم المتغير العشوائي X ، ففي المثال الأول $E(X)=3$ وهي إحدى قيم المتغير العشوائي X. أما في المثال الثاني $E(X)=-\frac{3}{5}$ وهي ليست إحدى القيم المشاهدة للمتغير العشوائي X.

2 - قد تكون قيمة $E(X)$ سالبة (كما في المثال الثاني) أو قيمة موجبة (كما في المثال الأول) أو قد يكون صفراً.

3 - يقع $E(X)$ بين أقل قيمة للمتغير العشوائي وأكبر قيمة له وذلك في جميع الأحوال.

§-6- التوقع الرياضي لدالة في المتغير العشوائي :

إذا كان $f(X)$ تابع وحيد القيمة في المتغير العشوائي X فإن التوقع الرياضي للتابع $f(X)$ يعرف كما يلي:

$$E[f(X)]=\sum_{i=1}^{n} X_i.P(X_i)$$

وهذه النتيجة هامة جداً حيث تعطي كيفية استنتاج التوقع الرياضي لأي تابع (وحيد القيمة) في المتغير العشوائي X أياً كان الشكل الرياضي لهذه الحالة.

مثـــال:

إذا كانت X متغيراً عشوائياً متقطعاً وكان $f(X)=X^2$ فإن:

$$E(f(X))=E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2.p(X)$$

وبالعودة للمثالين السابقين نجد في المثال الأول:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{4}{4}=1$
3	$\frac{1}{2}$	9	$\frac{9}{2}$
4	$\frac{1}{4}$	16	$\frac{16}{4}=4$
$\sum$	1		$\frac{38}{4}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2.p(X_i)=\frac{38}{4}$$

هذه القيمة تعبر عن توقع التابع ، بينما رأينا أن توقع المتغير كان /3/ وفي المثال الثاني:

X	$P(X)$	X^2	$X^2.P(X)$
-2	$\frac{1}{5}$	4	$\frac{4}{5}$
-1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{5}$
0	$\frac{1}{5}$	0	0
1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{5}$
$\sum$	1		$\frac{7}{5}$

إذن:

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n} X_i^2.p(X_i)=\frac{7}{5}$$

§-7- أهم خواص التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :

التوقع الرياضي للمتغير العشوائي عملية رياضية (كما يتضح من تعريف التوقع) وهذه العملية الرياضية تحقق مجموعة من الخواص من أهمها ما يلي:

1 - $E(C) = C$ ، حيث C ثابت، وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لأي ثابت هي هذا الثابت.

فمثلاً : $E(-5) = -5$, $E(2) = 2$ ... وهكذا.

2 - $E(CX) = C.E(X)$ وهذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لحاصل ضرب مقدار ثابت C في متغير عشوائي X تساوي حاصل ضرب الثابت في توقع المتغير العشوائي.

فمثلاً إذا أكان $E(X) = 7$ ، فإن:

$$E(2X) = 2.E(X) = 2(7) = 14$$

$$E(\frac{X}{3}) = \frac{1}{3}.E(X) = \frac{1}{3}.E(X) = \frac{1}{3}.7 = \frac{7}{3}$$ وهكذا ...

3 - إذا كان $X_1 + X_2$ متغيرين عشوائيين فإن:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$$

هذه الخاصية تعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (أو باقي طرح) متغيرين عشوائيين هو مجموع (باقي طرح) توقع كل منهما. فمثلاً إذا كان:

$$E(X_1) = 4 \quad , \quad E(X_2) = 6.2$$

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 4 + 6.2 = 10.2$$

$$E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 4 - 6.2 = -2.2$$

وهذه الخاصية يمكن تعميمها لأكثر من متغيرين عشوائيين حيث أنه إذا كان $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية فإن:

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

4 - $E(aX_1 + bX_2) = a.E(X_1) + bE(X_2)$

هذه الخاصية نتيجة للخاصتين رقمي (2)، (3) وتعني أن القيمة المتوقعة لمجموع (باقي طرح) حاصل ضرب متغير عشوائي في ثابت وحاصل ضرب متغير عشوائي آخر في ثابت آخر هو مجموع (باقي طرح) حاصل ضرب الثابت الأول في توقع المتغير العشوائي الأول وحاصل ضرب الثابت الثاني في توقع المتغير العشوائي الثاني.

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=3$ و $E(X_2)=-2$ فإن:

$$E(2.X_1+3.X_2)=2E(X_1)+3E(X_2)$$
$$=2(3)+3(-2)$$
$$=6-6=0$$

$$E(5.X_1-4.X_2)=5.E(X_1)-4E(X_2)$$
$$=5(3)-4(-2)$$
$$=15+8=23$$

5 - إذا كان X_1 ، X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)$$

فمثلاً إذا كان $E(X_1)=4$ و $E(X_2)=2$ وكان كل من X_1 و X_2 مستقلاً عن الآخر فإن:

$$E(X_1.X_2)=E(X_1).E(X_2)=4\times 2=8$$

ونلاحظ أن هذه الخاصة لا تتحقق بالضرورة إذا كان X_1 و X_2 غير مستقلين ومن ناحية أخرى فإنه يمكن تعميم هذه الخاصية لأكثر من متغيرين مستقلين وذلك على النحو التالي:

إذا كان لدينا المتغيرات العشوائية المستقلة $X_1, X_2, ..., X_n$ فإن:

$$E(X_1.X_2....X_n)=E(X_1).E(X_2)....E(X_n)$$