وبما أن : $z' = (\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$ ، فإن :

$$y' = y\,z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}\cdot\left[\frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}\right]$$

15) $f(x) = \sqrt[3]{x+\sqrt{x-1}} = (x+\sqrt{x-1})^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x-1}\right)^{\frac{-2}{3}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$$

16) $y = (\arctan x)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = \sqrt{x}\,.\ln|\arctan x|$

وبالاشتقاق نجد أن : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \sqrt{x}\,.\,\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x} \Rightarrow$$

$$y' = (\arctan x)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln|\arctan x| + \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2).\arctan x}\right)$$

17) $y = x^{\ln|\ln x|} \Rightarrow \ln y = \ln|\ln x|\,.\,\ln x \Rightarrow$

نفرض أن : $u = \ln|x| \Rightarrow u' = \dfrac{1}{x}$

$$\ln|y| = \ln|u|\,.u \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'.\ln|u| + u\,.\frac{u'}{u}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = x^{\ln|\ln x|}\left[\frac{1}{x}\ln|\ln x| + \frac{1}{x}\right]$$

18) $y = \cos(\operatorname{ch} x)\quad ;\quad x \in (-\infty,\infty)$

$y' = -\sin(\operatorname{ch} x)\,.\,\operatorname{sh} x$

19) $y = \ln\left|\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right|$

طريقة أولى: نعلم أن : $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}\ ;\ 1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

نعوّض ونختصر فنحصل على : $y = \ln|\tan x| \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\tan\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

21) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow$

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + \left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)'}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1 + \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} = \frac{1 + \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1 + \dfrac{2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

22) $y = \arctan \sqrt{x}$

$$y' = \frac{(\sqrt{x})'}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + x} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 + x)}$$

23) $y = \arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)$

$$y' = \frac{\left(\dfrac{3x}{4}\right)'}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{3x}{4}\right)^2}} = \frac{\dfrac{3}{4}}{\sqrt{1 - \dfrac{9x^2}{16}}} = \frac{3}{\sqrt{16 - 9x^2}}$$

24) $y = \arccos\left(e^{3x}\right)$

$$y' = \frac{-\left(e^{3x}\right)'}{\sqrt{1 - \left(e^{3x}\right)^2}} = \frac{-e^{3x}}{\sqrt{1 - \left(e^{3x}\right)^2}}$$

25) $y = \operatorname{arc\,sec}(5x)$

$$y' = \frac{(5x)'}{|5x|\sqrt{(5x)^2 - 1}} = \frac{5}{|5x|\sqrt{25x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{5}{5|x|\sqrt{25x^2 - 1}} = \frac{1}{|x|\sqrt{25x^2 - 1}}$$

26) $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x} = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\frac{1}{4}}$

$$y' = \frac{1}{4}(1+\cos^2 x)^{\frac{-3}{4}} .2\cos x\ .\ (-\sin x) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{2}\frac{\sin x\ .\ \cos x}{\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} = -\frac{1}{2}.\frac{2\sin x\ .\ \cos x}{2\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$$

27) $y = 2\sin^3\sqrt{\frac{3}{x}}$

$$y' = 2\ .\ 3\ .\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\cos\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\ .\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\ x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$y' = -\ 3\sqrt{3}\ .\ \frac{\sin^2\sqrt{\frac{3}{x}}\ .\cos\sqrt{\frac{3}{x}}}{x\sqrt{x}}$$

28) $y = \frac{1}{2}\, arc\cot\frac{2}{x}$

$$y' = -\frac{1}{2}\ .\ \frac{1}{1+(\frac{2}{x})^2}\ .\ 2\ .(-\frac{1}{x^2}) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\frac{x^2+2}{x^2}}\ .\ \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2+2}$$

29) $y = \ln\frac{1-\ln|x|}{1+\ln|x|}$

$$y' = \frac{1+\ln|x|}{1-\ln|x|}\ .\ \frac{-\frac{1}{x}(1+\ln|x|)-(1-\ln|x|)\ .\ \frac{1}{x}}{(1+\ln|x|)^2} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{1}{x}\ \frac{1}{1-\ln x}\ \frac{1+\ln x+1-\ln x}{1+\ln x} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{2}{x(1-\ln^2|x|)}$$

30) $y = \ln\left|arc\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right|$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arc\cos}\frac{1}{\sqrt{x}}}\ (-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{x}})^2}}).(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}) \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\;.\;\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

31) $y = \arccos(th\,x) + sh(\sin 6x)$

$$y' = -\frac{(th\,x)'}{\sqrt{1-th^2x}} + ch(\sin 6x)(\sin 6x)' =$$

$$= -\frac{\frac{1}{ch^2x}}{\sqrt{\frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x}}} + 6\cos 6x\;.\;ch(\sin 6x) =$$

$$= -\frac{1}{ch\,x} + 6\cos 6x\;.\;ch(\sin 6x)$$

32) $y = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}}$

$$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\frac{|x|^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \Rightarrow$$

$$z = \ln\frac{\sqrt[3]{|x|^3(x^2+1)}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{5-x}}}$$

$$z = \ln|x| + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) - \frac{1}{15}\ln|5-x|$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار أنَّ $(ln\,|u|)' = \frac{u'}{u}$ نجد أن :

$$z' = \frac{1}{x} + \frac{2x}{3(x^2+1)} + \frac{1}{15(5-x)} =$$

$$= \frac{-24x^3 + 125x^2 - 14x + 75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

لكن $z' = (ln\,|y|)' = \frac{y'}{y}$

ومنه فإن :

$$y' = y.z' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x^2+1)}{\sqrt[5]{5-x}}} \cdot \frac{-24x^3+125x^2-14x+75}{15x(x^2+1)(5-x)}$$

$$33)\ y = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \quad ; \quad x \geq 0$$

$$y' = \frac{1}{4}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{4}}} \cdot \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)^3}} \cdot \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$34)\ y = 5x + \tan^3 x \quad ; \quad \cos x \neq 0 \ ; \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$y' = 5 + 3\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{5\cos^4 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$35)\ y = (2-x^2).\cos x + 2x.\sin x \quad ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y' = -2x\cos x + (2-x^2)(-\sin x) + 2\sin x + 2x.\cos x =$$

$$= -2x\cos x - 2\sin x + x^2\sin x + 2\sin x + 2x.\cos x = x^2\sin x$$

$$36)\ y = \cot\sqrt[5]{x^5+1} \quad ; \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2\sqrt[5]{x^5+1}} \cdot \frac{1}{5}(x^5+1)^{-\frac{4}{5}}.5x^4 =$$

$$= -\frac{x^4}{\sqrt[5]{(x^5+1)^4}\ .\sin^2.\sqrt[5]{x^5+1}}.$$

2-30 اشتقاق وتكامل المصفوفات:

2-30-1 اشتقاق المصفوفات: بفرض أن المصفوفة $A = \left[a_{ij}\right]$ من المرتبة n جميع عناصرها دوال في المتغير x.

إن مشتق المصفوفة A بالنسبة للمتغير x ويرمز له بالرمز $\frac{dA}{dx}$ هو مصفوفة لها نفس درجة المصفوفة الأصلية وعناصرها هي المشتقات بالنسبة للمتغير x لعناصر المصفوفة A أي:

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix}\frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dx}\\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dx}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{da_{n1}}{dx} & \frac{da_{n2}}{dx} & \cdots & \frac{da_{nn}}{dx}\end{bmatrix} \qquad (75-2)$$

مثال:

أوجد المشتق الأول والثاني للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} e^{2x} & \cos x\\ 1 & x^3\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\frac{dA}{dx}=\begin{bmatrix} 2e^{2x} & -\sin x\\ 0 & 3x^2\end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{d^2A}{dx^2}=\begin{bmatrix} 4e^{2x} & -\cos x\\ 0 & 6x\end{bmatrix}$$

2-30-2 مبرهنات:

1- مشتق مجموع مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A+B)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx}$$

2- مشتق جداء مصفوفتين:

$$\frac{d}{dx}(A\cdot B)=\frac{dA}{dx}B+A\frac{dB}{dx}$$

3- مشتق مقلوب مصفوفة:

$$\frac{d}{dx}(A^{-1})=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

لنبرهن صحة (3) :

بما أن:

$$A^{-1}.A=I$$

نأخذ مشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x فنجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}A+A^{-1}\frac{dA}{dx}=0$$

بضرب الطرفين من اليمين بـ A^{-1} :

$$\frac{dA^{-1}}{dx}+A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}=0$$

ومنه نجد:

$$\frac{dA^{-1}}{dx}=-A^{-1}\frac{dA}{dx}A^{-1}$$

-جدول التكاملات الأساسية:

1) $\int 1dx=x+c$

2) $\int x^{n}dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c;n\neq -1$

3) $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+c$

4) $\int \sin x dx=-\cos x+c$

5) $\int \cos x dx=\sin x+c$

6) $\int \frac{dx}{\cos^{2} x}=\tan x+c$

7) $\int \frac{dx}{\sin^{2} x}=-\cot x+c$

8) $\int \tan x dx=-\ln|\cos x|+c$

9) $\int \cot x dx=\ln|\sin x|+c$

10) $\int e^{x}dx=e^{x}+c$

11) $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+c$

12) $\int \frac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+c$

13) $\int \frac{dx}{1+x^{2}}=\arctan x+c$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+c$

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\arcsin\frac{x}{a}+c$

مثال (2): احسب التكامل: $\int (5x^3 - 3x^2 + 2x + 7)dx$

الحل: اعتمادا على الخاصتين الأولى والثانية، نكتب:

$$\begin{aligned}\int (5x^3 - 3x^2 + 2x + 7)dx &= \int 5x^3dx - \int 3x^2dx + \int 2xdx + \int 7dx \\ &= 5\int x^3dx - 3\int x^2dx + 2\int xdx + 7\int dx \\ &= \frac{5}{4}x^4 - x^3 + x^2 + 7x + c\end{aligned}$$

مثال (3): احسب التكامل $\int (3\cos x + 4e^{2x})dx =$.

الحل: $\int \left(3\cos x + 4e^{2x}\right)dx = 3\int \cos x dx + 4\int e^{2x}dx = 3\sin x + 2e^{2x} + c$

ملاحظة1: أن نتيجة كل تكامل غير محدد يعطي ثابتاً للتكامل، وحيث أن مجموع عدد من الثوابت الكيفية هو ثابت كيفي، لذا فقد كتبنا ثابتا واحداً c في النتيجة النهائية للتكامل.

مثال (4): احسب التكامل $\int (2 - x^2)^3 dx$.

الحل:

$$\begin{aligned}\int (2 - x^2)^3dx &= \int (8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6)dx \\ &= 8\int dx - 12\int x^2dx + 6\int x^4dx - \int x^6dx = 8x - 4x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + c\end{aligned}$$

مثال (5): احسب التكامل $\int \frac{dx}{x - a}$.

الحل: بتطبيق الخاصة الثالثة، نجد: $\int \frac{dx}{x - a} = \ln|x - a| + c$

مثال (6): احسب كل من التكاملين: $\int \sin ax \cdot dx \quad , \quad \int \cos ax \cdot dx$

الحل: $\int \sin ax \cdot dx = \frac{1}{a}\int \sin ax \cdot d(ax) = -\frac{1}{a}\cos ax + c \quad ; \quad a \neq 0$

$$\int \cos ax \cdot dx = \frac{1}{a}\int \cos ax \cdot d(ax) = \frac{1}{a}\sin ax + c \quad ; \quad a \neq 0$$

مثال (7): احسب التكاملين $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ و $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$:

الحل: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+c$$

مثال (8): احسب التكامل $\int \sin x \cos x \, dx$:

الحل: يمكن حساب هذا التكامل باستخدام دساتير التحويل المثلثية، ويكتب هذا التكامل بالشكل الآتي:

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{4}\int \sin 2x \, d(2x)$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

ويمكن حساب هذا التكامل **بطريقة ثالثة:**

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \sin x \, d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + c$$

وأيضا **بطريقة ثالثة:** $\int \sin x \cos x \, dx = -\int \cos x \, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

من الملاحظ أننا حصلنا على ثلاثة أجوبة مختلفة (ظاهراً) لتكامل واحد، وهي:

$-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ ، $\frac{1}{2}\sin^2 x + c$ ، $-\frac{1}{2}\cos^2 x + c$

إلا أنه يمكن بسهولة التأكد أن هذه الأجوبة تختلف عن بعضها بمقدار ثابت.

مثال (9): احسب التكامل $\int e^{-5x} \cdot dx$.

الحل: $$\int e^{-5x} \cdot dx = -\frac{1}{5}\int e^{-5x} \, d(-5x) = -\frac{1}{5}e^{-5x} + c$$

مثال (10): احسب التكامل $\int \frac{dx}{7x-2}$.

الحل: $\int \frac{dx}{7x-2}=\frac{1}{7}\int \frac{7dx}{7x-2}=\frac{1}{7}\ln|7x-2|+c$

مثال (11): احسب التكامل $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx$.

الحل: $\int \frac{3x^2-5x+1}{x+1}\cdot dx=\int\left(3x-8+\frac{9}{x+1}\right)dx=\frac{3}{2}x^2-8x+9\ln|x+1|+c$.

ملاحظة: بشكل عام، إذا كانت الدالة المستكملة كسرية، وفيها البسط هو مشتق للمقام فإن:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$$

مثال (12): احسب التكامل $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

الحل: $\int \operatorname{tg} x\, dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx=-\ln|\cos x|+c$

مثال (13): احسب التكامل $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx$.

الحل: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x^3+3x+1|+c$

2-30-3 تكامل المصفوفات:

بفرض أن المصفوفة $A=\left[a_{ij}\right]$ من المرتبة n جميع عناصرها دوال في المتغير x . إن تكامل المصفوفة A بالنسبة للمتغير x على المجال $[x_0,x]$ويرمز له بالرمز $\int_{x_0}^{x} Adx$ هو مصفوفة وعناصرها تنتج عن تكامل عناصر المصفوفة المفروضة على المجال $[x_0,x]$ ويكون لهذه العملية معنى إذا كان التكامل ممكناً لجميع عناصر المصفوفة.

$$\int_{x_0}^{x} A\,dx = \begin{bmatrix} \int_{x_0}^{x} a_{11}dx & \int_{x_0}^{x} a_{12}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{1n}dx \\ \int_{x_0}^{x} a_{21}dx & \int_{x_0}^{x} a_{22}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{2n}dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_0}^{x} a_{n1}dx & \int_{x_0}^{x} a_{n2}dx & \dots & \int_{x_0}^{x} a_{nn}dx \end{bmatrix} \quad (76-2)$$

مثال:

احسب التكامل $\int_{1}^{x} Adx$ إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & 3 \\ e^x & x+2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\int_{1}^{x} Adx = \begin{bmatrix} \int_{1}^{x} x^3dx & \int_{1}^{x} 3dx \\ \int_{1}^{x} e^xdx & \int_{1}^{x} (x+2)dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^4-1}{4} & 3(x-1) \\ e^x - e & \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

<u>تمارين محلولة</u>

1- إذا كانت المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد A^2, A^3.

الحل:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 0 \\ 8 & -1 & 8 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

2- احسب الجداء $A \cdot B$ وذلك بتجزئة كل منهما حيث: