الإثبات:

$$A=\begin{bmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda a_{11})(a_{22})-(\lambda a_{12})(a_{21})=\lambda(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda|A| \qquad (29-2)$$

حيث: $A=[a_{ij}]_{(2,2)}$.ويمكن البرهان على ذلك من أجل أي مرتبة n .

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=2\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=70=\begin{vmatrix}6 & 0 & 1\\ 8 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

5- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن مجموع جداءات عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) بالمتممات الجبرية لعناصر صف آخر (عمود آخر) يساوي الصفر.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=-5$$

إذا أخذنا جداءات عناصر الصف الأول بالمتممات الجبرية لعناصر الصف الثاني نجد:

$$2(-1)(3)+1(7)+1(-1)=0$$

6- إن :

$$|\lambda A|=\lambda^n|A| \qquad (30-2)$$

حيث n مرتبة المصفوفة A .

مثال:

$$\begin{vmatrix}6 & 0 & 2\\ 8 & 4 & -2\\ -2 & 6 & 2\end{vmatrix}=(2)^3\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 0 & 1\\ 4 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}_{=35}=280$$

7- لا تتغير قيمة محدد مصفوفة مربعة A من المرتبة n إذا أضفنا إلى عناصر أحد صفوفها العناصر المقابلة لها من صف آخر بعد ضربه بعدد ثابت.

مثال:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ (2)(1)+2 & (2)(0)+3 & (2)(1)+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

ملاحظة(20): يمكن حساب محدد من خلال طريقة تحويل جميع عناصر أحد الصفوف (أو الأعمدة) إلى أصفار ما عدا عنصراً واحداً منها(وذلك باستخدام الخاصة 7).

8- إذا كانت A مصفوفة مربعة من المرتبة n فإن محدد منقول مصفوفة يساوي محدد هذه المصفوفة.

$$\det A^T = \det A \text{ أو } \left|A^T\right| = |A| \qquad (31-2)$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إن:

$$|A| = 76 \quad , \quad \left|A^T\right| = 76 = |A|$$

9- محدد جداءات المصفوفات: لتكن A, B مصفوفتين مربعتين من المرتبة n فإن:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| \qquad (32-2)$$

وتعمم هذه الخاصة على عدد منتهٍ من المصفوفات:

$$|A_1 \cdot A_2,.., A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k| \qquad (33-2)$$

10- إذا كانت جميع عناصر الصف الذي رقمه k في مصفوفة A مربعة من المرتبة n عبارة عن مجموع حدين أي: $a_{kj} = a'_{kj} + a''_{kj}\,;\, j = 1,2,...,n$ فإن محدد هذه المصفوفة يكتب على شكل مجموع محددي مصفوفتين مربعتين A_1 و A_2 حيث عناصر الصف الذي رقمه k في A_1 هي الحدود a'_{kj} من العلاقة السابقة و عناصر الصف الذي رقمه k في A_2 هي الحدود الثانية من العلاقة السابقة a''_{kj} والصفوف الأخرى هي نفسها في المصفوفة A أي:

$$|A| = |A_1| + |A_2| \text{ أو } \det A = \det A_1 + \det A_2 \qquad (34-2)$$

مثال:

$$A=\begin{vmatrix}1&2\\6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\0+6&1+3\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}}_{=|A_1|}+\underbrace{\begin{vmatrix}1&2\\6&3\end{vmatrix}}_{=|A_2|}=-8$$

11- إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة فإن $\frac{d}{dt}|A|$ هو عبارة عن المجموع لـ n من المحددات التي يستبدل فيها كل صف على التوالي بتفاضل هذا الصف.

مثال:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x&2x\\e^x&\ln x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\e^x&\ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&2x\\e^x&\frac{1}{x}\end{vmatrix}=\ln x-2e^x+x\frac{1}{x}-2xe^x$$

ملاحظة(21): إذا كانت كل عناصر المحدد الواقعة على أحد جانبي قطره الرئيسي تساوي الصفر، فإن هذا المحدد يساوي حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسي.

أو يمكن القول بأن محدد مصفوفة قطرية من المرتبة n يساوي جداء عناصر قطرها الرئيسي(وهي حالة خاصة من المصفوفة المثلثية) .

الإثبات: لتكن A مصفوفة مثلثية على الشكل:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3n}\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&a_{23}&\dots&a_{2n}\\0&0&a_{33}&\dots&a_{3n}\\.&.&.&\dots&.\\0&0&0&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{nn}\times\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\.&.&\dots&.\\0&0&\dots&a_{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}$$

وذلك بالفك من الصف الأخير.

أيضاً بالفك من الصف الأخير نجد:

$$|A|=a_{nn}a_{(n-1)(n-1)}\times\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\.&.&\dots&.\\0&0&\dots&a_{(n-2)(n-2)}\end{vmatrix}$$

وبتوالي الفك من الصف الأخير نحصل على:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad (35-2)$$

ملاحظة(22): بنفس الطريقة بالنسبة للمصفوفة المثلثية السفلى فإن العملية تتم مع توالي الفك من الصف الأول دائماً.

2-15 محدد فاندرموند:

هو محدد من الشكل:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad (36-2)$$

يمكن إثبات أنه $\forall n$ فإن :

$$.d_n = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j) \qquad (37-2)$$

الإثبات: يمكن البرهان بطريقة الاستنتاج الرياضي ، عندما $n = 2$ فإن:

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 \qquad (38-2)$$

وهو محقق. لنفرض أن محدد فاندرموند محقق من أجل $(n-1)$ ولنبرهن من أجل n. من أجل ذلك نقوم بإجراء تحويلات على محدد فاندرموند:

نطرح الصف رقم $(n-1)$ بعد ضربه بـ a_1 من الصف الأخير رقم n ، ثم نطرح من الصف رقم $(n-1)$ الصف رقم $(n-2)$ مضروباً بـ a_1، وهكذا وبشكل مشابه ، وأخيراً طرح الصف الأول من الصف الثاني مضروباً بـ a_1 وبالتالي نحصل على المحدد:

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \dots & a_n^2 - a_1 a_n \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \qquad (39-2)$$

وبفك المحدد الأخير بواسطة العمود الأول نحصل على محدد من المرتبة $(n-1)$ مع إخراج العوامل المشتركة من جميع الأعمدة:

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1).\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ . & . & . & . & .\\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2}\end{vmatrix} \qquad (40-2)$$

إن المحدد الاخير من المرتبة $(n-1)$ وبالتالي من الفرض فإن هذا المحدد يساوي:

$$\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j) \qquad (41-2)$$

ومنه :

$$d_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)..(a_n-a_1)\prod_{2\le j<i\le n}(a_i-a_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) \qquad (42-2)$$

ملاحظة(23): بشكل مشابه فإن المحدد :

$$d'=\begin{vmatrix}a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1}\\ . & . & . & . & .\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2\\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1\end{vmatrix} \qquad (43-2)$$

يساوي إلى:

$$d'=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j) \qquad (44-2)$$

2-16 مشتق محدد: بفرض أن عناصر المصفوفة المربعة $A=\left[a_{ij}\right]$ دوال في المتغير x قابلة للاشتقاق أو التفاضل فيكون المشتق $\frac{d}{dx}|A|$ للمحدد $|A|$ بالنسبة للمتغير x يساوي مجموع n محدد تنتج من المحدد $|A|$ بأن نستعيض على التوالي عن عناصر صف (عمود) منه بمشتقات هذه العناصر بالنسبة للمتغير x.

مثال:

أوجد مشتق المحدد:

$$A=\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}$$

الحل:

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x & 1 & 0\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 0 & 2 & 3x^2\\ 0 & x & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x^2 & x+1 & 3\\ 1 & 2x-1 & x^3\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

2−17 طرق إيجاد مقلوب مصفوفة مربعة:

2−17−1 تعريف المصفوفة القابلة للقلب: نقول عن المصفوفة المربعة A من المرتبة n أنها قابلة للقلب (أي لها مقلوب) إذا وجدت مصفوفة مثل B تحقق الخاصة:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \qquad (45-2)$$

نسمي المصفوفة B مقلوب المصفوفة A ونرمز لهل بالرمز A^{-1} .

2−17−2 المقلوب عن طريق المصفوفة الملحقة (المرافقة): نوجد المصفوفة الملحقة "المرافقة" للمصفوفة A ونرمز لها بالرمز $adjA$ وهي عبارة عن منقول المصفوفة التي عناصرها العوامل المرافقة لعناصر المصفوفة A وهي عبارة عن:

$$adjA = [D_{ij}]^T = [D_{ji}] \qquad (46-2)$$

حيث D_{ij} العامل المرافق للعنصر a_{ij} ، ثم نحسب $\det A$ والذي هو $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_{ij}$

بشرط A مصفوفة نظامية (غير شاذة) أي $|A| \neq 0$.

وأخيراً يكون:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \qquad (47-2)$$

مثال:

احسب $adjA$ حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل:

نحسب أولاً العوامل المرافقة $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ ثم $[D_{ij}]^T$

$$adjA = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 4 & -3 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & -32 & 5 \end{bmatrix}$$

2-17-3 مبرهنة: إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة فإن:

$$A\cdot adjA = adjA\cdot A = \det A\cdot I_n \qquad (48-2)$$

ملاحظة(24): من المبرهنة السابقة نضرب طرفي العلاقة بـ $(\det A)^{-1}$ فنجد:

$$A\cdot[(\det A)^{-1}adjA]=[(\det A)^{-1}adjA]\cdot A = I_n \qquad (49-2)$$

ومنه نستنتج أن $(\det A)^{-1}adjA$ هو نظير المصفوفة A بالنسبة للضرب .

إذن:

$$A^{-1}=(\det A)^{-1}adjA \qquad (50-2)$$

مثال:

أوجد A^{-1} للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

الحل:

المصفوفة A نظامية (غير شاذة) لأن:

$$\det A=\det\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{bmatrix}=-38\neq 0$$

وللمصفوفة مقلوب ويساوي $\frac{adjA}{|A|}$ (في المثال السابق أوجدنا $adjA$) وبالتالي:

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=-\frac{1}{38}\begin{bmatrix}-7 & 4 & -3\\ 1 & -6 & -5\\ -1 & -32 & 5\end{bmatrix}$$

ملاحظة(25): إذا كان $\det A=0$ فالمصفوفة تسمى شاذة (فريدة) وليس لها مقلوب.

2-17-4 المقلوب بطريقة الارتكاز: في هذه الطريقة تمد المصفوفة $A=[a_{ij}]$ بالمصفوفة الواحدية I على الشكل $[A\,\vdots\, I]$ ثم يتم الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $[A\,\vdots\, I]$ على الشكل $[I\,\vdots\, B]$ فتكون المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A .

مثال:

أوجد مقلوب المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}5&4&0\\0&3&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}5&4&0&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

1- نأخذ الصف الأول من المصفوفة $[A\vdots I]$ كصف ارتكاز والعنصر الأول من هذا الصف كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}5&4&0&1&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

2- نأخذ الصف الثاني من المصفوفة الناتجة كصف ارتكاز والعنصر الثاني منه كعنصر ارتكاز ثم نقسم صف الارتكاز على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A\vdots I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&3&2&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

3- نضرب صف الارتكاز الثاني بـ (-1) ونضيفه إلى الصف الثالث، كذلك نضرب صف الارتكاز الثاني بـ $(-\frac{4}{5})$ ونضيفه للصف الأول فنجد:

$$[A\vdots I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}&0&0\\0&1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{-8}{15}&\frac{1}{5}&\frac{-4}{15}&0\\0&1&\frac{2}{3}&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&\frac{-2}{3}&0&\frac{-1}{3}&1\end{array}\right]$$

4- بأخذ الصف الثالث كصف ارتكاز والعنصر الثالث منه كعنصر ارتكاز وقسمة الصف على عنصر الارتكاز نجد:

$$[A \vdots I] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} & | & 0 & \frac{-1}{3} & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix}$$

5- نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(\frac{8}{15})$ ونضيفه إلى الصف الأول وأيضاً نضرب صف الارتكاز الثالث بـ $(-\frac{2}{3})$ ونضيفه للصف الثاني نجد:

$$[A \vdots I] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-8}{15} & | & \frac{1}{5} & \frac{-4}{15} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & | & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{5} & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{bmatrix} = [I \vdots A^{-1}]$$

ومنه يكون:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

2-17-5 مبرهنة "كيلي-هاملتون" :

كل مصفوفة مربعة نظامية مثل $A = [a_{ij}]_n$ تحقق معادلتها المميزة: $|A - \lambda I| = 0$.

حيث إن المعادلة المميزة ممثلة بكثيرة حدود بالنسبة لـ λ بالشكل التالي:

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \qquad (51-2)$$

تحقق معادلتها المميزة الممثلة بكثير حدود مصفوفة:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \qquad (52-2)$$

2-17-6 إيجاد مقلوب مصفوفة باستخدام مبرهنة "كيلي هاملتون":

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n والتي معادلتها المميزة :

$$f(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \qquad (53-2)$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون فإن المصفوفة A تحقق معادلتها المميزة:

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0 \qquad (54-2)$$

نضرب طرفي المعادلة (31) بـ A^{-1} نجد:

$$a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0 \qquad (55-2)$$

وبالتالي:

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_n A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \ldots + a_1 I\right) \qquad (56-2)$$

من خلال هذه العلاقة يمكن إيجاد المقلوب A^{-1} بدلالة قوى المصفوفة A علماً أن أكبر قوة لـ A هي $(n-1)$ ويتم حساب الأمثال $a_0, a_1, \ldots, a_n$ من المعادلة المميزة.

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -5 & 6 & 5 \\ -5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:

1- أثبت أن A تحقق المعادلة: $A^3 - 8A^2 + 13A - 6I = 0$.

2- أوجد A^{-1}

الحل:

1- نوجد المعادلة المميزة:

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 & 5 \\ -5 & 6-\lambda & 5 \\ -5 & 5 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = 0$$

وحسب مبرهنة كيلي هاملتون يكون لدينا:

$$-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$$

2- لإيجاد A^{-1} نضرب طرفي المعادلة $-A^3 + 8A^2 - 13A + 6.I = 0$ بـ (A^{-1}) نجد:

$$A^2 - 8A + 13.I - 6.A^{-1} = 0$$

ومنه:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A^2 - 8A + 13I\right)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\left\{\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}+13\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right\}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}-4&5&5\\-5&6&5\\-5&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-34&35&35\\-35&36&35\\-35&35&36\end{bmatrix}$$

وبالتالي:

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}11&-5&-5\\5&1&-5\\5&-5&1\end{bmatrix}$$

2-17-7 تعريف المصفوفة العمودية (المتعامدة): إذا كان $A^T=A^{-1}$ أي منقولها يساوي مقلوبها

وبالتالي:

$$.A^T\cdot A=A\cdot A^T=I_n \qquad (57-2)$$

ملاحظة(26): منقول مصفوفة عمودية هو أيضاً مصفوفة عمودية.

مثال: المصفوفة المعرفة بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-\sqrt{3}}{2}&0\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

هي مصفوفة عمودية (متعامدة).

ملاحظة(27):

1) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة قطرية فإن: $A^{-1}=\left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$ قطرية أيضاً بشرط $a_{ii}\neq 0;\forall i$.

2) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مثلثية عليا (سفلى) فإن: A^{-1} أيضاً تكون أيضاً مثلثية عليا (سفلى).

3) إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإن A^{-1} تكون أيضاً متناظرة.

لنثبت صحة (3) :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة متناظرة فإنها تحقق $A=A^T$ وبأخذ مقلوب الطرفين نجد:

$A^{-1}=(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ وهذا يعني أن A^{-1} مصفوفة متناظرة.

2-18 خواص المقلوب:

1) المقلوب إن وجد فهو وحيد ويحقق العلاقة: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I_n$ (تم إثبات ذلك)

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$ (مقلوب جداء مصفوفتين مربعتين نظاميتين يساوي جداء مقلوبي هاتين المصفوفتين بترتيب معاكس).ويمكن تعميم هذه الخاصة على مقلوب جداء عدة مصفوفات مربعة نظامية من المرتبة نفسها يساوي جداء مقلوباتها بترتيب معاكس.

3) إذا أخذنا منقول الطرفين في الخاصة (1) مع الاستفادة من الخاصة (2) نجد:

$$(A^{-1})^T\cdot A^T=A^T\cdot(A^{-1})^T=I_n\Rightarrow(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T\qquad(58-2)$$

أي إن مقلوب منقول المصفوفة المربعة النظامية A يساوي منقول مقلوبها.

4) من الخاصة (1) نجد أن:

$$\det A\cdot\det A^{-1}=1\Rightarrow\det A^{-1}=\left[\det A\right]^{-1}\qquad(59-2)$$

محدود مقلوب المصفوفة يساوي مقلوب محدد المصفوفة الأصلية.

5) من الخاصة (1) نجد:

$$(A^{-1})^{-1}=A\qquad(60-2)$$

ملاحظة(28): لإيجاد مقلوب مصفوفة من المرتبة الثانية أي من الشكل (2×2) ونظامية (أي محددها لا يساوي الصفر) ، فإننا نبدل العنصرين الموجودين على القطر الرئيسي فيما بينهما ، ونبدل إشارة العنصرين الموجودين على القطر الثانوي ونضرب المصفوفة الناتجة بمقلوب محدد المصفوفة $A=[a_{ij}]$ ،حيث $|A|\neq 0$.

2-19 حل جملة معادلات خطية فيها $(m=n)$ باستخدام مقلوب مصفوفة:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right\}\qquad(61-2)$$

تكتب هذه الجملة بالشكل التالي :

$$A\cdot X=B\qquad(62-2)$$