أو:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (63-2)$$

فإذا كانت المصفوفة A نظامية (أي لها مقلوب) نجد:

$$X = A^{-1}\cdot B \qquad (64-2)$$

مثال:

حل جملة المعادلات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

الحل:

لدينا:

مصفوفة المعاملات: $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتحولات: $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت: $B=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

إن محدد المصفوفة A هو $|A|=-3$

ويكون لدينا :

$$X = A^{-1}\cdot B=\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

أي أن:

$$x_1 = 1, x_2 = -3, x_3 = -5$$

هو حل للجملة المعطاة.

ملاحظة(29): لإيجاد حل الجملة (2−63) يجب حساب A^{-1} ومن ثم إجراء الجداء $A^{-1}\cdot B$.

2−20 حل جملة معادلات خطية فيها $(m=n)$ باستخدام قاعدة كرامر:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية (2−63)والتي حلها كما رأينا سابقاً هو: $X=A^{-1}\cdot B$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{bmatrix}=(\det A)^{-1}.\begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & .... & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & .... & D_{n2} \\ .... & .... & .... & .... \\ D_{1n} & D_{2n} & .... & D_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{bmatrix}$$

بإجراء الضرب نجد:

$$x_i=(\det A)^{-1}\cdot\left[b_1D_{1i}+b_2D_{2i}+...+b_nD_{ni}\right] \quad (65-2)$$

إن المقدار $\left[b_1D_{1i}+b_2D_{2i}+...+b_nD_{ni}\right]$ هو المنشور للمحدد الناتج عن محدد المصفوفة A بعد استبدال عموده i بالعمود B ولنرمز له بـ $\det A_i$ وبذلك يكون لدينا:

$$x_i=(\det A)^{-1}\cdot\det A_i\,;i=1,2,..,n \quad (66-2)$$

مثال:

استخدم قاعدة كرامر في حل جملة المعادلات (الواردة في المثال السابق).

الحل:

$$\det A_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-3\Rightarrow x_1=\frac{\det A_1}{\det A}=\frac{-3}{-3}=1$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9\Rightarrow x_2=\frac{\det A_2}{\det A}=\frac{9}{-3}=-3$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=15\Rightarrow x_3=\frac{\det A_3}{\det A}=\frac{15}{-3}=-5$$

2-21 قوى مصفوفة:

2-21-1 تعاريف:

1) إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن:

$$A^n = A \cdot A \cdot A ... A(\text{ مرة } n);n \in N \qquad (67-2)$$

هي مصفوفة A مرفوعة للأس n . (المصفوفة $A^0 = 1$ هي المصفوفة الواحدية).

2) تسمى المصفوفة المربعة A خاملة أو متساوية القوى: إذا كان $A^2 = A$ وتكون معدومة القوى إذا كان $A^n = 0;(n > 0)$ وتسمى n مرتبة الانعدام و 0 هي المصفوفة الصفرية.

3) المصفوفة المربعة A من المرتبة n تسمى دورية: إذا وجد عدد طبيعي $(0 < a)$ ، بحيث $A^a = I_n$ وإن أصغر عدد طبيعي موجب يحقق هذا الشرط يسمى دور المصفوفة A .

2-21-2 خواص قوى مصفوفة: إذا كانت A مصفوفة مربعة و α, β عددين صحيحين غير سالبين فإن الخواص التالية صحيحة:

1) $A^\alpha \cdot A^\beta = A^{\alpha+\beta}$

2) $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha \cdot \beta}$

3-21-2 تعريف القوى الصحيحة السالبة لمصفوفة مربعة: كما يلي: $(A^{-1})^2 = A^{-1}.A^{-1}$

$$A^{-3} = A^{-1}.A^{-2}$$
$$A^{-n} = A^{-1}.A^{-(n-1)}$$

وبالتالي نستنتج:

$$A^{-m}.A^{-n} = A^{-(m+n)}$$
$$(A^{-m})^n = A^{-mn}$$

أمثلة:

1-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خاملة لأن:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

-2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

معدومة ومرتبة انعدامها الثالثة وذلك لأن:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

-3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

دورية ودورها $a = 4$ لأن:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

2-22 كثيرة حدود مصفوفة:

بفرض A مصفوفة مربعة من المرتبة n ولتكن $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n ; (a_0, a_1, ..., a_n \text{ معاملات})$$

إن التركيب :

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_n A^n \qquad (68-2)$$

يسمى كثيرة حدود بـ A ويرمز له بالرمز $f(A)$ و I مصفوفة واحدية من مرتبة المصفوفة A

و $f(A)$ من المرتبة n نفسها ، وإذا كان $f(A) = 0$ نقول عن A إنها جذر $f(x)$.

مثال:

لتكن كثيرة الحدود:

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

والمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

والمطلوب: إيجاد $f(A)$.

الحل:

$$f(A)=A^2+2A-3I_2$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ -7 & 11\end{bmatrix}$$

2-23 أثر مصفوفة مربعة:

بفرض A مصفوفة مربعة من الدرجة n . إن مجموع عناصر القطر الرئيسي في $A=[a_{ij}]_n$

يسمى أثر المصفوفة A ونرمز له بالرمز $tr(A)$ أي أن:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii} \qquad (69-2)$$

مثال:

إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

أوجد $tr(A)$.

الحل:

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}=3+3=6$$

2-24 التكافؤ والتحويلات الأولية:

كما ذكرنا سابقاً إن الحصول على مصفوفة مكافئة لمصفوفة A على حقل K يتم بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية متتابعة على المصفوفة A تسمى عمليات الصفوف البسيطة (الأعمدة البسيطة) ويمكن تلخيصها كما يلي:

1- ضرب أحد الصفوف (الأعمدة) بعدد $0\neq\lambda\in K$

2- جمع أحد الصفوف (الأعمدة) إلى صف (عمود) آخر بعد ضربه بعدد $0\neq\lambda\in K$

3- المبادلة بين صفين (عمودين) في المصفوفة

هذه العمليات تلعب دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وبعض التطبيقات الأخرى مثل درجة ومقلوب مصفوفة.

2-24-1 تعريف المصفوفات المتكافئة: نقول عن مصفوفتين A و B إنهما متكافئتان ونرمز لها بالرمز $A \sim B$، إذا أمكن الحصول على إحداهما من الأخرى بإجراء عدة عمليات (تحويلات) أولية متتابعة (إما على الصفوف أو على الأعمدة).

أمثلة:

1- لتكن لدينا المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

إذا أجرينا التحويلات على الصفوف نجد:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_{21}(-2)}{\overset{R_{31}(1)}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\underset{R_2(1/5)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -3/5\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\underset{R_{32}(-5)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 17/5\\ 0 & 0 & 1 & -3/5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

2- المصفوفة الواردة في المثال السابق إذا أجرينا عليها التحويلات المتتالية:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_{21}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_{31}(1)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\underset{R_{32}(-1)}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=B$$

2-25 رتبة (درجة) المصفوفة:

2-25-1 تعريف: نعرف رتبة (درجة) المصفوفة بأنها عدد المتجهات المستقلة خطياً في المصفوفة وبالتالي إذا كانت المصفوفة $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ وكانت $\rho(A)$ رتبة هذه المصفوفة فإن:

$$\rho(A)\le n\le m \quad \text{أو} \quad \rho(A)\le m\le n \qquad (70-2)$$

أي يوجد ρ من المتجهات المستقلة خطياً (في الصفوف أو الأعمدة) وهذا يؤدي إلى وجود $(n-\rho)$ أو $(m-\rho)$ من المتجهات المرتبطة خطياً.

2-25-2 نتائج هامة:

1) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ فإن $\rho(A)\le\rho(m,n)$.

2) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مربعة ونظامية فإن $\rho(A)=n$.

3) $\rho(A)=\rho(A^T)$ (A^Tمنقول المصفوفة A).

4) $\rho(I_n)=n$ (I_nالمصفوفة الواحدية من المرتبة n).

5) إذا كانت: $A=[a_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة قطرية وكانت $a_{ii}\neq 0;\forall i$ فإن $\rho(A)=n$.

6) إذا كانت: $U=[u_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية عليا وكانت $u_{ii}\neq 0;\forall i$ فإن $\rho(U)=n$.

7) إذا كانت: $L=[l_{ij}]_{(n,n)}$ مصفوفة مثلثية سفلى وكانت $l_{ii}\neq 0;\forall i$ فإن $\rho(L)=n$.

2-25-3 خواص هامة:

1) $\rho(A+B)\le\rho(A)+\rho(B)$.

2) $\rho(AB)\le\min\{\rho(A),\rho(B)\}$.

3) $\rho(\lambda A)=\rho(A);(0\neq\lambda\in K)$.

4) $\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$.

5) إذا كانت Aمصفوفة نظامية (غير شاذة) فإن $\rho(AB)=\rho(B)$.

6) $\rho(A^TA)=\rho(A)$.

7) إذا كانت $A=[a_{ij}]_{(m,n)}$ و $B=[b_{ij}]_{(n,p)}$ وكان $AB=0$ فإن: $\rho(A)+\rho(B)\le n$ (حيث n هي عدد صفوف المصفوفة B).

لنثبت صحة الخاصة (4):

$$\rho(A)=\rho(A-B+B)\le\rho(A-B)+\rho(B)\Rightarrow\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$$

2-25-4 رتبة (درجة) مصفوفة باستخدام الصغائر:

صغير مصفوفة: هو محدد أي مصفوفة مربعة جزئية من هذه المصفوفة.

فمثلاً إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&0&3\\2&1&2\end{bmatrix}$$

فإن:

$$\det\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}=-4\ ,\ \det\begin{bmatrix}1&-1\\2&3\end{bmatrix}=5\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}=6$$

$$\det\begin{bmatrix}2&0\\2&1\end{bmatrix}=2\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&3\\2&2\end{bmatrix}=-2\ ,\ \det\begin{bmatrix}0&3\\1&2\end{bmatrix}=-3$$

$$\det\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}=-3\ ,\ \det\begin{bmatrix}1&-1\\2&2\end{bmatrix}=4\ ,\ \det\begin{bmatrix}2&-1\\1&2\end{bmatrix}=5$$

تشكل الصغائر التسعة ذات المرتبة 2×2 للمصفوفة A.

وبشكل عام: فإن المصفوفة المربعة من المرتبة n يكون لها n^2 من الصغائر ذات المرتبة $(n-1)$ ونحصل على هذه الصغائر من حذف الصف i والعمود j اللذين يحويان العنصر a_{ij} من المصفوفة A ويرمز له بالرمز Δ_{ij}.

رتبة مصفوفة : هي مرتبة أكبر صغير من هذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

إن الرتبة r لمصفوفة هي العدد الطبيعي الذي يحقق ما يلي:

1- يوجد صغير واحد على الأقل من المرتبة (r) لهذه المصفوفة لا يساوي الصفر.

2- كل صغير من المرتبة $(r+1)$ يساوي الصفر.

ومنه يمكن أن نلاحظ بأن كل صغير في هذه المصفوفة من المرتبة $r+2$ يساوي الصفر وكل صغير من المرتبة $r+3,r+4,...$ يساوي الصفر أيضاً.

نرمز لرتبة مصفوفة A بأحد الرموز : $rank(A)=r$ ، $\rho(A)=r$.

مثال:

أوجد رتبة كل من المصفوفتين:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ -3 & 3 & 2\\ -7 & 7 & -21\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 3 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 8 & 7\end{bmatrix}$$

الحل:

بالنسبة للمصفوفة A نلاحظ أن: $\det(A)=0$ ومن ثم فإن $\rho(A)<3$.

بأخذ كل المحددات من المرتبة 2×2 الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(A)=2$.

وبالنسبة للمصفوفة B بأخذ كل المحددات الجزئية من المرتبة 3×3 الممكنة وعددها أربعة نجد أن جميعها أصفاراً ، وبالتالي $\rho(B)<3$.

بأخذ كل المحددات من المرتبة 2×2 الممكنة نجد أن هناك على الأقل واحداً منها لا يساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(B)=2$.

2-25-5 رتبة مصفوفة باستخدام التحويلات الأولية:

سنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الصف):

$R_i(\lambda)$ ضرب أحد الصفوف i بعدد $\lambda\neq 0$.

$R_{i,j}(\lambda)$ جمع أحد الصفوف إلى صف آخر بعد ضربه بعدد $\lambda\neq 0$.

$R_{i,j}$ المبادلة بين صفين في المصفوفة.

وسنرمز بالرموز التالية للدلالة على هذه التحويلات (عمليات الأعمدة):

$C_i(\lambda)$ ، $C_{i,j}(\lambda)$ ، $C_{i,j}$ على الترتيب مع عمليات الصف.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_{1,2}(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\underset{R_1+R_3}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\underset{R_{2,3}(-1)}{\sim}$$

إن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A} = B$$

نلاحظ أن: $rank(\tilde{A}) = 2$ وبالتالي $rank(A) = 2$ (التحويلات الأولية على مصفوفة لا تغير من رتبتها).

ملاحظة(30):

1- إن إضافة متجه صفري لا يغير من رتبة المصفوفة.

2- إن المصفوفة التي حصلنا عليها في المثال السابق تسمى بالمصفوفة الدرجية أو السلمية (كما سيأتي لاحقاً) ، ويمكن معرفة رتبتها من خلال شكلها ويمكن تحويل أي مصفوفة إلى الشكل الدرجي (أو السلمي) إذا اتبعنا القواعد كما في المثال السابق للوصول إلى الشكل الدرجي (أو السلمي).

3- إذا كانت A مصفوفة مستطيلة فإنه يوجد مصفوفة درجية B مكافئة للمصفوفة A بحيث يكون $\rho(A)$ مساوٍ لعدد الصفوف غير الصفرية للمصفوفة B.

2-25-6 رتبة مصفوفة باستخدام التعريف:

يمكن الحصول على رتبة مصفوفة وذلك بحل المعادلة الأساسية $\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \alpha_i x_i = 0$ حيث $\{x_i\}$ هي صفوف (أو أعمدة) المصفوفة A ، ومن خلال الحل يمكن معرفة عدد المتجهات المستقلة في

هذه المجموعة وتكون الرتبة مساوية لهذا العدد.

مثال:

أوجد رتبة المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

الحل:

إن مرتبة A هي 4×3 وبالتالي فإن $\rho(A) \le 3$ نقوم بحل جملة المعادلات:

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\2\\-3\\4\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow \alpha_1=2,\alpha_2=-1,\alpha_3=3$$

وهذا يعني أن $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ليست جميعها أصفاراً وتحقق المعادلة السابقة.

ومنه فالمتجهات مرتبطة أي أن $\rho(A)\neq 3$.

أما إذا أخذنا المتجه:

$$\begin{bmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{bmatrix}$$

لا يرتبط مع المتجه:

$$\begin{bmatrix}3\\-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

وبالتالي $\rho(A)=2$

2-26 المصفوفات الأولية:

المصفوفة الأولية هي المصفوفة الناتجة عن تطبيق التحويلات الأولية على المصفوفة الواحدية I_n وسنستخدم الرموز الموافقة كما ذكرنا سابقاً عن التحويلات الأولية أي أن الرمز $E_{i,j}$ تبديل الصفين (أو العمودين) i,j في المصفوفة الواحدية ، أيضاً $E_i(\lambda)$ ضرب عناصر الصف (أو العمود) i بـ λ والرمز $E'_{i,j}(\lambda)$ يعني أن المصفوفة نتجت عن المصفوفة I_n بعد ضرب الصف (أو العمود) j بـ λ وجمعه إلى الصف (أو العمود) i .

مثال:

لتكن لدينا المصفوفة الواحدية :

$$I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

إن:

$$E_{1,3}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ E_{1,2}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ E_2(-3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$