$$E_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\ ,\ E_{3,1}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E_3(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$$

$$E'_{1,3}(-2)=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ ,\ E'_{1,2}(4)=\begin{bmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2-26-1 خواص هامة:

بفرض لدينا $C = A\cdot B$ فإن:

1- إذا طبقنا على المصفوفة A أي تحويل أولي على صفوفها فإن المصفوفة C تخضع لنفس التحويل أيضاً.

2- إذا طبقنا على المصفوفة B أي تحويل أولي على أعمدتها فإن المصفوفة C تخضع لنفس التحويل أيضاً.

2-26-2 مبرهنة: إن تطبيق التحويلات الأساسية على أعمدة المصفوفة لا يغير من رتبتها كما في الصفوف.

2-26-3 نتائج:

1- المصفوفات الأولية جميعها نظامية (غير شاذة) محدداتها لا تساوي الصفر.

2- لا تتغير رتبة مصفوفة بتطبيق تحويلات أولية على صفوفها (وذلك بتطبيق المبرهنة السابقة على A^T مع ملاحظة $\rho(A)=\rho(A^T)$.

3- تكون $A\sim B$ (مصفوفتين متكافئتين) إذا كانت إحداهما تنتج عن الأخرى بتطبيق تحويلات أولية ويكون لهما رتبة واحدة.

4- ضرب مصفوفة (من اليمين أو اليسار) بمصفوفة أولية لا يغير من رتبتها.

مثال:

عين رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&-4&0&-4\\1&-1&-2&-2&-2\\1&-3&0&-4&0\\0&1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A \underset{\substack{R_{2,1}(-1)\\R_{3,1}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{R_{2,4}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_{3,2}(4)\\R_{4,2}(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن رتبة المصفوفة المكافئة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تساوي 2 وبالتالي $\rho(A) = 2$

2-27 تعريف المصفوفة المدرجة:

إن المصفوفة من الشكل :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (71-2)$$

حيث: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} \neq 0$ تسمى مصفوفة درجية أو مصفوفة مدرجة (أوشبه منحرفة) وللسهولة من الأفضل أن تكون العناصر $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk} = 1$.

للحصول على مصفوفة درجية (مدرجة) نجري عدداً من التحويلات الأولية للمصفوفة المعطاة على صفوفها (أو أعمدتها).

أمثلة:

1- المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

2- المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

3- المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة درجية.

ملاحظة(31): رتبة المصفوفة الدرجية تساوي عدد الصفوف غير الصفرية فيها.

ملاحظة(32): لأي مصفوفة A توجد على الأقل مصفوفة درجية مكافئة لها.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}0&2&-4\\-1&-4&5\\3&1&7\\0&5&-10\\2&3&0\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A\underset{\substack{-R_2\leftrightarrow R_1\\R_2\leftrightarrow R_5}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\2&3&0\\3&1&7\\0&5&-10\\0&2&-4\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\0&-5&10\\0&-11&22\\0&5&-10\\0&2&-4\end{bmatrix}\underset{\substack{-\frac{1}{5}R_2,\frac{1}{5}R_4\\-\frac{1}{11}R_3,\frac{1}{2}R_5}}{\sim}\begin{bmatrix}1&4&-5\\0&1&-2\\0&1&-2\\0&1&-2\\0&1&-2\end{bmatrix}\underset{\substack{R_3-R_2,R_4-R_3\\R_5-R_4,R_1-4R_2}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

إن $\rho(\tilde{A})=2$ وبالتالي $\rho(A)=2$ (يوجد مثلاً $\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$) أو حسب الملاحظة السابقة عدد الصفوف غير الصفرية في المصفوفة الدرجية يساوي 2.

2-28 إيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية (طريقة جوردان):

لإيجاد مقلوب مصفوفة بتطبيق التحويلات الأولية نتبع ما يلي:

١- نشكل المصفوفة التالية $[A\vdots I]$ حيث I المصفوفة الواحدية من نفس مرتبة A .

٢- نقوم بالتحويلات الأولية على صفوف (أعمدة) المصفوفة $[A\vdots I]$ لنحصل على مصفوفة من الشكل $[I\vdots B]$ عندئذٍ تكون المصفوفة $B=A^{-1}$ وبالتالي الحصول على A^{-1} (مقلوب المصفوفة A) نسمي هذه الطريقة – طريقة جوردان.

أمثلة:

1- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&-3&2\\2&-6&5\\3&-10&6\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

الحل:

$$[A\vdots I_3]=\begin{bmatrix}1&-3&2&\vdots&1&0&0\\2&-6&5&\vdots&0&1&0\\3&-10&6&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\underset{\substack{R_2-2R_1\\R_3-3R_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&-3&2&\vdots&1&0&0\\0&0&1&\vdots&-2&1&0\\0&-1&0&\vdots&-3&0&1\end{bmatrix}\underset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&-3&2&\vdots&1&0&0\\0&-1&0&\vdots&-3&0&1\\0&0&1&\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}\underset{R_1-3R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2&\vdots&10&0&-3\\0&-1&0&\vdots&-3&0&1\\0&0&1&\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}\underset{R_1-2R_3,-R_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&14&-2&-3\\0&1&0&\vdots&3&0&-1\\0&0&1&\vdots&-2&1&0\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}14&-2&-3\\3&0&-1\\-2&1&0\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$.

2- أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

وذلك بتطبيق التحويلات الأولية على صفوفها.

الحل:

$$[A\vdots I_3]=\begin{bmatrix}1&0&1&\vdots&1&0&0\\1&-1&1&\vdots&0&1&0\\1&1&-1&\vdots&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&\vdots&0&1/2&1/2\\0&1&0&\vdots&1&-1&0\\0&0&1&\vdots&1&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

أي أن :

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&1/2&1/2\\1&-1&0\\1&-1/2&-1/2\end{bmatrix}$$

للتحقق يمكن تطبيق ما يلي $A\cdot A^{-1}=I_3$.

2-29 خواص محدد جداء مصفوفتين (مبرهنات):

2-29-1 مبرهنة: لتكن لدينا A مصفوفة مربعة من المرتبة n و E مصفوفة أولية من نفس مرتبة A عندئذٍ:

$$\det(EA)=\det(E).\det(A)\qquad(72-2)$$

2-29-2 مبرهنـــة: جـداء مصـفوفات أوليـة هـو مصـفوفة نظاميـة ومحـدد الجـداء يسـاوي إلـى جـداء المحـددات لهـذه المصفوفات .

2-29-3 مبرهنـة: إذا كـان للمصـفوفتين A,B مرتبـة واحدة (m,n) ورتبـة واحدة r فإنـه يمكن إيجـاد مصـفوفة نظاميـة Pمن المرتبة (m,n) بحيث يكون: $B = P.A$

2-29-4 مبرهنة: كل مصفوفة مربعة نظامية من المرتبة n تساوي أيضاً جداء مصفوفات أولية من المرتبة n.

2-29-5 مبرهنة: محدد جداء مصفوفتين مربعتين يساوي جداء المحددين لهاتين المصفوفتين.

$$\det(AB) = \det A . \det B \qquad (73-2)$$

2-29-6 يمكن تعميم المبرهنة السابقة كما يلي:

محدد جداء مصفوفات مربعة يساوي جداء محدداتها أي :

$$\det \prod_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} \det A_i \qquad (74-2)$$

تذكرة بقواعد الاشتقاق للتوابع الشهيرة مع تمارين محلولة :

مسلسل	التابع	مشتق التابع
1	$y = c$	$y' = 0$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = u(x)$	$y' = u'$
4	$y = A\,u$	$y' = A\;u'$
5	$y = x^{n}$	$y' = n\,x^{n-1}$
6	$y = u^{n}$	$y' = n\,u^{n-1}.\,u'$
7	$y = u_1 + u_2 + u_3 + ...$	$y' = u_1' + u_2' + u_3' + ...$
8	$y = u\,.\,v$	$y' = u'.\,v + v'.\,u$
9	$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'.\,v - v'.\,u}{v^{2}}$
10	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
11	$y = \sin u$	$y' = \cos u\,.\,u'$
12	$y = \cos u$	$y' = -\sin u\,.u'$
13	$y = \tan x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
14	$y = \tan u$	$y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2 u\;.\,u'$
15	$y = \cot x$	$y' = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -\,\mathrm{cosec}^2 x$
16	$y = \cot u$	$y' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -\,\mathrm{cosec}^2 u\;.\,u'$
17	$y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$y' = \sec x\;.\,\tan x$
18	$y = \sec u = \dfrac{1}{\cos u}$	$y' = \sec u\;.\,\tan u\;.\,u'$
19	$y = \mathrm{cosec}\,x = \dfrac{1}{\sin x}$	$y' = -\,\mathrm{cosec}\,x\;.\,\cot x$
20	$y = \mathrm{cosec}\,u = \dfrac{1}{\sin u}$	$y' = -\,\mathrm{cosec}\,u\;.\,\cot u\;.\,u'$

21	$y = \sin^{-1} x = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
22	$y = \sin^{-1} u = \arcsin u$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} . u'$
23	$y = \cos^{-1} x = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
24	$y = \cos^{-1} u = arc \cos u$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} . u'$
25	$y = \tan^{-1} x = arc \tan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
26	$y = \tan^{-1} u = arc \tan u$	$y' = \dfrac{1}{1+u^2} . u'$
27	$y = \text{cotan}^{-1} x = arc \cot x$	$y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$
28	$y = \text{cotan}^{-1} u = arc \cot u$	$y' = \dfrac{-1}{1+u^2} . u'$
29	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
30	$y = \ln u$	$y' = \dfrac{u'}{u}$
31	$y = e^x$	$y' = e^x$
32	$y = e^{u(x)}$	$y' = e^{u(x)} . u'$
33	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} . \ln a . u'$
34	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} . u'$

وفيما يلي جدول يبين قوانين التفاضلات لبعض التوابع الشهيرة التي نستخدمها وهو :

م	التابع	تفاضل التابع
١	$y = c$	$dy = 0$
٢	$y = x$	$dy = dx$
٣	$y = u(x)$	$dy = u' dx$
٤	$y = A u$	$dy = A u' dx$
٥	$y = x^n$	$dy = n x^{n-1} dx$
٦	$y = u^n$	$dy = n u^{n-1} u' dx$
٧	$y = u_1 + u_2 + u_3 + ...$	$dy = u_1' dx + u_2' dx + u_3' dx + ...$
٨	$y = u.v$	$dy = u.dv + v.du$
٩	$y = \dfrac{u}{v}$	$dy = \dfrac{u.dv - v.du}{v^2}$

١٠	$y=\sin x$	$dy=\cos x\ dx$
١١	$y=\sin u$	$dy=\cos u\ .u'.dx$
١٢	$y=\cos u$	$dy=-\sin u\ .u'.dx$
١٣	$y=\tan x$	$dy=\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x\ dx$
١٤	$y=\tan u$	$dy=\dfrac{u'}{\cos^2 u}dx=\sec^2 u\ .u'.dx$
١٥	$y=\cotan x$	$dy=\dfrac{-1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{cosec}^2 x\ dx$
١٦	$y=\cotan u$	$dy=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}dx=-\operatorname{cosec}^2 u\ .u'.dx$
١٧	$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	$dy=\sec x\ .\ \tan x\ dx$
١٨	$y=\sec u=\dfrac{1}{\cos u}$	$dy=\sec u\ .\tan u.u'.dx$
١٩	$y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$	$dy=-\operatorname{cosec} x\ .\cotan x\ dx$
٢٠	$y=\operatorname{cosec} u=\dfrac{1}{\sin u}$	$dy=-\operatorname{cosec} u.\cotan u\ .u'dx$
٢١	$y=\sin^{-1}x=\arcsin x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
٢٢	$y=\sin^{-1}u=\arcsin u$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'\ dx$
٢٣	$y=\cos^{-1}x=\arccos x$	$dy=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
٢٤	$y=\cos^{-1}u=arc\cos u$	$dy=\dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u'\ dx$
٢٥	$y=\tan^{-1}x=\arctan x$	$dy=\dfrac{1}{1+x^2}dx$
٢٦	$y=\tan^{-1}u=\arctan u$	$dy=\dfrac{1}{1+u^2}.u'.dx$
٢٧	$y=\cot^{-1}x=arc\cot x$	$dy=\dfrac{-1}{1+x^2}dx$
٢٨	$y=\cot^{-1}u=arc\cot u$	$dy=\dfrac{-1}{1+u^2}u'.dx$
٢٩	$y=sh^{-1}x=\arg sh\ x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$
٣٠	$y=sh^{-1}u=\arg sh\ u$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}u'.dx$
٣١	$y=ch^{-1}x=\arg ch\ x$	$dy=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

٣٢	$y = ch^{-1}u = \arg ch u$	$dy = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} u'.dx$
٣٣	$y = th^{-1}x = \arg th\, x$	$dy = \dfrac{1}{1-x^2} dx$
٣٤	$y = th^{-1}u = \arg th\, u$	$dy = \dfrac{1}{1-u^2} u'.dx$
٣٥	$y = cth^{-1}x = \arg cth\, x$	$dy = \dfrac{-1}{x^2-1} dx$
٣٦	$y = cth^{-1}u = \arg cth\, u$	$dy = \dfrac{-1}{u^2-1} u'.dx$
٣٧	$y = sech^{-1}x$	$dy = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}} dx$
٣٨	$y = sech^{-1}u$	$dy = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}} u'.dx$
٣٩	$y = cosech^{-1}x$	$dy = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}} dx$
٤٠	$y = cosech^{-1}u$	$dy = \dfrac{1}{\lvert u\rvert\sqrt{u^2+1}} u'.dx$
٤١	$y = \ln u$	$dy = \dfrac{u'}{u} dx$
42	$y = e^x$	$y' = e^x .dx$
43	$y = e^u$	$y' = e^u .u'.dx$
44	$y = a^{u(x)}$	$y' = a^{u(x)} . \ln a . u' .dx$
45	$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} . u'.dx$

تمارين محلولة على المشتقات

أولا– احسب المشتق الأولى للتوابع الآتي:

$$1)\ y = 2^{\frac{1}{\cos x}} \quad ; \quad \cos x \neq 0 \ , \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ; \quad k = 0 , \pm 1 ,....$$

$$y' = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{0 . \cos x - 1 . (-\sin x)}{\cos^2 x} = 2^{\frac{1}{\cos x}} . \ln 2 . \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$2)\ y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad ; \quad a > 0 \quad , \quad x > 0$$

$$y' = x^{x^a}\left(a\, x^{a-1} .\ln x + x^a . \frac{1}{x}\right) + x^{a^x}\left(a^x . \ln a . \ln x + a^x . \frac{1}{x}\right) +$$

$$+ a^{x^x}\left[x^x\left(1 . \ln x + x . \frac{1}{x}\right). \ln a + x^x \frac{0}{\ln a}\right]$$

$$y' = x^{x^a}(a\, x^{a-1}.\ln x + x^{a-1}) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) +$$

$$+ a^{x^x}.x^x.(\ln x + 1).\ln a$$

$$y' = x^{x^a}.x^{a-1}.(a\ln x + 1) + x^{a^x}.a^x.(\ln a.\ln x + \frac{1}{x}) + a^{x^x}.x^x(\ln x + 1).\ln a.$$

3) $y = \dfrac{a^x.e^x}{1+\ell n a} = \dfrac{1}{1+\ln a}\, a^x.e^x \ ; a > 0 ,\ x \in (-\infty , \infty)$

$$y' = \frac{1}{1+\ln a}(a^x.\ln a.e^x + a^x.e^x) = \frac{a^x.e^x(1+\ln a)}{1+\ln a} = a^x.e^x$$

4) $y = \dfrac{a^x.b^x}{\ln(a\,b)} = \dfrac{1}{\ln a + \ln b}.a^x.b^x \ ; a,b > 0 ,\ x \in (-\infty , \infty)$

$$y' = \frac{1}{\ln a + \ln b}(a^x.\ln a.b^x + a^x.b^x.\ln b) =$$

$$= \frac{a^x.b^x.(\ln a + \ln b)}{\ln a + \ln b} = a^x.b^x$$

5) $y = (\cos x + 7x^2)^{\cos x}$

$$\ln|y| = \cos x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x.\ln\left|\cos x + 7x^2\right| + \cos x.\frac{-\sin x + 14x}{\cos x + 7x^2}$$

6) $y = x^2 e^x$

$$y' = x^2 e^x + 2x\, e^x = x\, e^x (x + 2)$$

7) $y = x^3 \arctan x$

$$y' = \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 \arctan x$$

8) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$

$$y' = \frac{x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2}.\arcsin x}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

9) $y = x\sqrt{x}\,(3\ln x - 2) \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln|x| - 2) \Rightarrow$

$$y' = x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{x} + \frac{3}{2x^2}(3\ln|x| - 2) = \frac{9}{2}\sqrt{x}\,\ln|x|$$

10) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} - \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$11)\quad y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]$$

$$12)\quad y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2 \left(1+x^2\right)}} \Rightarrow y' = \frac{2(1-x^2)}{\left|1-x^2\right| . \left(1+x^2\right)}$$

$$13)\quad y = arc\cos(\tan x) + \sin(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{(\tan x)'}{\sqrt{1+\tan^2 x}} + \cos(\sin 6x)(\sin 6x)' \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x \,.\, \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} + 6\cos 6x \ \cos(\sin 6x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{\cos x} + 6\cos 6x \,.\cos(\sin 6x) .$$

$$14)\quad y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} \Rightarrow$$

$$z' = \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$